

Projet Algorithme de Boruvka

El Berkaoui Mouhcine
Amcassou Selma

Juin 2020

1 Introduction

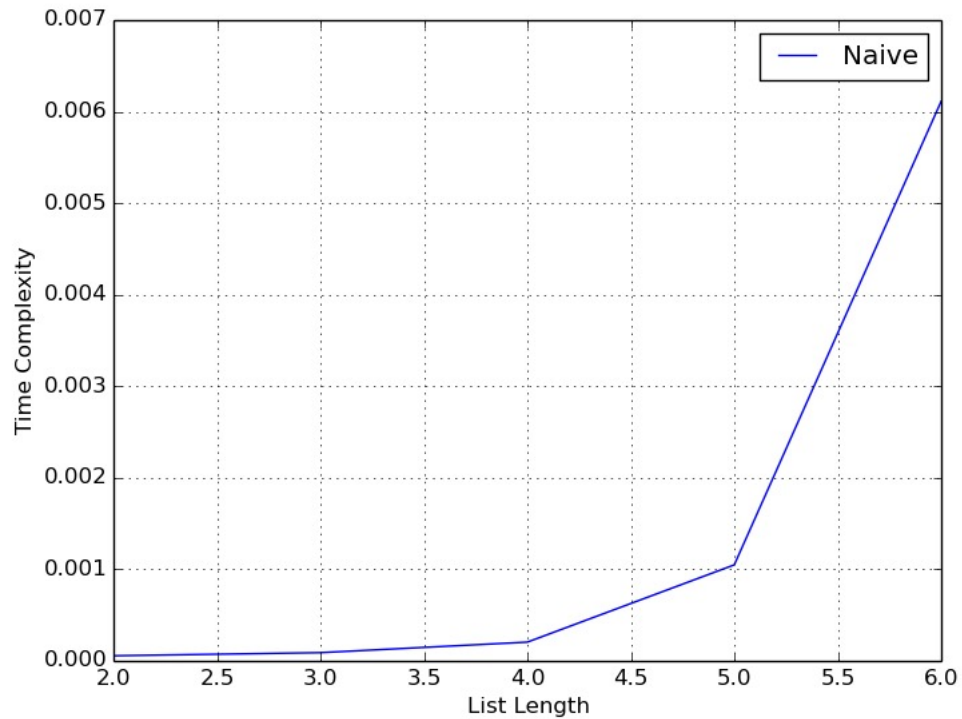
Un arbre de recouvrement minimal est un sous-graphe du graphe d'origine contenant tous ses sommets et ayant un poids total des arêtes minimal.

Le scientifique tchèque Otakar Borůvka a mis au point en 1926 le premier algorithme connu pour trouver un arbre d'une portée minimale, c'est l'algorithme de Borůvka. Deux autres algorithmes sont couramment utilisés aujourd'hui. L'un d'eux a été développé par Vojtěch Jarník en 1930, et mis en pratique par Robert Clay Prim en 1957. Edsger Wybe Dijkstra l'a redécouvert en 1959, et l'a appelé l'algorithme de Prim. L'autre algorithme est appelé algorithme de Kruskal, et a réalisé par Joseph Kruskal en 1956. Les trois algorithmes sont des algorithmes gloutons et fonctionnent en temps polynomial.

2 Solution naïve

Afin de régler ce problème, une solution s'avère possible. C'est celle qui consiste à trouver tous les arbres de recouvrement possibles d'un graphe et puis de choisir celui qui a le plus petit poids. Effectivement, cette solution marche, mais elle est trop lente.

On a essayé d'implémenter cet algorithme mais on a trouvé des problèmes qu'on a pas pu régler. Pourtant, on a essayé de trouver un algorithme qui nous donne un graphe de complexité approximatif que celui qu'on aurait trouvé en implémentant notre solution naïve.



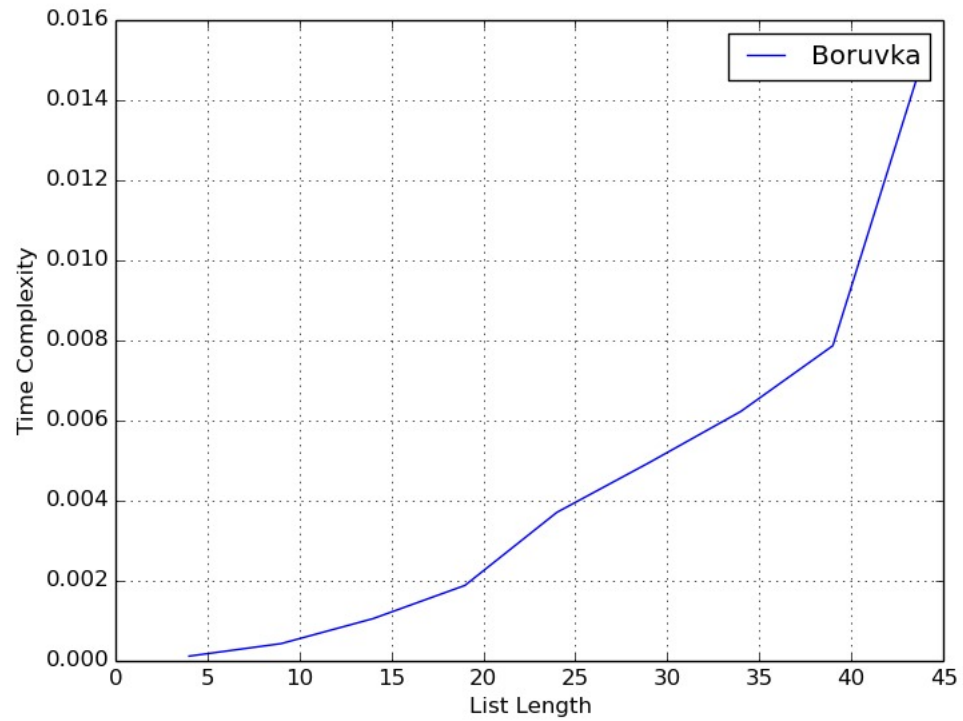
Le graphe ci-dessus confirme le fait que cette solution est d'une complexité élevée.

3 Algorithme de Boruvka

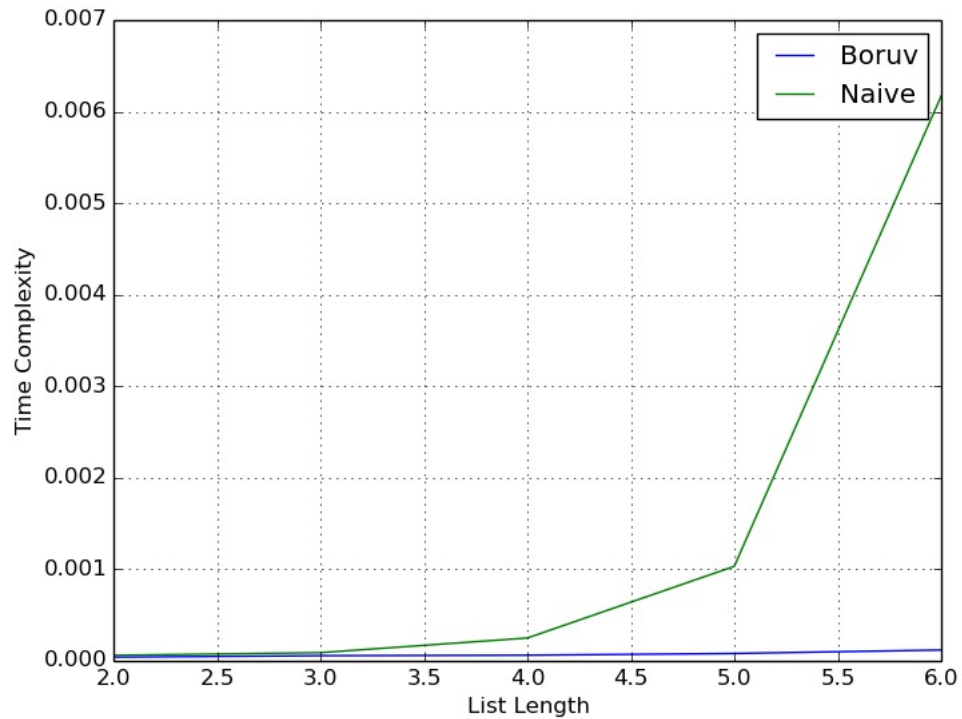
Afin de résoudre le problème de la très haute complexité de la solution naïve, nous avons proposé l'algorithme de Boruvka.

Le principe de ce dernier est de réduire le graphe d'origine en choisissant peu à peu les arêtes qui seront dans l'arbre final, et à chaque fois que l'on en choisit une, on fusionne les nœuds que cette arête relie. Ainsi, il ne reste plus qu'un sommet à la fin.

Nous avons déduit la complexité de cet algorithme à partir de son graphe de complexité qui est le suivant:



D'après le graphe de complexité ci-dessus, on conclut que l'algorithme de Boruvka est de complexité quasi-linéaire. Le graphe suivant est une comparaison des complexités des deux algorithmes: naïf et Boruvka.



On conclut que l'algorithme de Boruvka est beaucoup plus efficace que la solution naïve vue précédemment.

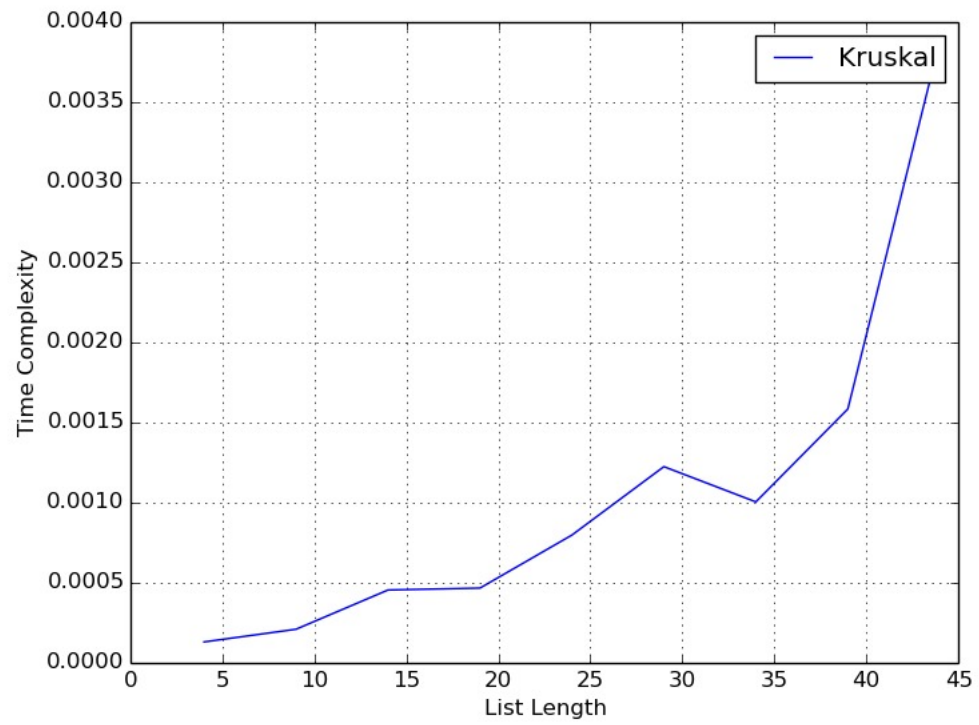
4 Autres algorithmes

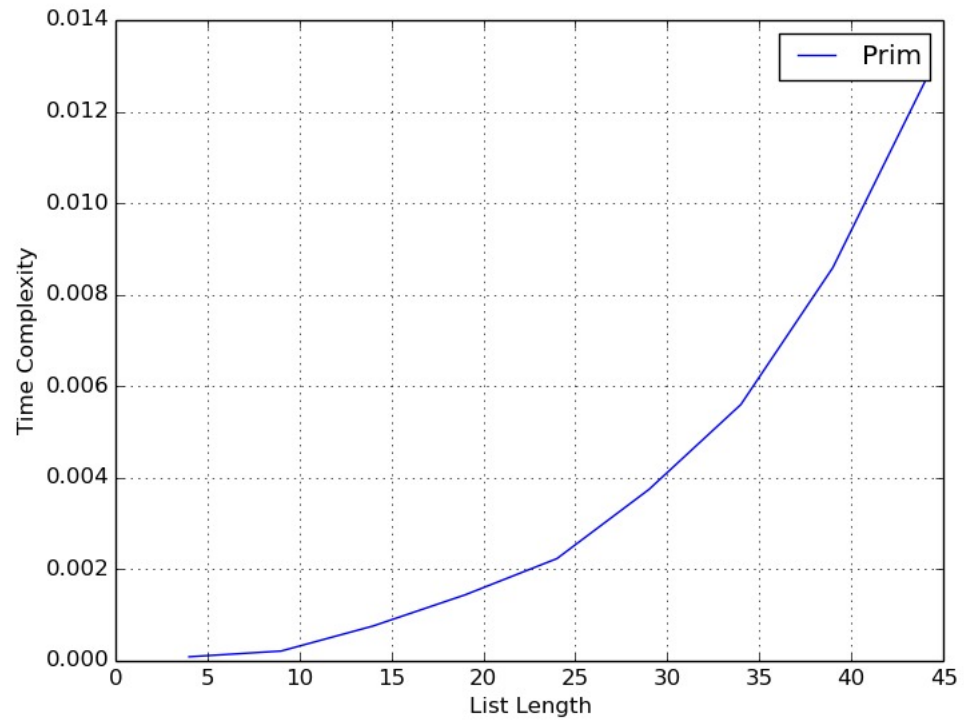
Passons maintenant aux algorithmes de Kruskal et de Prim qu'on a étudié afin de les comparer aussi aux algorithmes précédents.

Le principe de l'algorithme de Kruskal repose sur le choix des arêtes par ordre croissant de leurs poids si elles ne créent pas de cycles. On s'arrête lorsque tous les sommets sont reliés.

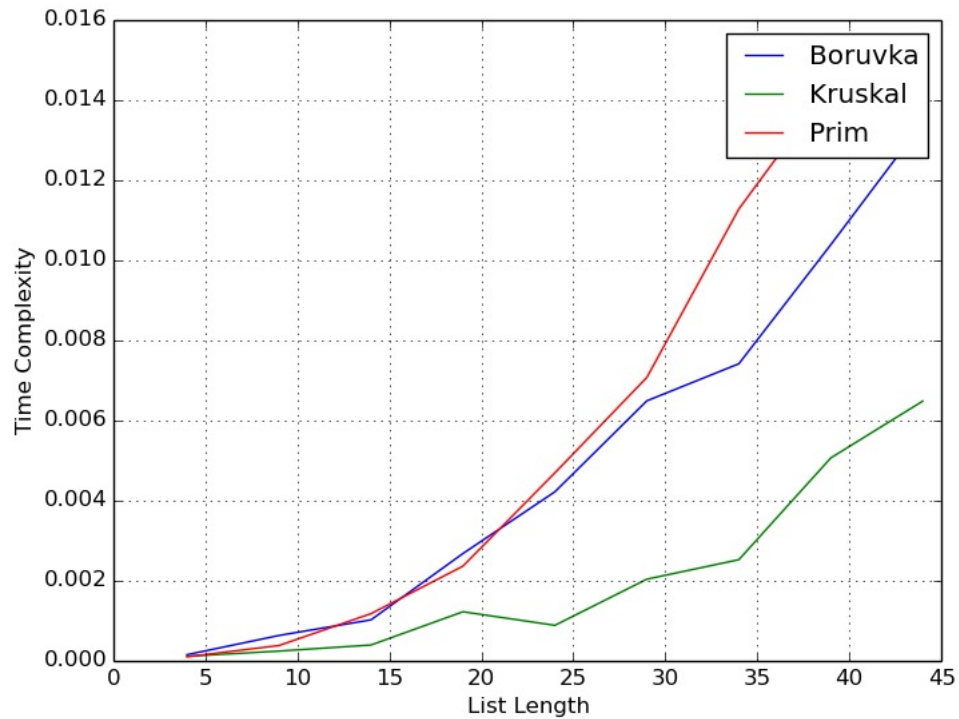
Pour l'algorithme de Prim, on commence avec un seul sommet puis à chaque étape, on ajoute une arête de poids minimum ayant exactement une extrémité dans l'arbre en cours de construction.

Ceux-ci sont leurs graphes de complexité:





Et voilà une comparaison des 3 algorithmes Boruvka, Kruskal et Prim :



Cette comparaison nous permet de dire que ces 3 algorithmes ont des complexités similaires et qu'ils sont tous plus rapides que l'algorithme naïf.

5 Conclusion

Plusieurs scientifiques ont prouvé qu'il y a des algorithmes efficaces pour trouver un arbre de recouvrement minimal dans n'importe quel graphe. Ceci est très utile vu qu'on les utilise dans plusieurs types de réseaux, comme les réseaux téléphoniques et les réseaux de distribution ainsi que dans d'autres domaines comme par exemple pour le partitionnement de données et le traitement d'image.