Sema Demir

İşaret ve Sistemler

~ İŞARET VE SİSTEMLER ~

test %40, %60

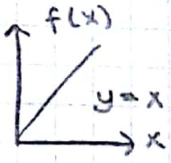
Signal and Systems
Oppenheim

1

işaret: Fiziksel bir durum hakkında bilgi taşıyan fonksiyon.

* $f(x)$ → fonksiyon

ses işareti
gürültü "



(mesela)

1 boyutlu işaret
1 girişi, 1 çıkışı var

* $f(x,y)$

$x^2+y^2=r^2$
(çember denk

2 boyutlu işaret

* 3 boyutlu video t.inci anda 3 boyutlu işarettir.

t eksik olursa 3 boyutlu değildir. $f(\vec{x},\vec{y},\vec{d},\vec{t})$ → en, boy, derinlik, zaman

1

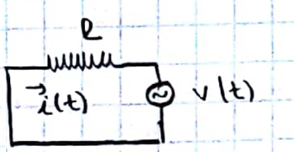
Sistemler: istenilen nitelikte işaret üreten ya da giriş işaretine göre çıkışlar üreten düzeneklerdir.

2

$\boxed{\text{sistem}}$ → cos(t) işareti üreten 1

sin(t) → $\boxed{\text{sistem}}$ → cos(t) 2

——— o ———



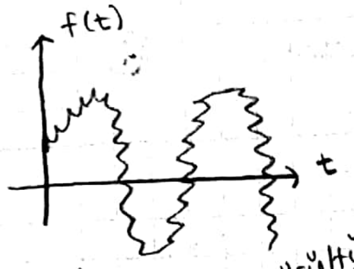
<u>Amaç</u>: Sistem analizi ve sentezinde istenilen nitelikte işaret elde etmek.

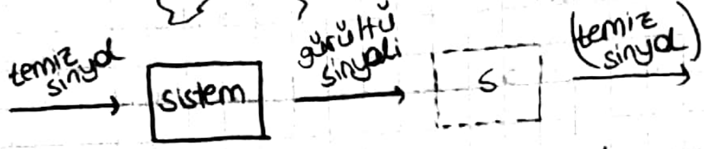
$v(t) = i(t) \cdot R$

$i(t), v(t)$ → işaret

Scanned by CamScanner

→ sin işaretine gürültü iş. katılmış





Temiz sinyal − $\left(\frac{\text{Tem}}{\text{sin}}\right)'$ = error (hatanın 0 olmasını isteriz)

Sistem analizi: Sistemin farklı girişlere nasıl yanıt verdiğinin bulunmasıdır. Yani sistemin çalışma prensibine karşılık gelir.

Sistem sentezi: Belirli bir fonksiyonu yerine getirecek sistemin geliştirilmesi yani sistem tasarımına karşılık gelir.

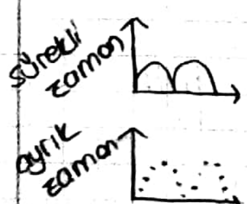
İşaretlerin Sınıflandırılması →
- sürekli - ayrık zaman
- Analog - sayısal işaret
- Periyodik - per olmayan
- Enerji ve güç işareti
- Rastgele ve rast olmayan
- Çift ve tek işaret

a) sürekli zaman − Ayrık zaman

sürekli zamanda işaretin bağlı olduğu değişken süreklidir. işaretin değerleri tüm anlarda tanımlıdır.

Ayrık zamanda ise işaretin bağlı olduğu değişken sadece belirli zamanlarda tanımlıdır. İşaret bu zamanlarda değer almaktadır.

Not ⇒ Bağımsız değ. "zaman" olmak zorunda değildir.

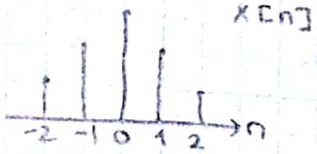


$x(t)$ } t bir değişken $t \in \mathbb{R}$

$x[n]$ } n ise bir indeks $n \in \mathbb{Z}$ (tam sayı)

↳ ayrık zamanı böyle gösteriyoruz

Scanned by CamScanner



Hava sıcaklığının her 100 mt'de 1°C azalması: Ayrık zaman

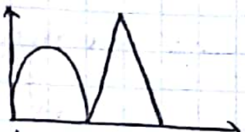
Ses işareti = sürekli zaman

b) Analog işaret - sayısal işaret

İşaret hem zamana hem de genişliğe göre sürekliyse analog işarettir.

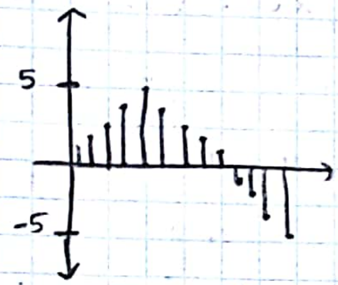
" zamana göre ayrık... genliğe göre sınırlıysa sayısal işarettir.

Yatay eksen	Düşey eksen	
S	S	Analog
S	A	örnekleme işareti
(sınırlı) A	S	×
(sınırlı) A	A	Sayısal



(Analog işaret)

sayısal işaret



Analog işaretten sayısal işaret nasıl elde edilir ?

Önce yatay sonra düşey eksene bakılır

1) Yatayda örnekleme yap

2) Genlikleri ayrıklaştır

c) Periyodik ve periyodik olmayan işaretler

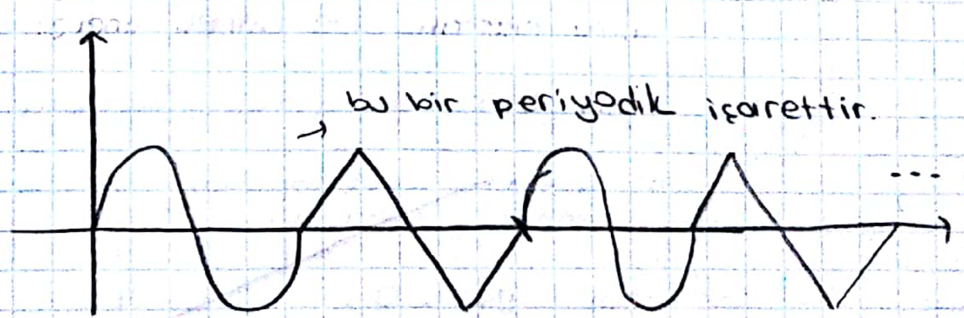
Belirli aralıklarla kendisini sürekli tekrar eden işaretler

değerleri " " " "

$$\boxed{x(t) = x(t+T)}$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$T = \frac{1}{f}$$



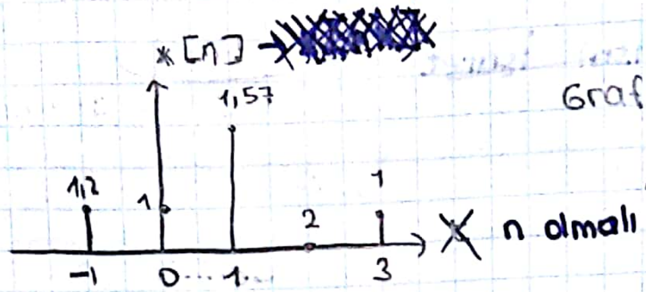
Periyodik bir sürekli zaman işareti bu eşitliği sağlamalıdır.

Scanned by CamScanner

Not ⇒ En küçük t değeri işaretin periyodudur.

Periyodik bir ayrık zaman işareti $x[n] = x[n+N]$

En küçük N değeri işaretin periyodudur.



Grafikteki yanlışları bul

Ayrık zamanlı

1.57, 1, 1, 1.2 genliği

→ Çoğunlukla ayrık zaman kullanacağız.

→ Genliği hakkında yorum yapmıyoruz.

2

28 Eylül 17
Perşembe

Enerji ve Güç İşaretleri

S.Z.E ⇒ $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt \qquad t_1 \leq t \leq t_2$

A.Z.E ⇒ $E = \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$

S.Z.G ⇒ $P_t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \qquad P = \frac{E}{T}$

A.Z.G ⇒ $P_n = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$

Sonlu enerjisi olan işaret enerji işaretidir.

Sonlu ve sıfırdan farklı güce sahip işaretler güç işaretidir.

```
if (enerji == sınırlı)
then (güç = 0)
else if (güç == sınırlı)
then (enerji = sonsuz)
```

Scanned by CamScanner

Not ⇒ Pratikte kullanılan tüm işaretlerin sınırlı bir enerjisi vardır. Bu işaretler enerji işaretleridir.

Rastgele ve Rastgele Olmayan İşaretler

matematiksel tanımı mevcut

Herhangi bir anda alacağı değeri bilinmeyen işaretlere rastgele işaret, " " bilinen " rastgele olmayan (deterministik) işaret denir.

verici ⟶ $s + 6 = s'$ $\qquad 6 - 6' =$ error

alıcı ⟶ $s' - 6' = s$ $\qquad s' - s =$ error

gürültü rastgele olmayan

$x + n$(noise) $= x'$

$x' - n' = y$

$(y - x) =$ error

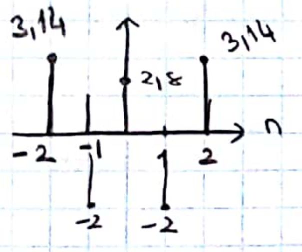
Çift ve Tek İşaretler

→Even →odd

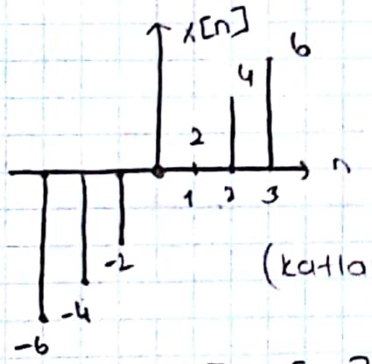
$x(t) = x(-t)$ $\qquad x(t) = -x(-t)$

$x[n] = x[-n]$ $\qquad x[n] = -x[-n]$

Tüm çift işaretlerdeki değerler toplamı = 0 dır (yanlış) olabilir



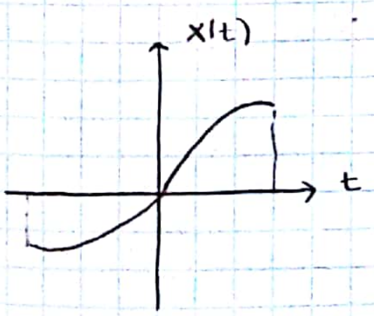
(sırayla yansıma)

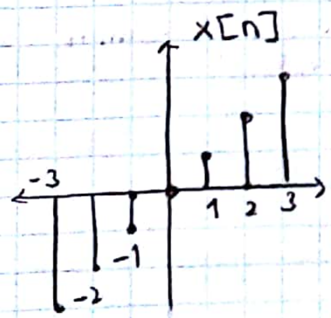


(katlama gibi)

$-x[n] = x[-n]$

Tek işaret





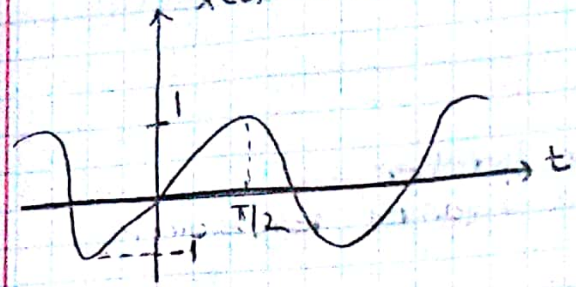
Tek işaret olması için orijin 0 olmalı

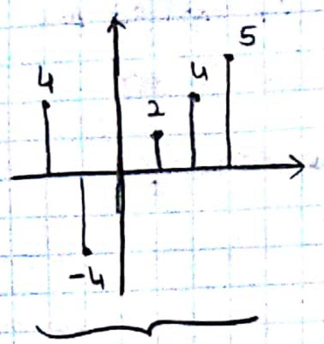
Tüm tek işaretlilerdeki değerler toplamı 0'dır ✓

sin işareti tektir. Tek

cos " çifttir. Çift

Tüm işaretler ya tektir, ya çifttir. Olmayabilir x(t) önemli





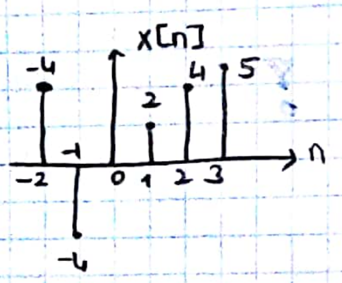
$$x(t) = x_ç(t) + x_t(t)$$
$$x(n) = x_ç[n] + x_t[n]$$

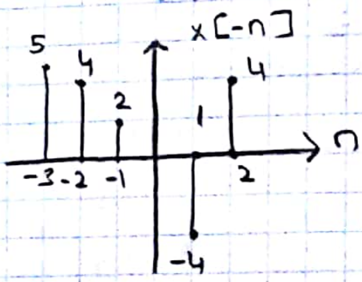
$$x_ç(t) = 1/2 \; \{ x(t) + x(-t) \}$$

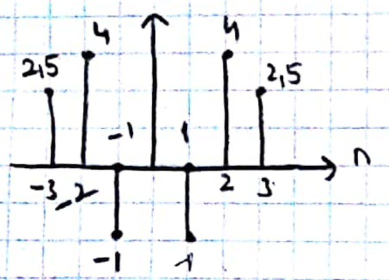
$$x_t(t) = 1/2 \; \{ x(t) - x(-t) \}$$

Bu ne tek
ne de çift

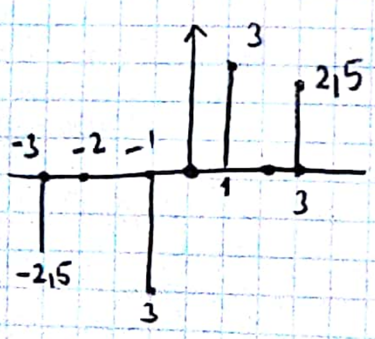
$$x_ç[n] = 1/2 \; \{ x[n] + x[-n] \}$$
$$x_t[n] = 1/2 \; \{ x[n] - x[-n] \}$$







x çift
$x_t[n]$

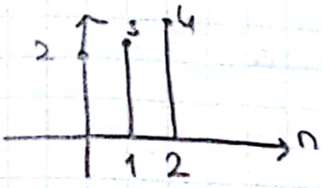


0'da 0 olmak zorunda
çünkü tek işaret

Sürekli ve Ayrık Zamanda işlemler

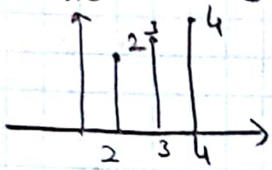
Öteleme: Aşağıdaki işlemlere karşılık gelir

$y(t) = x(t - t_0)$
$y[n] = x[n - n_0]$ } yani n_0'ın (t_0) değerine bağlı olarak işaretlerin sağa sola kaydırılması. n_0 veya t_0 değerinin poz. olması gerilemeye ; " " " " neg " ilerlemeye karşılık gelir



$x[n-2]$

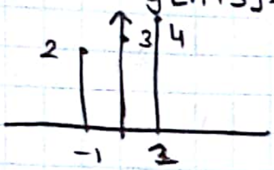
$x[n-2] = y[n]$



$y[n+3] = z[n]$

$y[n+3]$

$n_0 = -3$



3

5 Ekim Perşembe

Zamanda Ters Çevirme

Grafikteki değ. düşey eksene göre simetrisinin alınmasıdır

x çift işaret olduğunda

$y[n] = x[-n]$
$y(t) = x(-t)$

Zamanda Ters Çevirme ve Öteleme

$$y[n] = \underbrace{x[-n]}_{\text{ters çevirme}} + \underbrace{x[n-n_0]}_{\text{öteleme}}$$

$y[n] = x[-n - n_0]$ ✓

$y[n] = x[-n-n_0]$ / $y(t) = x(-t-t_0)$

Zamanda ters çevirme ve öteleme bir arada bulunuyorsa 2 farklı şekilde çözümlenebilir.

1. yöntem

İşareti önce ötele sonra zamanda ters çevir

$x_1[n] = x[n-n_0]$

$y[n] = x_1[-n]$

$y[n] = x[-n-n_0]$

2. yöntem

İşareti önce zamanda ters çevir sonra ötele

$x_2[n] = x[-n]$

$\downarrow$

$n+n_0$

$y[n] = x_2[n+n_0] = x[-(n+n_0)]$

$= x[-n-n_0]$

$y[n] = x[-n+n_0]$

$x_2[n] = x[-n]$

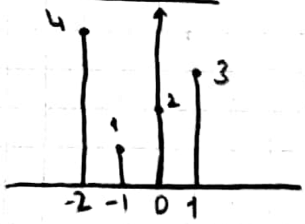
$y[n] = x_2[n-n_0]$

$= x[-(n-n_0)]$

$= x[-n+n_0]$

örnek

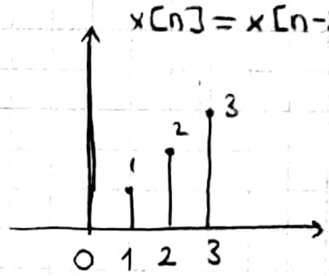
1. yöntem



$y[n] = x[-n-2]$

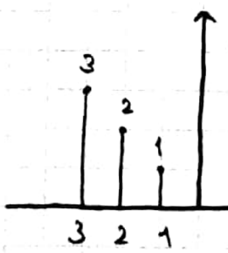
$x[-(n+2)]$

öteleme



$x[n] = x[n-2]$

zamanda ters çevirme



$y[n] = x[-n-2]$

ödev

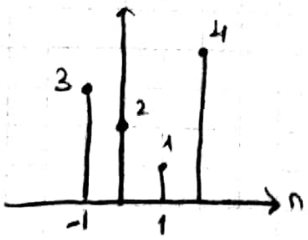
$n-2$

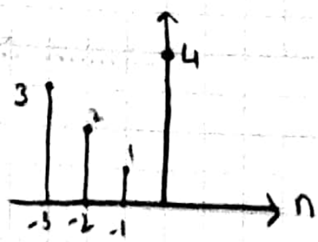
$n+3$

$-n-4$

$-n+5$

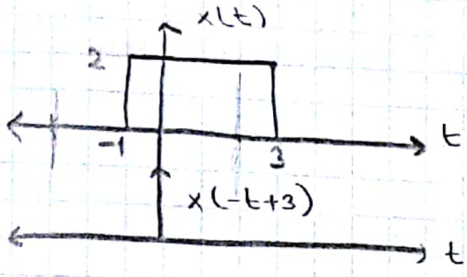
örnek





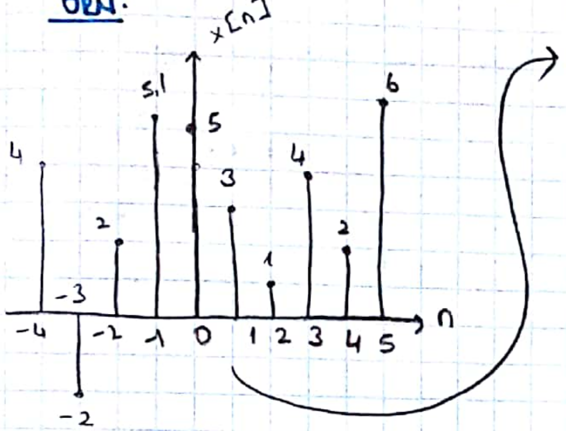
Zamanda Sıkıştırma

Zamanda daraltma işlemine karşılık gelir



$y(t) = x(bt) \{ b \in \mathbb{R} \mid b > 1 \text{ or } b < -1 \}$
$y[n] = x[an] \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \neq (-1, 0, 1) \}$

ÖRN:

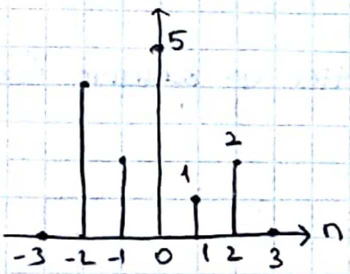


$x[2n] = y[n]$

* Skaler bir değer çıkmasın, dikkat!

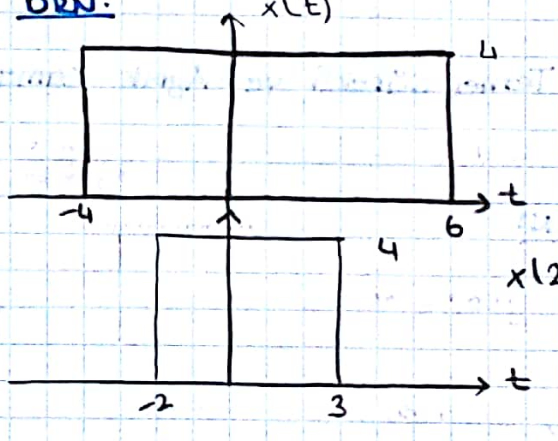
Yanlış olur, direkt çizer vizeden önce

1 konu işleyecekmiş wop değerinde



y baskın x'e göre

ÖRN:

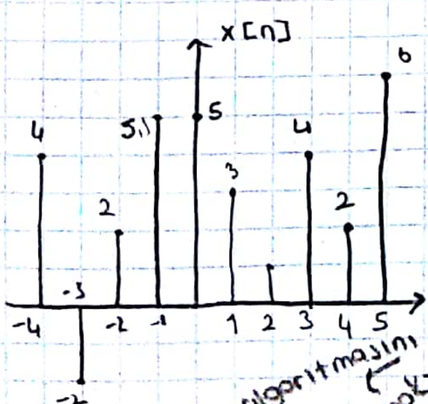


$x(2t) = y(t)$

Zamanda Genişletme

$y(t) = x(t/b)$

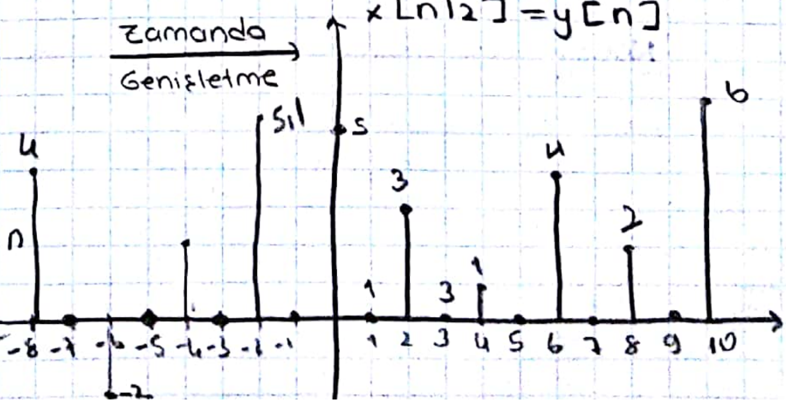
$y[n] = x[n/a] \rightarrow n = \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$ anlamında tanımlıdır



Bunun algoritmasını kodunu yazmak

$y[n] = x[n/2]$

$\xrightarrow[\text{Genişletme}]{\text{Zamanda}}$



$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ çift} \\ 1/2 \{ x[(n-1)/2] + x[(n+1)/2] \}, & n \text{ tek} \end{cases}$

İnceki soru

Genişletmede veri kaybı yok, sıkıştırmada var

ÖRN:

$y[7] = 1/2 \{ x[(7-1)/2] + [(7+1)/2] \}$

3 + 4

Boşlukları ortalamayı 2'ye bölerek ya da ağırlıklı ort.

yaparak da bulabiliriz.

$\frac{5+3}{2} = 4$

$\frac{5}{2} + \frac{3}{2} =$

$0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 3$

$\frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{3} = 3{,}67$

Ufuk açmak

Bu haftaki konular çok önemli

Temel sürekli ve Ayrık zamanlı işaretler ve Bunların Özellikleri.

Birim basamak (unit step)

ÖRN:

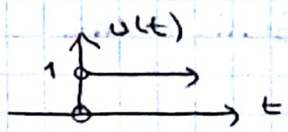
$y[n] = 3/2 \; x\left[\frac{-3n-6}{2}\right]$ 40p soru

Zamanda hem daraltma hem genişletme var

" daraltma - genişlemenin önce - sonra olması önemli midir?

Finalde sorarım dedi soru değil!

$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$



t>0 anında 1

t>0 " 0 olan bir işaret

Not: u(t) işareti 0 anında sürekli değildir sıçramalı süreksizlik söz konusu

Scanned by CamScanner

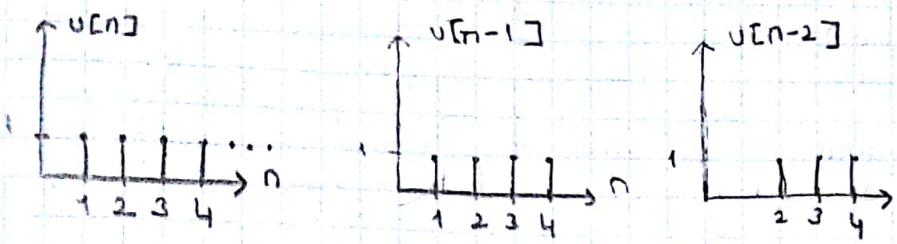
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Genelleştirilmiş

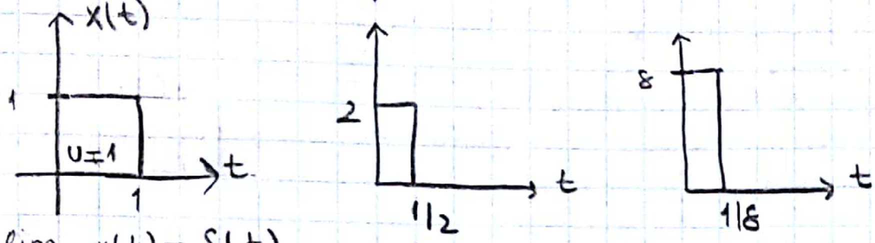
$u[n-n_0]$

1 ≥ 0

0 < 0



Birim Dürtü (Impulse Unit)



$\lim_{w \to 0} x(t) = \delta(t)$ ↳ dirac

★ Dirac t, t=0 anında son derece uzun bir işarettir. Aynı zamanda sonsuz derecede küçük bir genişliğe sahiptir. Alanı ise 1'dir.

Dirac(t) δ(t) Özellikleri

1 - $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

2 - $\int_c^d \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1 & c<0<d \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$

3 - Herhangi bir x(t) sürekli fonk için;

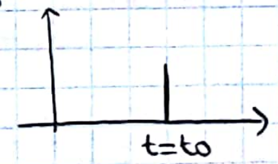
a) $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$

b) $\int_c^d x(t) \cdot \delta(t)\,dt = 0$

$= \begin{cases} x(0) & c<0<d \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$

4 - $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$

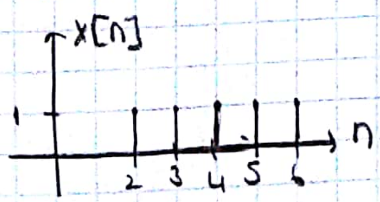
5 -



$\delta(t) = u'(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

Tam türev ifadesi değil genelleştirilmiş türev

quiz sorusu gibi



x[n] işaretini u[n] biçiminde yazınız

cevap: $x[n] = u[n-2] - u[n-7]$

Scanned by CamScanner

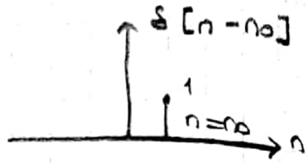
4

2 Ekim '17
Perşembe

Birim Dürtü ($\delta[n]$)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n=n_0 \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$



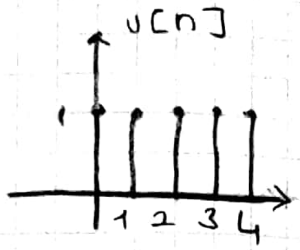
Birim Dürtünün Özellikleri

1- $x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$

2- $x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$

3.1) $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

$= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots + \delta[n-\infty]$

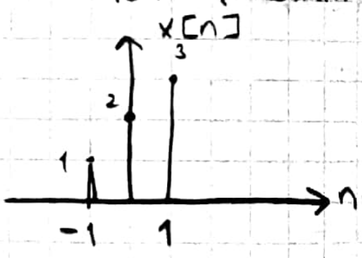


3.2) $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

Örn:

$u[n+1] - u[n-1] = \delta[n+1] + \delta[n]$

** 4- Ayrık zamanlı işaretlerin ölçeklenmiş ve ötelenmiş birim dürtü işaretleri cinsinden ifadesi



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{ölçeklenmiş}}\ \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{ötelenmiş}}$$

$\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$

$\delta[n+1] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1] \leftarrow x[n-1]\,\delta[n+1] + x[0].\,\delta[n] + x[1].\,\delta[n$

→ Fourier

Periyodik işaretlerin Furiyer sisteminde gösterilmesi

16 Kasım '17 Perşembe

LTI Sistemlerin karmaşık üstel işaretlere yanıtı

LTI sistemlerde işaretleri temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde ifade etmek faydalıdır. Bunun için;

a) Temel iş. kümesi geniş ve faydalı iş. sınıfından oluşabilir.

b) LTI sistemin temel bir işaretlere cevabı basit olmalıdır.

LTI bir sistemin çıkışı girişin karmaşık bir sabitle çarpımına eşitse girişe sistemin özfonksiyonu denir. karm. sabite ise sistemin özdeğeri denir.

Sürekli zamanda; Impuls (dürtü) yanıtı $h(t)$ olan bir LTI sisteme $x = e^{st}$ uygulandığında

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau$$ → Tao işaret.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\,x(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\,e^{s(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= e^{st}.\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\,e^{-s\tau}.\,d\tau}_{H(s)}$$

$$y(t) = \underset{\text{öz fonksiyon}}{e^{st}}.\underset{\text{özdeğer}}{H(s)}$$ girişe özfk. diyoruz.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\,e^{-s\tau}.\,d\tau$$

Ayrık zamanda; Impuls yanıtı $h(n)$ olan ayrık zamanlı LTI sistemin z^n girişine olan hesabı konvülüsyon toplamından hesaplanabilir.

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]}$$

$x[n] = z^n$

z = karmaşık bir sayı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].\,x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].\,z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].z^{-k}$$ $y[n] = z^n.H(z)$

$x(t) = a_1 . e^{s_1 t} + a_2 . e^{s_2 t} + a_3 . e^{s_3 t}$

Örneğin impuls yanıtı $h(t)$, $x(t) = a_1 . e^{s_1 t} + a_2 . e^{s_2 t} + a_3 . e^{s_3 t}$

Sistemin yanıtı $y(t) = a_1 . e^{s_1 t} . H(s_1) + a_2 . e^{s_2 t} . H(s_2) + a_3 . e^{s_3 t} . H(s_3)$

3 özdeğer 3 ... var

Genelleştirme : sürekli veya ayrık zamanlı LTI sistemin girişi $x(t)$ veya $x(n)$ karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu (ağırlıklı toplama) şeklinde ifade edilebilir

$$x(t) = \sum_k a_k . e^{s_k t}$$

t'ye göre alsaydık integralle uğraşırdık
k'ye " aldık, parametremiz k o sebeple sürekli zamanda toplam kullanıyoruz.

$$x(t) = \sum_k a_k . e^{s_k t} \Rightarrow y(t) = \sum_k a_k . e^{s_k t} . H(s_k)$$

$$x[n] = \sum_k a_k . z_k^n \Rightarrow y[n] = \sum_k a_k . z_k^n \, H(z_k)$$

Not: LTI sistemin girişi karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu ise çıkış da aynı üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonudur

Amaç: Herhangi bir işareti karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu biçiminde yazmak.

Not: s ve z herhangi bir karmaşık sayı alabilir

Fourier analizinde s ve z sırasıyla $s = jw$, $z = e^{jw}$

Örnek:

$y(t) = x(t-3)$, $x = e^{j.2t}$ $y(t)$

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = \underbrace{e^{j.2t}}_{\text{giriş}} . \underbrace{e^{-6j}}_{\text{karmaşıkla çarpılmış}}$$

$H(n)$ yanıtı dürtüye verilen yanıt

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) . e^{-s\tau} . d\tau$$

$$h(t) = \delta(t-3)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3) . e^{-s\tau} . d\tau$$

(δ drag sadece 3'te tanımlı)

$$= e^{-s3} \quad s = 2j$$

$$= e^{-6j}$$

Scanned by CamScanner

Harmonik olarak Bağlantılı üssel işaretler

T_0 gibi ortak bir periyot ile periyodik olan exponansiyellerin (üssel işaret) kümesi $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ile gösterilir.

$k=0$ için $\phi_k(t)$ sabit

$k\neq0$ için $|k|\omega_0$ temel frekans temel periyodikse $\frac{2\pi}{|k|\omega_0}$ dır.

$|k|2\pi f_0 \Rightarrow |k|.2\pi.\frac{1}{T_0}$ $\qquad \frac{T_0}{|k|}$

Harmonik ol. bağlantılı karmaşık üssel işaretlerin doğrusal komb. şeklinde ifade edilen bir $x(t)$ olsun.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jk\omega_0 t} \qquad (1)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t}$$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$

Harm. ilişkili üstel işaretlerin her biri T_0 ile periyodiktir

O halde $x(t)$'de T_0 ile periyodiktir.

$k=0$ için üstel işaret sabittir.

$k=\pm1$ için üstel işaretlerin temel frekansı ω_0'dır

Bu terimler temel veya 1. harm. bileşenler olarak adlandırılır.

$k=\pm2$ için üstel işaretlerin temel frekansı $2\omega_0$'dır

Bunlar 2. harm. bileşenlerdir.

$k=\pm N$ için üstel işaretlerin temel frekansı $N\omega_0$'dır

N. harm. bileşenler denir.

** NOT: Periyodik bir işaretin (1)'deki denklemdeki gibi harmonik olarak bağlantılı karmaşık üstel işaretlerin Lineer doğrusal komb. ifade edilmesine Fourier Serisi gösterimi denir olarak

Scanned by CamScanner

Örnek: Temel frekansı 2π olan sürekli zaman periyodik bir işaretin Fourier serisi gösterimini elde ediniz.

$w_0 = 2\pi \qquad f_0 = 1$

$2\pi f_0 = 2\pi \qquad T_0 = 1$

Örnek: $x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k . e^{jk2\pi t}$

$a_0 = 1 \qquad a_2 = a_{-2} = 1/2$

$a_1 = a_{-1} = 1/4 \qquad a_3 = a_{-3} = 1/3$

$x(t) = 1 +$
$1/4 . e^{j2\pi t} + 1/4 \, e^{-j2\pi t} +$
$1/2 . e^{j.2.2\pi t} + 1/2 . e^{-j2.2\pi t} +$
$1/3 . e^{j.3.2\pi t} + 1/3 . e^{-j.3.2\pi t}$

$$\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2}$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

9 23 Kasım 2017 - Perşembe

Fourier Serisinde Sentez

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jkwt}$$

Fourier Serisinde Analiz

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) . e^{-jkw_0 t} \qquad \int_T \to T$ uzunluklu bir aralık

$a_0 = \frac{1}{T}\int x(t) . dt =$ işaretin ortalama ya da DC değeri

NOT: Sinüzoidal işaretler için Fourier serisi doğrudan hesaplanabilir.

Örnek:

$$x(t) = 1 + \sin(w_0 t) + 2\cos(w_0 t) + \cos(2w_0 t + \pi/4)$$

$$x(t) = 1 + \left(\frac{e^{Jw_0 t} - e^{-Jw_0 t}}{2J}\right) + 2\left(\frac{e^{Jw_0 t} + e^{-Jw_0 t}}{2}\right) +$$

$$\left(\frac{e^{J(2w_0 t + \pi/4)} + e^{-J(2w_0 t + \pi/4)}}{2}\right)$$

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2J}\right) \cdot e^{Jw_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2J}\right) e^{-Jw_0 t} + \left(\frac{1}{2} \cdot e^{J\pi/4}\right) \cdot e^{J2w_0 t} +$$

$$\left(\frac{1}{2} e^{-J\pi/4}\right) \cdot e^{-J2w_0 t}$$

$a_4 = a_4 \cdot e^{J4w_0 t}$ olarak bulunur

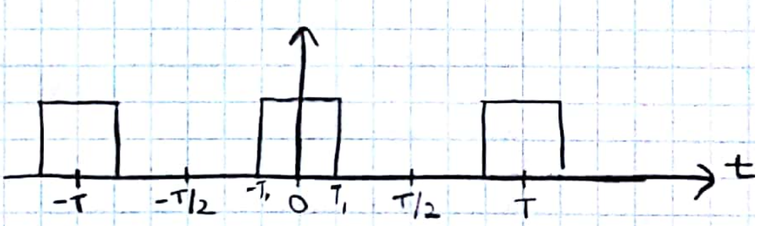
$$x(t) = \sum_{k=-2}^{2} a_k \cdot e^{Jkw_0 t}$$

$$= a_0 + a_1 \cdot e^{Jw_0 t} + a_{-1} \cdot e^{-Jw_0 t} + a_2 \cdot e^{2Jw_0 t} + a_{-2} \cdot e^{-2Jw_0 t}$$

(frekansta büyük X
zamanda küçük x)

ÖRN:

Temel periyodu T
Temel frekansı $\frac{2\pi}{T}$



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-Jkw_0 t} \cdot dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) \cdot dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$\int_2^4 x\, dt$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-Jkw_0 t} \cdot dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-Jkw_0 t}}{-Jkw_0}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{e^{-Jkw_0 T_1} - e^{Jkw_0 T_1}}{-Jkw_0}\right)$$ → sin'e benzetmek için $T_0 = T$ kabul ediyoruz

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{2J \cdot \sin(kw_0 T_1)}{\left(Jk \frac{2\pi}{T}\right)}$$

$T = 4T_1$ için

$a_0 = 1/2$ olur

$k=1$	$1/\pi$
2	0
3	$-1/3\pi$
4	0
5	$1/5\pi$

$$= \frac{\sin(kw_0 T_1)}{k\pi}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

Scanned by CamScanner

Sürekli Zamanda Fourier Serisinin Özellikleri

a) Lineerlik (Doğrusallık)

$x(t)$'nin fourier serisi → $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$

a_k = F.S katsayısı

→ F.S
← Ters F.S (Fourier Serisi)

$x(t) \leftrightarrow a_k$
$y(t) \leftrightarrow b_k$
$z(t) \leftrightarrow Ax(t) + By(t)$
$z(t) \leftrightarrow c_k$
$c_k = Aa_k + Bb_k$

b) Zamanda Öteleme

$x(t) \leftrightarrow a_k$

$x_1(t-t_0) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot a_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0(t-t_0)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$$

c) Zamanda Ölçekleme

Zamanda ölçekleme Fourier serisinde katsayıyı değiştirmez.

$x(t) \leftrightarrow a_k$

$x(ct) \leftrightarrow a_k$

d) Zamanda Çarpma

$x(t)$'nin F.S katsayısı a_k
$y(t)$'nin F.S katsayısı b_k

$x(t) \leftrightarrow a_k$
$y(t) \leftrightarrow b_k$

$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \ldots \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \ldots$

SOR!

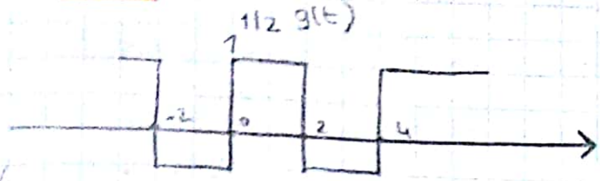
e) Zamanda Türev Alma

$x(t) \leftrightarrow a_k$

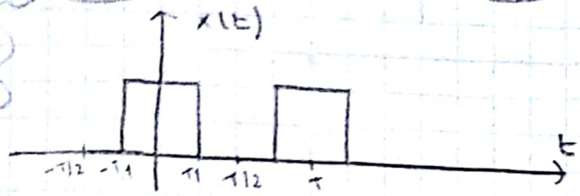
$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jk\omega_0 a_k$

Zamanda çarpma = konvülasyon
frekansta konvülasyon = çarpmadır

Örnek:



g(t) işaretinin FS katsayılarını bulun.



$T_1 = 1$ $\quad a_0 = \frac{2T_1}{T}$ $\quad T = 4T_1$

$T = 4$ $\quad a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$ $\quad a_0 = 1/2$

$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$

önceki sayfadan benzetmek için çizdik

$g(t) = x(t-1) - 1/2$

$= Ax(t) + Bx(t)$

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x(t-1) \longleftrightarrow b_k$ $\Big\}$ $b_k = a_k \, e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k . e^{-jk\frac{2\pi}{4}}$

$= a_k . e^{-jk\pi/2}$

DC terim $(-1/2) \xleftrightarrow{FS} c_k$ $\quad c_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ -1/2 & k = 0 \end{cases}$

$g(t) \longleftrightarrow d_k$ $\quad d_k = b_k + c_k$

$d_k = b_k + c_k = \begin{cases} 0 \\ \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} . e^{-j\pi/2} & k \neq 0 \end{cases}$

Ayrık zamanda fourier'i atladı.

10

30 Kasım 2017
Perşembe

Sürekli Zamanda Fourier Dönüşümü

Periyodik olmayan bir işaret, periyodu sonsuz olan bir işaret gibidir. Per. bir işaretin periyodu artarsa frekansı küçülür. Fourier serisindeki üstel işaretlerin frekansı yakınlaşır. Periyot sonsuz ise limit durumunda frekans bileşenleri sürekli hale gelir. Fourier serisi toplamı integrale dönüşür.

Fourier serisinin periyodun sonsuza gitmesi durumundaki limit haline "Fourier dönüşümü" denir. Per. işaretin Fourier serisine bakılır. Periyodun sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışına bakılır.

Periyodik Olmayan Bir İşaretin Fourier Dönüşümü

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad \rightarrow \text{Fourier dönüşümü}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)\, e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad \text{(Inverse Fourier Transform)}$$

NOT: Dirichlet koşuluna göre mutlak integrallenebilir sürekli veya sonlu sayıda süreksizliğe sahip işaretlerin fourier dönüşümü hesaplanabilir. Bazı kıstaslar dahilinde bütün işaretlerin fourier dönüşümü hesaplanabilir.

ÖRN: $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$ $a>0$ için fourier dönüşümü

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \cdot u(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(a+j\omega)} \cdot dt$$

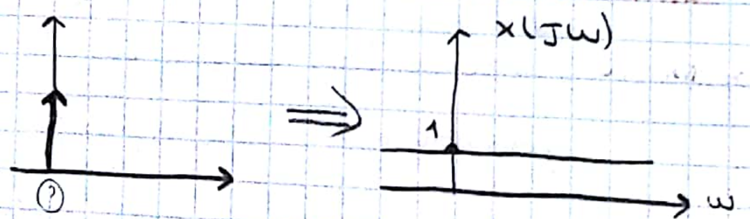
$$= \frac{e^{-t(a+j\omega)}}{a+j\omega} \Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{a+j\omega}\right) = \boxed{\frac{1}{a+j\omega}}$$

ÖRN: $x(t) = \delta(t)$ Fourier Dönüşümü = ?

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$t=0$ için $e^{-j\omega t} = 1$

$x(j\omega) = 1$



ÖRN:

$x(t) = \delta(t-t_0)$

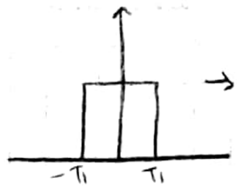
$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) . e^{-j\omega t} . dt$

$t = t_0$

$x(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$

ÖRN:

$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$



$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-j\omega t} . dt$

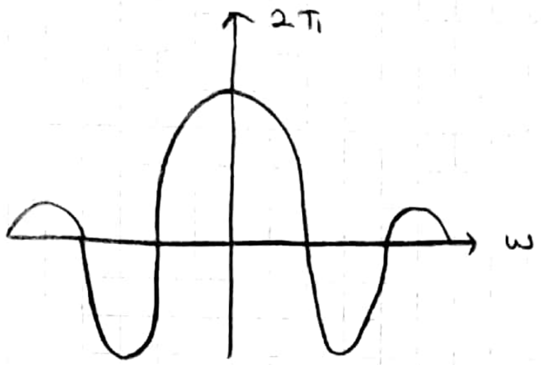
$= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} . dt$

Sadece bu aralığa bakıyoruz çünkü gerisi sıfır

$\left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega t} \right|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{-j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{j\omega}$

$= \frac{2j . \sin(\omega T_1)}{j\omega} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

$= 2T_1 . \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$

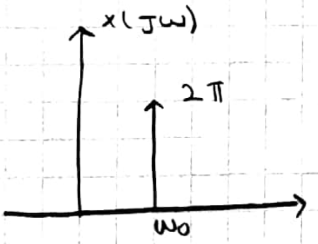


Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

Periyodik bir işaretin Fourier Dönüşümü Frekans uzayında bir dürtü katarından oluşur. Dürtülerin altındaki alan Fourier serisi katsayılarıyla orantılıdır

ÖRN:

$x(j\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$



$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) . e^{j\omega t} . d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) . e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}\right\} \text{Ters fourier}$$

$x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow x(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \rightarrow$ Fourier

$$\underbrace{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{-j\omega t}}_{\text{Fourier serisi}} \rightarrow \underbrace{x(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi . a_k \delta(\omega - k\omega_0)}_{\text{Fourier dönüşümü}}$$

NOT: Sonsuz adet impulse'un toplamından oluşan Fourier dönüşümlerinin tersi sonsuz adet üstel işaretlerin toplamıdır

ÖRN:

$x(t) = \sin(w_0 t)$ F.D

$x(t) = \sin(w_0 t) = \dfrac{e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}}{2j}$

$= \dfrac{1}{2j} \cdot e^{jw_0 t} - \dfrac{e^{-jw_0 t}}{2j}$

** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t} \rightarrow X(jw) = \sum_{k=-1, k\neq 0}^{1} 2\pi \cdot a_k \, \delta(w - k \cdot w_0)$

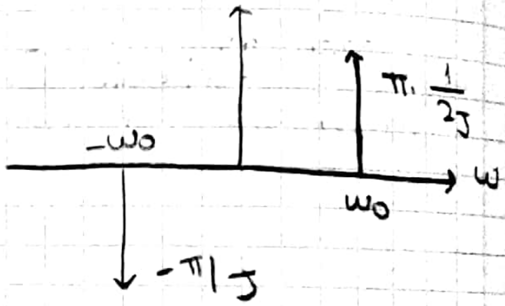
$= 2\pi \cdot a_{-1} \cdot \delta(w + w_0) +$

$2\pi \cdot a_1 \cdot \delta(w - w_0)$

$a_0 = 0$

$1.(a_1 \cdot e^{jw_0 t}$ $\quad -1.(a_{-1} \cdot e^{-jw_0 t}$

$a_1 = \dfrac{1}{2j}$ $\quad a_{-1} = \dfrac{-1}{2j}$



(tek işaret, simetri)

ÖRN:

$x(t) = \cos(w_0 t) + 3$ F.D = ?

$x(t) = \cos(w_0 t) + 3$

$x(t) = \cos(w_0 t) + 3 = 3 + \dfrac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}$

$= \dfrac{e^{jw_0 t}}{2} + \dfrac{e^{-jw_0 t}}{2} + 3$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t} \rightarrow X(jw) = \sum_{-1}^{1} 2\pi a_k \, \delta(w - kw_0)$

$a_0 = 3$

$= 2\pi \cdot \overset{1/2}{a_{-1}} \, \delta(w + w_0) + 2\pi \overset{3}{a_0} \, \delta(w) + 2\pi \overset{1/2}{a_1} \, \delta(w)$

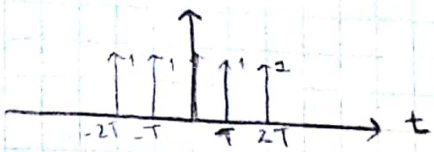
$\underset{\frac{1}{2}}{a_1} e^{jw_0 t}$ $\quad \underset{\frac{1}{2}}{a_1} e^{jw_0 t}$

Çift işaret
y'de simetri

Scanned by CamScanner

ÖRN:

$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ $\quad$ F.D → Fourier dönüşümü



a_k bulmamız lazım

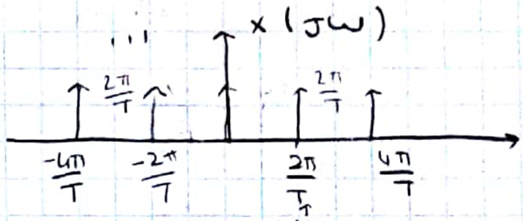
$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t).\,e^{-jk\omega_0 t}.\,dt$

$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t).\,e^{-jk\omega_0 t}.\,dt$

$= 1/T$

$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi . a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi . \frac{1}{T}\, \delta(\omega - k\omega_0)$



Zamanda T ile periyodik bir dürtü katarının F.D si frekansta $\frac{2\pi}{T}$ periyoduyla periyodik bir dürtü katarıdır

Sürekli Zaman Fourier Dönüşüm Özellikleri

$F\{x(t)\}$ $\quad$ $F^{-1}\{X(j\omega)\}$ $\quad$ $x(t) \underset{\text{Ters FD}}{\overset{FD}{\rightleftharpoons}} X(j\omega)$

a) Lineerlik

$x(t) \rightarrow X(j\omega)$

$y(t) \rightarrow Y(j\omega)$

$a\,x(t) + b\,y(t) \xrightarrow{FD} aX(j\omega) + bY(j\omega)$

b) Zamanda Öteleme

$x(t) \rightarrow X(j\omega)$

$x(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0}.\,X(j\omega)$

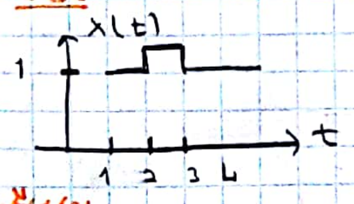
ters FD: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega).\,e^{j\omega t}.\,d\omega$

$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega).\,e^{j\omega(t-t_0)}.\,d\omega$

$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(e^{-j\omega t_0}.\,X(j\omega))}.\,e^{j\omega t}\,d\omega$

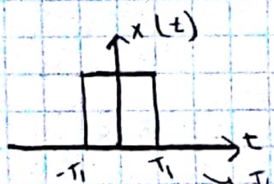
$x(t-t_0) \leftarrow X(j\omega)$ $\quad X(j\omega)$

ÖRN:



$X(j\omega)$

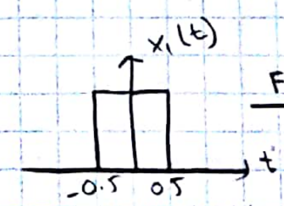
~~ÖRN~~



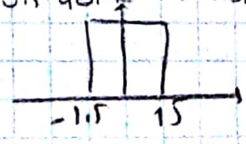
→ $T_1 = 0.5$ olsun

$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_0)}{\omega}$

→



0.5 yerine 1.5 aldık



$\xrightarrow{FD}$ $\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$

$x_a(t) = \frac{1}{2}\,x_1(t-2.5)$

$\leftarrow x_2(t) = \frac{2\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\omega}$

$x_b(t) = x_2(t-2.5)$

$x_b(t) = x_2(t-2.5)$

$x_a(t) + x_b(t) = \frac{1}{2} e^{-jw(2.5)} \cdot \frac{2\sin(w/2)}{w} + e^{-jw(2.5)} \cdot \frac{2\sin(3w/2)}{w}$

c) Türev Özelliği

$x(t) \rightarrow x(jw)$

$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow (jw) \cdot x(jw)$

T.F.S (Ters) $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw) \cdot e^{jwt} \cdot dw$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (jw) \cdot x(jw) \cdot e^{jwt} \cdot dw$

NOT: Zamanda türev alma frekansta jw ile çarpmadır

SKF'de tanımlanmış (LTI) AHKI sistem analizinde çok önemlidir

Sabit katsayılı fark denk.

11

7 Aralık Perşembe

d) Konvülsiyon Özelliği

$y(t) = x(t) * h(t)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$

NOT: $F\{h(t-\tau)\} = e^{-jwt} \cdot H(jw)$

$F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-jwt} \cdot d\tau$

$F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau \right) e^{-jwt} \cdot d\tau$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot e^{-jwt} \cdot dt \right] \cdot d\tau$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-jwt} \cdot H(jw)$

$= H(jw) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-jw\tau}$

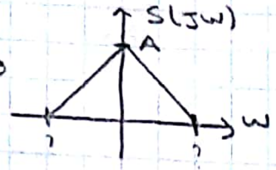
$= H(jw) \cdot x(jw)$

$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(jw) = x(jw) \cdot H(jw)$

Çarpma Özelliği

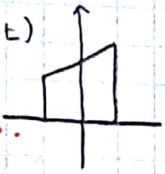
$r(t) = s(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[S(jw) \ast \overset{\text{konvolüsyon}}{P(jw)} \right] = R(jw)$

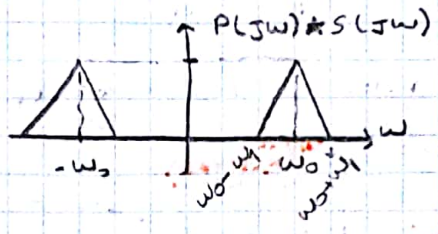
$s(t) \rightarrow$



$p(t) = \cos(w_0 t)$

$R(jw) = ?$





Ayrık Zamanın Fourier Dönüşümü

Periyodik olmayan bir işaret periyodik bir işaretin periyodu sonsuza giderkenki limit durumudur

Örn:

$h(t) = e^{-at} \cdot u(t) \qquad a>0$

$x(t) = e^{-bt} \cdot u(t) \qquad b>0$

① $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

$y(t) = x(t) \ast h(t) = h(t) \ast x(t)$

$F^{-1}\{Y(jw)\} = y(t)$

$Y(jw) = X(jw) \cdot H(jw)$

② $H(jw) = \frac{1}{a+jw}$

$X(jw) = \frac{1}{b+jw}$

$\frac{1}{a+jw} \cdot \frac{1}{b+jw} = Y(jw)$

$\frac{A}{a+jw} + \frac{B}{B+jw} = \frac{1}{(a+jw)(b+jw)}$

$A = -\frac{1}{a-b} \qquad B = \frac{1}{a-b}$

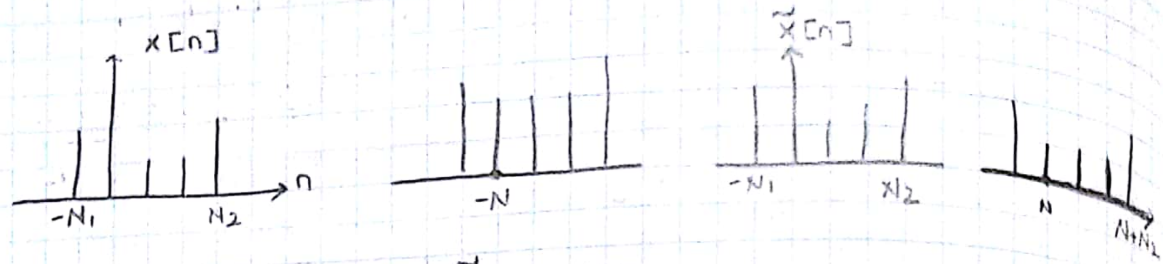
③

$\frac{\frac{1}{b-a}}{a+jw} + \frac{\frac{1}{a-b}}{b+jw} = Y(jw)$

$\left(\frac{1}{b-a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a+jw}\right) + \left(\frac{1}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{1}{b+jw}\right) = Y(jw)$

$\frac{1}{b-a} \cdot e^{-at} \cdot u(t) + \frac{1}{a-b} \cdot e^{-bt} \cdot u(t) = y(t)$

Ayrık zamanda fourier durumunda yazdığımız cümlenin matematiksel gösterimi



$$\lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n] = x[n]$$

	ayrık zaman	sürekli zaman
sentez denklemi	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(e^{jw}).e^{jwn}.dw$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)\, e^{jwt}.dw$
analiz denklemi	$x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-jwn}$	$x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-jwt}.dt$

NOT: $x(e^{jw}) / x(e^{j\Omega})$ ifadeler 2π ile periyodiktir

NOT: Sürekli zamanda sentez ve analiz denklemlerinin 2si de integral ve aralığı sonsuzdur. Ayrık zamanda analiz denk. sonsuz bir toplama iken sentez denk. ise 2π aralığında sonlu bir integraldir.

ÖRN:

$x[n] = a^n.u[n] \quad |a| < 1$

$x(e^{jw}) = ?$

1. $x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n.\, e^{-jwn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a.e^{-jw})^n$$

Geo seri açılımı

$$= \frac{1}{(1-a).e^{-jw}}$$

ÖRN:

$\delta[n] \xrightarrow{FD} ?$

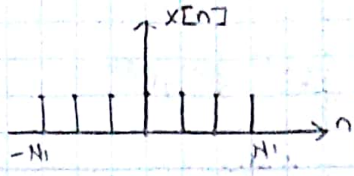
$$x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\; e^{-jwn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n].e^{-jwn}$$

$$= 1$$

ÖRN:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$



① $x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . e^{-jwn}$

$x(e^{jw}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] . e^{-jwn}$

$\boxed{n' = n + N_1}$

$x(e^{jw}) = \sum_{n'=0}^{2N_1} x[n] . e^{-jw(n' . N_1)}$

$x(e^{jw}) = e^{jwN_1} \sum_{n'=0}^{2N_1} e^{-jwn'}$

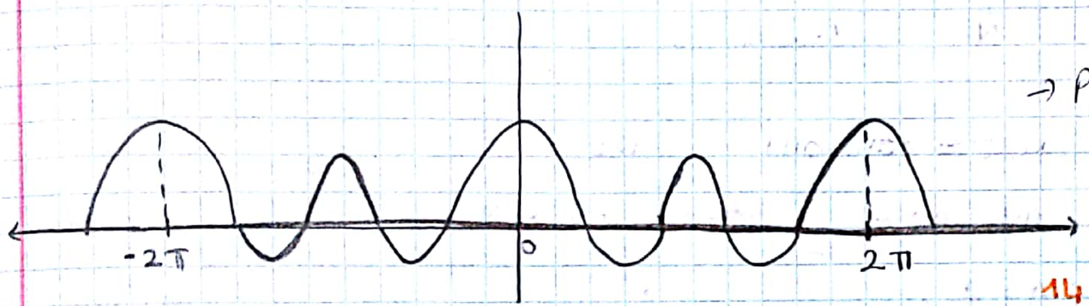
② $= \underbrace{e^{jwN_1} . \dfrac{1 - e^{jw(2n+1)}}{1 - e^{-jw}}}_{\text{geo seri açılımı}}$

$= \dfrac{e^{jwN_1} - e^{-jwN_1} . e^{-jw}}{1 - e^{-jw}}$

$= \dfrac{e^{-jw/2} \{ \ \}}{e^{-jw/2} \{ \ \}}$

$= \dfrac{\sin(wN_1 + w/2)}{\sin(w/2)}$

e'yi öyle bir ifadeyle çarpmalıyız ki, e'li ifadeler gidip yerini sin.'e bırakmalı, sinüzal bir işaret olur.



→ periyodik işaret

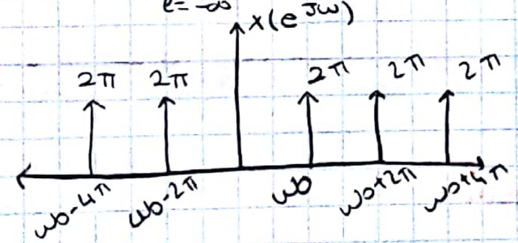
⑫

14 Aralık '17

Ayrık Zamanlı Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

$x[n] = e^{jw_0 n}$ işaretinin F.D'si

$X . e^{jw} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(w - w_0 - 2\pi l)$



fourier serisinin açılımı

T içinde n tane var!

$x[n] = \dfrac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(e^{jw}) . e^{jwn} . dw$

$= \dfrac{1}{2\pi} . \int_0^{2\pi} 2\pi . \delta(w - w_0) . e^{jwn} . dw$ → w yerine w_0 yazacağız.

$= e^{jw_0 n}$

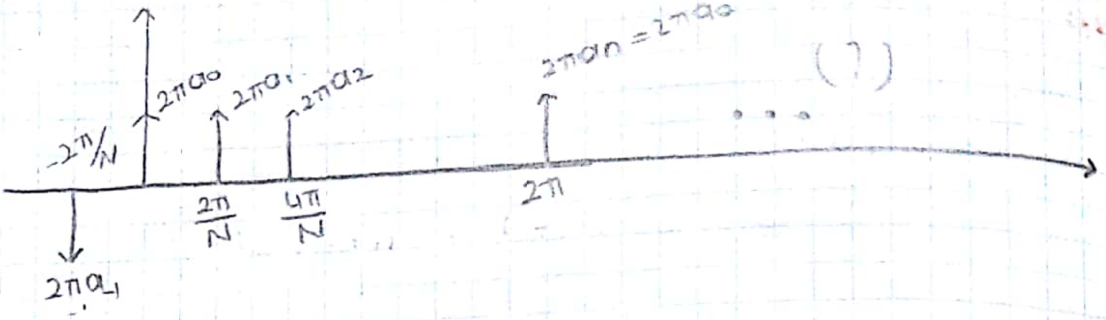
$e^{jw_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(w - w_0 - 2\pi l) . dw$

$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k . e^{jk(\frac{2\pi}{N}) . n}$ } AZD işaretinin F.S

↕ FD

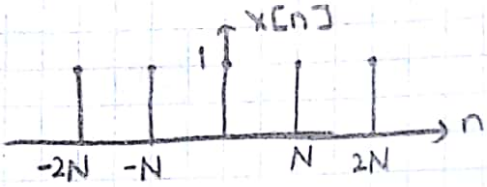
$X . (e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi . a_k \delta(w - \frac{2\pi}{N} . k)$ → w_0

Aynk zamanda $2\pi - 0$ veya $-\pi, \pi$ aralığında



ÖRN:

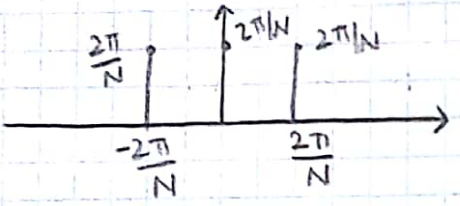
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \qquad F.D = ?$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum x[n] . e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0} \delta[n] . e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n \to 0}$$

$$a_k = \frac{1}{N}$$



ÖRN:

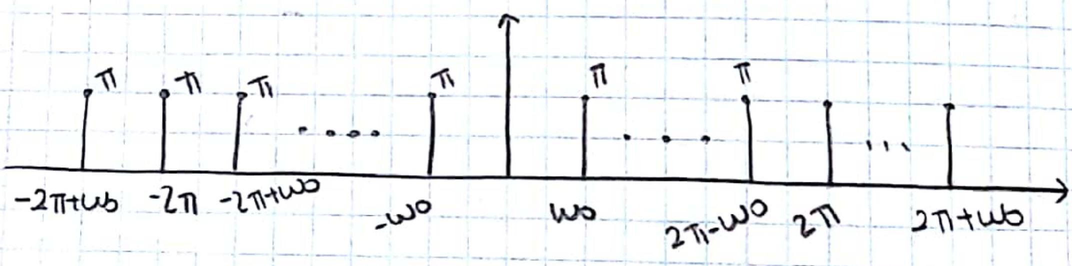
$$x[n] = \cos(w_0 n) \qquad F.D = ? \qquad w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\cos(w_0 n) = \frac{1}{2} e^{jw_0 n} + \frac{1}{2} e^{-jw_0 n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x(e^{jw}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi . a_1 \,\delta\left(w - w_0 - \frac{2\pi l}{N}\right) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi . a_{-1} \,\delta\left(w + w_0 - \frac{2\pi l}{N}\right)$$



Fourier AZ FD Özellikleri

1- Periyodiklik

$$x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . e^{-jwn} \qquad x[n] \xrightarrow{F.D} x(e^{jw})$$

$$x(e^{j(w+2\pi)}) = x_1 . (e^{jw})$$

2- Lineerlik

$$x_1[n] \xrightarrow{FD} X_1(e^{jw})$$

$$x_2[n] \xrightarrow{FD} X_2(e^{jw})$$

$$a x_1[n] + b x_2[n] \rightarrow a X_1(e^{jw}) + b X_2(e^{jw})$$

3- Zamanda öteleme

$$x[n-n_0] \xrightarrow{F.D} e^{-jwn_0} X(e^{jw})$$

4- Konvülasyon özelliği

$$y[n] = x[n] * H[n]$$

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) . H(e^{jw})$$

5- Çarpma özelliği

İki işaretin zamanda çarpımı frekansta konvülasyona karşılık gelmektedir.

$$y[n] = x_1[n] . x_2[n] \rightarrow y[n] = F.D^{-1}\{ Y(e^{jw}) \}$$

$$= F.D^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} X_1(e^{jw}) * X_2(e^{jw}) \right\}$$

Lineer Sabit Katsayılı Dif. Denk. Tanımlanan Sistemler

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k . \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . (jw)^k . Y(jw) = \sum_{k=0}^{M} k_k (jw)^k . X(jw)$$

$$H(jw) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (jw)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k . (jw)^k} = \frac{Y(jw)}{X(jw)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . F.D \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\}$$

$$\sum_{k=0}^{M} b_k . F \left\{ \frac{d^k . x(t)}{dt^k} \right\}$$

$k=0$ için $y(t)$

ÖRN:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) + 2x(t) = 3x(t)$$

$$(jw).y(jw) + 4y(jw) + 2x(jw) = 3x(jw)$$

$$y(jw).(4+jw) = x(jw)$$

$$N(jw) = \frac{y(jw)}{x(jw)} = \left(\frac{1}{4+jw}\right) \rightarrow h(t) = e^{-4t}u(t)$$

ezberle

NOT: $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F.D} (jw).x(jw)$

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \xrightarrow{FD} (jw)^k.x(jw)$$

→ sınavda çıkar!

ÖRN: $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{4\,dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

$$H(jw) = \frac{jw+2}{(jw)^2+4jw+3} = \frac{jw+2}{(jw+3)(jw+1)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{dx(t)}{dt}}$$

$$\frac{A}{jw+3} + \frac{B}{jw+1} = \quad A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2jw+6} + \frac{1}{2jw+2} \xrightarrow{T.F} \frac{1}{2}.e^{-3t}.u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}.u(t)$$

Lineer Sabit Katsayılı Fark Denklemleri ile Tanımlanan Sistemler

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k.x[n-k]$$

$$y[n] \xrightarrow{F.D} y(e^{jw})$$

$$y[n-n_0] \xrightarrow{F.D} e^{-jwn_0}.y(e^{jw})$$

ÖRN:

$$y[n] - a\,y[n-1] = x[n]$$

$h[n] = ?$

$$y(e^{jw}) - a.e^{-jwt}.y(e^{jw}) = x(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \frac{y(e^{jw})}{x(e^{jw})} = \frac{1}{1-a^{-jw}} \Rightarrow h[n] = a^n.u[n]$$

ÖRN: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$ $\qquad h[n] = ?$

$$y(e^{jw}) - \frac{3}{4} \cdot e^{-jw1} \cdot y(e^{jw}) + \frac{1}{8} \cdot e^{-jw2} \cdot y(e^{jw}) = 2x(e^{jw})$$

$$y(e^{jw})\left(1 - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{1}{8}e^{-jw2}\right) = 2x(e^{jw})$$

$$\frac{y(e^{jw})}{x(e^{jw})} = \frac{2 \cdot 8}{(2-e^{jw})(4-e^{jw})}$$

$$16\left(\frac{A}{2-e^{jw}} + \frac{B}{4-e^{jw}}\right) = \frac{16}{(2-e^{jw}) \cdot (4-e^{jw})}$$

$$A(4-e^{jw}) + B(2-e^{jw}) = 1$$

$$4A + 2B = 1$$

$$A - B = 0$$

$$A = B$$

$$A = \frac{1}{6} \quad B = \frac{1}{6}$$

$$h[n] = \frac{8}{3} \cdot 2^n \cdot u[n] + \frac{8}{3} \cdot 4^n \cdot u[n]$$

Scanned by CamScanner