

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Цель лабораторной работы. Освоение способов описания дискретных сигналов и методики их моделирования. Изучение способа формирования дискретных сигналов с помощью дискретных фильтров и определение спектральной плотности таких сигналов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Дискретные последовательности

Математической моделью дискретного сигнала является решетчатая функция (дискретная последовательность) $x(n)$, где n соответствует номеру отчета и принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Таким образом, $n = 0$ соответствует отчету дискретного сигнала, взятому в начальный момент времени, $n = 1$ – через интервал дискретизации от начального момента времени, $n = 2$ – через два интервала дискретизации и т.д. Конечную дискретную последовательность можно записывать в виде множества, заданного перечислением элементов, т.е. следующим образом: $x(n) = \{1, 2, -3, 4\}$.

Простейшей дискретной последовательностью может считаться δ -функция $\delta(n)$ (*единичный импульс*), которая равна 1 при $n = 0$ и нулю при всех других значениях n (рис. 1.1).

Дискретная δ -функция, задержанная на m тактовых интервалов (рис.1.2), записывается следующим образом: $\delta(n - m)$.

Другой важной дискретной последовательностью является *единичный скачок* (рис. 1.3) $\sigma(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \dots$

Дискретная δ -функция и дискретный единичный скачок связаны между собой следующими соотношениями:

$$\delta(n) = \sigma(n) - \sigma(n - 1)$$

$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k).$$



Рис. 1.1. Единичный импульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

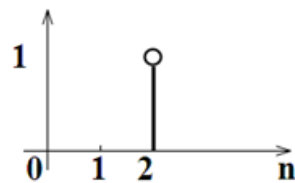


Рис.1.2. Смещенный δ -импульс

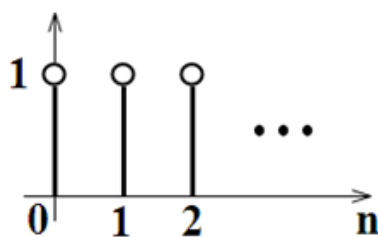


Рис. 1.3. Единичный скачок.

Произвольная дискретная последовательность может быть записана в виде взвешенной суммы δ -функций:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \delta(n - k)$$

Периодической называют последовательность $x(n)$, удовлетворяющую условию $x(n) = x(n + mN)$, где m и N – целые числа, $m = 1, 2, 3, \dots$; N – период последовательности.

1.2. Z-преобразование

Для дискретной последовательности $x(n)$ одностороннее Z-преобразование определяется рядом:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n},$$

где $z = Re\ z + j\ Im\ z$ – комплексная функция, $X(z)$ – Z-форма последовательности $x(n)$.

Если входной сигнал представить в виде взвешенной суммы δ -функций

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(n-k),$$

то

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}.$$

1.3. Спектральная плотность дискретной последовательности

Прямое преобразование Фурье для дискретной последовательности имеет следующий вид

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT}$$

и называется спектральной плотностью (спектром) дискретной последовательности. Выражение для спектра дискретной последовательности можно найти, заменив в ее Z-форме переменную z на $e^{j\omega T}$. После этого, используя преобразование Эйлера $e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) - j \sin(\omega T)$, можно определить вещественную и мнимую составляющие, а также модуль и аргумент спектральной плотности.

Отметим ряд особенностей спектров дискретных сигналов.

1. Спектральная плотность дискретного сигнала – периодическая функция с периодом, равным частоте дискретизации.

2. Если дискретная последовательность вещественная, то модуль спектральной плотности такой последовательности есть четная функция, а аргумент – нечетная функция частоты.

3. При сдвиге дискретного сигнала $x(n)$ вправо по временной оси на m тактов (задержка) получим сигнал $y(n) = x(n-m)$, Z-форма и спектральная плотность которого имеет вид

$$\begin{aligned} Z\{y(n)\} &= Z\{x(n-m)\} = z^{-m}X(z), \\ Y(e^{j\omega T}) &= e^{-jm\omega T}X(e^{j\omega T}). \end{aligned}$$

4. Дискретный сигнал $x(n)$ и модуль его спектра $|X(e^{j\omega T})|$ связаны следующей зависимостью (теорема Парсеваля)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega.$$

Отметим, что $\omega T = 2\pi w$, $w = f/f_d$.

1.4. Z-форма и спектральная плотность периодической дискретной последовательности конечной длительности

Вычисление Z-формы периодической последовательности конечной длительности можно упростить, разложив многочлен в произведение двух множителей. Рассмотрим дискретную последовательность с периодом повторения p и количеством повторений M (рис. 1.4):

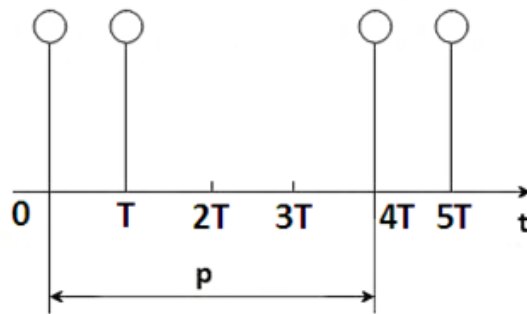


Рис. 1.4. Периодическая дискретная последовательность при $p = 4$ и $M = 2$.

Задержка последовательности на k тактов соответствует умножению Z-формы одного периода на z^{-k} . Если $(1 + z^{-1})$ – Z-форма одного периода, то Z-форма такого периода, смещенного на четыре тактовых интервала примет вид $(1 + z^{-1})z^{-4}$. Запишем Z-форму последовательности, имеющей два периода по два отсчета

$$(1 + z^{-1}) + (1 + z^{-1})z^{-4} = (1 + z^{-1}) \cdot (1 + z^{-4}),$$

где $(1 + z^{-4})$ – множитель повторения.

Таким образом, Z-форма периодической последовательности с периодом повторения p и количеством повторений M определяется по формуле:

$$\underline{X}(z) = X_1(z)(1 + z^{-p} + \dots + z^{-(M-1)p}),$$

где $X_1(z)$ – Z-форма одного периода, $(1 + z^{-p} + \dots + z^{-(M-1)p})$ – Z-форма множителя повторения.

Спектральную плотность периодической дискретной последовательности можно найти перемножением спектральных плотностей одного периода и множителя повторения.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.1. Моделирование сигналов с помощью функциональных элементов

Характеристикам дискретных сигналов можно поставить в соответствие характеристики дискретных фильтров (табл. 1). На этом основана методика моделирования дискретных сигналов в данной лабораторной работе.

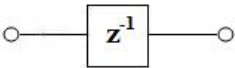
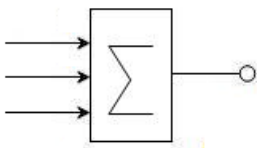
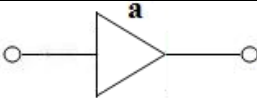
Т а б л и ц а 1

Сопоставление характеристик дискретных сигналов и фильтров

Сигналы		Фильтры	
$x(n)$	Дискретная последовательность	$h(n)$	Дискретная импульсная характеристика
$X(z)$	Z-форма сигнала	$H(z)$	Передаточная функция
$X(e^{j\Phi})$	Спектральная плотность	$H(e^{j\Phi})$	Частотная характеристика
$ X(e^{j\Phi}) $	Модуль спектра	$ H(e^{j\Phi}) $	АЧХ
$\arg X(e^{j\Phi})$	Фаза спектра	$\arg H(e^{j\Phi})$	ФЧХ

Схема дискретного фильтра может быть реализована в виде набора структурных элементов (табл. 2).

Элементы схем дискретных фильтров

Элемент структурной схемы	Физический смысл
	Задержка на один такт
	Сумматор
	Умножение на константу

В данной работе функцию умножения на константу выполняет усилитель.

Все элементы включены в библиотеку моделей аналоговых компонентов (Analog Primitives) системы Micro-Cap. При этом источника импульсного напряжения (Pulse Source) находится в группе источников колебаний (Waverform Sourse), а элементы задержки (Delay), сумматоры (Sum) и усилители (Amp) – в группе стандартных макросов (Macros).

Моделирование вещественного дискретного сигнала. На рис. 1.5 приведена обобщенная структурная схема формирователя вещественного дискретного сигнала, имеющего пять отсчетов.

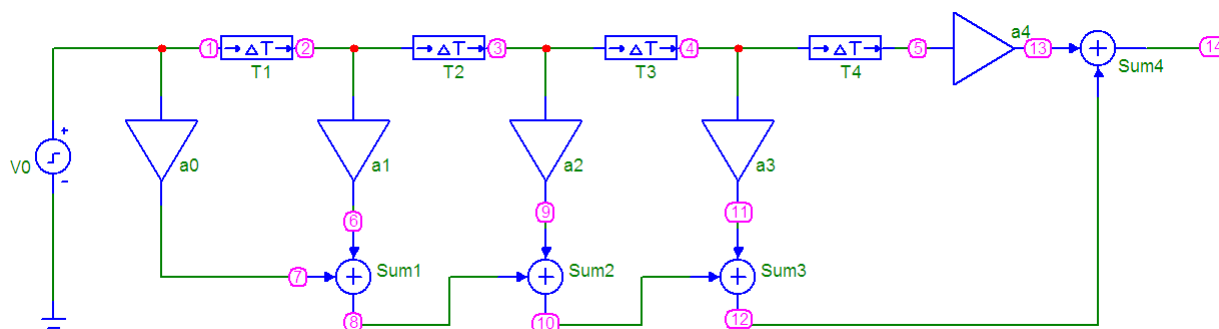


Рис. 1.5. Моделирование вещественного дискретного сигнала (первый способ)

Для размещения на схеме элементов задержки, обозначенных на схеме T1, T2, T3, T4, нужно последовательно выбрать следующие пункты меню: **Component>Analog Primitives> Macros> Delay**. Частота следования отсчетов на временной оси постоянна и равна периоду дискретизации, поэтому для всех элементов задержки при задании параметров в строке **Param:DELAY** (*параметр: задержка*) указывается период дискретизации. Выберем его равным 10 мс. При этом необходимо помнить, что период дискретизации обратно пропорционален частоте дискретизации.

Высоту отсчета по уровню можно задать двумя способами. *Первый способ* основан на использовании элемента умножения на константу Amp (на схеме a0, a1, a2, a3, a4). Этот элемент выбирается из меню компонентов в разделе аналоговых компонентов в подразделе макросов: **Component>Analog Primitives> Macros> Amp**. При описании параметров умножителя в строке **Param:GAIN** (*параметр: множитель*) следует указать константу, на которую умножается отсчет единичной высоты.

Функциональный элемент сумматор Sum выбираем из того же подраздела макросов по команде: **Component>Analog Primitives> Macros> Sum**. При задании параметров сумматора в строках **Param:KA** (*параметр: коэффициент A*) и **Param:KB** (*параметр: коэффициент B*) указывается значение масштабных коэффициентов, на который дополнительно умножаются суммируемые величины. По умолчанию они равны 1. Для схемы, представленной на рис.1.5, используется именно этот вариант. *Второй способ* задания высоты отсчета основан на присвоении масштабным коэффициентам в окне параметров сумматора требуемых значений констант. Пример использования этого способа для последовательности {1,2,3,4,5} представлен на рис. 1.6.

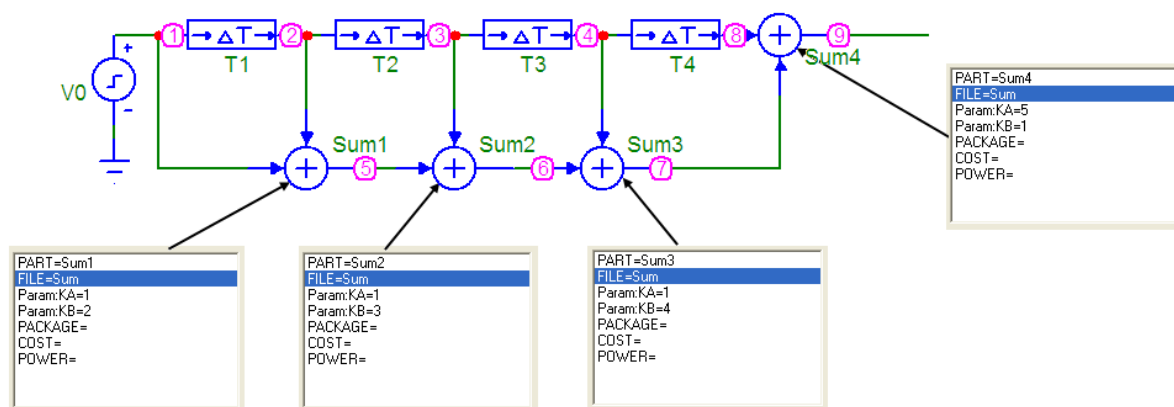


Рис. 1.6. Моделирование вещественного дискретного сигнала (второй способ)

При размещении на схеме импульсного источника в открывшемся окне **Pulse Source** в строке **MODEL** выбираем тип **IMPULSE**. Рекомендуемый для моделирования импульс, формирующий дискретную последовательность, задается параметрами, представленными на рис. 1.7.

VZERO	0	VONE	1	P1	0
P2	1N	P3	31N	P4	32N
P5	500M				

Рис. 1.7. Задание формы импульса

Моделирование периодического дискретного сигнала конечной длительности. Функциональная схема формирователя периодического дискретного сигнала с периодом p и количеством повторений M состоит из двух последовательно соединенных функциональных блоков: формирователя дискретного сигнала, моделирующего один период, и множителя повторения. Реализация формирователя непериодической последовательности описана выше.

Моделирование множителя повторения производится с помощью функциональных элементов задержки **Delay** и сумматоров **Sum**. Количество элементов задержки должно быть равным $(M - 1)$. Задерживающий интервал вычисляется по формуле $\Delta T = kp(10m)$, где k – номер задерживающего элемента ($k = 1, \dots, \{M - 1\}$), p – период повторения, $10m$ – период

дискретизации. На рис. 1.8 приведена схема модели множителя повторения с периодом $p = 5$ и количеством повторений $M = 4$.

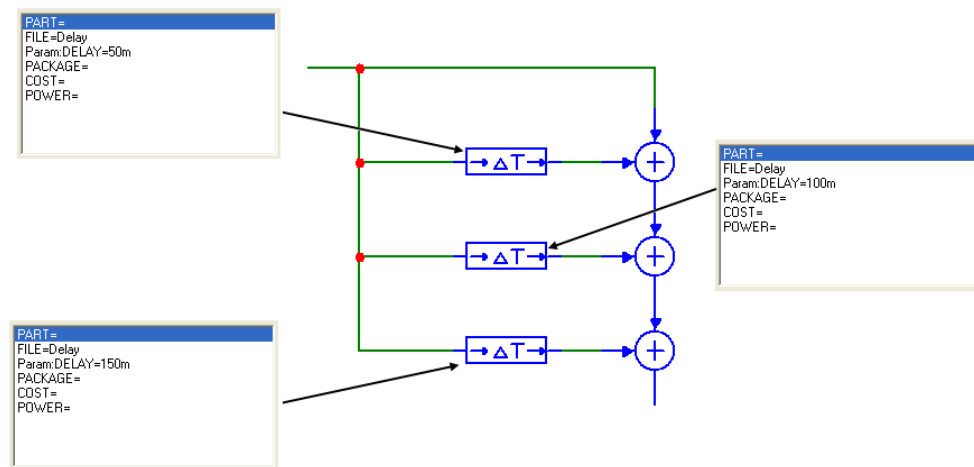


Рис. 1.8. Схема модели множителя повторения

2.2. Расчет спектральной плотности дискретного сигнала

Чтобы убедиться в правильности используемой модели, представим результат на выходе формирователя последовательности в виде временной диаграммы, которая рассчитывается по команде **Analysis>Transient....** В открывшемся окне задания параметров необходимо указать временной интервал анализа диаграммы **Time Range** и переменные, графики которых нужно построить: в ячейке **P** задается номер графика; в строках **X Expression** и **Y Expression** указываются переменные осей абсцисс и ординат соответственно (например, время **T** и напряжение в узле 11 **v(11)**).

Согласно методике моделирования, используемой в данной работе, модулем спектральной плотности исследуемой дискретной последовательности является АЧХ формирователя дискретного сигнала, а аргументом – ФЧХ. Расчет частотных характеристик осуществляется по команде **Analysis>AC**. Задание параметров на расчет в окне **AC Analysis Limits** аналогично заданию параметров на расчет временных диаграмм. Строка **Frequency Range** определяет диапазон частот, причем сначала указывается максимальное значение, а потом – минимальное. Для расчета модуля спектральной плотности по оси **Y** откладывается напряжение

выходного узла (например, $v(11)$), по оси X – частота F . Для расчета аргумента спектральной плотности следует определить фазу напряжения этого узла (например, $ph(11)$).

3. ДОМАШНЯЯ ПОДГОТОВКА

1. Используя теоретические сведения, приведенные в данной лабораторной работе, и конспект лекций, изучите такие понятия, как вещественные дискретные последовательности, периодические последовательности, Z-преобразование, спектральная плотность.

2. Используя методические указания к лабораторной работе, изучите методику моделирования дискретных сигналов.

3. Для последовательности из индивидуального задания выполнить следующее:

1. Дана вещественная дискретная последовательность $x(nT)$:

- Представить в графическом виде.
- Записать в виде взвешенной суммы дельта-импульсов
- Определить Z-форму
- Записать выражения для спектральной плотности
- Записать выражения для вещественной и мнимой составляющих спектральной плотности
- Записать выражения для модуля и аргумента спектральной плотности
- Построить графики модуля и аргумента спектральной плотности.

2. В качестве повторяющегося элемента дана

последовательность из задания 1. Также даны параметры периодической последовательности: период повторения p и количество повторений M .

- Представить в графическом виде.
- Определить Z-форму

- Записать выражение для спектральной плотности
- Построить на одном рисунке графики модуля и аргумента спектральной плотности одного периода, множителя повторений и всей периодической последовательности.

4. Подготовьтесь к ответам на контрольные вопросы.

4. ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

1. Составьте функциональную схему для моделирования вещественного дискретного сигнала. Параметры сигнала возьмите из таблицы данных задания на типовой расчет в соответствии с номером вашего варианта.

2. Проведите моделирование вещественной последовательности во временной и частотной области. Рассчитайте модуль, аргумент, действительную и мнимую составляющие спектральной плотности. Сравните полученные результаты с расчетами домашней подготовки.

3. Составьте функциональную схему для моделирования периодического дискретного вещественного сигнала. В качестве повторяющегося элемента возьмите последовательность из п.1. Период повторения p и количество повторений M выбираете из таблицы данных типового расчета согласно номеру вашего варианта.

Контрольные вопросы

1. Какие соотношения связывают единичный импульс и единичный скачок?
2. Как представить дискретную последовательность $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ в виде взвешенной суммы δ -импульсов?
3. Как записать Z-форму дискретной последовательности $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$?
4. Какой вид имеет модуль спектра $x(n) = \{1, 2\}$?
5. Каковы особенности спектров дискретных сигналов?