Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği

Haberleşme Laboratuvarı Deney Föyü [1]

İşaretlerin Frekans Analizi

Lab. Sorumlusu: | **E-posta:**

Yasin Yıldırım
Emin Akpınar
Emir Aslandoğan | {*ysnyldrm, emin.akpinar, emira*} @ *yildiz.edu.tr*

Lab Kuralları :

- Deney föyüne dikkatlice bireysel olarak çalışılması
- Föy içerisinde bulunan konu anlatımdaki kodların yazılması ve yorumlanması
- Araştırılması gereken kod veya konu varsa araştırılması
- Laboratuvara föy haricinde (flash, pc tablet vb.) herhangi bir aracın getirilmemesi
- Bilgisayar düzenine göre yerleşilmesi
- Deney bitiminde bilgisayarların yeniden başlatılması
- Laboratuvara her hangi bir yiyecek ve içeceğin getirilmemesi

[1] LaTeX *v0.1*

1 Deneyin Amacı ve Çalışma Soruları

Giriş

Haberleşme alanında Fourier Dönüşümü (FD), işaretlerin sinüsoidal bileşenlerinin analizinin yapılması için güçlü bir matematiksel çerçeve sunar. Zaman domeninde anlaşılması karmaşık olan olguların rahatlıkla çözümlenmesi işaretlerin bileşen analizleri ile olmaktadır. Bu deney kapsamında sürekli işaretlerin FD'sinin alınması ve yorumlanması öğrenilecektir.

Çalışılması Gereken Konular

- *fft*, *exp*, *abs*, *angle*, *fftshift*, *awgn* gibi temel fonksiyonlar
- MATLAB'ın *cell* veri yapısı
- FD'nin önemli özellikleri
- Bir işaretin otokorelasyonu ile güç spektrumu arasındaki ilişki

Önemli Bağlantılar ve Kaynaklar

■ `https://see.stanford.edu/course/ee261` !!!
▲ `http://www.thefouriertransform.com/`
● `https://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fourier-transform/`

- Kendi emeğinize ve çalışan arkadaşlarınızın emeğine saygı gösteriniz. Cevaplarınızı paylaşmayınız.
- Final sınavında iyi not alabilmek için soruları bireysel cevaplamalısınız.
- Kopyanın en buyuk zararının kendinize olduğunu unutmayınız.
- Cevapları başkalarından 'almak' yerine konuları 'anlamaya' çalışınız.
- Başarılar dileriz...

2 İşaretlerin Bileşen Analizi ve Uygulamaları

1800'lerde temeli atılan Fourier Dönüşümü (FD), modern çağın haberleşme sistemlerinin en önemli sac ayaklarından birisini oluşturmaktadır. FD, zamanın bir fonksiyonunu (bir sinyal veya işaret) oluşturan frekansın veya müzikal bir akorun kurucu notalarının nasıl ifade edilebileceğini sunan güçlü bir matematiksel araçtır. Fourier, ısı yayılımı hakkında yaptığı çalışmalar sonucunda periyodik olan işaretlerin sinüsoidallerin ağırlıklı toplamları olarak ifade edilebileceğini ortaya koymuştur. Fourier serisi olarak başlayan bu gösterim periyodik olmayan sürekli-zaman işaretlerine genişletilerek FD meydana gelmiştir. Bir işaretin sinüsoidallerin toplamı olarak yazılabilmesinin arkasında bulunan temel ise *baz* olarak seçilen sinüsoidal fonksiyon ailesinin kendi içerisinde **dikgen (orthogonal)** olmasından kaynaklanmaktadır. Bunun anlamı, eğer dikgen başka bir fonksiyon ailesi varsa işaretler bu baz üzerinden de ifade edilebilir. Bu kavramların anlaşılması için *Lineer Cebir* içinde dikgenlik konusunu ve ayrıca işaretlerin farklı bazlar ile temsil edilebilmesi hakkında *dalgacık dönüşümü* konularını araştırabilirsiniz.

FD ayrıca haberleşme alanının dışında veri sıkıştırmada da sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin zaman domeninde sinüsoidal bir işaret düşünülürse tüm zaman boyunca bilgi yayılmıştır. Diğer taraftan bu işaretin FD'si *genlik*, *frekans* ve *faz* bilgisinden ibarettir. Yani üç değer ile zaman domenindeki tüm sinüsoidal ifade edilmiş olur. Bir diğe uygulaması ise radyo astronomidir. Radyo teleskopları ile **doğal** olarak ölçülen görüntüler yıldızların aslında FD'sidir. Yıldızı veya herhangi bir ölçümü görüntüye dönüştürülmesi için *ölçüm* değerlerinin ters FD'sinin alınması gerekir. FD'nin aynı zamanda, makine öğrenmesi, devre analizi, görüntü işleme ve fizik gibi alanlarda da özel bir yeri vardır. Bu konu hakkındaki yetkinliğiniz diğer derslerinizin anlaşılmasında büyük katkı sağlayacaktır.

(a) Görüntü işlemede FD örnekleri (video)

(b) Radyo Astronomide FD'nin kullanımı ve dekonvolüsyon (video)

(c) Fourier'in *Isının Analitik Teorisi* Başlıklı Doktora Tezi (~ 35 MB) *pdf*

3 Spektrum Analizi

Spektrum Analizi (SA) makro büyüklükleri (işaret, görüntü, molekül, asal olmayan sayılar) oluşturan en temel yapı taşlarının ne olduğunu ve hangi miktarlarda bulunduğunu gösterir. SA sadece sinyalleri incelemek için kullanılan bir kavram olmamakla birlikte, farklı alanlarda da yaygın olarak kullanılır. Örnek olarak bir sayının asal çarpanlarına ayrıştırılması veya büyük moleküllerin atomik bileşenleri verilebilir. Önemli olan seçilen atom, asal sayı, baz fonksiyon, temel renk vb. büyüklüğün tanımladığı uzayda başka alt bileşenlere ayrıştırılamamasıdır. Diğer yandan bir makro büyüklük sadece ve sadece tanımlanan tek uzak ile analiz edilmeyebilir. Buna örnek olarak Fig.(1)(C) ve Fig.(1)(D) verilebilir. İki örnektede aynı renk kullanılmasına rağmen farklı temel renk uzayları ile analiz edilebilmektedir.

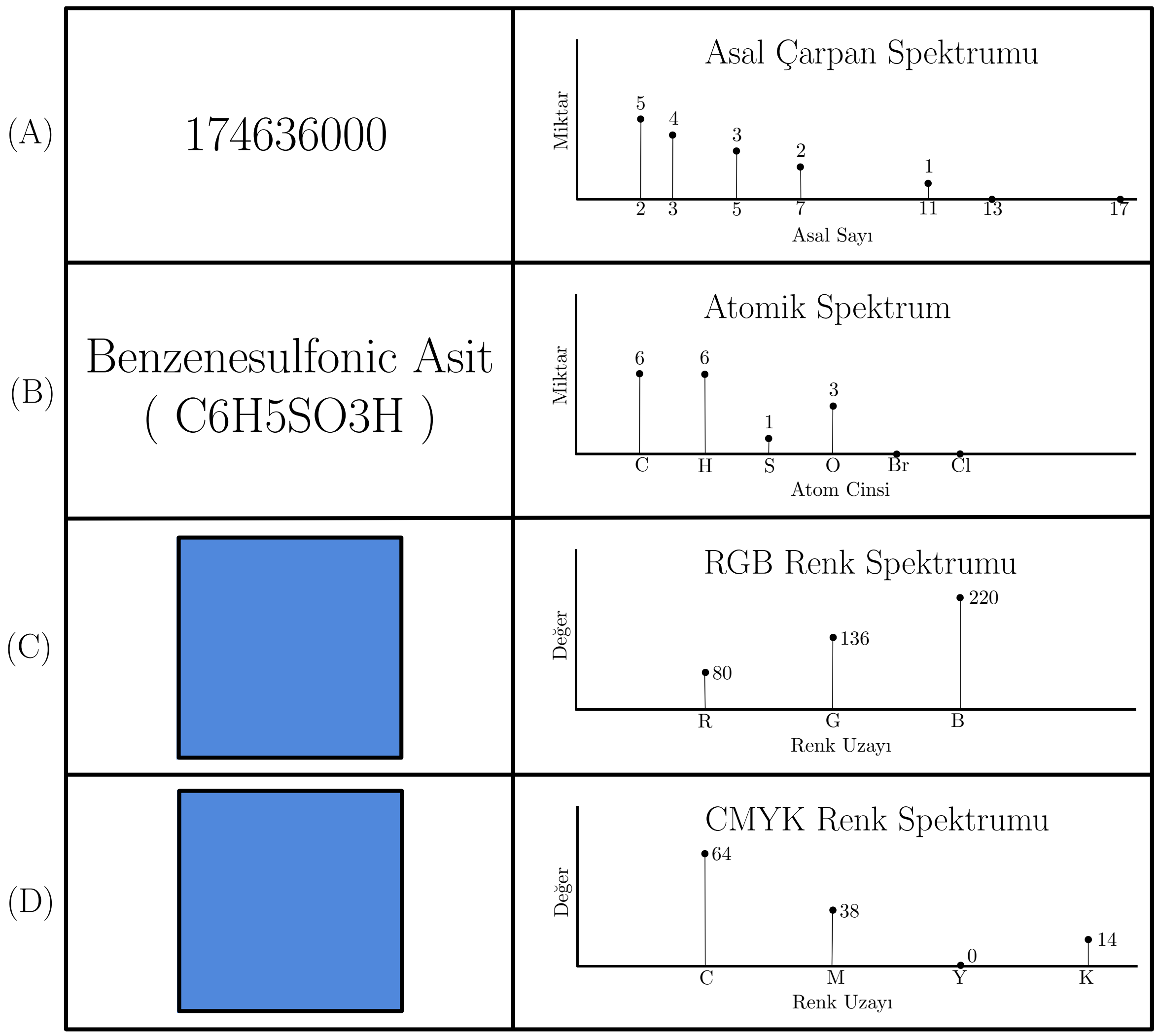


Figure 1: Farklı alanlarda kullanılan makro yapıların bileşen analizinin yapılması. Önemli olan seçilen baz (en temel bileşen) büyüklüklerinin, temsil ettikleri uzayda başka bileşenlere ayrıştıralamayan en temel yapı taşları olmasıdır.

4 İşaretlerin Frekans Domeninde Analizi

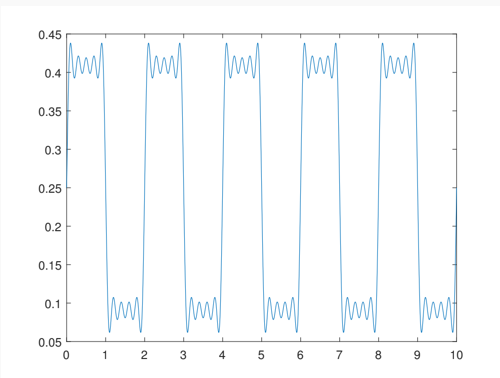
Lineer ve zamanla değişmeyen sistemlerde genel yaklaşım giriş işaretlerinin, basit işaretlerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilmesi ve bu şekilde analiz edilmesidir. İşaretlerin, basit sinüsoidal işaretlerin (kompleks ekponansiyellerin) kombinasyonu olarak modellenmesi, periyodik işaretler için fourier serileri ile yapılabilir.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} \end{aligned} \tag{1}$$

Eşitlik (1)'de sırasıyla fourier serileri sentez ve analiz denklemleri verilmiştir. Örnek olarak bir kare dalgayı oluşturabilmek için, kare dalgayı fourier serilerine açılması gerekir. Fourier serisine açıldığında, $\frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$ olarak bulunur.

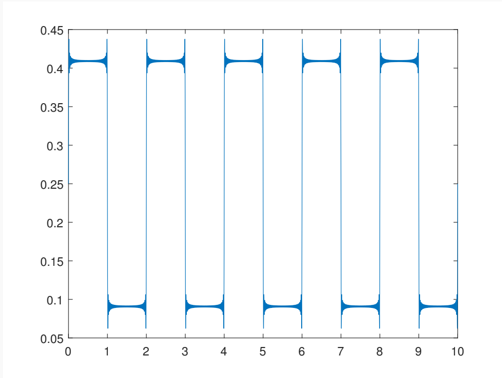
MATLAB'da bu matematiksel denkleme uygun kod yazılıp kare dalga sentezlenebilir. Bu uygulama aşağıda gösterilmiştir. Fourier serilerindeki her n. eleman, n. harmonik olarak adlandırılır. Örnek olarak, frekansları aynı olan kare dalga ve üçgen dalga hoparlör aracılığıyla dinlenirse seslerinin farklı olduğu görülebilir. Bunun nedeni harmoniklerinin farklı olmasından kaynaklanır. İşareti oluşturan her bir sinüzoidal temel bileşene harmonik adı verilir.

```
t = 0:0.001:10;
n = 5; %Harmonik sayisi
A = 0.5;
isaret = zeros(size(t))+A/2;
for i = 1:n
  isaret = isaret + (4*A/pi)*
      sin(((2*i)-1)*pi*t)
      /(((2*i)-1)*pi);
end
plot(t,isaret)
```



NOT: Harmonik sayısı arttıkça, oluşturulan işaret kare dalgaya yakınsar.

```
t = 0:0.001:10;
n = 50; % Harmonik sayisi
A = 0.5;
isaret = zeros(size(t))+A/2;
for i = 1:n
  isaret = isaret + (4*A/pi)*
      sin(((2*i)-1)*pi*t)
      /(((2*i)-1)*pi);
end
plot(t,isaret)
```



Örnek: Aşağıda aynı frekansta kare dalga ve testere dişi dalganın sesini dinleyebilirsiniz.

```
Fs = 16000;
Ts = 1/Fs;
t = 0:Ts:1;
x1 = sawtooth(2*pi*500*t);
x2 =  square(2*pi*500*t);
c = [x1,x2]; % ilk testeredisi, ikinci kare dalga.
sound(c,Fs)
```

Çalışma Sorusu:

Fourier serilerine açılmış bir işaretin formülasyonu $f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\omega_0 t)}{n}$ şeklindedir. İşareti $F_s = 100$ ve $t \in [-2, 2]$ aralığında $F_0 = 2$ için $n \in \{1, 3, 5, 50\}$ harmonik ile oluşturup çizdirin.
(Sonuç:Testere dişi dalga (Sawtooth))

Fourier serileri, periyodik işaretlere uygulanabilir. Pratikte işaretler aperiyodik olabilir, bu nedenle Fourier dönüşüm eşitliği ortaya çıkmıştır. Ayrıca hızlı fourier dönüşümü gibi algoritmalar(FFT) sayesinde daha düşük bir işlemsel karışıklık ile Fourier analizi yapılabilir. Sürekli zaman FD ve ters dönüşümü (2)'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{2}$$

4.1 Temel İşaretlerin Fourier Dönüşümü

Bu bölümde sinüsoidal işaretler, kare dalga ve testeredişi dalga gibi temel işaretlerin FD'si incelenecektir. Aşağıda temel işaretlerin zaman domeninde oluşturulması, adım adım FD'lerinin alınması ve MATLAB ile çizdirilmesi anlatılmıştır. Kod yazımında sürekli zaman örnekleme frekansı ve zaman vektörünün nasıl oluşturulduğu önemli bir konudur.

```
%% Temel isaretlerin Fourier Donusumu
clear all, close all; clc

Fs = 100;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -10:Ts:10; % [-10 , 10] arasi bir zaman dilimi
fonksiyon_listesi = {@cos , @sin , @square , @sawtooth}; % cell veri tipi
genlik_listesi    = [5,10,20,30];
frekans_listesi   = [0.5 , 1 , 2 , 5];

x = [];
for i = 1:numel(fonksiyon_listesi)
    x(i,:) = genlik_listesi(i)*fonksiyon_listesi{i}(2*pi*frekans_listesi(i)*t)
        ;
end

figure,
for i = 1:numel(fonksiyon_listesi)
subplot(numel(fonksiyon_listesi),1,i),plot(t,x(i,:),'color',rand(1,3)),grid on
ylabel('Genlik [V]')
end
xlabel('Zaman [sn]') , suptitle('Farkli Isaretlerin Zaman Gosterimleri')
```

Kodlama yapılırken birden fazla fonksiyonun kullanılması için *cell* (hücre) veri yapısından faydalanılmıştır. Hücreler eleman olarak matris, vektör, fonksiyon vb. gibi çok çeşitli verileri saklayabilirler. Bu çalışmada kullanılacak olan fonksiyonlar *handle* olarak tutulmuştur. Fonksiyonlar için kullanılacak olan frekans ve genlik değerleride ayrı ayrı farklı vektörlere kaydedilmiştir. Bu sayede Şekil (2) elde edilir.

```
%% istenilen isaretin Fourier Donusumu
isaret_indis     = 1;
tmp_x            = x(isaret_indis,:);
X                = fft(tmp_x);

figure,plot(X),grid on;
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Secilen Isaretin Fourier Analizi')
```

isaret_indis değişkeni ile istenilen fonksiyon seçilebilmektedir. MATLAB içersinde FD alan komut *fft*'dir. fft kullanılarak çok uzun vektörlerin FD'si hızlıca alınabilmektedir. Fakat sadece fft kullanımı Şekil (3)'den de görüleceği üzere grafiksel olarak kullanışsızdır. Bunun nedeni, elde edilen işaretin kompleks sayılardan oluşmasıdır.

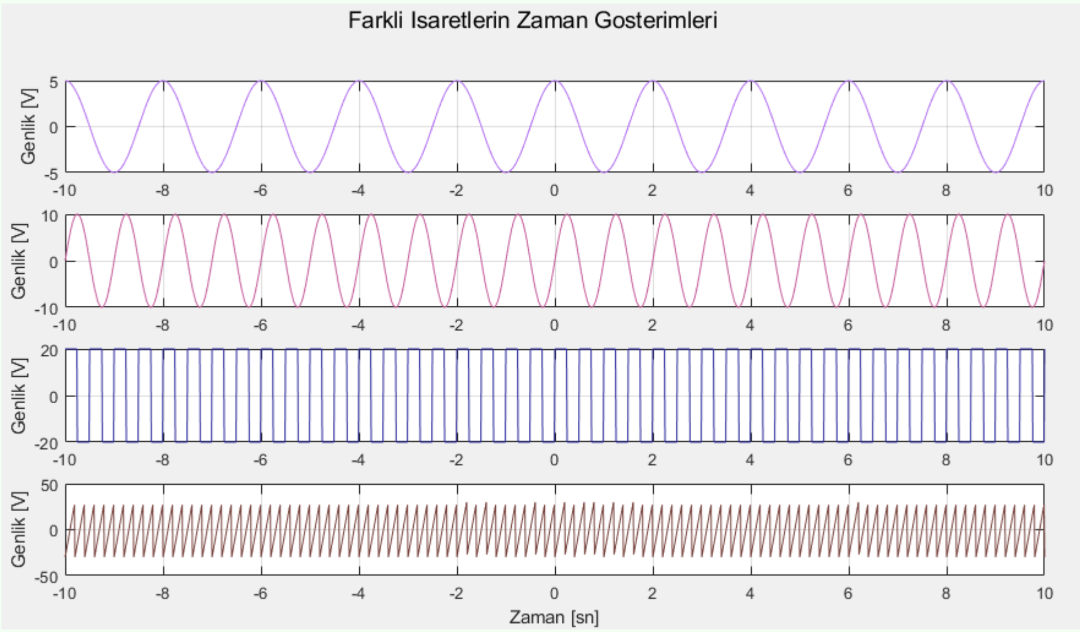


Figure 2: Bazı temel işaretlerin zaman domeninde gerçeklenmesi

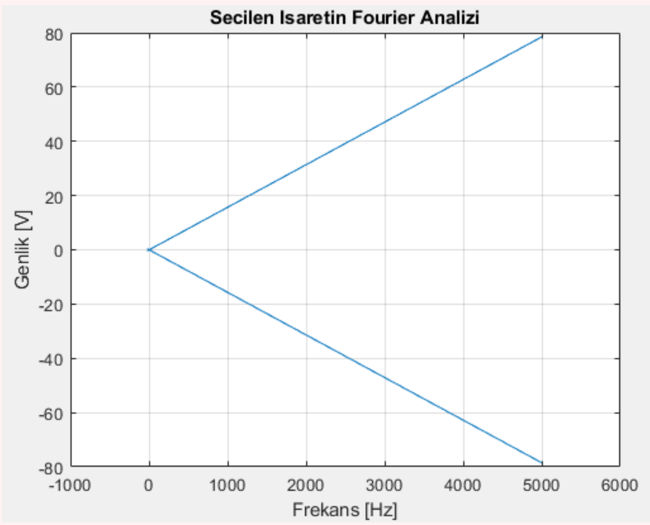


Figure 3: *fft* her ne kadar işaretin FD'sini alsada bazı düzenlemelerin yapılması gerekir.

İşaretlerin çiziminde *xlabel* ve *ylabel* kullanıldığına dikkat ediniz. Deney sınavı esnasında ilgili yerlere uygun etiketleri yazmanız puan alacağınız yerler arasındadır.

Kompleks $a + ib$ gibi bir işareti, $A\angle\theta$ olarak genlik ve faz olarak ifade edebiliriz. İşaretin genliği *abs()* komutu ile fazı ise *angle()* komutu ile bulunur.

```
%% Rafine Edilmis Isaret Analizi - 1
isaret_indis    = 1;
tmp_x           = x(isaret_indis,:);
X               = fft(tmp_x);
mag_X           = abs(X);       % Genlik Spektrumu
phs_X           = angle(X);     % Faz Spektrumu

figure,
subplot(211),plot(mag_X),grid on;
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
subplot(212),plot(phs_X),grid on;
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Faz [rad]')
% Not:  Statik  subplot kullanimi   211;
%       Dinamik subplot kullanimi  2,1,1.
suptitle('Secilen Isaretin Fourier Analizi')
```

Bu işlemler sayesinde Şekil (4)(a)'daki şekil elde edilir. Buradan görüleceği üzere FD'sini alınan *cos* işareti için teorik olarak hesaplanan iki impuls görülmektedir. Ayrıca faz grafiğide elde edilmiştir. Fakat impuls işaretlerinin doğru frekanslar üzerinde olması ve genliklerinin uygun değere gelmesi için ikinci bir işlem adımı gerekmektedir.

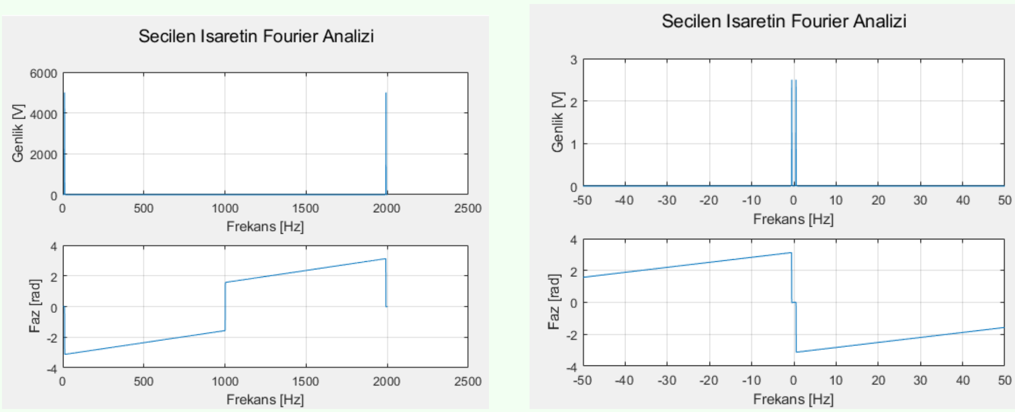
```
%% Rafine Edilmis Isaret Analizi - 2
isaret_indis    = 1;
tmp_x           = x(isaret_indis,:);
X               = fft(tmp_x);

mag_X           = fftshift(abs(X));     % merkeze kaydirma
mag_X           = 1/numel(mag_X)*mag_X; % olcekleme
phs_X           = fftshift(angle(X));   % merkeze kaydirma

F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(mag_X));

figure,
subplot(211),plot(F,mag_X),grid on;
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
subplot(212),plot(F,phs_X),grid on;
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Faz [rad]')
suptitle('Secilen Isaretin Fourier Analizi')
```

fft fonksiyonu $[0, 2 \times \pi]$ arasında çalışır. Bu aralığı $[-\pi, \pi]$ olarak simetrik hale getirmek için *fftshift* fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu sayede grafik y-eksenine göre simetrik hale gelir. Bir başka önemli konu ise grafiğin çizdirileceği x-ekseninin belirlenmesidir. Kod içersinde F olarak tanımlanan bu vektör, doğru ölçüm için $[-F_s/2, F_s/2]$ aralığında olması gerekir. Yapılan bu düzenleme ile işaretin içindeki frekans bilgisi doğru olarak ölçülebilir. Bir başka düzenleme ise genlik için yapılmalıdır. Genlik değerinin teori ile uyuşması için fft'de alınan nokta sayısına bölünmesi gerekir. Buda *numel* foksiyonu ile sağlanmıştır. Not: *numel* fonksiyonu matris veya vektör içindeki toplam eleman sayısını verir.

Önemli

Eksen düzenlemesinde kullanılacak olan F mutlaka [-Fs/2 , Fs/2] arasında olmalıdır. Aksi takdirde frekans konumlaması yanlış olur ve doğru ölçüm yapılamaz.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında Şekil (4)(b) grafiği elde edilir. Görüleceği üzere iki implus istenilen frekans ve genlik değerlerine gelmiştir. Bu grafik üzerinden doğru bir okuma yapılabilir. Değer okuması için *data cursor*'un kullanılması gerekir. Diğer bir önemli konu ise Şekil (4)'de görüleceği üzere $F_s/2$ değeri, kullanılan $F_s = 100$ atamasından dolayı 50'dir. Bu durumda gerçeklenen düşük frekanstaki işaretler grafikte $y = 0$ eksenine çok yakındır. Daha ayrıntılı bir analiz için *xlim* komutu kullanılabilir.



(a) (b)

Figure 4: Sinüsoidal bir işaretin aşama aşama FD'sinin alınması: (a) *fft* ve *abs* kullanımı (b) Eksen düzenlemesi yapılmış olan frekans domeni

Öneri

Sizlerde *isaret_indis* değişkeni ile diğer temel işaretlerin genlik ve faz spektrumlarını inceleyebilirsiniz. Ayrıca *fft*, *abs*, *linspace* ve çizim komutlarını kullanarak başka işaretlerin (temel işaretlerin toplamı, çarpımı vb.) FD'sini yazmaya çalışınız. Ayrıca faz eksenini derece olarak çizdirmeyi deneyiniz.

4.2 Fourier Dönüşümünün Önemli Özellikleri

Bu bölüm kapsamında FD'nin önemli olan bazı özellikleri MATLAB yardımı ile görseller üzerinden ispatlanacaktır. FD'nin bu özellikleri sayesinde, temel işaretlerin FD'leri kullanılarak daha karmaşık fonksiyonların FD'si kolaylıkla alınabilmektedir. Bu nedenle FD'nin özelliklerinin pekiştirilmesi için örneklerin dikkatlice incelenmesi gerekir.

Örnek: 1 $\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\Omega \times X(j\Omega)$

$y(t) = t \times e^{-\alpha \times t}$ işaretini $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [0, 10]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız.

```
%% FD'nin ozellikleri
clear all, close all; clc
Fs = 100;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = 0:Ts:10; % [0 , 10] arasi bir zaman dilimi

alfa = 2;
x    = exp(-alfa*t);
y    = t.*x;
z    = conv(y,[1 -1],'same')/Ts; % TUREV !!!

figure,
subplot(311),plot(t,x),grid on,
ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
title('$x(t) = e^{-\alpha \times t}$','Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(312),plot(t,y,'r'),grid on,
ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
title('$y(t) = t \times x(t)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(313),plot(t,z,'m'),grid on,
xlabel('Zaman [sn]','Interpreter','latex'),
ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
title('$z(t) = \frac{dt\times x(t)}{dt}$','Interpreter','latex','FontSize',15)

% Not: Teori ile kodun uyumlu olmasi icin abs almadan once
```

```
28 % carpmanin yapildigina dikkat ediniz.

30 Y = fftshift(fft(y));
31 Z = fftshift(fft(z));

33 F = linspace(-Fs/2, Fs/2, numel(Y));

35 Zo = 1i*2*pi*F.*Y;

37 figure,
38 subplot(311),plot(F,abs(Y),'b'),grid on,
39 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
40 title('$Y(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

42 subplot(312),plot(F,abs(Z),'r'),grid on,
43 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
44 title('$Z(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

46 subplot(313),plot(F,abs(Zo),'m'),grid on,
47 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
48 title('$j\Omega \times Y(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)
```

Yukarındaki kod içerisinde bulunan *conv* komutu girdi olarak verilen iki işaretin konvolüsyonunu almaktadır. **'same'** ifadesi ise çıkışın ilk girdinin boyutu kadar olmasını sağlar. MATLAB esasında ayrık olarak FD hesaplar. Ayrık FD'de ise çıkış işaretinin uzunluğu $L_y = L_x + L_h - 1$ olarak bulunur. 'same' sayesinde çıkış işareti giriş işareti ile aynı uzunluğa kırpılır. $\frac{conv(x,[1-1])}{T_s}$ ifadesinin türeve karşılık gelmesinin nedeni türevin *ayrık-zaman* karşılığından gelir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{x[n] - x[n-1]}{T_s} \tag{3}$$

(3)'de gösterildiği üzre türevin geri yaklaşımından ayrık zamanda karşılık geldiği ifade bulunabilir. Ayrık zaman ifadesinin birim impuls cevabı ise $h[n] = \frac{[1,-1]}{T_s}$ ifadesidir. Bu nedenle herhangi bir işareti $h[n]$ ile konvolüsyonu o işaretin türevine denk gelir.

Diğer dikkat edilmesi gereken bir konu ise teorik hesaplamalar ile MATLAB çıktısının eşleşmesi için kodda (35. satır) $Z_o = j\Omega \times Y(j\Omega)$ olarak yazılan vektörün hesaplanması için FD'si alınan Y vektörünün $j\Omega$ ile *abs* işlemi yapılmadan önce çarpılması gerekir. Bu sayede Şekil (12)'deki gibi grafikler uyumlu çıkmıştır.

Öneri

Kodu, α parametresinin [0.5, 5, 10] değerleri için tekrar çalıştırınız. Farklı α değerleri için frekans domenindeki değişimleri yorumlayınız. Dikkat: Zamanda daralma frekansta genişlemeye ve tam tersine karşılık geleceğini unutmayınız.

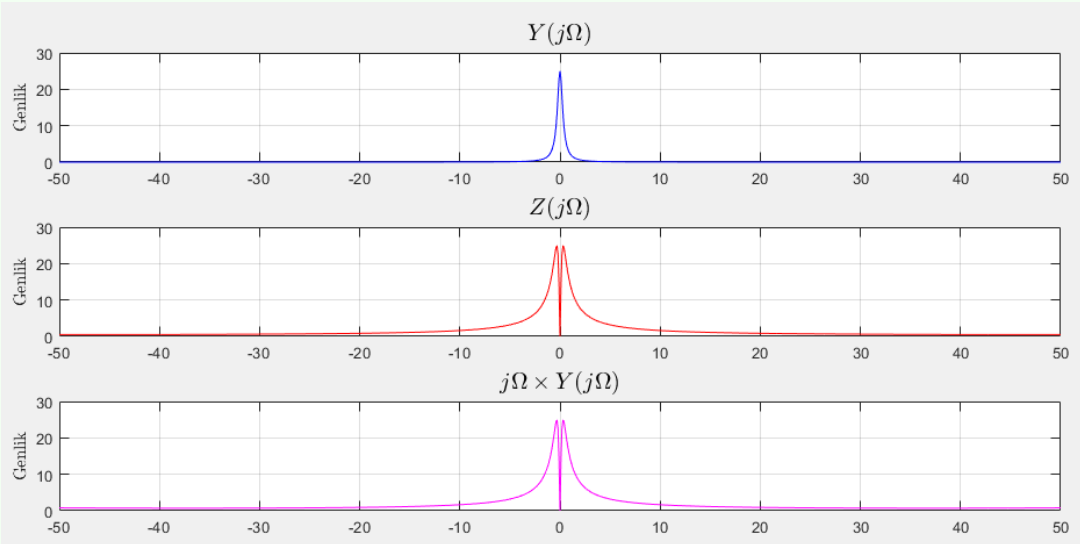


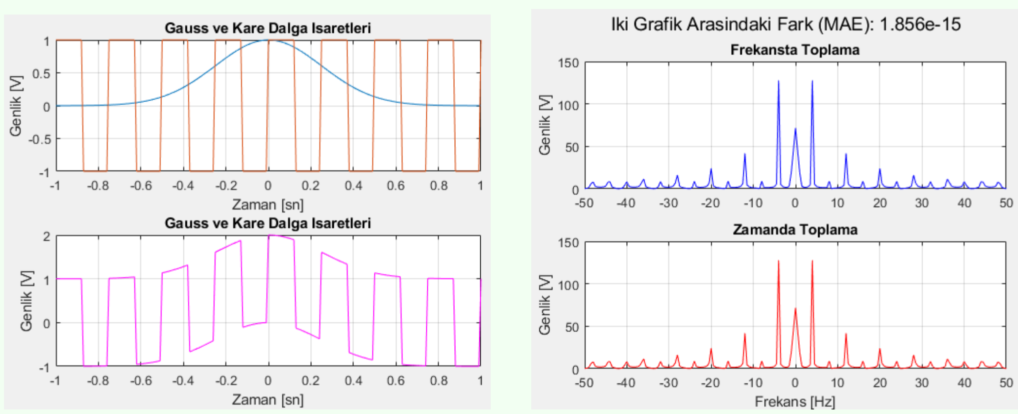
Figure 5: $\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\Omega \times X(j\Omega)$ özelliğinin grafiksel ispatı

Örnek: 2 $z(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow Z(j\Omega) = X_1(j\Omega) + X_2(j\Omega)$

$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}}$ $\sigma = 1/4$ ve $x_2(t) = square(2\pi \times 4 \times t)$ işaretleri $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [-1, 1]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız.

```
%% iki isaretin toplanmasi
clear all, close all; clc

Fs = 100;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs;  % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -1:Ts:1; % [-1 , 1] arasi bir zaman dilimi

% Not: Gauss isaretinin x = 1 degerinde 0 olabilmesi icin sgm = 1/4
% secilmistir.

sgm = 1/4;
F0  = 4;
```

```matlab
x(1,:) = exp(-t.^2/(2*sgm^2));
x(2,:) = square(2*pi*F0*t);
z      = sum(x,1); % sum komutunun matrislerdeki kullanimini arastiriniz.**

figure,
subplot(211),plot(t,x'),grid on,
xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Gauss ve Kare Dalga Isaretleri')

subplot(212),plot(t , z , 'm'),grid on,
xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Iki Isaretin Toplami')

X  = fftshift(fft(x')); % toplamadan once abs kullanilmadi. !!!
Z1 = fftshift(abs(fft(z)));
Z0 = sum(X,2);  Z0 = abs(Z0);

F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Z0));
mean_abs_error = mean(abs(Z0 - Z1'));

figure
subplot(211),plot(F,Z0,'b'),grid on,ylabel('Genlik [V]')
title('Frekansta Toplama')
subplot(212),plot(F,Z1,'r'),grid on
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Zamanda Toplama')

suptitle(['Iki Grafik Arasindaki Fark (MAE): ',num2str(mean_abs_error)])
```



(a) (b)

Figure 6: $z(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow Z(j\Omega) = X_1(j\Omega) + X_2(j\Omega)$

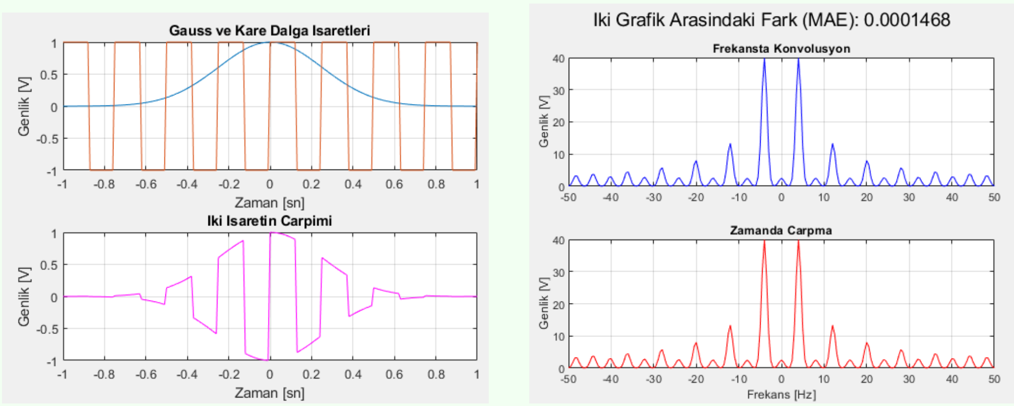
Öneri

Mean Absolute Error hatanın sayısallaştırılması için önemli bir metriktir. Bu sayede iki işaret arasındaki faklılığın ne kadar olduğunun ölçütü *MAE* ile verilebilir. Matematiksel gösterimi: $E = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|x_1[n] - x_2[n]|$. MAE fonksiyonunu handle olarak yazabilirsiniz.

Örnek: 3 $z(t) = x_1(t) \times x_2(t) \longrightarrow Z(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \times X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$

$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}}$ $\sigma = 1/4$ ve $x_2(t) = square(2\pi\times4\times t)$ işaretlerini $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [-1, 1]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız. (Yukarıdaki kodun devamı olarak aşağıdaki kod verilmiştir.)

```
z = prod(x,1);

figure,
subplot(211),plot(t,x'),grid on,
xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Gauss ve Kare Dalga Isaretleri')

subplot(212),plot(t , z , 'm'),grid on,
xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Iki Isaretin Carpimi')


X  = fftshift(fft(x'));
Z1 = fftshift(abs(fft(z)));
Z0 = 1/(numel(X(:,1)))*conv(X(:,1),X(:,2),'same');  Z0 = abs(Z0);
%Not: 1/(numel(X(:,1))) teorik formuldeki 1/(2pi) degerine denk gelir.

F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Z0));
mean_abs_error = mean(abs(Z0 - Z1'));

figure
subplot(211),plot(F,Z0,'b'),grid on,ylabel('Genlik [V]')
title('Frekansta Konvolusyon')
subplot(212),plot(F,Z1,'r'),grid on
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Zamanda Carpma')

suptitle(['Iki Grafik Arasindaki Fark (MAE): ',num2str(mean_abs_error)])
```



(a) (b)

Figure 7: $z(t) = x_1(t) \times x_2(t) \longrightarrow Z(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \times X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$

Örnek: 4 $x(t) \times e^{-j\Omega_0 \times t} \longrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$

$x(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}}$ $\sigma = 1/8$ ve $F_0 = 20Hz$ için $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [-1, 1]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız.

```
clear all, close all; clc
Fs = 100;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs;  % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -1:Ts:1; % [-1 , 1] arasi bir zaman dilimi
sgm = 1/8;
F0  = 20;
x   = exp(-t.^2/(2*sgm^2));

z1 = x.*exp(-1i*2*pi*F0*t);
z2 = x.*exp(+1i*2*pi*F0*t);

Z1 = fftshift(abs(fft(z1)))/numel(z1);
Z2 = fftshift(abs(fft(z2)))/numel(z1);

F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Z1));

figure,
subplot(211),plot(F,Z1,'color',rand(1,3),'linewidth',2),grid on
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
subplot(212),plot(F,Z2,'color',rand(1,3),'linewidth',2),grid on
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
```

```
suptitle('Isaretin Frekansta - ve + F0 Noktalarina Kaymasi')
```

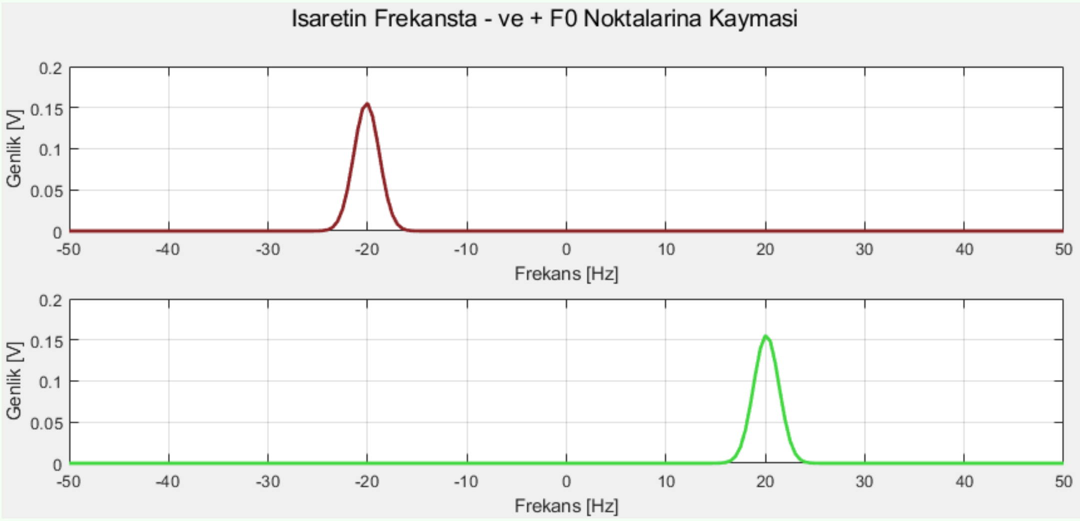


Figure 8: $x(t) \times e^{-j\Omega_0 \times t} \longrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$

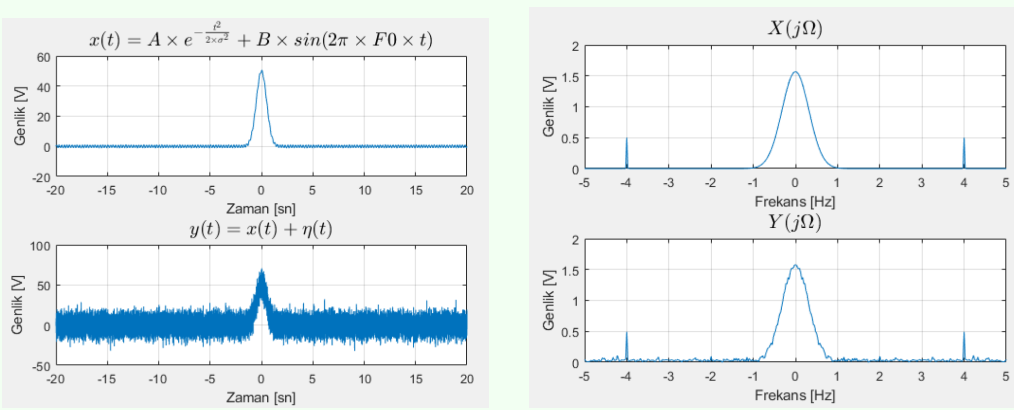
4.3 Gürültülü İşaretlerin Frekans Analizi

Örnek: 1 Mesaj İşaretinin Gönderimi

Haberleşmenin temel problemlerinden birisi gürültüdür. Gürültünün işaretlerin genlikleri üzerinde bozucu etkileri vardır. Bu olgunun incelenmesi için mesaj olarak $x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}} + B \times sin(2\pi \times F_0 \times t)$ işaretini $\sigma = 0.5$, $A = 50$; $F_0 = 4$, $B = 1$; $F_s = 1e3$, $t \in [-20, 20]$ parametreleri ile üretiniz. $0dB$ gürültü ekleyerek FD'sini inceleyiniz.

```
%% Gurultulu Isaretlerin FD'si
clear all, close all; clc
Fs = 1000;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs;  % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -20:Ts:20; % [-20 , 20] arasi zaman dilimi

sgm = 0.5;          A = 50;
F0  = 4;            B = 1;
x   = A*exp(-t.^2/(2*sgm^2)) + B*sin(2*pi*F0*t);

% Not: Gauss isareti, 4*sgm'da sifira ulasir !!
% Bu sayede grafik uzerinden sgm degerini belirleyebilirsiniz !!
```

```
y = awgn(x,0,'measured');

figure,
subplot(2,1,1),plot(t,x),grid on,xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('$x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2\times \sigma^2}} + B \times sin(2\pi\times F0 \times t)$',...
    'Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(2,1,2),plot(t,y),grid on,xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('$y(t) = x(t) + \eta(t)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

mag_X = fftshift(abs(fft(x)));  mag_X = 1/numel(mag_X)*mag_X;
mag_Y = fftshift(abs(fft(y)));  mag_Y = 1/numel(mag_Y)*mag_Y;

F = linspace(-Fs/2, Fs/2,numel(mag_X));

figure,
subplot(2,1,1),plot(F,mag_X),grid on,
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]'),xlim([-5 5])
title('$X(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(2,1,2),plot(F,mag_Y),grid on,
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]'),xlim([-5 5])
title('$Y(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)
```



(a) (b)

Figure 9: Zaman domeninde gürültü oldukça baskındır. Bu nedenle mesaj işaretindeki sinüsoidal bileşen gözlemlenememektedir. Fakat FD analizi ile $4Hz$ üzerinde bir bilginin olduğu net bir şekilde ölçülebilir.

Öneri

$\sigma \in [0, 5]$ aralığında değiştirerek etkileri gözlemleyiniz. Zamanda genişleme frekansta daralma veya tam tersi etkiye dikkat ediniz. Ayrıca farklı dB degerleri için analizleri tekrar yapabilirsiniz.

5 Fourier Dönüşümü ve Filtreleme

FD'nin temel kullanım amaçlarından bir tanesi mesaj işaretlerini uygun filtreler yardımı ile geri üretebilmektir. Zaman domeninde üst üste toplanan işaretler, eğer frekans domeninde farklı merkez frekanslarının üstünde ve belli bir band genişliğine sahip iseler kolaylıkla birbirlerinden ayrıştırılabilirler. Buna *FM* radyolar örnek olarak verilebilir. Antene elektromanyetik dalgalar ile gelen işaretlerin içinde tüm yayınların toplamı vardır. Radyonun frekans ayarlama birimi ile $F_c \in [87.50, 108.00]MHz$ aralığında seçilen merkez frekansı etrafında band geçiren filtreleme yapılır. Bu sayede diğer yayınlar iptal edilir ve seçilen yayın akışı radyomuza sağlanır. Bu örneğe benzer bir simülasyon, 5. Deney kapsamında gerçeklenecektir.

Örnek: 1 Filtre Band Genişliğinin Etkileri

$x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}} + B \times sin(2\pi \times F_0 t)$, $\sigma = 0.5$ ve $F_0 = 4$ işareti *Gauss* ve *sin* fonksiyonlarından oluşturulmuş iki farklı mesaj işaretini içermektedir. Mesaj işaretini antem vasıtası ile yayınlarken dış ortamdan kaynaklanan $5dB$ değerinde bir gürültü etki etsin. Birim impuls cevabı $h(t) = e^{-\frac{-t^2}{2\times\sigma^2}} \times cos(2\pi \times F_x \times t)$ ile işaret üzerinde $F_x = 0$ olacak şekilde $\sigma \in \{5, 1, 1e-1, 1e-2, 5e-3, 1e-3, 1e-4\}$ değerleri için filtrelemeler yapınız. $F_s = 1e3$ ve $t \in [-20, 20]$ olarak alınız. σ değeri azaldıkça zaman domenindeki *Gauss* filtresinin genişliği azalacak ve frekans domeninde filtrenin band genişliği ise artacaktır. $F_x = 0$ olduğundan dolayı filtrenin merkez frekansı 0 olarak bulunacaktır.

```
%%
clear all, close all; clc
Fs = 1000;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs;  % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -20:Ts:20; % [-20 , 20] arasi bir zaman dilimi

sgm = 0.5;          A = 50;
F0  = 4;            B = 1;
x   = A*exp(-t.^2/(2*sgm^2)) + B*sin(2*pi*F0*t);
% Not: Gauss isaretinde isaret 4*sgm'da sifira ulasir !!
% Bu sayede grafik uzerinden sgm degerini belirleyebilirsiniz !!
```

```
y = awgn(x,5,'measured');
%%
sgm3  = [5 1 1e-1 1e-2 5e-3 1e-3 1e-4];
fg    = [5 5  5    20   50   100 500];
Fx      = 0;
fig = figure('Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0, 0.04, 1, 0.96]),
for i = 1:numel(fg)
    sgm2 = sgm3(i);
    t1      = -4*sgm2 : Ts : 4*sgm2;

    h   = exp(-t1.^2/(2*sgm2^2)).*cos(2*pi*Fx*t1);

    mag_Y = fftshift(abs(fft(y)));           mag_Y = mag_Y/max(mag_Y);
    mag_H = fftshift(abs(fft(h,numel(y))));  mag_H = mag_H/max(mag_H);

    F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(mag_Y));

    z = conv(y,h,'same');
    mag_Z = mag_H.*mag_Y;

    clf(fig)
    subplot(4,2,[1 2]),plot(F,mag_Y,'b'),hold on,plot(F,mag_H,'r'),
    xlim([-fg(i) fg(i)]),ylim([0 1.1]),grid on,ylabel('Genlik [V]')
    title(['{H(j\Omega): \color[rgb]{1.0 0.0 0.0}KIRMIZI} , ',...
    '{Y(j\Omega): \color[rgb]{0.0 0.0 1.0}MAVI}'],...
       'Interpreter','tex','FontSize',15)

    subplot(4,2,[3 4]),plot(F,mag_Z),xlim([-fg(i) fg(i)]),grid on
    xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
    title('$Z(j\Omega) = H(j\Omega) \times Y(j\Omega)$',...
      'Interpreter','latex','FontSize',15)

    subplot(4,2,5),plot(t1,h),grid on,
    ylabel('Genlik [V]'),xlabel('!! Zaman [sn] !! ','FontWeight', 'bold')
    title(['$h(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times \sigma^2}}$ ====  ',...
          '$\sigma: $',num2str(sgm2)],'Interpreter','latex','FontSize',15)

    subplot(4,2,6),plot(t,y), ylabel('Genlik [V]'),xlabel('Zaman [sn]')
    title('$y(t) = x(t)+\eta(t)$ ','Interpreter','latex','FontSize',15)

    subplot(4,2,[7 8]),plot(t , z ),grid on
    xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
    title('$ z(t) = \int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)\times h(t-\tau)$',...
      'Interpreter','latex','FontSize',15)
    drawnow
    pause(3)
end
```

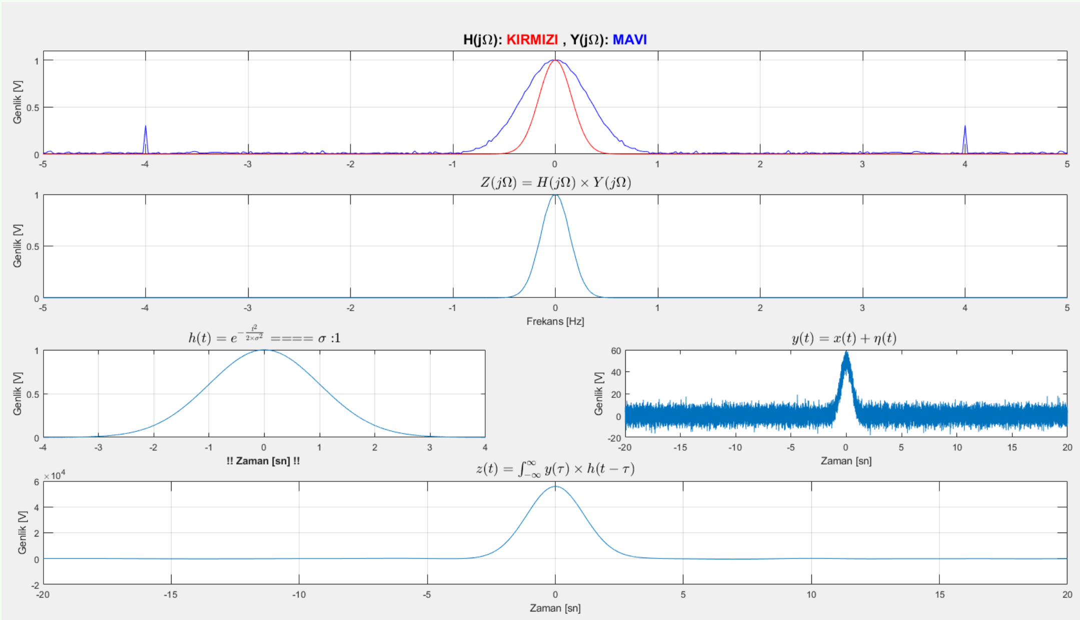


Figure 10: Filtreleme örneği: Gauss filtresinin σ değerine göre frekans bölgesinde filtreleme band genişliği değişimi ve $z(t)$ çıkış grafikleri.

conv fonksiyonunun kullanımını **mutlaka** araştırınız. Kullanım çeşitlerini öğreniniz.

Örnek: 2 Filtre Merkez Frekansının Etkileri

Uydudan yayılan bir mesaj işareti $x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}} + B \times sin(2\pi \times F_0 \times t) + C \times cos(2\pi \times F_1 \times t) + D \times cos(2\pi \times F_2 \times t + \pi/25)$ 4 farklı kullanıcı için 4 farklı bileşenden oluşamaktadır. Atmosferik ektiler ve devre gürültüleri nedeni ile $0dB$ gürültü ile alıcı tarafına ulaşan işaretin içinden mesaj işaretlerini doğru elde edebilmek için uygun filtreler ile filtreleyiniz.

```
%%
clear all, close all; clc
Fs = 1000;  % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs;  % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -20:Ts:20; % [-20 , 20] arasi bir zaman dilimi

sgm = 0.5;      A   = 50;
F0  = 5;        F1  = 10;        F2  = 20;
B   = 1;          C = 5;         D   =  7;
x   = A*exp(-t.^2/(2*sgm^2)) + ...
      B*sin(2*pi*F0*t)       + ...
```

```
      C*cos(2*pi*F1*t)        + ...
      D*cos(2*pi*F2*t+pi/25);

% Not: Gauss isaretinde isaret 4*sgm'da sifira ulasir !!
% Bu sayede grafik uzerinden sgm degerini belirleyebilirsiniz !!
dB = 0;
y = awgn(x,dB,'measured');

figure('Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0.1, 0.2, 0.75, 0.75]),
subplot(211),plot(t,x,'b'),xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Bilgi Isaretlerinin Toplami'),grid on
subplot(212),plot(t,y,'r'),xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title([num2str(dB),'dB Gurultulu Isaret']),grid on
```

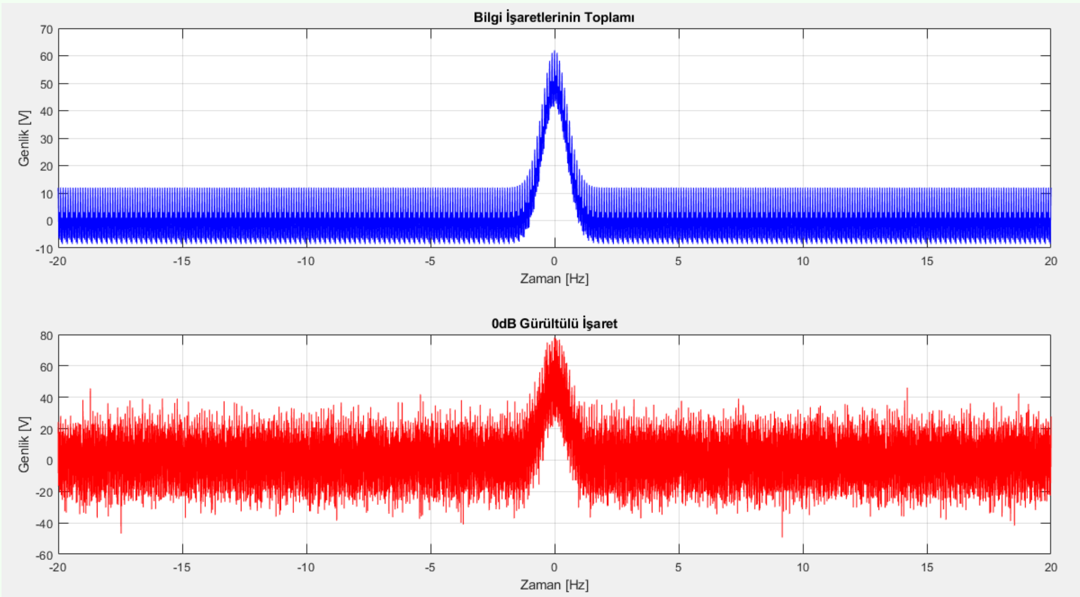


Figure 11: 4 mesaj isaretinin toplamı ve $0dB$ gürültülü hali

```
%% Gauss isaretinden band geciren filtre
%Not: Gauss isareti 4*sgm sonrasi sifir kabul edilebileceginden dolayi onu,
%olusturmak icin kullanilanacak olan zaman vektorunun sinirlari otomatik,
%olarak ayarlanmaktadir. Diger turlu sabit olarak [-20 20] secmek conv'da
%gereksiz islem yukune sebep olur. Bu calismayi farkli sgm degerleri icin
%tekrarlayabilirsiniz.
sgm3     = 2;
t1       = -4*sgm3: Ts : 4*sgm3;

Fx       = [0 1 2 3 4 5 10 12.50 15 17.50 20 22.50 ];
fig = figure('Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0, 0.04, 1, 0.96]),
for i = 1:numel(Fx)
hl = exp(-t1.^2/(2*sgm3^2)); % Sistemin birim impuls cevabi (Gauss isareti)
```

```
c  = cos(2*pi*Fx(i)*t1); % Merkez frekansi Fx(i)'ye getirmek icin kullanilacak
h  = hl.*c;
%Not: mag_Y = mag_Y/max(mag_Y) islemi teorik olarak uygun degildir. Sadece
%gorsellestirmede yararli oldugu icin kullanilmistir !!!!

mag_Y = fftshift(abs(fft(y)));           mag_Y = mag_Y/max(mag_Y);
mag_H = fftshift(abs(fft(h,numel(y))));  mag_H = mag_H/max(mag_H);
F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(mag_Y));
z = conv(y,h,'same');       % filtreleme islemi.
mag_Z = mag_H.*mag_Y;   mag_Z = mag_Z/max(mag_Z);

clf(fig)
subplot(4,2,[1 2]),plot(F,mag_Y,'b'),hold on,plot(F,mag_H,'r'),
xlim([-25 25]),ylim([0 1.1]),grid on,ylabel('Genlik [V]')
title(['{H(j\Omega): \color[rgb]{1.0 0.0 0.0}KIRMIZI} , ',...
    '{Y(j\Omega): \color[rgb]{0.0 0.0 1.0}MAVI}'],...
       'Interpreter','tex','FontSize',15)

subplot(4,2,[3 4]),plot(F,mag_Z,'m'),grid on,xlim([-25 25])
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('$Z(j\Omega) = H(j\Omega) \times Y(j\Omega)$',...
      'Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(4,2,5),plot(t1 , h,'color',[0.36, 0.54, 0.66]),grid on,
ylabel('Genlik [V]')
title(['$h(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times \sigma^2}} \times cos(2\pi \times F_c \times t)$ ',...
      '$F_c$ = ',num2str(Fx(i))],'Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(4,2,6),plot(t  , y,'m'),grid on , ylabel('Genlik [V]')
title(['$y(t) = x(t)+\eta(t)$ ','dB: ',num2str(dB)],...
      'Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(4,2,7),plot(t  , z,'color',rand(1,3)),grid on
xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
title('$ z(t) = \int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)\times h(t-\tau)$',...
      'Interpreter','latex','FontSize',15)

subplot(4,2,8),plot(t  , z,'--k','linewidth',1.5),xlim([0 1]),grid on
xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('1 sn icindeki salinim',...
      'Interpreter','latex','FontSize',15)

suptitle('Gurultulu Isaretin Farkli Merkez Frekanslari ile Filtrelenmesi')
drawnow
pause(5)
end
```

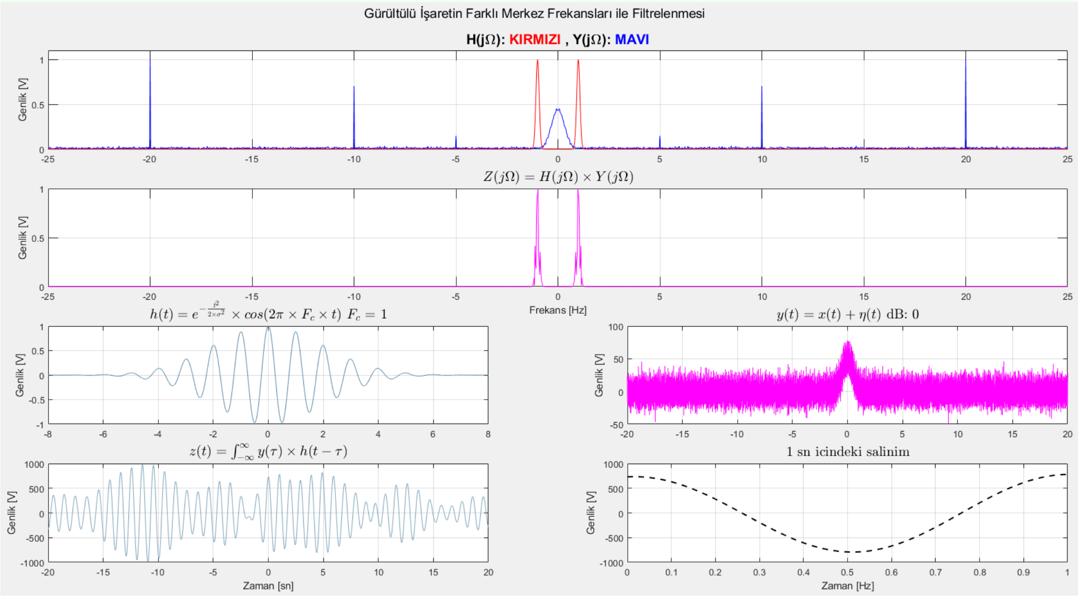


Figure 12: Farklı merkez frekansları altında gürültülü işaretin filtrelenmesi.

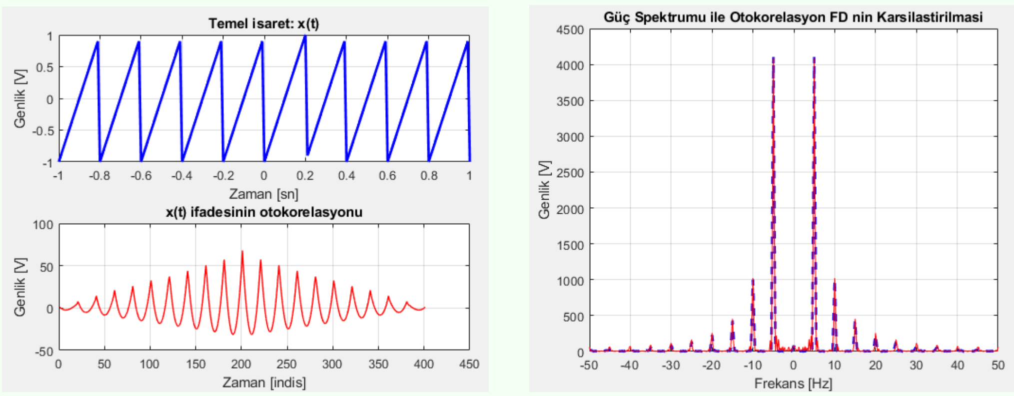
Gauss filtresinin merkez frekansı F_x, 0'dan faklı ise **GABOR FİLTRESİ** olarak isimlendirilir. Gabor filtreleri band geçiren filtrelerdir. Bu uygulamada tasarlanan Gabor filtresinin band genişliği dar olduğu için $x(t)$ içindeki sinüsoidal bileşenleri oldukça etkili bir şekilde filtreleyebilmektedir.

6 Otokorelasyon ve Fourier Dönüşümü

İşaretlerin otokorelasyonunun FD'si, frekans domeninde güç spektrumunu ifade eder. $x(t)$ zaman serisinin $Sxx(f)$ güç spektrumu, gücün bu sinyali oluşturan frekans bileşenlerine dağılımını tanımlar. Fourier analizine göre, herhangi bir fiziksel sinyal, bir dizi ayrık frekansa veya kesintisiz bir aralıktaki bir frekans spektrumuna ayrıştırılabilir. Belirli bir sinyalin (gürültü dahil) frekans içeriği bakımından analiz edilmesinin istatistiksel ortalaması, spektrum olarak adlandırılır.

```
clear all, close all; clc
Fs = 100;   % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
Ts = 1/Fs;  % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

t = -1:Ts:1; % [-20 , 20] arasi bir zaman dilimi

% cos square sawtooth
F0 = 5;
x = sawtooth(2*pi*F0*t);
y = xcorr(x);
```

```
figure,
subplot(211),plot(t,x,'b','linewidth',2),grid on
xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('Temel isaret: x(t)' )

subplot(212),plot(y,'r','linewidth',1),grid on
xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
title('x(t) ifadesinin otokorelasyonu' )

X = fftshift(abs(fft(x)));
Y = fftshift(abs(fft(y)));

Fa = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(X));
Fb = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Y));

figure,
plot(Fa,X.^2,'--b','linewidth',2),hold on,plot(Fb,Y,'r'),
xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]'),grid on
title('Guc Spektrumu ile Otokorelasyon FD nin Karsilastirilmasi' )
```



(a) (b)

Figure 13: (a) Üçgen dalganın kendisi ve otokorelasyon dizisi (b) Güç Spektrumu (Mavi), Otokorelasyonun FD'si (Kırmızı)

7 Deneyde Yapılacaklar

Deney kapsamında 3 soru bulunmaktadır. Her soru için mutlaka Şekil (14)'de gösterildiği gibi yeni sekme açılmalı ve S_1 olarak isimlendirilmelidir. Sorular altında bulunan alt başlıklar için sekme sayfası $\%\%$ ile bölümlere ayrılmalıdır ve S_1a olarak isimlendirilmelidir. $CTRL + ENTER$ ile her bir bölüm bağımsız olarak çalıştırılabilir. **Soru altındaki şıkların cevabı kısa olsa bile mutlaka %% ile her şıkkı bölmeyi unutmayınız.**

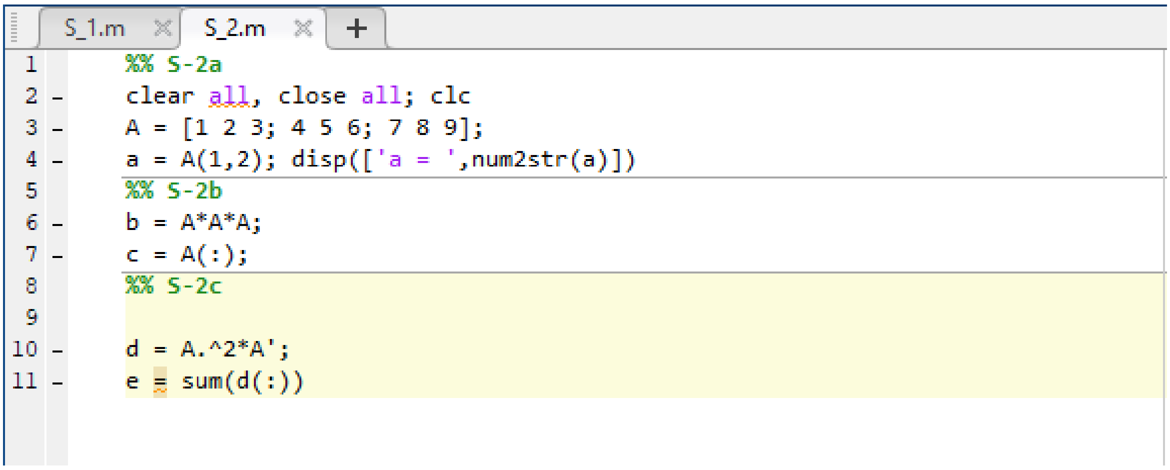


Figure 14: Örnek çözüm sistematiği

7.1 İşaretlerin Frekans Analizi ve Yorumlanması (30 pt)

S1: Gauss fonksiyonu haberleşme, olasılık teorisi ve makine öğrenmesi gibi konularda yoğun olarak kullanılmaktadır. Ayrıca Gauss fonksiyonunun türevide önemli bir işaret olup bir çok alanda kayda değer bir yeri vardır. Bu çalışmada Gauss işaretinin türevi üzerinden FD analizi yapılacaktır. Önemli: Deney esnasında her grup için farklı fonksiyon sorulacaktır.

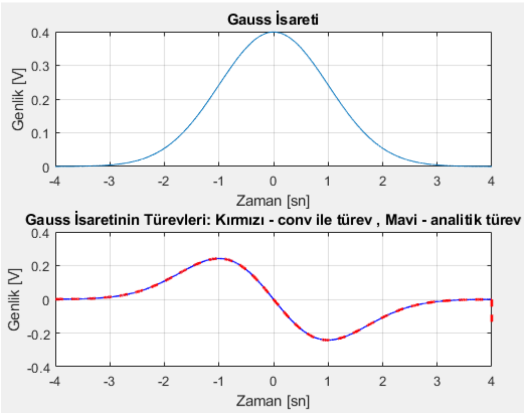
1a: $\sigma = 1$, $F_s = 1e3$ ve $t \in [-\alpha, \alpha]$ parametreleri ile $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma} \times e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}}$ Gauss fonksiyonunu **handle** fonksiyonu olarak yazınız. t'nin sınırları için verilen α değerini σ üzerinden fonksiyonun sıfır olduğu kabul edilen kıstas üzerinden belirleyiniz. (**6pt**)

1b: $g'(t) = -\frac{t}{\sigma^3 \times \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}}$ Gauss fonsiyonunun türev ifadesidir. $g'(t)$ ifadesini **handle** fonksiyon olarak yazınız. Dikkat: t ifadesi vektör olduğu için fonksiyonların matematiksel işlemlerinde **./**, **.*** olarak yazmayı unutmayınız. (**6pt**)

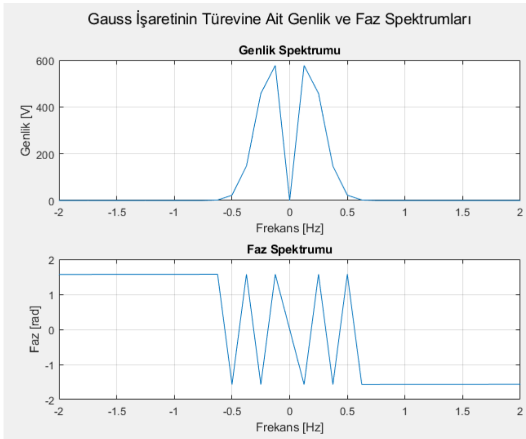
1c: *1a*'da Gauss fonksiyonu için yazdığınız handle fonksiyonunu kullanarak $x = g(t)$ üretiniz. conv ile yapılan türev alma metodu ile x'in türevini alınız ve *1b*'de yazdığınız $y = g'(t)$ handle fonksiyonu ile Şekil 15(a)'teki gibi sonucu karşılaştırınız. Grafiğinizin Şekil 15(a)'e olan benzerliği önemlidir. (**6pt**)

1d: *1c*'de elde ettiğiniz türev ifadesinin (handle veya analitik farketmez) FD'sini alınız. Genlik ve faz spektrumlarını eksen düzenli bir şekilde çizdiriniz. Grafik çizimleri için x ekseninde skalayı, *xlim([-2 2])* olarak seçiniz. NOT: Grafiğinizin Şekil 15(b)'e olan benzerliği önemlidir. *title*, *xlabel*, *ylabel* ayrıntılarına dikkat ediniz. (**6 pt**)

1e: Her grup için ayrı yorum sorusu. (**6pt**)



(a) Gauss işareti ve türevi



(b) Gauss türevinin FD analizi

Figure 15: S1 için cevap grafikleri

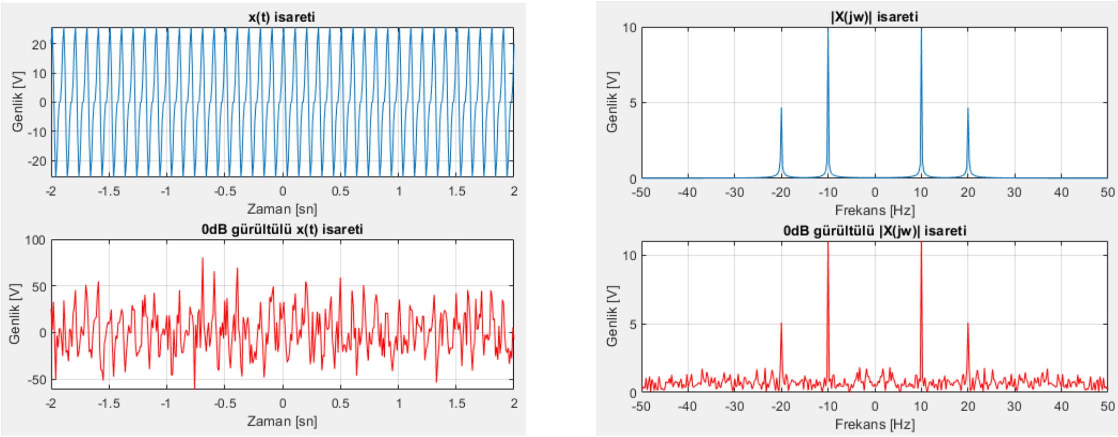
7.2 FD Analizinde Gürültünün Etkisi (30 pt)

S2: İki farklı alıcı için gönderilen mesaj işaretinin matematiksel formu $x(t) = 20 \times cos(2\pi \times 10 \times t) + 10 \times sin(2\pi \times 20 \times t)$ olarak verilmektedir. Verici tarafından yayılan işaretin alıcı tarafında $0dB$ SNR ile alındığı bilindiğine göre;

2a: $x(t)$ işaretini $F_s = 100$ ve $t \in [-2, 2]$ parametrelerini kullanarak oluşturunuz. $y(t) = x(t) + \eta(t)$ gürültülü işaretini **awgn** kullanarak türetiniz ve $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerini **subplot** ile çizdiriniz. (**10pt**)

2b: $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin FD analizinde genlik spektrumlarını hesaplayınız. Karşılaştırmak için **subplot** ile eksen düzenli olarak çiziniz. *2a* ve *2b* grafiklerini gürültü-işaret arasındaki ilişki temelinde yorumlayınız. (**10pt**)

2c: $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}}$, $\sigma = 0.25$ işaretini üretiniz. $z(t) = h(t) \times y(t)$ çarpma işlemini yapınız ve $y(t)$ ile $z(t)$ işaretlerinin genlik spektrumlarını **subplot** ile karşılaştrınız. Grafiklerdeki değişimi yorumlayınız. İpucu: Zamanda çarpma frekansta konvolüsyon. (**10pt**)



(a) (b)

Figure 16: 2a ve 2b için cevap grafikleri

7.3 Filtreleme (40 pt)

S3: Şekil (17)'da verilen $x_1(t)$: kare dalga (square), $x_2(t)$: üçgen dalga (sawtooth) ve $x_3(t)$: cos işaretlerinin grafikten okunarak üretilmesi üzerinedir. İşaretleri üretmek için $F_s = 5000$ ve $t \in [-2, 2]$ değerlerini kullanınız.

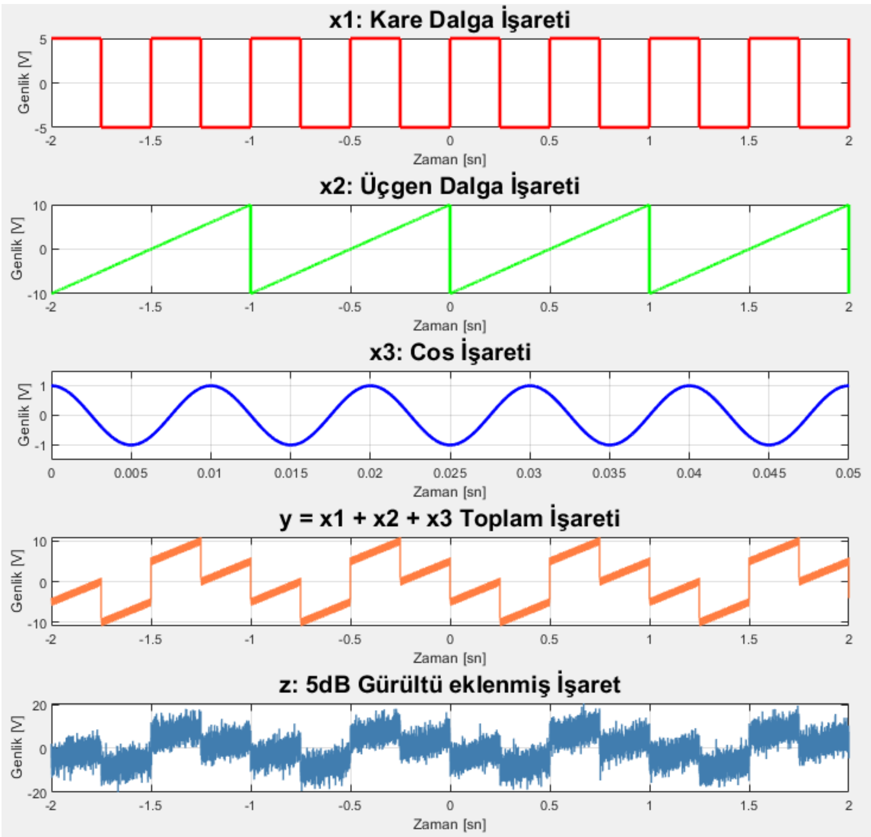


Figure 17: Gerçeklemesi yapılacak işaretler

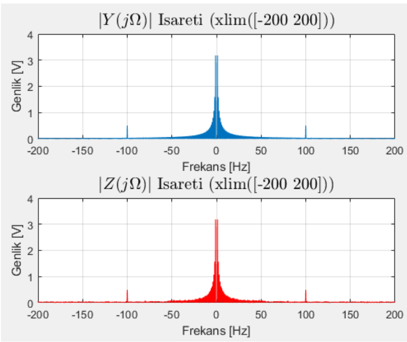
3a: $x_1(t)$, $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ işaretlerini ayrı ayrı oluşturunuz. $y(t)$ ve $z(t)$ işaretlerini elde ediniz ve Şekil (17)'daki grafiğin aynısını (renkler ve font büyüklükleri farklı olabilir.) çizdiriniz. $x_3(t)$ için **xlim([])** kullanınız. (**8pt**)

3b: $y(t)$ ve $z(t)$ işaretlerinin FD'sini alarak genlik spektrumunu **subplot** ile çizdiriniz. Eksenlere uygun etiketleri yazınız. (**8pt**)

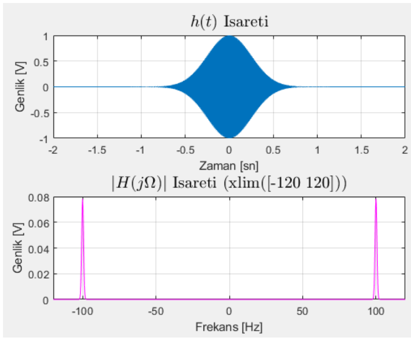
3c: Birim impuls cevabı $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times\sigma^2}} \times cos(2\pi \times F_0 \times t) \implies F_0 \sim x_3(t)$ ve $\sigma = 0.25$ filtresini üretiniz. Genlik spektrumunu hesaplayınız. $h(t)$ ve $|H(j\Omega)|$ işaretlerini subplot ile çiziniz. (**10pt**)

3d: $h(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin konvolüsyonunu *'same'* modunda alınız. Elde ettiğiniz işaret $g(t)$ olsun. (1) $g(t)$ işaretinin zamandaki hali, (2) $z(t)$ işaretinin genlik spektrumu ve (3) $g(t)$ işaretinin genlik spektrumunu subplot ile çiziniz. Etiketlerin ve başlığın font stilleri önemli değildir. (**10pt**)

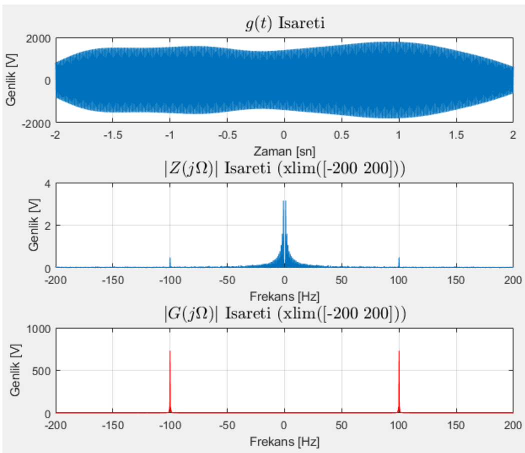
3e: Yorum sorusu. (**4pt**)



(a) 3b



(b) 3c



(c) 3d

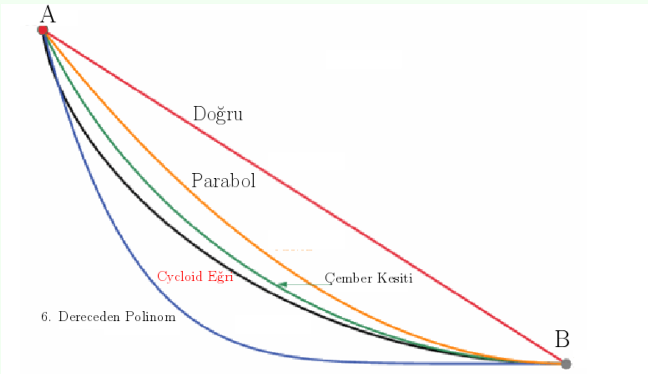
Figure 18: 3. soruya ait cevap grafikleri

DENEY SONU $\therefore$

8 İsteğe Bağlı Araştırma Konuları

8.1 Brachistochrone Problemi

1696'da Johann Bernoulli tarafında *Acta Eruditorum*'da ortaya atılan problem Şekil (19) gösterilen A ve B noktalarını birbirine bağlayan yollar arasında **en kısa zamanda** varılabilecek yolun hangisi olduğuna ilişkin bir problemdir. Sezgisel olarak "*en kısa yol en hızlı olandır.*" gibi gelsede sonuç sezgilerimizden çok farklıdır.



(a)

(b)

Figure 19: Brachistochrone problemi ve ilgili video

Kaynak

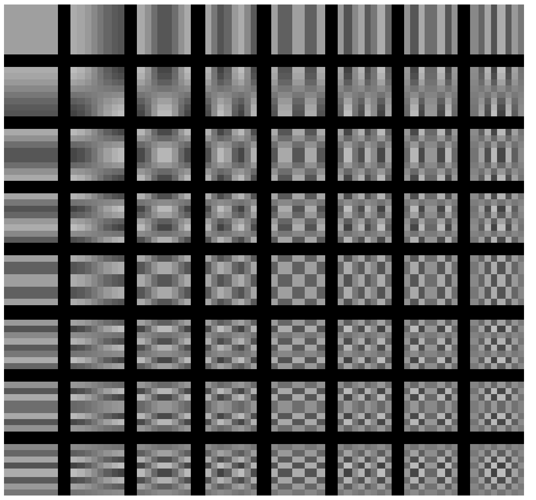
(resim): `www.maa.org/press/periodicals/convergence/`
(metin): history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone

8.2 Ayrık Kosinüs Dönüşümü (DCT)

FD'nin uygulama alanları arasında bulunan *veri sıkıştırma*, haberleşme sistemleri, depolama ve büyük veri analitiği gibi konular için hayati öneme sahiptir. Veri sıkıştırma **kayıplı** ve **kayıpsız** olmak üzere iki başlık altında incelenir. Kayıplı veri sıkıştırma algoritmalarından biri olan JPEG (Joint Photographic Experts Group), Ayrık Kosinüs Dönüşümü (*Discrete Cosine Transform*, (DCT)) tabanlı bir yapıya sahiptir. DCT, FD'nin reel dönüşüm türevlerinden biridir. Veriyi kompleks fonksiyonlar tabanında açmak yerine reel bir dönüşüm sistematiği sunan DCT sayesinde yüksek boyutlardaki görüntüler $\times 20$ veya $\times 50$ kata kadar gözün algılayamayacağı kayıplar ile sıkıştırma yapabilmektedir.

Kaynak

`www.mathworks.com/help/images/discrete-cosine-transform.html`



(a)

(b)

Figure 20: DCT'nin görüntü sıkıştırma için kullanılan taban fonksiyonları ve ilgili video

8.3 Güzel Bir İntegral

$x \in [0,1]$ arasında $f(x) = x^{-x}$ fonksiyonunun integrali, $k \in [1,2,3,...,\infty]$ olan tam sayıların $g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ toplamına eşittir... $\natural$ $\natural$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} \tag{4}$$

```
clear all, close all; clc

f = @(x) (x.^(-x));

int_f = integral(f,0,1);

sum_g = 0;
N_inf = 20;
for k = 1:N_inf
    sum_g = sum_g + k^(-k);
end

sprintf('İntegral sonucu: %.10f || Toplam sonucu:%.10f ',int_f,sum_g)
```

Command Window

```
ans =

    'İntegral sonucu: 1.2912859971 || Toplam sonucu:1.2912859971 '
```