Primeira Maratona de Matemática - Gabarito

1) Cada um dos três amigos, Mário, João e Felipe, pratica uma, e apenas uma, das modalidades esportivas: futebol, basquetebol ou natação. Nenhuma das três modalidades é praticada por mais do que um dos amigos. Além disso, cada um dos amigos tem preferência por uma fruta: um prefere laranja, outro banana e o outro mamão. Descubra, para cada um deles, que esporte pratica e que fruta prefere, sabendo que:

   (a) O Mário não gosta de laranja;

   (b) O João não pratica futebol;

   (c) O nadador detesta banana;

   (d) O nadador e o apreciador de laranja praticam esportes diferentes;

   (e) O apreciador de mamão e o praticante de futebol visitam Felipe todos os sábados.

Solução. Apresenta-se uma solução em forma de tabela, a qual se elabora em 12 passos. As letras V, F designam *Verdadeiro*, *Falso*; os passos estão numerados de 1 até 12, por ordem de execução; uma expressão como 10 (d) F significa que, no passo 10, o que foi preenchido nos 9 passos anteriores conjuntamente com (d) implica F (i.e., "Felipe não gosta de natação"); uma expressão como 9 V significa que a veracidade se impõe apenas em face dos 8 passos anteriores.

	futebol	natação	basquete	laranja	banana	mamão
Mário	5 V			1 (a) F	8 V	6 (e) F
João	2 (b) F	11 (c) V				7 V
Felipe	3 (e) F	10 (d) F	12 V	9 V		4 (e) F

A resposta é: Mário pratica futebol e gosta de banana, João pratica natação e gosta de mamão, Felipe pratica basquetebol e gosta de laranja. □

Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017
A matemática está em tudo!

2) Um número inteiro representado no sistema decimal é chamado de *repunit* se ele for formado apenas por algarismos todos iguais a 1. Assim, os primeiros repunits são:

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots.$$

a) Mostre que um número repunit com n algarismos iguais a 1 pode ser escrito na forma $\frac{10^n-1}{9}$.

b) Seja A um número inteiro formado por $2n$ algarismos, todos iguais a 1, e seja B um número inteiro formado por n algarismos, todos iguais a 2. Mostre que $A-B$ é um quadrado perfeito e determine sua raiz quadrada.

c) Mostre que os números $49, 4489, 444889, \ldots$, obtidos colocando o número 48 no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.

Solução.

a) Seja $C = \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ dígitos}}$. Então $9.C = \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$ e daí segue o resultado.

b) Temos por a) $A = \underbrace{111\ldots1}_{2n \text{ dígitos}} = \frac{10^{2n-1}}{9}$ e, sendo C como em a), $B = \underbrace{222\ldots2}_{n \text{ dígitos}} = 2.C = 2.\frac{10^n-1}{9}$.

Assim

$$A - B = \frac{10^{2n}-1}{9} - 2.\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n} - 2\times 10^n + 1}{9} = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$$

Observe que $\frac{10^n-1}{3} = \frac{\overbrace{999\ldots9}_{n \text{ dígitos}}}{3} = \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ dígitos}}$ é um inteiro, então $A-B$ é um quadrado perfeito e sua raiz quadrada é $\frac{10^n-1}{3}$.

c) Vamos analisar o que acontece com a sequência de números indicados:

$$\begin{aligned}
49 &= 4.1.10^1 + 8.1 + 1\\
4489 &= 4.11.10^2 + 8.11 + 1\\
444889 &= 4.111.10^3 + 8.111 + 1\\
44448889 &= 4.1111.10^4 + 8.1111 + 1
\end{aligned}$$

De mode geral, temos $N = \underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots8}_{n-1}9 = 4.\underbrace{111\ldots1}_{n}.10^n + 8.\underbrace{111\ldots1}_{n}+1$.

Utilizando a igualdade estabelecida em a), temos

$$\begin{aligned}
N &= \frac{4}{9}(10^n-1).10^n + \frac{8}{9}(10^n-1) + 1\\
&= \frac{4}{9}10^{2n} - \frac{4}{9}10^n + \frac{8}{9}10^n - \frac{8}{9} + 1\\
&= \left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Observe que $2.10^n + 1$ é composto somente de um algarismo 1, um algarismo 2 e o restante dos algarismos são iguais a 0, portanto é múltiplo de 3, já que 2+1+0=3 é múltiplo de 3. Daí N é quadrado de $\frac{2.10^n+1}{3}$.

□

3) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

(a) Escreva a sequência que começa com 37.

(b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

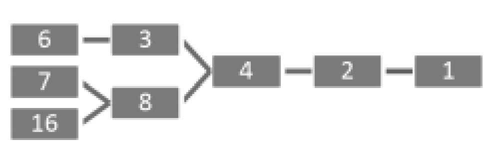
(c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

(d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

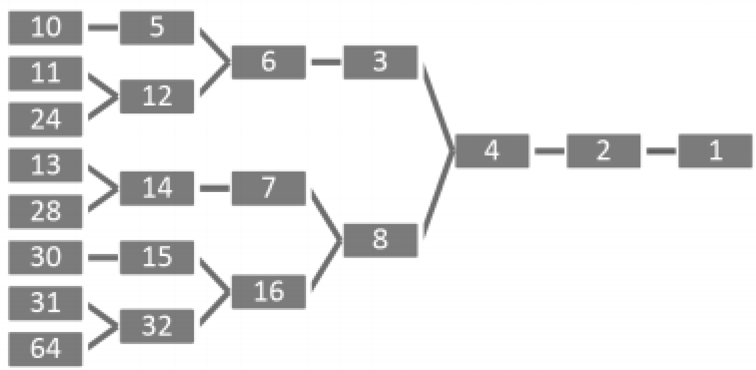
Solução.

(a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.

(b) Observe que "esquecendo" o primeiro termo de uma sequência de comprimento n temos uma de comprimento $n-1$. Isso nos leva a tentar pensar de trás para frente. A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4-1=3$ à esquerda e a segunda acrescentando $2 \cdot 4 = 8$ à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$; a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



(c) Repetindo o esquema do item anterior, temos



e assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6 e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento 7.

(d) Seja $P(n)$ o número de sequências pares de comprimento n e $I(n)$ o número de sequências ímpares de comprimento n. De cada sequência par de comprimento n começando com a, podemos obter uma sequência ímpar de comprimento $n+1$, acrescentando $a-1$ à esquerda, ou uma sequência par de comprimento $n+1$, acrescentando $2a$ à esquerda. De cada sequência ímpar de comprimento n começando por a, podemos gerar uma par de comprimento $n+1$, acrescentanto $2a$ à esquerda. Assim

$$\begin{aligned} P(n+1) &= I(n) + P(n), \\ I(n+1) &= P(n). \end{aligned}$$

Assim temos $P(16) + I(16) = 144 + 2 \cdot 233 = 610$ sequências de comprimento 16, das quais $P(16) = 144 + 233 = 377$ são pares.

□

4) Alguns amigos estão brincando no alto de uma árvore quando de repente todos caem

- João bate nos galhos A, B e C nessa ordem durante a queda
- Ana bate nos galhos D, E e F nessa ordem durante a queda
- Pedro bate nos galhos G, A e C nessa ordem durante a queda
- Luís bate nos galhos B, D e H nessa ordem durante a queda
- Ricardo bate nos galhos I, C e E nessa ordem durante a queda.

O pobre Paulo bate em todos os galhos de A até I durante sua descida. Baseando-se nas informações dadas, e sabendo que galhos diferentes estão em alturas diferentes, em quantas ordens diferentes é possível que Paulo bata em todos os galhos durante sua queda?

Solução. Denote por $X < Y$ o fato de Paulo na queda ter que bater no galho X antes do galho Y. Então pelos dados fornecidos temos

$$\begin{aligned} A < B < C &\ (1), \\ D < E < F &\ (2), \\ G < A < C &\ (3), \\ B < D < H &\ (4), \\ I < C < E &\ (5). \end{aligned}$$

Combinando (1) e (3) e a segunda metade de (5), temos

$$G < A < B < C < E \ (6)$$

e combinando (2) e a primeira metade de (4) temos

$$B < D < E < F \ (7).$$

Combinando (6) e (7), percebemos que C e D devem ambos estar entre B e E, porém podem aparecer em qualquer ordem. Assim devemos ter (8) ou (9) abaixo:

$$\begin{aligned} G < A < B < C < D < E < F &\ (8), \\ G < A < B < D < C < E < F &\ (9). \end{aligned}$$

Devemos inserir H e I nessas cadeias. Por (4), H deve aparecer após D, e por (5) I deve aparecer antes de C. Vamos dividir em casos baseando-se na possibilidade de ocorrer (8) ou (9).

Em caso de (8) ocorrer: Temos 3 escolhas onde inserir H e 4 escolhas onde inserir I. Essas escolhas são independentes, totalizando $3 \cdot 4 = 12$ possibilidades.

Em caso de (9) ocorrer: Temos 4 escolhas onde inserir H e 5 escolhas onde inserir I. Essas escolhas são independentes, porém se colocarmos ambos H e I entre C e D, eles podem aparecer em qualquer ordem. Temos um total de $4 \cdot 5 + 1 = 21$ possibilidades.

Assim, existe um total de $12 + 21 = 33$ possibilidades. $\square$

5) Dados k, n, m inteiros não-negativos, a seguinte relação é conhecida como identidade de Vandermonde

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i},$$

onde se a e b são inteiros não-negativos,

$$\binom{a}{b} = \begin{cases} \frac{a!}{b!\,(a-b)!}, & \text{se } 0 \leq b \leq a \\ 0, & \text{se } b > a. \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

Esmeralda passeia pelos pontos de coordenadas inteiras do plano. Se, num dado momento, ela está no ponto (a, b), com um passo ela pode ir para um dos seguintes pontos: $(a+1, b)$, $(a-1, b)$, $(a, b+1)$ ou $(a, b-1)$.

(b) Para cada $0 \leq k \leq 2018$, determine o número de maneiras que Esmeralda pode sair do $(0, 0)$ e após 2018 passos terminar no $(0, 0)$, indo pra cima (ou seja, fazendo uma mudança do tipo $(a, b) \to (a, b+1)$) exatamente k vezes?

(c) De quantas maneiras Esmeralda pode sair do $(0, 0)$ e após 2018 passos terminar em $(0, 0)$?

Solução.

(a) Fazendo $m = k = n$ na identidade de Vandermonde e utilizando que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ segue a igualdade desejada.

(b) Se k é maior do que 1009 é claro que o número de maneiras é 0. Consideremos então $0 \leq k \leq 1009$. Note que cada movimento de subida ($\uparrow$) deve ser compensado com um movimento de descida ($\downarrow$), e cada movimento para a esquerda ($\leftarrow$) deve ser compensado com um movimento para a direita ($\rightarrow$). Assim, se fizermos k movimentos $\uparrow$, temos que fazer também k movimentos $\downarrow$, $1009-k$ movimentos $\leftarrow$ e $1009-k$ movimentos $\rightarrow$. Para cada k, o número de caminhos é, portanto, igual ao número de anagramas com 4 letras distintas, duas aparecendo k vezes e as outras duas, $1009-k$ vezes cada, que é $\frac{2018!}{k!\,k!\,(1009-k)!\,(1009-k)!} = \frac{2018!}{(k!)^2((1009-k)!)^2}$.

(c) Por (b), temos que esse número é dado por

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=0}^{1009} \frac{2018!}{k!\,k!\,(1009-k)!\,(1009-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{1009} \frac{2018!}{1009!\,1009!} \cdot \frac{1009!\,1009!}{k!\,(1009-k)!\,k!\,(1009-k)!} \\ &= \binom{2018}{1009} \sum_{k=0}^{1009} \binom{1009}{k}^2 \overset{(b)}{=} \binom{2018}{1009}^2. \end{aligned}$$

$\square$

6) Em uma estranha língua existem somente duas letras, a e b, e é postulado que a letra a é também uma palavra. Além do mais, todas as outras palavras são formadas de acordo com as seguintes regras:

A. Dada qualquer palavra, uma nova palavra pode ser formada ao se adicionar uma letra b ao final da mesma.

B. Se em uma palavra a sequência *aaa* aparece, uma nova palavra pode ser formada ao se substituir *aaa* pela letra b.

C. Se em uma palavra a sequência *bbb* aparece, uma nova palavra pode ser formada ao se omitir *bbb*.

D. Dada qualquer palavra, uma nova palavra pode ser formada ao se escrever a original duas vezes de forma consecutiva.

Por exemplo, por (D), *aa* é uma palavra, e por (D) novamente, *aaaa* é uma palavra. Daí por (B) *ba* é uma palavra, e por (A) *bab* também constitui uma palavra. Novamente, por (A), *babb* é uma palavra, e então por (D), *babbbabb* é também uma palavra. Finalmente, por (C) temos que *baabb* é uma palavra.

Mostre que nesta língua *baabaabaa* não é uma palavra.

Solução. Observe que (B) e (D) são as únicas regras que afetam o número de vezes que a letra a aparece em uma nova palavra.

Suponha que você tenha uma palavra que a letra a aparece n vezes. Se você aplicar a regra (B), você irá obter uma nova palavra em que a letra a aparece $n-3$ vezes. Se ao invés for aplicada a regra (D), você irá obter uma nova palavra em que a letra a aparece $2n$ vezes.

A não ser que n seja um múltiplo de 3, ambos $n-3$ e $2n$ não podem ser um múltiplo de 3, conforme os Lemas 1 e 2 abaixo. Portanto, ao menos que você comece com uma palavra com o número de letras a sendo um múltiplo de 3, nunca será possível obter uma palavra cujo número de letras a seja múltiplo de 3. Daí, nunca será possível formar a palavra *baabaabaa*, uma vez que a mesma possui seis letras a, e 6 é múltiplo de 3.

Lema 1. *Se* 3 *divide* $n-3$, *então* 3 *divide* n.

Suponha que 3 *divide* $n-3$. *Então existe inteiro* x *tal que* $n-3=3x$. *Portanto* $n=3x+3=3(x+1)$, *daí* 3 *divide* n.

Lema 2. *Se* 3 *divide* $2n$, *então* 3 *divide* n.

Suponha que 3 *divide* $2n$. *Então o Teorema Fundamental da Aritmética implica que* 3 *divide* n, *uma vez que* 3 *é primo e* 3 *não divide* 2.

$\square$

7) Seja $x_0, x_1, x_2, \ldots$ uma sequência tal que $x_0 = 1$ e para todo $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n).$$

(como usual, ln denota o logarítmico neperiano).

(a) Mostre que $x_n > 0$ para todo n.

(b) Observe que $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}$. Mostre que a sequência é estritamente decrescente, i.e., $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \geq 0$.

(c) Mostre que a série infinita $x_0 + x_1 + \cdots$ converge e ache o valor da soma.

Solução.

(a) Considere $f(x) = e^x - x$. Note que $f'(x) = e^x - 1 > 0$ se $x > 0$, uma vez que $y = e^x$ é estritamente crescente e em 0 vale 1. Assim $f(x)$ é estritamente crescente e como $f(0) = 1$, temos que $e^x - x > 1$ se $x > 0$. Por indução em n, vemos que $x_n > 0$ para todo n.

(b) Temos $e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = x_n > 0$ por (a). Como $y = e^x$ é estritamente crescente, temos que $e^{x_n} > e^{x_{n+1}} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

(c) Sendo $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência decrescente e limitada inferiormente, já que é x_n é positivo para todo n, temos que existe $L = \lim_{n\to\infty} x_n$. Passando o limite na igualdade $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}$, temos $L = e^L - e^L$, daí $L = 0$. Agora temos uma soma telescópica

$$x_0 + \cdots + x_n = (e^{x_0} - e^{x_1}) + \cdots + (e^{x_n} - e^{x_{n+1}}) = e - e^{x_{n+1}},$$

e ao tomarmos o limite vemos que $x_0 + x_1 + \cdots$ converge para $e - 1$.

$\square$

8) Seja $p(x)$ um polinômio não constante com coeficientes reais e grau n.

(a) Mostre que se para algum $a \in \mathbb{R}$ a equação $p(x) = a$ admite m soluções reais distintas, então $p'(x)$ admite pelo menos $m-1$ raízes reais distintas. Conclua que se $p(x)$ admite m raízes reais distintas, então $p'(x)$ admite pelo menos $m-1$ raízes reais distintas. (se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, como usual $p'(x)$ denota a derivada de $p(x)$, ou seja, $p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$.)

(b) Suponha que $n \geq 5$ e que $p''(x)$ (a derivada de $p'(x)$) não possua raízes reais. Mostre que $p(x)$ possui raiz não real.

(c) Suponha que todas as raízes de $p(x)$ são distintas e que exista $b \in \mathbb{R}$ tal que $p(b) \neq 0$, mas $p'(b) = p''(b) = 0$. Mostre que $p(x)$ possui raiz não real.

(d) Suponha que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $p(b) \neq 0$, mas $p'(b) = p''(b) = 0$. Mostre que $p(x)$ possui raiz não real.

Solução.

(a) Sejam $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ as m soluções reais de $p(x) = a$. Pelo teorema de Rolle, para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1$, existe $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ satisfazendo $p'(c_i) = 0$. Então $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ são raízes reais de $p'(x)$ e portanto $p'(x)$ admite pelo menos $m-1$ raízes reais. Fazendo $a = 0$ obtemos a conclusão.

(b) Suponha por absurdo que todas as raízes de $p(x)$ são reais. Se $p(x)$ admite pelo menos três raízes distintas, a saber $x_1 < x_2 < x_3$, então pelo teorema de Rolle existem $c_1 \in (x_1, x_2)$ e $c_2 \in (x_2, x_3)$ tais que $p'(c_1) = p'(c_2) = 0$. Aplicando agora o teorema de Rolle a $p'(x)$ temos que existe $d \in (c_1, c_2)$ tal que $p''(d) = 0$, contrariando o fato das raízes de $p''(x)$ serem não reais. Portanto temos que $p(x)$ admite uma ou duas raízes reais. No primeiro caso, $p(x)$ é da forma $p(x) = a_n(x - x_1)^n$, $a_n, x_1 \in \mathbb{R}$ e como em particular $n \geq 3$ facilmente vemos que $p''(x_1) = 0$, obtendo uma contradição. No segundo caso $p(x) = a_n(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}$, $a_n, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e como $n \geq 5$ podemos supor sem perda que $n_1 \geq 3$. Nesse caso vemos que $p''(x_1) = 0$, novamente obtendo uma contradição. Portanto alguma raiz de $p(x)$ deve ser não real.

(c) Note que resolvendo (d) em particular resolvemos (c), no entanto por ser relativamente mais simples damos uma solução para (c). Pelo que fizemos em (a), podemos concluir o seguinte lema: dado um polinômio $p(x)$ de grau n com n raízes reais distintas, sua derivada $p'(x)$ possui $n-1$ raízes distintas, além disso $p(x)$ e $p'(x)$ não possuem raízes em comum. Suponha agora que estamos nas hipóteses de (c) e que $p(x)$ possui somente raízes reais, todas elas distintas. Aplicando o lema a $p(x)$ obtemos que $p'(x)$ possui $n-1$ raízes reais distintas. Aplicando agora o lema a $p'(x)$ concluimos que $p'(x)$ e $p''(x)$ não possuem raízes em comum, mas isso contraria a existência de b. Daí $p(x)$ admite pelo menos uma raiz não real.

(d) Suponha que todas as raízes de $p(x)$ são reais. Logo $p(x) = a_n(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}$, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ e $\sum n_i = n$. Ao diferenciar a última expressão, vemos que x_i é raiz de $p'(x)$ de multiplicidade $n_i - 1$ quando $n_i > 1$. Somando todas as multiplicidades, vemos que contamos $n-k$ das possíveis $n-1$ raízes de $p'(x)$. Agora pelo teorema de Rolle, existem $k-1$ raízes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ de $p'(x)$, onde $c_i \in (x_i, x_{i+1})$, para $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Com isso achamos as restantes $k-1$ raízes de $p'(x)$, todas elas com multiplicidade 1. Sendo b raiz de $p(x)$ e de $p'(x)$, temos que $b \neq c_i$, para todo i. Sendo $p(b) \neq 0$, temos $b \neq x_i$ para todo i. Obtemos assim uma contradição. Logo nem todas as raízes de $p(x)$ são reais.

$\square$