

2.2 亮度适应。

$$2.3 \quad =c/v=2.998 \times 10^8(\text{m/s})/60(1/\text{s}) = 4.99 \times 10^6 \text{m} = 5000 \text{Km}.$$

2.4 a) 若需看清物体,光源波长有题目知这几个物体波长均小于需与物体大小相等或小于物体,有题目中需观测的物体大小知,选择远紫外可以观测题目中的物体。

b) 只用一种即可。

2.5. 根据图 2.3 得: 设能找到物体的长度为 $x \text{ mm}$, 则有: $500/x=35/7$; 解得: $x=100$, 所以相机的分辨率为: $1024/100=10$; 所以能解析的线对为: $10/2=5$.

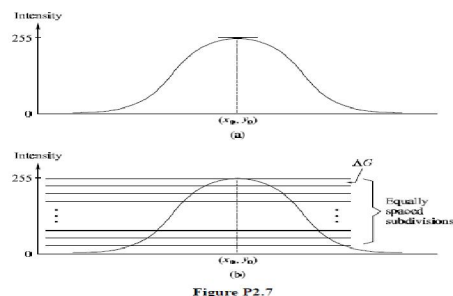
2.6 答: 一个可能的解决办法是装备一个单色相机与机械装置, 顺序放置一个红色、绿色、蓝色的通滤波器在镜头前面。最强的相机响应决定它的颜色。如果这三位车手的反应是一致的, 对象是白色的。一个更快的系统会利用三种配备有过滤器的不同相机。然后基于各个相机的响应进行分析。该系统将是一个有点贵, 但它将会更快、更可靠。

2.7

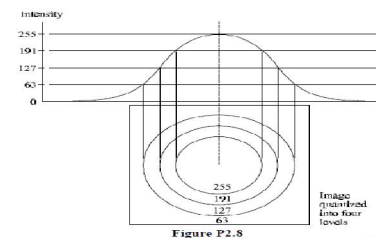
由题意:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= i(x, y)r(x, y) \\ &= 255e^{-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]} (1.0) \\ &= 255e^{-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]} \end{aligned}$$

一个横截面的图像被显示在图 P2.7(A)。如果强度量化使用 m 字节, 那么我们的情况如图 P2.7 (b) 所示, 其中 $4G=(255+1)=2m$ 。因为一个 8 灰度层次突然改变是能够被眼睛检测到, 那么, $4G=8=256=2m$, 或 $m=5$ 。换句话说, 32, 或更少, 会产生可见的虚假灰度值线性。



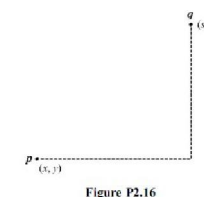
2.8 利用两位($m=2$)强度分辨率生产四个灰度级, 其值在 0 到 255 之间。对这个范围进一步划分的一个方法是被编码 0 和 63 之间的值全赋值为 63, 被编码在 64 和 127 之间的值全赋值为 127 等等。按照这种方法分得的结果如图 P2.8 所示。当然, 还有其他的办法细分范围 $[0, 255]$ 成四个波段。



2.9 (一) 在一个 8 位, 1024×1024 的图像中, 数据总量(包括启动、停止位)为 $(1024) \times 1024 \times [8 + 2]$ 位。在 56 K 波特的情况下, 需要传送的总时间为 $1024 \times 1024 \times [8 + 2] = 56000 = 187.25$ 秒或约 3.1 分钟。(b) 在 750 K 波特条件下需要时间按约为 14 秒。

2.10 水平与垂直方向上的比例为 16/9, 而本题中在垂直方向有 1125 行 (也就是在垂直方向有 1125 像素), 所以在水平方向每一行的像素为 $(1125) \times (16/9) = 2000$ 。该系统每 1/30 秒用红色、绿色和蓝色组成的像素绘满 $1125 \times 2000 \times 8$ 位图像的。两小时有 7200 秒, 所以在两个小时中传输的数据总量为 $(1125)(2000)(8)(30)(3)(7200) = 1.166 \times 10^{13}$ 位或 1.458×10^{12} 字节(例如, 约 1.5 Tbytes)。这些数字说明为什么图像数据压缩(第八章)是如此的重要。

2.16 (a) 与坐标 (x, y) 的像素 P 和像素 Q 点坐标为 (s, t) 之间的最短 4 通路显示在图 P2.16 中, 其中的假设是, 所有通路沿着 V 值。通路段的长度分别是 $|x-s|$ 和 $|y-t|$ 。由 D4 距离的定义可知, 通路总长度 $|X-S| + |Y-T|$, 如式 (2.5-16)。(这个距离是独立于任何通路之间可能存在的点。) D4 的距离, 显然是通路的长度是最短 4 通路的长度等于 $|x-s| + |y-t|$ 。出现这种情况时, 我们可以得到以下通路的元素 (1) 从 V 值, 从 P 到 Q, 和 (2) 在这样一种方式, 我们可以遍历最多两个轮流从 P 到 Q 的通路安排方向 (例如, 上和右)。(B) 这个通路可能不会是唯一, 取决于 V 和点值



2.17 (A) p 和 q 间的距离 D8(见图 P2.16)被定义为 $\max(|x-s|, |y-t|)$ 。D8 距离对角线的水平和垂直段一样, 类似 D4 的距离, 独立于是否之间存在一条在 p 和 q 之间的通路。由于在先前的问题, 最短 8 通路 D8 的距离等于当路径长度是 $\max(|x-s|, |y-t|)$ 。这发生在从 p 到 q 跟随着一条通路的元素(1)是 V 值的:(2)用这种方法排列: 我们可以通过通路从 p 到 q 只向一个方向, 每当对角是不可能的, 使转在水平或垂直(但不是两者)方向。(B) 路径可能未必是独特的, 根据 V 和价值观的分在前进的道路上。

2.18

参照 Eq.(2.6-1), 让 H 表示相邻的和操作, 让 S1 和 S2 表示两个不同子图像区的小值, 并让 $S1 + S2$ 表示相应的总数 S1 和 S2 像素, 如在 2.5.4 节里的解释。注意到附近的大小(即像素数字)并没有随着这总和的改变而改变。H 计算像素值是一个给定的区域。然后, $H(aS1 + bS2)$ 意味着:(1) 在每个子区域里乘像素,(2) 从 S1 到 S2 每个像素值相加(首先产生一个单独的子区域) (3) 在单独的子图像区域里计算所有像素值的和。让 $a p_1 b p_2$ 表示, 两个任意(但相应的)像素 $aS1 + bS2$ 。然后我们可以写

$$\begin{aligned}
H(aS_1 + bS_2) &= \sum_{p_1 \in S_1 \text{ and } p_2 \in S_2} ap_1 + bp_2 \\
&= \sum_{p_1 \in S_1} ap_1 + \sum_{p_2 \in S_2} bp_2 \\
&= a \sum_{p_1 \in S_1} p_1 + b \sum_{p_2 \in S_2} p_2 \\
&= aH(S_1) + bH(S_2)
\end{aligned}$$

依据 Eq. (2.6 - 1), 表明 H 是一个线性算子。

2.19 中值 表示, 数集的一半数值比它大, 另一半比它小。一个简单的例子能够表明, Eq. (2.6 - 1) 的平均算子操作。让 $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{4, 5, 6\}$, and $a = b = 1$. 在这种情况下, H 是平均算子。然后我们有 $H(S_1 + S_2) = \text{中值}\{5, 3, 9\} = 5$, 从那里知道, $S_1 + S_2$ 是 S_1 和 S_2 的和。接下来, 我们计算 $H(S_1) = \text{中值}\{1, 2, 3\} = 2$ 和 $H(S_2) = \text{中值}\{4, 5, 6\} = 5$ 。然后, 从 $H(aS_1 + bS_2) = aH(S_1) + bH(S_2)$, 因此, 子图像区域 S 中值的算子是非线性的。

3.1 (a) 由 $s = T(r) = Ae^{-Kr^2}$, $Ae^{-KL_0^2} = A/2$ 得:

$$-KL_0^2 = \ln(0.5)$$

$$K = 0.693/L_0^2$$

$$s = T(r) = Ae^{-\frac{0.693}{L_0^2}r^2}$$

(b) 由 $s = T(r) = B(1 - e^{-Kr^2})$, $B(1 - e^{-KL_0^2}) = B/2$ 得:

$$-KL_0^2 = \ln(0.5)$$

$$K = 0.693/L_0^2$$

$$s = T(r) = B(1 - e^{-\frac{0.693}{L_0^2}r^2})$$

(c) $s = T(r) = (D - C)(1 - e^{-Kr^2}) + C$.

3.2

$$(a) s = T(r) = \frac{1}{1 + (m/r)^E}$$

(b) See Fig. P3.2.

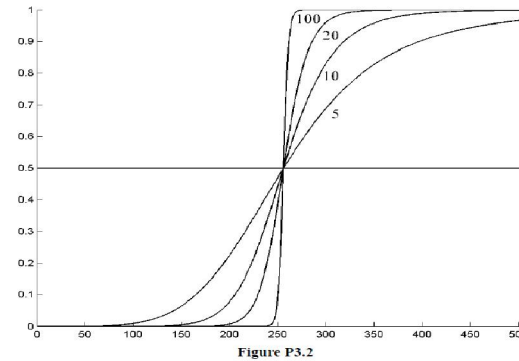
(c)、当 $r < m$ 时, $s = 0$; 当 $r > m$ 时, $s = 1$; 当 $r = m$ 时, $s = 1/2$ 。所以,

$$s = T(r) = \begin{cases} 0.0 & \text{when } r \leq m - 1 \\ 0.5 & \text{when } r = m \\ 1.0 & \text{when } r \geq m + 1. \end{cases}$$

如果 C 是计算机表示的最小正数, 并保证 C 值始终为正, 则 s 小于 C/2 时, 计算机默认值为 0。因为 $m = 128$, 由下面的公式可求出 E:

$$\frac{1}{1 + [m/(m-1)]^E} < C/2.$$

E 值将在 $s = 1$, 即 $r \geq m + 1$ 。



3.3 逐次查找像素值, 如 $(x, y) = (0, 0)$ 点的 $f(x, y)$ 值。若该灰度值的 8 比特的第 0 位是 1, 则该位置的灰度值全部置 1, 变为 255; 否则全部置 0, 变为 0。因此第 7 位平面 $[0, 127]$ 置 0, $[128, 255]$ 置 1, 第 6 位平面 $[0, 63]$, $[128, 191]$ 置 0, $[64, 127]$, $[192, 255]$ 置 255。依次对图像的全部像素进行操作得到第 0 位平面, 若是第 i 位平面, 则该位置的第 i 位值是 0 还是 1, 若是 1, 则全置 1, 变为 255, 若是 0, 则全置 0。

3.4 (a) 不同灰度级的像素将会减少, 因此, 导致统计图中的组成数量减少。因为像素不会改变, 这会导致一些剩余的直方图峰值增加。通常情况下, 减少级灰度值的变化会降低对比度。
(b) 最显著的效果就是图像会明显变暗。例如, 在一个 8 比特图像中, 最高比特下降将限制到 127 这是最亮的水平。因为像素值是个常数, 直方图的一些峰值将会增加。通常情况下, 直方图的形状将会变得更高更窄,

3.5 直方图均衡化是重新映射直方图各元素。要得到一个均衡的直方图, 通常需要重新分布像素密度, 因此有相同密度, n/L 像素值的 L 组, 这里, L 是允许离散密度等级的值, n 是输入图像的总像素值。直方图均衡化的方法没有规定这种重新分配的方法。

3.6

设像素的总数为 n, n_{r_j} 是输入图像的强度值, 由 $s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k n_{r_j} / n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^k n_{r_j}$, r_k 对应 s_k , 所以

以 $n_{s_k} = n_{r_k}$, 由 $v_k = T(s_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^k n_{s_j}$ 和 $n_{s_j} = n_{r_j}$ 得 $v_k = T(s_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^k n_{r_j} = s_k$ 由此得知, 第二次直方图均衡化处理的结果与第一次直方图均衡化处理的结果相同, 这里我们假设忽略不计四舍五入的误差。

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w) dw$$

直方图均化的变换函数是

回答这个问题需要注意 2 个重点, 第一重点是这个等式只是假设 r 是正值, 但是, 高斯密度扩展一般从负无穷到正无穷。承认这个事实很重要, 一旦知道这一点, 可以从几个方面克服这个困难。一个方法是做一些假设, 例如可以假设标准偏差足够小, 以至于曲线下的负值可以忽略不计, 另一个方法是扩大, 直到下方的负值可以忽略不计。第二个重点是承认转换函数本身。

$$s = T(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^r e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} dw$$

没有封闭的形式, 这是累积分布函数的高斯

密度, 要么是集成的数字, 或它的值是查表。第三重要的是, 应该记录 r 的高端, 同时, 高斯概率密度函数扩展到正无穷大, 这里的一种可能性, 假设使上述有关标准偏差相同。另一种可能性是通过足够大的值来划分, 因为下方的正值已经被忽略了 (这个比例降低了标准偏差)。另一种主要的方法可以选择直方图, 在这种方法下转换函数以总结的形式显示, 负值和正值也必须承认, 可能的结果是上述提到的问题依然适用。需要注意的是直方图是通过抽样连续函数得到的, 所以需要注意抽样的位数。最有可能是 8 位, 在这种情况下, 需要解决缩放范围, 使该范围是 [0, 255]。

3.8 概率密度函数如图 a, 这个概率密度函数的转换函数 $T(r)$, 如图 b, 因为 Pr 是概率密度函数所以 Tr 符合 3.3.1 的 (a) 和 (b), 然而我们从图 b, 从 s 到 r 的反变换不是一个单值, 从 $s=1/2$ 到 r 有无限可能的值, 这就证明了反变换在图中不是单值的 [1/4, 3/4]。

3.9

a 我们知道转换函数是单调的独值的并且在 [0, 1] 之间,

$$\begin{aligned} s_k &= T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} \quad k=0, 1, \dots, L-1. \end{aligned}$$

因为所有的 Pr 是正值, 所以 $T(r_k)$ 是单调的, 因为 Pr 是有限的, 所以求和的限制也是有限的,

所以 $T(r_k)$ 是有限的斜坡, 所以是单值函数, 最后, Pr 的总和是 1, 所以 $0 \leq s_k \leq 1$ 。

b 由题 3.8 可知, 如果一幅图像缺少灰度级, 直方均化转换函数在缺失的灰度间隔将不变。因此, 理论上, 在离散情况下, 逆映射不是单值。事实上, 假设我们希望进行逆变换, 因为如下的原因, 这个显得并不重要, 假设在开区间 (a, b) 没有灰度值存在, 所以 ra 是空的灰度级带开始的最后一个, rb 是空的灰度级带结束的最后一个, 对应的灰度级是 sa 和 sb 。但事实上, 在区间 (a, b) 上没有灰度级 r 存在, 同理, 在 sa 和 sb 之间不存在任何灰度级, 因此在多值的反函数上没有 s 到 r 的映射, 这将是现在的问题。在实际中, 逆变换不是单值并不是一个问题因为不需要考虑。

需要注意, 因为 $T(r_a)$ 和 $T(r_b)$ 不同, 所以从 sa 和 sb 映射回 T 不是问题, 同理应用到多个缺失灰度级中。

c 在灰度 r_k 不丢失的情况下, $T(r_k)$ 是严格单调的, 这意味着, 逆变换将是有限的斜坡, 将是个单值的。所以反变换才符合 3.3.1 中的 a 和 b 的条件。

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w) dw = \int_0^r (-2w + 2) dw = -r^2 + 2r.$$

由

$$v = G(z) = \int_0^z p_z(w) dw = \int_0^z 2w dw = z^2$$

得到

$$z = G^{-1}(v) = \pm\sqrt{v}.$$

3.11 第 k 个点邻域内的局部增强直方图的值为:

$P'_r(r_k) = n_k/n$ ($k=0, 1, 2, \dots, K-1$)。这里 n_k 是灰度级为 r_k 的像素个数, n 是邻域内像素的总个数, k 是图像中可能的灰度级总数。假设此邻域从左以一个像素为步长向右移动。这样最左面的列将被删除

的同时在后面又产生一个新的列。变化后的直方图则变成:

($k=0, 1, 2, \dots, K-1$)

这里 n_{lk} 是灰度级 r_k 在左面的列出现的次数, n_{rk} 则为在右面出现的次数。上式也可以改写成:

$$p'_r(r_k) = p_r(r_k) + \frac{1}{n} [n_{R_k} - n_{L_k}] \quad (k=0, 1, 2, \dots, K-1)$$

同样的方法也适用于其他邻域的移动:

这里 a_k 是灰度级 r_k 在邻域内在移动中被删除的像素数, b_k 则是在移动中引入的像素数:

$$p'_r(r_k) = p_r(r_k) + \frac{1}{n} [b_k - a_k] \quad (k=0, 1, 2, \dots, K-1)$$

$$\sigma_g^2 = \sigma_f^2 + \frac{1}{K^2} [\sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\eta_2}^2 + \dots + \sigma_{\eta_K}^2]$$

上式等号右边的第一项为 0 (因为 f 中的元素均为常数)。变量 $\sigma_{\eta_i}^2$ 是噪声的简单抽样, 它的方差

是 $\sigma_{\eta_i}^2$ 。因此 $\sigma_{\eta_i}^2 = \sigma_{\eta}^2$ 并且我们可以得到 $\sigma_g^2 = \frac{K}{K^2} \sigma_{\eta}^2 = \frac{1}{K} \sigma_{\eta}^2$ 。上述过程证明了式 (3.4-5) 的有效性。

3.12

首先, 设 $h_f(r_k)$ 是在 $f(x, y)$ 中灰度级为 r_k 的像素点数, 并假设在 $g(x, y)$ 中的所有像素值是常数 c 。

另外, 两幅图像的像素值均假设为正值。最后, 用 u_k 表示下列不同算术操作后图像像素的灰度值。

(a) 令 $u_k = r_k + c$, 可以得到总体的直方图 $h_{\text{sum}}(u_k)$, 且 $h_{\text{sum}}(u_k) = h_f(r_k)$

对所有 k 都成立。换言之, h_{sum} 的值 (高度) 与 h_f 相同。但是, 他们的坐标在灰度轴上被右移了 c 个单位。

(b) 类似地, 不同点的直方图 $h_{\text{diff}}(u_k)$ 与 h_f 有相同的组成, 但它们的坐标被左移常数 c 作为减法操作的结果。

(c) 同样的原因, 乘积项的直方图 $h_{\text{prod}}(u_k)$ 的值与 h_f 相同, 但是它们的坐标为 $u_k = c \times r_k$ 。

注意: 当 a、b 直方图的结果的间距未被影响, $h_{\text{prod}}(u_k)$ 各部分的间隔将会扩散 c 个单位。

(d) 假设 $c \neq 0$, $h_{\text{div}}(u_k)$ 的个部分值与 h_f 相同, 但是, 它们的坐标将为 $u_k = r_k / c$

。因此, $h_{\text{div}}(u_k)$ 各部分的间距将被压缩 $1/c$ 个单位。

上述解法在 $f(x, y)$ 为常数时仍然成立。在此情况下, 刚刚讨论的四个直方图将只有一部分。它们的坐标将会像 (a) - (c) 那样受到影响。

3.13

用 10bits (1bit 为标志位) 允许数的范围是 -511 到 511。反复减的过程可描述为:

$$\begin{aligned} d_K(x, y) &= a(x, y) - \sum_{k=1}^K b(x, y) \\ &= a(x, y) - K \times b(x, y) \end{aligned}$$

这里 K 是 $d_K(x, y)$ 在减法终止时在任何坐标系 (x, y) 中不超过 511 的最大值。

由于 $g(x, y)$ 至少有一点的像素值为 255, 在减法操作前超过 511, K 所取得的最大值为 3。这种情况将在 (s, t) , $a(s, t) = b(s, t) = 255$ 时发生。在此情况下, 不同图像的可能取值范围为 -510

到 255; 如果 $a(i, j) = 255$ and $b(i, j) = 0$

时后一种情况将发生。

K 可取的最小值为 2, 它将在 $a(s, t) = 0$ and $b(s, t) = 255$ 时发生。在此种情况下, 不同图

像像素点的取值范围为 -510 到 255。后一种情况将在 $a(i, j) = 255$ and $b(i, j) = 0$ 时发生。

3.14

用 $g(x, y)$ 表示“金”图像, 用 $f(x, y)$ 表示在装配线上输入的图像通过减法改变检测是基于计算

$d(x, y) = g(x, y) - f(x, y)$, 运算得到的 $d(x, y)$ 可用于改变检测中的两个基本方法。方法一:

逐像素分析法。此种情况下, 若 $d(x, y)$ 中的所有像素点在 $[T_{\min}, T_{\max}]$ 区间内, $f(x, y)$ 将被认为很接近“金”图像。通常情况下, 同一个门限值被用于正、负误差的情况下区间为 $[-T, T]$, 在此区间内 $d(x, y)$ 的所有像素均按顺序排列。第二个主要的途径是在 $|d(x, y)|$ 内对所有像素点求和 sum , 并将 sum 与阈值 S 进行比较。注意: 此处的绝对值是用来避免错误地删除。这是一个较原始的测试, 所以, 我们更倾向于第一种途径。

对于误差检测有三个基本元素需要严格控制 (1) 适当的注册 (2) 控制照明 (3) 足够低得噪声以使差值不受噪声变量的影响。第一种情况基本上表明待比较的须为相对应的像素点。两幅图像可能相同, 但将它们的部分相互调换, 再对它们进行差值比较将没有任何意义。通常, 生产的产品中有特殊的标记被用来进行机械化的图像对齐准则。

控制照明显然是重要的, 因为它的改变将会很大地影响到差值图像的值。常用于控制照明的一种途径是基于实际条件的强度等级。例如, 产品也许有一处或更多处严格颜色控制的部分且整幅图像的每个像素的强度将会被改变基于预期与实际处理后的颜色强度对比。

最后, 差值图像的噪声需要尽可能的低以使它不会影响到“金”图像与输入图像的比较。尽可能降低噪声影响的良好的信号强度的取得还有待继续研究。另一种途径是应用图像处理技术 (如均值滤波) 来降低噪声。

显然, 如果刚才描述的基本主题有所变化, 将会产生一个数字。例如, 测试中的额外信息较应用的像素间阈值比较更复杂。相应的技术常被用于再分“金”图像为多区域并基于预期区域的内容在不同区域进行不同的检测。

3.15

$$\bar{g} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g_i = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f_i + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \eta_i$$

由 (3.4-3) 得

$$E\{\bar{g}\} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K E\{f_i\} + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K E\{\eta_i\}$$

所有 f_i 均为相同的图像, 故 $E\{f_i\} = f$ 且噪声的均值 $E\{\eta_i\} = 0$ 故 $E\{\bar{g}\} = f$ 。此过程证明了式 (3.4-4) 的有效性。

$$\bar{g} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g_i = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f_i + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \eta_i$$

由上述可得:

因为 f 的各元素是常数且 η_i 是不相关的, 故

$$\sigma_g^2 = \sigma_f^2 + \frac{1}{K^2} [\sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\eta_2}^2 + \dots + \sigma_{\eta_K}^2]$$

等号右边第一项为 0 (f 的各元素是常数), 变量 $\sigma_{\eta_i}^2$ 是噪声的简单抽样, 其方差为 σ_{η}^2 , 因此,

$$\sigma_{\eta_i}^2 = \sigma_{\eta}^2 \text{ 且可得}$$

$$\sigma_g^2 = \frac{K}{K^2} \sigma_{\eta}^2 = \frac{1}{K} \sigma_{\eta}^2 \text{ 上述过程证明了式 (3.4-5) 的有效性。}$$

最后灰度是正值所以 $z = \sqrt{v}$, 用 s 代替 v , 得到 $z = \sqrt{-r^2 + 2r}$ 。

3.16 参考 3.4.2, 当 $l=1$ 时, $g(1) = g_1$ and $3/2 g(1) = 3/2 g_1$

当 $l=K$ 时 $\bar{g}(K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g_i$ and $\sigma_{\bar{g}(K)}^2 = \frac{1}{K} \sigma_g^2$ 。

想要前面的式子是后面的十分之一, 即 $\frac{\sigma_{\bar{g}(K)}^2}{\sigma_{\bar{g}(1)}^2} = \frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{K} \sigma_g^2}{\sigma_g^2}$ 可以推出 $K=10$ 。由于图像以 30 帧每秒的速度收集的, 静止时间需要三分之一秒。

3.18 一种最容易的寻找空间滤波器反复应用的方法是使用叠加,使 F 和 H 代表图像和滤波函数,相应的,假设平方图像的大小为 $N \times N$, F 表示为至多 N 的平方个图像的总和,其中,每一个只有一个非零元素。那么, $H * F$ 可以表示为 $h(x, y) * f(x, y) = h(x, y) * [f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_{N^2}(x, y)]$ 。假设 F 在中

心位置有数值 1,其他的像素点是 0, H 和 $f_i(x, y)$ 的卷积将产生 3×3 的矩阵,中间元素是 $1/9$,其他元素是 0。如果 H 被应用到这幅图像,图像的结果将如图所示。

3.19 (A) 原因如下:在 $N \times N$ 中值滤波器中有 N 的平方个点, N 是奇数,则将有 $(n^2 - 1)/2$ 个点小于等于中间值 ζ ,同样数量的值大于等于中间值。但是由于点数总是小于 N 的平方的二分之一。A 和 N 是整数, A 总是小于等于 $(n^2 - 1)/2$,因此,即使在极端情况下,所有的点都被滤波器包括了。没有足够的点和中值相等,如果在滤波器上的中心点是一个聚点,他将被设置为背景暗区的中值,因此将被削弱。显然,这个结论可以应用到非极端的情况,当被滤波器包括的聚点的数量小于像素图团的最小值的时候

(B) 不会

3.20 (A) 中值是 $\zeta = [(n^2 + 1)/2]$ 的最大值

(B) 一旦中指被找出,我们简单的删除邻域边缘的值,再合适的位置插入合适的值

3.26 锐化掩模是用 $A=1$ 的高通滤波。下图列出了基于这个等式的两种可能解决的方法,左右两边的图分别一致对应于等式中第一个和第二个线路。

1	1	1
1	-7	1
1	1	1

(a)

-1	-1	-1
-1	9	-1
-1	-1	-1

(b)

Problem 3.26.

3.27 考虑到下列公式

$$\begin{aligned}
 f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) &= f(x, y) - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\
 &\quad + f(x, y-1) - 4f(x, y)] \\
 &= 6f(x, y) - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\
 &\quad + f(x, y-1) + f(x, y)] \\
 &= 5 \{ 1.2f(x, y) - \\
 &\quad \frac{1}{5} [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\
 &\quad + f(x, y-1) + f(x, y)] \} \\
 &= 5 [1.2f(x, y) - \bar{f}(x, y)]
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{f}(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 预先确定的临域的平均数,更确切的说就是以 (x, y) 为中心并且包括中心像素以及四个相邻像素。把上面的等式的最后一行的常量视为均衡因子(或比例因子),我们可以写出

$$f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) \sim f(x, y) - \bar{f}(x, y).$$

等式的右端就是等式 3.77 给出的锐化掩模处理的定义。因此验证了从衣服图像中间去相应的拉普拉斯图像等同于对图像做锐化掩模处理。

3.28 (a) 从问题 3.25 中

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \quad \text{和} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

或

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

因此,我们看到的大小是一种各向同性梯度算子

(b) 从上面的结果得

$$|G_x| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \quad |G_y| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|,$$

$$|G_{x'}| = \left| \frac{\partial f}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right|,$$

$$|G_{y'}| = \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| = \left| -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \right|.$$

显然得到

$$|G_{x'}| + |G_{y'}| \neq |G_x| + |G_y|.$$

4.1 将 $f(x)$ 直接带入 $F(x)$ 得:

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{r=0}^{M-1} F(r) e^{j2\pi r x / M} \right] e^{-j2\pi u x / M} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} F(r) \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi r x / M} e^{-j2\pi u x / M} \\
 &= \frac{1}{M} F(u) [M] \\
 &= F(u)
 \end{aligned}$$

同理 将 $F(x)$ 带入 $f(x)$ 可得。

4.2

傅里叶变换是线性的 iff:

$$\Im [a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] = a_1 \Im [f_1(x, y)] + a_2 \Im [f_2(x, y)]$$

其中 a_1 和 a_2 是任意常数。由二维傅里叶定义知:

$$\begin{aligned}
\Im[a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] \\
&\quad e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} a_1 f_1(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\
&\quad + \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} a_2 f_2(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\
&= a_1 \Im[f_1(x, y)] + a_2 \Im[f_2(x, y)]
\end{aligned}$$

这证明了线性。反变换亦如此证明。

4.3

解答：在频域中一个常数 A 的傅里叶反变换是在空间域中一个强度为 A 的脉冲。把脉冲与图像做卷积相当于每个像素乘以脉冲值。

4.4 本题的关键是要知道： $(u^2 + v^2)$ 可以被距离平方 $D^2(u, v)$ 取代。这把问题简化为一个变量，计数更简单。我们定义 $w^2 \triangleq D^2(u, v) = (u^2 + v^2)$ 。

变换如下：

$$H(w) = e^{-w^2/2\sigma^2}$$

傅里叶反变换是：

$$\begin{aligned}
h(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(w) e^{j2\pi wz} dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2\sigma^2} e^{j2\pi wz} dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [w^2 - j4\pi\sigma^2 wz]} dw
\end{aligned}$$

现在利用恒等式：

$$e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} e^{\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} = 1$$

在积分域中插入这个恒等式，得：

$$\begin{aligned}
h(z) &= e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [w^2 - j4\pi\sigma^2 wz - (2\pi)^2 \sigma^4 z^2]} dw \\
&= e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [w - j2\pi\sigma^2 z]^2} dw.
\end{aligned}$$

下面利用变量变换 $r = w - j2\pi\sigma^2 z$ 。由 $dr = dw$ ，则以上积分变为：

$$h(z) = e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

最后，我们把方程式乘除 $\sqrt{2\pi}\sigma$ ，得

$$h(z) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \right]$$

方括号内的表达式为高斯概率密度函数，这个表达式从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分值是 1。则，

$$h(z) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}}$$

回到两个空间变量得到最后结果：

$$h(x, y) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2)}$$

4.5

空间域滤波器是通过频域滤波器的傅里叶反变换所得：

$$\begin{aligned}
h_{\text{hp}}(x, y) &= \Im^{-1}[1 - H_{\text{lp}}(u, v)] \\
&= \Im^{-1}[1] - \Im^{-1}[H_{\text{lp}}(u, v)] \\
&= \delta(0) - \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2)}
\end{aligned}$$

4.6

解答：(a) 首先，已知 $(-1)^{x+y} = e^{j\pi(x+y)}$ ，则

$$\begin{aligned}
\Im[f(x, y) e^{j\pi(x+y)}] &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) e^{j\pi(x+y)}] e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) e^{-j2\pi(-\frac{xM}{2} - \frac{yN}{2})}] \\
&\quad e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(x[u - \frac{M}{2}] + y[v - \frac{N}{2}])} \\
&= F(u - M/2, v - N/2).
\end{aligned}$$

(b) 如(a)中一样的格式，得：

$$\begin{aligned}
\Im[f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/M)}] &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/M)}] \\
&\quad e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \\
&\quad e^{-j2\pi(x[u - u_0]/M + y[v - v_0]/N)} \\
&= F(u - u_0, v - v_0)
\end{aligned}$$

同样地，

4.7 来自原图片中左边等间距的垂直条。

4.8 参照等式 (4.4-1)，在 4.4 节中所讨论高通滤波器的传递函数均等于 1 减去的低通滤波器的传递函数，而低通滤波器在原点的没有脉冲，1 的傅立叶逆变换会在原点产生一个脉冲，所以高通滤波器会在原点有个尖峰。

4.9 共轭复数只是从 j 变成了 -j 在逆变换中，所以右边的图像可以通过下述过程求出：

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^{-1}[F^*(u, v)] &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(u(-x)/M + v(-y)/N)} \\ &= f(-x, -y)\end{aligned}$$

其过程只是将 $f(x, y)$ 左右上下颠倒, 因而产生了右边的图像

4.10 如果 $H(u, v)$ 是实对称的, 那么

$$H(u, v) = H^*(u, v) = H^*(-u, -v) = H(-u, -v).$$

在空间域的过滤器传递函数为

$$h(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)] = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}.$$

有

$$\begin{aligned}h^*(x, y) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} H^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} H^*(-u, -v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= h(x, y) \quad (\text{real}).\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}h(-x, -y) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(-u, -v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= h(x, y) \quad (\text{symmetric}).\end{aligned}$$

4.11 由式 (4.2-30), 我们很容易地找到一维连续卷积的定义式

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha.$$

它的傅里叶变换是

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(x) * g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha \right] e^{-j2\pi ux} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) e^{-j2\pi ux} dx \right] d\alpha.\end{aligned}$$

括号内部是 $g(x - \alpha)$ 的傅里叶变换, 而且

$$\mathfrak{F}[g(x - \alpha)] = G(u) e^{-j2\pi u\alpha}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(x) * g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) [G(u) e^{-j2\pi u\alpha}] d\alpha \\ &= G(u) \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-j2\pi u\alpha} d\alpha \\ &= G(u) F(u).\end{aligned}$$

这证明, 在频域相乘等于在空域的卷积。类似的, 空域相乘等于在频域的卷积

4.12 (a) 环其实有一个黑暗的中心区, 作为一个高通滤波操作的结果 (下面的图像显示的只有高通滤波的结果)。然而, 黑暗的中心区用低通滤波器得到平衡。最后的结果看起来如此明亮的原因是环的边界上的不连续性 (边) 比其他地方的像素高得多, 从而使平均面积的灰色水平占主导地位。

(b) 傅里叶变换滤波是一个线性的过程。顺序并不重要。



$$\begin{aligned}4.13(a) \text{ 应用一次滤波器得到: } G(u, v) &= H(u, v) F(u, v) \\ &= e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} F(u, v).\end{aligned}$$

由此可知, 使用 K 次表滤波器得到: $G_K(u, v) = e^{-KD^2(u, v)/2D_0^2} F(u, v)$.

对 $G_K(u, v)$ 进行反离散傅里叶变换会得到 K 次通过高斯滤波器之后的图像结果。如果 K 足够大, 高斯低通滤波器会变成仅通过 $F(0, 0)$ 点的陷波滤波器。这种形式相当于图像的平均值, 所以存在一个 K 值来表示反复低通滤波器的次数, 而它的结果是产生一个恒定的图像。图像所偶像素值等于原始图像的平均值, 注意该结论适用于 K 值无限大, 在这种情况下滤波器在原点接近一个脉冲响应, 这样我们在滤波后仍然得到点 $F(0, 0)$ 。

(b) 为了保证 (a) 的结果, K 必须选择足够大, 使过滤器成为了一个档次通滤波器 (在原点) 对于 $D(u, v)$ 的所有值。牢记频率递增单位值, 这意味着

$$H_K(u, v) = e^{-KD^2(u, v)/2D_0^2} = \begin{cases} 1 & \text{if } (u, v) = (0, 0) \\ 0 & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

因为 u 和 v 是整数, 方程第二行的情况满足所有 $u \neq 0$ 和 $v \neq 0$ 。正如预期的, 当 $u = v = 0$, $D(u, v) = 0$, $H_K(u, v) = 1$ 。

我们希望把所有从原点的距离值大于 Q 的值 (即 u 和 v 大于 Q 的值), 变为滤波器的所有值为零。然而, 滤波器是高斯函数, 所以它的值对于有限的 $D(u, v)$ 始终大于 0。但是, 我们所处理的是数字, 现在正在使用的计算机最小的正数的代表是 $1/2$, 当小于 $1/2$ 时指定为零。假设这个数字是 k_{min} (不要混淆 K 与 k 的意思, 这是滤波器的应用次数)。因此, K 值过滤波器的功能只要大于 $0.5 * k_{min}$ 就足够了。也就是说, 我们希望其中 K 为最小值

$$e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2} < 0.5k_{\min}$$

或

$$\begin{aligned} K &> -\frac{\ln(0.5k_{\min})}{D^2(u,v)/2D_0^2} \\ &> -\frac{2D_0^2 \ln(0.5k_{\min})}{D^2(u,v)}. \end{aligned}$$

如上所述,我们希望这个方程满足所有的 $D^2(u,v)$ 。因为函数从原点的距离增加呈指数递减,我

们选择了 $D^2(u,v)$ 的最小可能值 1。给出的结果是 $K > -2D_0^2 \ln(0.5k_{\min})$

这是正数,因为 $k_{\min} < 1$ 。这个结果保证低通滤波器,将作为一个陷波滤波器,只留在原点转换的值。这个像素将不会改变 K 过去的值。

4.14 (a) 空间平均为

$$g(x,y) = \frac{1}{4} [f(x,y+1) + f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y-1)].$$

从公式 (4.62),

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \frac{1}{4} [e^{j2\pi v/N} + e^{j2\pi u/M} + e^{-j2\pi u/M} + e^{-j2\pi v/N}] F(u,v) \\ &= H(u,v)F(u,v), \end{aligned}$$

这里 $H(u,v) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi u/M) + \cos(2\pi v/N)]$ 是在频域滤波器的传递函数。

(b) 要看到这是一个低通滤波器,它有助于表达在前面的方程我们熟悉的中心职能的形式:

$$H(u,v) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi[u-M/2]/M) + \cos(2\pi[v-N/2]/N)].$$

考虑一个方便的变量。 u 的范围从 0 到 M , $\cos(2\pi[u-M/2]/M)$ 的值从 -1 开始,当 $u=M/2$ 时(滤波的中心)达到峰值 1,然后当 $u=M$ 时再一次降到 -1。因此,我们了解到滤波器的振幅因远离中心滤波器的振源而减小,这是低通滤波器的特征。当同时考虑到两个参数时,一个类似的讨论更容易进行。

4.15 (a) 题中给出 x 方向的不同形式,类似的也给出 y 方向的不同表达式,空间域的滤波函数如

下: $g(x,y) = f(x,y) - f(x+1,y) + f(x,y) - f(x,y+1)$ 。

根据公式 (4.6.2) 得

$$\begin{aligned} G(u,v) &= F(u,v) - F(u,v)e^{j2\pi u/M} + F(u,v) - F(u,v)e^{j2\pi v/N} \\ &= [1 - e^{j2\pi u/M}]F(u,v) + [1 - e^{j2\pi v/N}]F(u,v) \\ &= H(u,v)F(u,v), \end{aligned}$$

其中 $H(u,v)$ 是滤波器函数

$$H(u,v) = -2j [\sin(\pi u/M)e^{j\pi u/M} + \sin(\pi v/N)e^{j\pi v/N}].$$

(b) 要证明这是高通滤波,我们需要用熟悉的中心函数形式来表示滤波器函数:

$$H(u,v) = -2j [\sin(\pi[u-M/2]/M)e^{j\pi u/M} + \sin(\pi[v-N/2]/N)e^{j\pi v/N}].$$

为了方便,我们考虑一个变量。 u 的范围从 0 到 M , $H(u,v)$ 从 $u=0$ 时的最大值 $2j$ 开始递减,当

$u=M/2$ (转移函数的中点)时,若同时考虑两个变量,则很容易得到相似的结论。 $H(u,v)$ 开始增大,在 $u=M$ 时再次达到最大值 $2j$ 。因此,该滤波器在原点处为 0,并且从原点开始以递增的距离增大。同理,当同时考虑两个变量时会得出相似的结论。

4.16 (a) 学生们能够解决这个问题关键在于将使用高通滤波器的数目(用 K 表示),做 $1-K$ 个

$$\begin{aligned} H_K(u,v) &= H_K(u,v)F(u,v) \\ &= [1 - e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2}] H(u,v), \end{aligned}$$

对应的低通滤波器来使用,因此

其中高斯低通

滤波器在问题 4.13 中提及。而直接将 $[1 - e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2}]$ 作为高斯低通滤波器的表达式并试图将它提高到 K 次幂的做法则无法得到正确的结果。

这个问题和问题 4.13 有着相应的解决方法。但是,这个滤波器将会接近于一个在去掉了 $F(0,0)$ 后产生一个平均值为 0 的图像的陷波滤波器(意味着有负像素)。因此,存在一个 K 值使得通过 K 次高通滤波后会产生一个恒定的图像。

$$H_K(u,v) = 1 - e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2} = \begin{cases} 0 & \text{如}(u,v)=(0,0) \\ 1 & \text{其他情况} \end{cases}$$

(b) 问题是确定 K 值使

由于 u 和 v 是整数,方程式第二行的条件在 $u>1$ 且/或 $v>1$ 时满足。当 $u=v=0$ 时,则 $D(u,v)=0$,且 $(u,v)=0$ 。

我们想要使所有距离振源大于 0 的滤波器的值为 1(也就是 u 或/与 v 的值大于 0),为了使 (u,v) 为 1,在 u 或/与 v 大于 0 的条件下指数项必须为 0。这与问题 4.13 中的要求相同,因此 4.13 的解决方案可以很好地应用在这里。

4.17 a 以卷积的形式给出滤波表达式,来减少空间域的处理过程。然后滤波后的图像由下式给出: $g(x,y) = h(x,y) \boxplus f(x,y)$ h 是空间滤波函数, f 是输入图像。

直方图处理结果为: $g_0(x,y) = T[g(x,y)] = T[h(x,y) \boxplus f(x,y)]$; T 表示直方图均衡化。如果先进行直方图均衡化,则有 $g(x,y) = T[f(x,y)]$, $g_0(x,y) = h(x,y) \boxplus T[f(x,y)]$: 总体来说, T 是由图像像素的属性决定的非线性的函数。因此, $T[h(x,y) \boxplus f(x,y)] \neq h(x,y) \boxplus T[f(x,y)]$, 并且先后顺序是有影响的。

b 如图 4.4 所显示的那样,高通滤波器严重降低了图像的对比度。尽管高频增强对其有所增强,但是其改善并不显著。因此,如果图像首先进行了直方图均衡化,那么在对比度方面的改善肯定会在滤波过程中丢失。因此,一般过程是先进行滤波,然后进行直方图均衡化。

4.18 答案是否定的。傅里叶变换是一个线性处理过程,然而平方和平方根参与梯度运算是一个非线性的操作。傅里叶变化可以用来计算衍生品,但是平方和平方根或是绝对值必须直接在

空间域计算。

4.19 这个方程对应的如图 4.27(f)。方程是： $g(x, y) = [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)] - 4f(x, y)$ ；正如 4.15 题一样， $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ ；其中

$$H(u, v) = \left[e^{j2\pi u/M} + e^{-j2\pi u/M} + e^{j2\pi v/N} + e^{-j2\pi v/N} - 4 \right] \\ = 2 [\cos(2\pi u/M) + \cos(2\pi v/N) - 2].$$

将滤波器转移到频率方形的中心：

$$H(u, v) = 2 [\cos(2\pi [u - M/2]/M) + \cos(2\pi [v - N/2]/N) - 2].$$

当 $(u, v) = (M/2, N/2)$ 远离 $H(u, v)$ 中心值得数会减小，但是这是拉普拉斯所预期的。

4.20 高通巴特沃斯滤波器函数是

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}.$$

我们想要当 $D(u, v)=0$ 的时候，有一个 r_1 值，为 $D(u, v)$ 的高值靠近 r_h 。方程：

$$H(u, v) = \gamma_L + \frac{(\gamma_H - \gamma_L)}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}.$$

n 控制着图像变化的锐度在 r_1 r_h 之间。

4.21 回调填充的原因是要在隐含在 DFT 中的周期间建立一个缓冲区。假设左侧的图像被无限次数的复制来覆盖 xy 平面。结果会是一个棋盘，每一个空格里是这个图片。现在加入在右边的图像做同样地事情，结果会是难以分辨的。因此，每一种形式的填充在图像间完成相同的分离。

4.22

(a) 图像延拓在零增加它的大小，但不是其灰度级内容，因此，填充图像的平均灰度级内容像。

这意味着 $F(0,0)$ 频谱图像延拓不到 $F(0,0)$ 将原始图像(记得 $F(0,0)$ 相应的平均值的形象)。

因此，我们可以想象 $F(0,0)$ 在低频谱的右边，与所有的值远离起源也被降低，覆盖范围窄的值。

那就是这个原因整体对比度较低这幅画在你的右边。

(b) 图像延拓在 0 处引入了重要的不连续的原始图像的边界。这个过程引入了强垂直的边缘，在那里图像突然结束，然后继续以 0 值。这些锋利的转换与频谱强度沿水平和垂直轴上显现。

4-23

就像问题在 4.9 中，以复杂的共轭的形象，反映在空间领域。因此，我们期望的结果 4.41(e) 的一个镜像(约两轴)。

4-25

因为 $M = 2^n$ ，我们可以写出等式 (4.6-47) 和 (4.6-48)，分别为 $m(n) = \frac{1}{2} M n$ 和 $a(n) = M n$ 。

用归纳法证明开始显示两个方程对于 $n=1$ 成立； $m(1) = \frac{1}{2}(2)(1) = 1$ 。我们从 4.6.6 进行讨论的部分中知道这些结果是正确的，然后我们假定方程对于 n 成立，那么可以得出方程对于 $n+1$

也成立。从等式 (4.6-45) 中， $m(n+1) = 2m(n) + 2^n$ 。将 $m(n)$ 从上式替换得到，

$$m(n+1) = 2 \left(\frac{1}{2} M n \right) + 2^n \\ = 2 \left(\frac{1}{2} 2^n n \right) + 2^n \\ = 2^n (n+1) \\ = \frac{1}{2} (2^{n+1}) (n+1).$$

因此，等式 (4.6-47) 对所有的 n 都成立，从等式 (4.6-46) 中， $a(n+1) = 2a(n) + 2^{n+1}$ 将 $a(n)$ 从上式替换得到，

$$a(n+1) = 2Mn + 2^{n+1} \\ = 2(2^n n) + 2^{n+1} \\ = 2^{n+1} (n+1)$$

则证明了等式成立。

4.26

考虑一个恒星模型视为单个的脉冲函数 $\delta(x-x_0, y-y_0)$ ，则有 $f(x, y) = K \delta(x-x_0, y-y_0)$ 从中得到

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln K + \ln \delta(x-x_0, y-y_0) \\ = K' + \delta'(x-x_0, y-y_0).$$

对等式两边分别采取傅里叶变换，得到

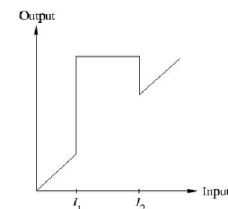
$$\mathfrak{Z}[z(x, y)] = \mathfrak{Z}[K'] + \mathfrak{Z}[\delta'(x-x_0, y-y_0)] \\ = \delta(0, 0) + e^{-2\pi i (u x_0 + v y_0)}.$$

从这个结果，很明显的看出，频率平面上的脉冲起源的贡献就是阐明了，一个陷波滤波器衰减组件考虑到了这个问题。

扩展单个脉冲的模型到多个脉冲(星)就是很直接的。这个滤波器也会是相同的。

4.27 解决这个问题需要下面几步；

1. 执行中值滤波操作
2. 在第一步基础上 强调高频
3. 直方图均衡化这个结果
4. 计算平均灰度值， k_0 ，把 $k-k_0$ 的值加到所有的像素中。
5. 执行下图的变换， r 是输入灰度值，把 RGB 填充到 RGB 显示器中。



5.10

(a)问题的关键是,无论任何时候像素为零,几何平均值为零。用一些分数值0和一些分数值1画一个理想的边缘轮廓。几何意味着将只提供价值的0和1,而算术平均值将提供中间值(模糊)。

(b)黑色是0,因此只要在窗口里德像素至少有一个是黑色,几何将表示返回值为0。由于膜中心能够成为原始黑色区域的外部,当这一切发生的时候,图像将变得更加浓厚。

问题5.11

要理解和谐滤波的行为的关键是想一下在附近周围一个不变的噪音冲动的像素,以及位于中心附近的噪声点。对于可见的噪声穗,它的值必须是远远地超过其相邻的值。也要记住分子的力量是1加上了在分母中的力量。

(a)通过说明,胡椒噪音是一个低的值(真实值为0)。当被光的值包围的时候这是最显眼的。然后中心像素(胡椒噪声),对总和将有很少的影响。假如被滤波跨越了的区域约为常数,这个比例将会接近附近区域的像素的值,并且将减少低值像素的影响。举例来说,这里是一些滤波的值在3x3区域与像素的值100的值为1的黑点的值:当Q=0.5,filter=98.78;当Q=1,filter=99.88;当Q=2,filter=99.99和当Q=5,filter=100.00。

(b)当中心点是大的且它的附近的点是小点的时候,相反的情况发生。

中心像素现在将会是最大的。然而,指数现在是消极的,所以小的点将支配结果。分子可以被认为不断提高为+1的能量并且相同的分母也能不断的提高的这一能量。那种持续是在附近的像素的值。所以,这个比例就是这样的值。

(c)当错误的极性使用大量的数字以防止盐噪音被提升到一个积极的力量,从而噪音将会压制结果。盐地噪声图像就会变得很轻。事实正好相反胡椒噪声图像将变得黑暗。

(d)当Q=-1,分子的值就等于在其附近的像素数(mXn)。分子的值成为总和,每一个是1的值超过在附近一个像素的值。这是相同的平均水平

1/A,A是一个图象平均值。

(e)在一个连续的区域,滤波返回了在该区域像素的值,和Q的值是相互独立的。

问题5.12

一个带通滤波波通过从1中汲取相应的带阻滤波而获得:

$$H_{bp}(u, v) = 1 - H_{br}(u, v).$$

然后:

(a)理想带通滤波:

$$H_{Ibp}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 1 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

(b)巴特带通滤波:

$$\begin{aligned} H_{Bbp}(u, v) &= 1 - \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}} \\ &= \frac{\left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}} \end{aligned}$$

(c)高斯带通滤波:

$$\begin{aligned} H_{Gbp}(u, v) &= 1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2} \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2} \end{aligned}$$

5.13

一个槽通滤波波通过从1中汲取相应的槽阻滤波而获得:

$$H_{np}(u, v) = 1 - H_{nr}(u, v).$$

然后:

(a)理想槽通滤波:

$$H_{Inp}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b)巴特槽通滤波:

$$\begin{aligned} H_{Bnp}(u, v) &= 1 - \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n} \\ &= \frac{\left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n} \end{aligned}$$

(c)高斯槽通滤波:

$$\begin{aligned} H_{Gnp}(u, v) &= 1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v)D_2(u, v)}{D_0^2} \right]} \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v)D_2(u, v)}{D_0^2} \right]} \end{aligned}$$

5.14

我们按如下操作:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} A \sin(u_0 x + v_0 y) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \end{aligned}$$

利用正弦函数的指数定义：

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

得到：

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{-jA}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{j(u_0x + v_0y)} - e^{-j(u_0x + v_0y)} \right] e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \\ &= \frac{-jA}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(u_0x/2\pi + v_0y/2\pi)} e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \right] - \\ &\quad \frac{jA}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(u_0x/2\pi + v_0y/2\pi)} e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \right]. \end{aligned}$$

这些都是傅里叶变换的功能

$$1 \times e^{j2\pi(u_0x/2\pi + v_0y/2\pi)}$$

并且

$$1 \times e^{-j2\pi(u_0x/2\pi + v_0y/2\pi)}$$

傅里叶变换的1给出了一个冲动的原点,以及冲动远点的指数变换,正如在4.6.1讨论的那样。因此：

$$F(u, v) = \frac{-jA}{2} \left[\delta \left(u - \frac{u_0}{2\pi}, v - \frac{v_0}{2\pi} \right) - \delta \left(u + \frac{u_0}{2\pi}, v + \frac{v_0}{2\pi} \right) \right].$$

5.15

从例子 (5.4-19)

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum \sum \{ [g(\gamma) - w\eta(\gamma)] - [\bar{g} - w\bar{\eta}] \}^2$$

$$K = 1/(2a+1)(2b+1),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial w} &= K \sum \sum 2 [g(\gamma) - w\eta(\gamma) - \bar{g} + w\bar{\eta}] [-\eta(\gamma) + \bar{\eta}] = 0 \\ &= K \sum \sum -g(\gamma)\eta(\gamma) + g(\gamma)\bar{\eta} + w\eta^2(\gamma) - w\eta(\gamma)\bar{\eta} + \\ &\quad \bar{g}\eta(\gamma) - \bar{g}\bar{\eta} - w\bar{\eta}\eta(\gamma) + w\bar{\eta}^2 \\ &= 0 \\ &= -\bar{g}\bar{\eta} + \bar{g}\bar{\eta} + w\bar{\eta}^2 - w\bar{\eta}^2 + \bar{g}\bar{\eta} - \bar{g}\bar{\eta} - w\bar{\eta}^2 + w\bar{\eta}^2 = 0 \\ &= -\bar{g}\bar{\eta} + \bar{g}\bar{\eta} + w(\bar{\eta}^2 - \bar{\eta}^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum \sum g(\gamma)\eta(\gamma) = \bar{g}\bar{\eta}.$$

$$w = \frac{\bar{g}\bar{\eta} - \bar{g}\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 - \bar{\eta}^2}.$$

$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\bar{\eta}^2(x, y) - \bar{\eta}^2(x, y)}$$

5.16

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta.$$

从例子 (5.5-13)

$$\text{即 } f(x, y) = \delta(x - a) \text{ 因此 } f(\alpha, \beta) = \delta(\alpha - a)$$

得出

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - a) e^{-[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]} d\alpha d\beta$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - a) e^{-[(x-\alpha)^2]} e^{-[(y-\beta)^2]} d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - a) e^{-[(x-\alpha)^2]} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(y-\beta)^2]} d\beta \\ &= e^{-[(x-a)^2]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(y-\beta)^2]} d\beta \end{aligned}$$

当 $\alpha = a$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(y-\beta)^2]} d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(\beta-y)^2]} d\beta$$

这是一个持续的形式,一个高斯密度方差

$$\sigma^2 = 1/2 \text{ 或者}$$

$$\sigma = 1/\sqrt{2}.$$

$$e^{-[(\beta-y)^2]} = \sqrt{2\pi(1/2)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(1/2)}} e^{-(1/2) \left[\frac{(\beta-y)^2}{(1/2)} \right]} \right].$$

减去的整体从无限数量的加上括号里面是1，因此

$$g(x, y) = \sqrt{\pi} e^{-(x-a)^2}$$

这是一个模糊的版本的原始图像

5.17

因为运动x和y方向的运动是独立的(在垂直x方向只在第一次,然后切换到运动只有在水平y方向起跳这个问题可以解决两个步骤。第一步是相同的分析而导致的例子(5.610),给出了模糊函数由于垂直运动

$$H_1(u, v) = \frac{T_1}{\pi u a} \sin(\pi u a) e^{-j\pi u a},$$

我们所在的直线运动的代表方程 $x_0(t) = at/T_1$ 。功能H1(u,v)会给我们一个朦胧的形象在垂直方向。模糊图像,然后开始在水平方向移动,将被应用。这只是第二滤波器应用传递函数

$$H_2(u, v) = \frac{T_2}{\pi u b} \sin(\pi u b) e^{-j\pi u b}$$

在我们假设形式 $y_0(t) = bt/T_2$ 运动y方向。因此,总体模糊传递函数,给出了这两种功能的产品。

$$H(u, v) = \frac{T_1 T_2}{(\pi u a)(\pi u b)} \sin(\pi u a) \sin(\pi u b) e^{-j\pi(u a - u b)},$$

整体模糊图像是

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} [H(u, v) F(u, v)]$$

在F(u,v)是输入图像的傅氏变换。

5.18

按照5.63过程

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T e^{-j2\pi u x_0(t)} dt \\ &= \int_0^T e^{-j2\pi u [(1/2)at^2]} dt \\ &= \int_0^T e^{-j\pi u at^2} dt \\ &= \int_0^T [\cos(\pi u at^2) - j \sin(\pi u at^2)] dt \\ &= \sqrt{\frac{T^2}{2\pi u a T^2}} [C(\sqrt{\pi u a T}) - j S(\sqrt{\pi u a T})] \\ C(x) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \int_0^x \cos t^2 dt \\ S(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt. \end{aligned}$$

这些是菲涅耳余弦和正弦积分。他们能找到的,例如,手数学函数的书,Abramowitz或其他类似之参考。

5.19

一个基本的方法线性模糊图像重建的图像转换成直角坐标到极坐标坐标。模糊将出现为一维匀速运动模糊沿μ-axis。任何技术在本章中讨论处理模糊沿一维均匀就可以应用来解决这个问题。图像的矩形坐标然后兑换成后得到恢复。数学解决的方法很简单。对于任何像素(x, y)我们产生一个相应的像素的极坐标原理(r, μ),在

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{和} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

我们产生一个相应的像素的极坐标显示所获得的图像将显示一个图像模糊,沿着μ-axis,除此之外,出现变形协调转换。从旋转的程度模糊被认为(它给出了=8弧度),我们可以使用相同的解决办法,我们用于匀速直线运动(见5.6.3),x=μ和y=μ得到的传递函数。任何方法在部分5.7到5.9就会适用。

5.20 测量背景的平均值。把图像的所有像素除了十字准线设为平均灰度值。表示出此图像的傅氏变换G(u,v)。因为十字准线的特点并给出了高度的准确性,我们能构建此模板的图像(相同的尺寸),使用此模板确定原图的灰度级。然后我们在正确的位置构建十字准线的模型(取决于给定的图像),利用所提供之尺寸和十字准线的灰度级。表示新图像的傅里叶变换F(u,v)。G(u,v)与F(u,v)的比值是一个模糊函数H(u,v)的估计。对于F(u,v)可能消失的值中,我们可以建立一个带阻滤波器,使用图5.2的方法。因为我们知道F(u,v),G(u,v)和H(u,v)的估计,我们也可以精确模糊函数的估计,用等式5.8.3的G和H代替,并调整K值以便获得F(u,v)更近似的结果(这个结果可以通过傅里叶反变换估计出来)。在这两种情况下滤波器可以用来模糊图像,如果需要的话。

5.2解决这一问题的关键是下面的函数

$$h(r) = \frac{r^2 - \sigma^2}{\sigma^4} e^{-r^2/2\sigma^2}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$, 是此函数的拉普拉斯(对r的二次导数)

$$h_0(r) = e^{-r^2/2\sigma^2}.$$

那是, $\nabla^2[h_0(r)]$ 等于给定的函数。然后我们知道从式 4.4 得到函数 $f(x, y)$

$$\mathfrak{F}[\nabla^2 f(x, y)] = -(u^2 + v^2)F(u, v)$$

因此, 我们简化了求高斯函数中 $e^{-r^2/2\sigma^2}$ 的傅里叶变换。从表格 4.1 中, 我们从高斯

对可以得到函数 $e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$ 的傅里叶变换, 其变换形式是

$$\mathfrak{F}\left[e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}\right] = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$$

因此, 退化函数的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \mathfrak{F}\left[\frac{r^2 - \sigma^2}{\sigma^4} e^{-r^2/2\sigma^2}\right] = \mathfrak{F}[\nabla^2 h_0(r)] \\ &= -(u^2 + v^2)F(u, v) \\ &= -\sqrt{2\pi}\sigma(u^2 + v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

5.22 这是一个简单的扩展问题。它的目的是为了熟悉维纳滤波器的各种条件。从式 5.8.3 得

$$H_W(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right]$$

其中

$$\begin{aligned} |H(u, v)|^2 &= H^*(u, v)H(u, v) \\ &= 2\pi\sigma^2(u^2 + v^2)^2 e^{-4\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

然后

$$H_W(u, v) = - \left[\frac{\sqrt{2\pi}\sigma(u^2 + v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}}{[2\pi\sigma^2(u^2 + v^2)^2 e^{-4\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}] + K} \right]$$

5.23 从式 5.9.4 得

$$\begin{aligned} H_C(u, v) &= \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \\ &= - \frac{\sqrt{2\pi}\sigma(u^2 + v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}}{2\pi\sigma^2(u^2 + v^2)^2 e^{-4\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)} + \gamma |P(u, v)|^2} \end{aligned}$$

其中, $P(u, v)$ 是拉普拉斯算子的傅氏变换。这是至于这个问题, 我们可以合理地解答。拉普拉斯算子的变换的表达式通过问题 4.19 中得到的。然而, 对 $P(u, v)$ 的代替, 这只会增加滤波器的要求, 并且不会简化表达式。

5.24 因为这个系统是假定的线性和位置不变, 因此可以用式子 5.5.17 举行。此外, 我们可以用叠加问题, 得到了系统响应的 $F(u, v)$ 和 $N(u, v)$ 。两个响应的和是完整的响应。首先, 仅用 $F(u, v)$

$$G_1(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

$$|G_1(u, v)|^2 = |H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2$$

然后, 仅仅用 $N(u, v)$

$$G_2(u, v) = N(u, v)$$

$$|G_2(u, v)|^2 = |N(u, v)|^2$$

所以

$$\begin{aligned} |G(u, v)|^2 &= |G_1(u, v)|^2 + |G_2(u, v)|^2 \\ &= |H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2 \end{aligned}$$

5.25

(a) 已知

$$|\hat{F}(u, v)|^2 = |R(u, v)|^2 |G(u, v)|^2.$$

有 5.24 可知

$$|\hat{F}(u, v)|^2 = |R(u, v)|^2 [|H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2].$$

1 令 $|\hat{F}(u, v)|^2$ 等 $|F(u, v)|^2$ 可得

$$R(u, v) = \left[\frac{|F(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2} \right]^{1/2}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \hat{F}(u, v) &= R(u, v)G(u, v) \\ &= \left[\frac{|F(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2} \right]^{1/2} G(u, v) \\ &= \left[\frac{1}{|H(u, v)|^2 + \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}} \right]^{1/2} G(u, v) \end{aligned}$$

and, because $|F(u, v)|^2 = S_f(u, v)$ and $|N(u, v)|^2 = S_n(u, v)$,

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{|H(u, v)|^2 + \frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)}} \right]^{1/2} G(u, v).$$

5.26 一种可行的解决方法是:

- 1) 利用平均值法去除图像噪声
- 2) 获取一副单一明亮的星星的模糊图像去模拟脉冲 (在望远镜的视野里, 星星越小越好, 一遍更接近的模拟教材中的脉冲)
- 3) 使用给定的 $H(u, v)$ 对该幅图像进行傅里叶变换
- 4) 使用变量 K 和维纳滤波知道获取较尖锐的图像

5.28

$$\text{空间变换: } x' = c_1x + c_2y + c_3$$

$$y' = c_4x + c_5y + c_6$$

灰度插补

$$v(x', y') = ax' + by' + c$$

6.1 从图中可知, $x=0.43$, $y=0.4$, 由 $x+y+z=1$ 可得 $z=0.17$, 这是三色值系数。我们感兴趣的是三色值 XYZ。由他们的变换公式: $x = X/(X+Y+Z)$, $y=Y/(X+Y+Z)$, $z=Z/(X+Y+Z)$, 可知他们的比例是相同的, 故可得: $X=0.43$, $Y=0.4$, $Z=0.17$

$$\begin{aligned} \text{空间变换:} \quad x' &= c_1x + c_2y + c_3 \\ y' &= c_4x + c_5y + c_6 \end{aligned}$$

灰度插补

$$v(x', y') = ax' + by' + c$$

6.2 用 c 表示给定的颜色, 并且给出它们的坐标, 用 (x_0, y_0) 表示, c 和 c_1 之间的距离是

$$d(c, c_1) = \left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right]^{1/2}$$

同样 c_1 和 c_2 的距离是

$$d(c_1, c_2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right]^{1/2}$$

c_1 占 c 得百分比用 p 表示为 $p_1 = \frac{d(c_1, c_2) - d(c, c_1)}{d(c_1, c_2)} \times 100$. c_2 的百分比用 p_2 表示: $p_2 = 100 - p_1$, 由上面的等式我们知道, 作为例子, 当 $c=c_1$ 时, 那么 $d(c, c_1)=0$, 并且 $p_1=100\%$, $p_2=0\%$, 同样当 $d(c, c_1)=d(c_1, c_2)$ 时, $p_1=0\%$, $p_2=100\%$, 从它们简单的关系中可以容易地得出它们的值。

6.3 在题 6.3 中, c_1, c_2, c_3 是所给的颜色三角形的三个顶点, c 是三角形内或其边界上的任一彩色点, 解决这个问题的关键是要认识到任何三角形边界的颜色是由包含这个点的两个顶点连接的线段的比例所组成的。

延长线段 c_3 和 c 与线段 c_1 和 c_2 相交于一点, 记交点为 c_0 , 因为我们有 c_1, c_2 的值, 如果知道 c_0 , 就可以用题 6.2 中的方法计算 c_0 中 c_1, c_2 所占的比例。在 c_0 中 c_1, c_2 的比例用 R_{12} 表示, 如果我们现在将颜色 c_3 加到 c_0 中, 由题 6.2 可得点沿线段向 c_3 移动, 对于任何一个沿着这条线的点, 我们可以通过习题 6.2 中所述的方法判断 c_3 和 c_0 的百分比, 要牢记的是任何一点的百分比 R_{12} 与连接 c_3 和 c_0 的线段比例保持一致, 沿着这条线的每个位置的颜色各不相同, 但是从 c_1 到 c_2 的比例保持不变。

如果我们能够得到 c_0 , 就可以确定比例 R_{12} 和 c_3 在颜色 c 中的比例。点 c_0 不难得到, 设 $y = a_{12}x + b_{12}$ 是连接 c_1, c_2 的直线, $y = a_{3c}x + b_{3c}$ 是连接 c_3 和 c 的直线。直线可以被唯一确定因为我们知道需用来确定直线系数的两个点的坐标, 确定坐标的交集方法很简单, 但很繁琐。我们所感兴趣的是方法, 而不是操作简单的力学公式, 所以不用给出细节。这里, 我们有 c_3 的百分比和 c_1, c_2 之间的比例, 让 P_1, P_2, P_3 分别表示这三种颜色的百分比, 既然我们已经知道 $p_1 + p_2 = 100 - p_3$, $p_1/p_2 = R_{12}$, 我们可以求出 P_1, P_2 。最后, 要注意这个问题通过与三角形其他两边中的一边交叉的相同方法解决, 另一边是必要的, 例如我们在前面讨论中所使用的直线有一个无限的斜率, 一个简单的测试, 决定 c 的颜色是否等于任何一个顶点将是这个过程的第一步, 这种情况下额外的计算是不需要的。

6.4 用彩色滤波器将其调到三类零件的颜色的波长。在适当的位置用一个特殊的滤波器, 只有具有适当波长的那类零件会在黑白摄像机上有明显的响应。一个自动化的装置在电脑的控制下控制滤波器的位置。如果其中一个是白色, 则三个滤波器的响应几乎相等并且很高。如果其中一个是黑色, 则三个滤波器的响应几乎相等并且很低。

6.5 在中心点有 $1/2R + 1/2B + G = 1/2(R+G+B) + 1/2G = \text{midgray} + 1/2G$, 由于增加了灰色分量和强度使人们看起来像纯绿色。

6.6 对于给定的图像, 最大的强度和饱和度的要求意味着 RGB 分量的值是 0 或 1 我们可以创建下表用 0 到 255 代表黑和白, 依次为

Table P6.6						
Color	R	G	B	Mono R	Mono G	Mono B
Black	0	0	0	0	0	0
Red	1	0	0	255	0	0
Yellow	1	1	0	255	255	0
Green	0	1	0	0	255	0
Cyan	0	1	1	0	255	255
Blue	0	0	1	0	0	255
Magenta	1	0	1	255	0	255
White	1	1	1	255	255	255
Gray	0.5	0.5	0.5	128	128	128

我们可以得到如图 6.6 的黑白图像

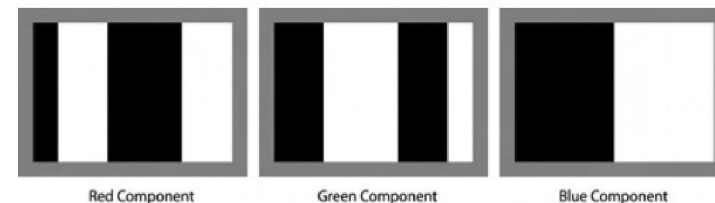


Figure P6.6

6.7 在每幅 8 比特图像中有 $2^8=256$ 种可能值。对于灰度色彩, 所有的 RGB 分量必须相等, 所以有 256 种灰度

6.8 (a) R 图像中的所有像素值都是 255。在 G 图像中, 第一列全为 0, 第二列全为 1, 直到最后一列全由 255 组成。在 B 图像中, 第一行全为 255, 第二行全为 254, 直到最后一行全为 0。

(b) 令坐标轴编号同图 6.7 相同。则: $(0,0,0)$ = 白色, $(1,1,1)$ = 黑色, $(1,0,0)$ = 青色, $(1,1,0)$ = 蓝色, $(1,0,1)$ = 绿色, $(0,1,1)$ = 红色, $(0,0,1)$ = 黄色, $(0,1,0)$ = 深红色。

(c) 不包括黑点或白点的边缘上的彩色是完全饱和的。其余边缘上的彩色从棱角至黑点或白点饱和度降低。

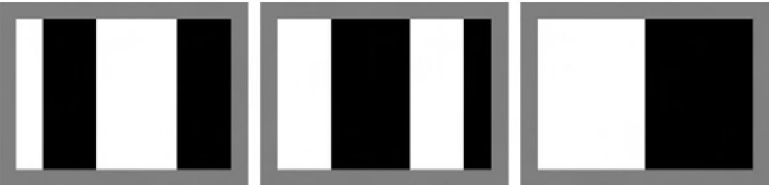
6.9 (a) 所示图像中, 最大强度和饱和度要求意味着 RGB 分量值是 0 或 1。我们可由式

$$\begin{aligned} C &= 1 - R \\ M &= 1 - G \\ Y &= 1 - B \end{aligned}$$

得到下表:

颜色	R	G	B	C	M	Y	单色 C	单色 M	单色 Y
黑色	0	0	0	1	1	1	255	255	255
红色	1	0	0	0	1	1	0	255	255
黄色	1	1	0	0	0	1	0	0	255
绿色	0	1	0	1	0	1	255	0	255
青色	0	1	1	1	0	0	255	0	0
蓝色	0	0	1	1	1	0	255	255	0
深红色	1	0	1	0	1	0	0	255	0
白色	1	1	1	0	0	0	0	0	0
灰色	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	128	128	128

从而得到下图中的单色图像。



青色分量 深红色分量 黄色分量

(b) 结果图像是起始 RGB 图像的补充。从左至右，彩条（同彩色环相一致）分别是白色，青色，蓝色，深红色，红色，黄色，绿色和黑色。中间的灰色背景不变。

6.10 等式
$$\begin{matrix} C & 1 & R \\ M & 1 & G \\ Y & 1 & B \end{matrix}$$
 揭示了 CMY 图像的每个分量都是相应 RGB 图像单一分量的函数——C 是 R 的函数

M 是 G 的函数，Y 是 B 的函数。为清楚起见，我们使用素数表示 CMY 分量。由式 $s_i = kr_i + (1 - k)$ (i=1,2,3)得，

$s_i = kr_i$ (i=1,2,3) (对应 R,G,B 分量)

由式
$$\begin{matrix} C & 1 & R \\ M & 1 & G \\ Y & 1 & B \end{matrix}$$
 可得，对应于 r_i 和 s_i 的 CMY 分量是（用素数表示），

$r_i' = 1 - r_i$ $s_i' = 1 - s_i$.

从而有 $r_i = 1 - r_i'$

$s_i = 1 - s_i = 1 - kr_i = 1 - k(1 - r_i')$

则 $s_i' = kr_i' + (1 - k)$

- 6.11 (a) 最纯的绿色是 00FF00，对应元素 (7,18)。
(b) 最纯的蓝色是 0000FF，对应元素 (12,13)。

6.12 解：
通过公式(6.2-4)使用公式(6.2-2)，我们得到的结果显示在表 P6.12。根据公式(6.2-2)，由于 $R = G = B$ since $\theta = \cos^{-1}(\frac{0}{0})$ ，当 R = G = B 时，色调没有定义。此外，由于公式 (6.2-3)

$S = 1 - \frac{3 \min(0)}{3-0} = 1 - \frac{0}{0}$ ，当 R = G = B = 0 时，饱和度没有定义。因此我们得到单色显示，如图 6.12 所示。

表 6.12

颜色	R	G	B	H	S		单色 H	单色 S	单色 I
黑色	0	0	0	—	0	0	—	—	0
红色	1	0	0	0	1	0.33	0	255	85
黄色	1	1	0	0.17	1	0.67	43	255	170
绿色	0	1	0	0.33	1	0.33	85	255	85
青色	0	1	1	0.5	1	0.67	128	255	170
蓝色	0	0	1	0.67	1	0.33	170	255	85
深红色	1	0	1	0.83	1	0.67	213	255	170
白色	1	1	1	—	0	1	—	0	255
灰色	0.5	0.5	0.5	—	0	0.5	—	0	128

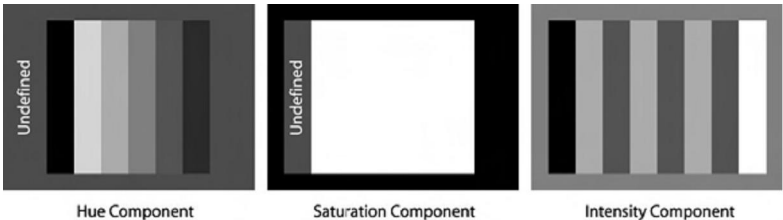


图 6.12

- 6.13 参照图 6.14(b)中的 HIS 彩色环，深紫色是在 270 度左右，根据性能需求产生一种颜色矩形，我们选择一个固定的强度 I 和最大饱和度 s (这些频谱的颜色假设是完全饱和的)。在矩形中第一栏使用这两个值和色调 270 度。下一栏(即随后的栏)将会使用 I 和 S 相同值，但是色调会减到 269 度，等一路下降到色调为 0 度时，这就是红色。如果图像仅限于 8 位，那我们也只能有 256 种色调，变化范围从 270 度下降到 0 度。这就需要不同的均匀间距按 1 度的比例增加，或者反过来说，在 255 度开始并按 1 度的比例实现，但这将遗漏大部分的紫色。如果超过 8 位，比例将会减小。更长的带将会按列复制。
- 6.14 这个问题有两个重要的方面。一个是在 HSI 空间趋近它，另一个是用极坐标创造一个色调图像，其值随着函数角度增加。这幅图的中心是任何已使用图像面积的中心。然后，例如，当角度为 0 时图像的色调值沿半径将都变成 0。然后角度递增 1，所有的值沿半径变为 1，以此类推。饱和度和强度图像的值在径向方向上从起始处线性递减。强度图像只是一个指定的常数。根据这些基本知识，不难写一个生成期望值的程序。

- (a) 根据所给条件, 图 6.16 (a) 中是原始光谱颜色, 并且, 问题中所提到的灰度级图像都是 8 比特图像。根据后面的条件我们知道, 色彩 (角度) 最多可以被划分成 256 个灰度值。因为颜色值可以用 0 到 360 度之间的角度值来描述。这就意味着, 对于一个 8 比特的图像来说, 相邻颜色值之间的增量是 $360/255$, 对于这个问题的另一种理解方法是, 整个 $[0, 360]$ 的颜色范围被压缩到 $[0, 255]$ 的范围里。因此, 例如, 黄色 (我们遇到的第一个重要的颜色), 它用角度描述的颜色值是 60 度, 而用这个问题中所给出的 8 比特图像里, 它的颜色值就变成了 43 (临近取整)。同理, 绿色颜色值从 120 度转化成了这幅图像中的 85。由此我们可以很轻易的计算出其他两个区域的颜色值分别是 170 和 213。中间区域是纯白色 (红绿蓝所占的成分等比例, 图 6.16 (a)), 所以, 它的颜色值定义为 0。这同样也适用于黑色背景。
- (b) 颜色为频谱颜色, 所以它们完全饱和。因此, 显示值 255 适用于所有的圆形区域。彩色图像的中心区域是纯白色, 所以它的饱和度为 0。
- (c) 得到灰度值的关键是实现在这个图中心部分的彩色图像是白色的, 这意味着完全饱和的红、绿、蓝要有相同的强度值。因此, 在强度图片的两个暗灰色的区域中灰度值为 85 (例如, 其它相应的区域要有相同的灰度值)。同样, 同等比例的二次色黄色, 青色, 洋红色生成白色, 所以两个浅灰色区域都有相同的灰度值 (170), 如图中显示的区域。图像的中心区域是纯白色, 所以它的灰度值是 255。