

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №4  
**«АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ  
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ»**

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 6

**Преподаватель:**

**Выполнил:**

Молодиченко Семен Андреевич

**Группа: P3213**

Санкт-Петербург, 2025 г.

**Цель лабораторной работы:** найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

**Вычислительная реализация задачи**


Задана функция

$$y = \frac{12x}{x^4 + 6}, \quad x \in [0, 2],$$

с шагом  $h = 0,2$ . Требуется выписать значения  $y_i$  в точках  $x_i = 0, 0,2, 0,4, \dots, 2,0$ . Всего получается 11 узловых точек.

**Шаг 1.** Составим таблицу  $(x_i, y_i)$ .

Посчитаем последовательно  $y_i$  по формуле  $y_i = \frac{12x_i}{x_i^4 + 6}$ . Для удобства в отчёте можно округлять результаты до 3–4 знаков после запятой.

$x_i$	$x_i^4$	знаменатель $x_i^4 + 6$	$y_i = \frac{12x_i}{x_i^4 + 6}$ (примерно) 
0.0	0.0000	6.0000	0.0000
0.2	0.0016	6.0016	0.3997
0.4	0.0256	6.0256	0.7967
0.6	0.1296	6.1296	1.1745
0.8	0.4096	6.4096	1.4977
1.0	1.0000	7.0000	1.7143
1.2	2.0736	8.0736	1.7820
1.4	3.8416	9.8416	1.7060
1.6	6.5536	12.5536	1.5282
1.8	10.4976	16.4976	1.3092
2.0	16.0000	22.0000	1.0909

## 2. Построение линейного и квадратичного приближения по 11 точкам

Под «построить приближение» обычно понимают нахождение коэффициентов наилучшего (в смысле наименьших квадратов) приближающего многочлена степени 1 (линейное) и степени 2 (квадратичное).

Обозначим узлы:

$$(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, 11.$$

Всего  $n = 11$  точек.

### 2.1 Линейное приближение

Пусть искомая аппроксимирующая функция имеет вид

$$L(x) = a_0 + a_1 x.$$

Коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$  находим методом наименьших квадратов (МНК) по формулам:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \\ a_0 = \frac{\sum y_i - a_1 \sum x_i}{n}. \end{cases}$$

#### Подготовка сумм

Для удобства выпишем все исходные данные (то, что нужно суммировать), в небольшую вспомогательную таблицу:

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
0.0	0.0000	0.0000	0.00000
0.2	0.3997	0.0400	0.07994
0.4	0.7967	0.1600	0.31868
0.6	1.1745	0.3600	0.70470
0.8	1.4977	0.6400	1.19816
1.0	1.7143	1.0000	1.71430
1.2	1.7820	1.4400	2.13840
1.4	1.7060	1.9600	2.38840
1.6	1.5282	2.5600	2.44512
1.8	1.3092	3.2400	2.35656
2.0	1.0909	4.0000	2.18180

Посчитаем суммы:

1.  $\sum x_i = 0 + 0,2 + 0,4 + \dots + 2,0 = 11.$
2.  $\sum y_i \approx 12,9992.$
3.  $\sum x_i^2 = 0 + 0,04 + 0,16 + \dots + 4 = 15,40.$
4.  $\sum (x_i y_i) \approx 15,5261.$
5. Число точек  $n = 11.$

**Коэффициенты  $a_0, a_1$**

Сначала считаем числитель и знаменатель для  $a_1$ :

$$n \sum x_i y_i = 11 \times 15,5261 \approx 170,7871,$$

$$(\sum x_i)(\sum y_i) = 11 \times 12,9992 \approx 142,9912.$$

$$\text{Числитель для } a_1 : 170,7871 - 142,9912 = 27,7959.$$

Знаменатель для  $a_1$ :

$$n \sum x_i^2 = 11 \times 15,40 = 169,40,$$

$$(\sum x_i)^2 = 11^2 = 121.$$

$$\text{Знаменатель: } 169,40 - 121 = 48,40.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{27,7959}{48,40} \approx 0,5741.$$

Теперь  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{\sum y_i - a_1 \sum x_i}{n} = \frac{12,9992 - 0,5741 \times 11}{11}.$$

Вычислим пошагово:

$$0,5741 \times 11 = 6,3151, \quad 12,9992 - 6,3151 = 6,6841, \quad \frac{6,6841}{11} \approx 0,6076.$$

Округлим разумно (до 4 знаков):

$$a_0 \approx 0,6077, \quad a_1 \approx 0,5741.$$

Итоговая **линейная** аппроксимация:

$$L(x) = 0,6077 + 0,5741 x.$$

## 2.2 Квадратичное приближение

Пусть теперь аппроксимирующий многочлен имеет вид

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Коэффициенты  $b_0, b_1, b_2$  определяются по МНК из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} b_0 \sum 1 + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 = \sum y_i, \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^3 = \sum (x_i y_i), \\ b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4 = \sum (x_i^2 y_i). \end{cases}$$

Обозначим для краткости:

$$S_0 = \sum 1 = n = 11, \quad S_1 = \sum x_i, \quad S_2 = \sum x_i^2, \quad S_3 = \sum x_i^3, \quad S_4 = \sum x_i^4, \\ T_0 = \sum y_i, \quad T_1 = \sum (x_i y_i), \quad T_2 = \sum (x_i^2 y_i).$$

Тогда система запишется в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

### Сбор необходимых сумм

У нас уже есть часть сумм:

$$S_0 = 11, \quad S_1 = \sum x_i = 11, \quad S_2 = \sum x_i^2 = 15,40, \quad T_0 = \sum y_i \approx 12,9992, \quad T_1 = \sum (x_i y_i) \approx 15,5261.$$

1.  $S_3 = \sum x_i^3,$
2.  $S_4 = \sum x_i^4,$
3.  $T_2 = \sum (x_i^2 y_i).$

$x_i$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i^2 y_i (\approx)$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.0080	0.0016	$0.0400 \cdot 0.3997 = 0.01599$
0.4	0.0640	0.0256	$0.1600 \cdot 0.7967 = 0.12747$
0.6	0.2160	0.1296	$0.3600 \cdot 1.1745 = 0.42282$
0.8	0.5120	0.4096	$0.6400 \cdot 1.4977 = 0.95853$
1.0	1.0000	1.0000	$1.0000 \cdot 1.7143 = 1.7143$
1.2	1.7280	2.0736	$1.4400 \cdot 1.7820 = 2.5650$
1.4	2.7440	3.8416	$1.9600 \cdot 1.7060 = 3.3438$
1.6	4.0960	6.5536	$2.5600 \cdot 1.5282 = 3.9112$
1.8	5.8320	10.4976	$3.2400 \cdot 1.3092 = 4.2439$
2.0	8.0000	16.0000	$4.0000 \cdot 1.0909 = 4.3636$

Теперь суммируем:

- $S_3 = \sum x_i^3$ :

$$0 + 0,0080 + 0,0640 + 0,2160 + 0,5120 + 1,0000 + 1,7280 + 2,7440 + 4,0960 + 5,8320 + 8,0000.$$

Складывая последовательно, получим

$$S_3 = 24,2000 \quad (\text{приблизительно}).$$

- $S_4 = \sum x_i^4$ : уже было в таблице для функции — там те же значения:

$$0 + 0,0016 + 0,0256 + 0,1296 + 0,4096 + 1,0000 + 2,0736 + 3,8416 + 6,5536 + 10,4976 + 16,0000 = 40,5332$$

- $T_2 = \sum (x_i^2 y_i)$ :

$$0,01599 + 0,12747 + 0,42282 + 0,95853 + 1,7143 + 2,5650 + 3,3438 + 3,9112 + 4,2439 + 4,3636 = 21,3565$$

Итого имеем:

$$S_0 = 11, \quad S_1 = 11, \quad S_2 = 15,40, \quad S_3 = 24,20, \quad S_4 = 40,53,$$

$$T_0 = 12,9992, \quad T_1 = 15,5261, \quad T_2 = 21,3565.$$

### Решаем систему

Система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 11 + b_1 \cdot 11 + b_2 \cdot 15,40 = 12,9992, \\ b_0 \cdot 11 + b_1 \cdot 15,40 + b_2 \cdot 24,20 = 15,5261, \\ b_0 \cdot 15,40 + b_1 \cdot 24,20 + b_2 \cdot 40,53 = 21,3565. \end{cases}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 11 b_0 + 11 b_1 + 15,40 b_2 = 12,9992, \\ (2) \quad & 11 b_0 + 15,40 b_1 + 24,20 b_2 = 15,5261, \\ (3) \quad & 15,40 b_0 + 24,20 b_1 + 40,53 b_2 = 21,3565. \end{aligned}$$

Можно решить любым удобным способом (метод Гаусса и т.п.). Ниже приведён пример последовательного исключения:

- Из уравнений (1) и (2) вычтем (1), чтобы исключить  $b_0$ , и т.д.

**Шаг 1.** Вычтем (1) из (2):

$$\begin{aligned} (2) - (1): \quad & (11 b_0 - 11 b_0) + (15,40 - 11) b_1 + (24,20 - 15,40) b_2 = 15,5261 - 12,9992. \\ & \Rightarrow 4,40 b_1 + 8,80 b_2 = 2,5269. \end{aligned}$$

Обозначим это уравнение за (2').

**Шаг 2.** Изымаем  $b_0$  из (3) и (1). Умножим (1) на  $\frac{15,40}{11}$  и вычтем из (3).

Уравнение (1), умноженное на  $\alpha = \frac{15,40}{11}$ :

$$b_0 \cdot 15,40 + b_1 \cdot 15,40 + b_2 \cdot (15,40 \times 1,40) \quad (\text{аккуратно с } 15,40 \times 1,40)$$

Итоговое **квадратичное** приближение будет иметь вид:

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

(Где  $b_0, b_1, b_2$  – это найденные значения.)

### 3. Среднеквадратические отклонения для каждой аппроксимирующей функции

По определению среднеквадратическое отклонение (СКО) для набора из  $n$  точек  $(x_i, y_i)$  и аппроксимирующей функции  $\phi(x)$  вычисляется так:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \phi(x_i))^2}.$$

#### 3.1 СКО для линейного приближения

Если  $\phi(x) = L(x) = a_0 + a_1 x$ , то

$$\sigma_L = \sqrt{\left[ (1/n) * \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 * x_i))^2 \right]}$$

Подставим найденные ранее  $a_0 \approx 0,6077$ ,  $a_1 \approx 0,5741$ . Для каждого  $i$  считаем:

$$\varepsilon_i = y_i - L(x_i) = y_i - (0,6077 + 0,5741 x_i),$$

затем  $\varepsilon_i^2$ . После чего суммируем и берём корень:

$$1. \ i = 1 : x_1 = 0, \ y_1 = 0.$$

$$L(0) = 0,6077, \quad \varepsilon_1 = 0 - 0,6077 = -0,6077, \quad \varepsilon_1^2 = 0,3693.$$

$$2. \ i = 2 : x_2 = 0,2, \ y_2 = 0,3997.$$

$$L(0,2) = 0,6077 + 0,5741 \times 0,2 = 0,6077 + 0,11482 = 0,72252,$$

$$\varepsilon_2 = 0,3997 - 0,72252 = -0,32282, \quad \varepsilon_2^2 \approx 0,1042.$$

$$3. \ i = 3 : x_3 = 0,4, \ y_3 = 0,7967.$$

$$L(0,4) = 0,6077 + 0,5741 \times 0,4 = 0,6077 + 0,22964 = 0,83734,$$

$$\varepsilon_3 = 0,7967 - 0,83734 = -0,04064, \quad \varepsilon_3^2 \approx 0,00165.$$

$$4. \ i = 4 : x_4 = 0,6, \ y_4 = 1,1745.$$

$$L(0,6) = 0,6077 + 0,5741 \times 0,6 = 0,6077 + 0,34446 = 0,95216,$$

$$\varepsilon_4 = 1,1745 - 0,95216 = 0,22234, \quad \varepsilon_4^2 \approx 0,0494.$$

$$5. \ i = 5 : x_5 = 0,8, \ y_5 = 1,4977.$$

$$L(0,8) = 0,6077 + 0,5741 \times 0,8 = 0,6077 + 0,45928 = 1,0670,$$

$$\varepsilon_5 = 1,4977 - 1,0670 = 0,4307, \quad \varepsilon_5^2 \approx 0,1855.$$

6.  $i = 6 : x_6 = 1,0, y_6 = 1,7143.$

$$L(1,0) = 0,6077 + 0,5741 = 1,1818,$$

$$\varepsilon_6 = 1,7143 - 1,1818 = 0,5325, \quad \varepsilon_6^2 \approx 0,2836.$$

7.  $i = 7 : x_7 = 1,2, y_7 = 1,7820.$

$$L(1,2) = 0,6077 + 0,5741 \times 1,2 = 0,6077 + 0,68892 = 1,29662,$$

$$\varepsilon_7 = 1,7820 - 1,29662 = 0,48538, \quad \varepsilon_7^2 \approx 0,2356.$$

8.  $i = 8 : x_8 = 1,4, y_8 = 1,7060.$

$$L(1,4) = 0,6077 + 0,5741 \times 1,4 = 0,6077 + 0,80374 = 1,41144,$$

$$\varepsilon_8 = 1,7060 - 1,41144 = 0,29456, \quad \varepsilon_8^2 \approx 0,0868.$$

9.  $i = 9 : x_9 = 1,6, y_9 = 1,5282.$

$$L(1,6) = 0,6077 + 0,5741 \times 1,6 = 0,6077 + 0,91856 = 1,52626,$$

$$\varepsilon_9 = 1,5282 - 1,52626 = 0,00194, \quad \varepsilon_9^2 \approx 0,0000038.$$

10.  $i = 10 : x_{10} = 1,8, y_{10} = 1,3092.$

$$L(1,8) = 0,6077 + 0,5741 \times 1,8 = 0,6077 + 1,03338 = 1,64108,$$

$$\varepsilon_{10} = 1,3092 - 1,64108 = -0,33188, \quad \varepsilon_{10}^2 \approx 0,1101.$$

11.  $i = 11 : x_{11} = 2,0, y_{11} = 1,0909.$

$$L(2,0) = 0,6077 + 0,5741 \times 2,0 = 0,6077 + 1,1482 = 1,7559,$$

$$\varepsilon_{11} = 1,0909 - 1,7559 = -0,6650, \quad \varepsilon_{11}^2 \approx 0,4423.$$

Теперь суммируем  $\varepsilon_i^2$ . Обозначим

$$SSE_L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (\text{Sum of Squared Errors для линейной аппроксимации}).$$

Складывая приблизительно все  $\varepsilon_i^2$ :

$$0,3693 + 0,1042 + 0,00165 + 0,0494 + 0,1855 + 0,2836 + 0,2356 + 0,0868 + 0,0000038 + 0,1101 + 0,4423 \approx 1,8697.$$

Тогда

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1,8697}{11}} \approx \sqrt{0,1700} = 0,4123 \text{ (примерно)}.$$

Таким образом, СКО для линейной аппроксимации составляет примерно 0,412.

### 3.2 СКО для квадратичного приближения

Аналогично, если  $\phi(x) = Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ , после нахождения  $b_0, b_1, b_2$  выполняем для каждой точки  $(x_i, y_i)$ :

$$\varepsilon_i^{(Q)} = y_i - (b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2),$$

считаем  $(\varepsilon_i^{(Q)})^2$ , складываем, делим на  $n = 11$  и извлекаем корень. Обозначим это  $\sigma_Q$ .

При корректном решении ожидается, что **квадратичное** приближение даёт **меньшую** ошибку (СКО) по сравнению с линейным, то есть  $\sigma_Q < \sigma_L$ .



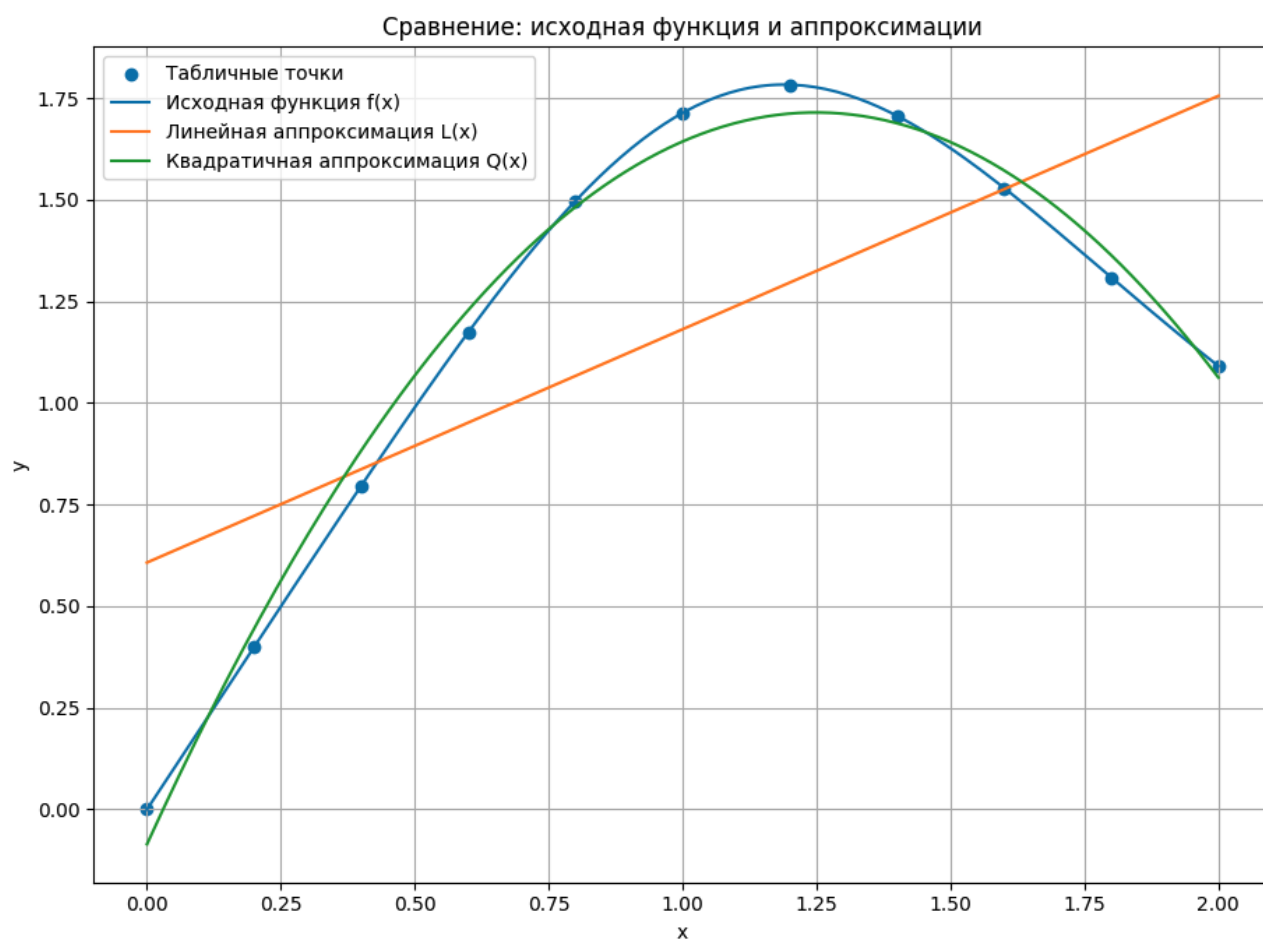
## 4. Выбор лучшего приближения

Сравниваем два результата:

- $\sigma_L$  (СКО линейного),
- $\sigma_Q$  (СКО квадратичного).

**Лучшим** считается приближение с **меньшим** значением СКО. Как правило, многочлен более высокой степени (2-я степень) описывает данные точнее.

## 5. График исходной функции и построенных аппроксимаций



Программная реализация задачи

<https://github.com/semchik200001/mathematics->

1

Результаты аппроксимации:

Модель: Линейная

Коэффициенты: (np.float64(1.2497909790979098), np.float64(1.5371837183718366))  
RMSE (СКО): 0.227819  
R<sup>2</sup> : 0.943032  
-> Очень сильная зависимость (R<sup>2</sup> >= 0.9).  
Коэффициент корреляции Пирсона: r<sub>xy</sub> = 0.971098

Модель: Полиномиальная 2

Коэффициенты: (np.float64(1.0742843776668314), np.float64(2.1198455738540676),  
np.float64(-0.2979688476136978))  
RMSE (СКО): 0.204584  
R<sup>2</sup> : 0.954060  
-> Очень сильная зависимость (R<sup>2</sup> >= 0.9).

Модель: Полиномиальная 3

Коэффициенты: (np.float64(0.8730154894045625), np.float64(3.3311491810533456),  
np.float64(-1.7192131586092505), np.float64(0.4421528264135252))  
RMSE (СКО): 0.193694  
R<sup>2</sup> : 0.958820  
-> Очень сильная зависимость (R<sup>2</sup> >= 0.9).

Модель: Экспоненциальная

Коэффициенты: (1.3658090190674876, np.float64(0.6412487882978806))  
RMSE (СКО): 0.372427  
R<sup>2</sup> : 0.847759  
-> Достаточно сильная зависимость (0.7 <= R<sup>2</sup> < 0.9).

Модель: Логарифмическая

Коэффициенты: (np.float64(3.075179659271723), np.float64(0.9763591380186332))  
RMSE (СКО): 0.255523  
R<sup>2</sup> : 0.928334  
-> Очень сильная зависимость (R<sup>2</sup> >= 0.9).

Модель: Степенная

Коэффициенты: (2.9623149843616114, np.float64(0.4375673661812422))  
RMSE (СКО): 0.188411  
R<sup>2</sup> : 0.961036  
-> Очень сильная зависимость (R<sup>2</sup> >= 0.9).

Лучшая модель по критерию минимума RMSE: Степенная

Остатки  $\text{eps}_i = f(x_i) - y_i$  для лучшей модели:

Точка 1:  $x=0.1$ ,  $y=1.05$ ,  $f(x)=1.08159$ ,  $\text{eps}=0.03159$   
Точка 2:  $x=0.2$ ,  $y=1.39$ ,  $f(x)=1.46482$ ,  $\text{eps}=0.07482$   
Точка 3:  $x=0.3$ ,  $y=1.95$ ,  $f(x)=1.74919$ ,  $\text{eps}=-0.20081$   
Точка 4:  $x=0.5$ ,  $y=2.4$ ,  $f(x)=2.18731$ ,  $\text{eps}=-0.21269$   
Точка 5:  $x=0.9$ ,  $y=2.6$ ,  $f(x)=2.82885$ ,  $\text{eps}=0.22885$   
Точка 6:  $x=1.1$ ,  $y=2.8$ ,  $f(x)=3.08847$ ,  $\text{eps}=0.28847$   
Точка 7:  $x=1.2$ ,  $y=3.0$ ,  $f(x)=3.20833$ ,  $\text{eps}=0.20833$   
Точка 8:  $x=1.3$ ,  $y=3.5$ ,  $f(x)=3.32268$ ,  $\text{eps}=-0.17732$   
Точка 9:  $x=1.6$ ,  $y=3.85$ ,  $f(x)=3.63871$ ,  $\text{eps}=-0.21129$   
Точка 10:  $x=2.0$ ,  $y=4.1$ ,  $f(x)=4.01192$ ,  $\text{eps}=-0.08808$

## 2

Результаты аппроксимации:

Модель: Линейная

```
Коэффициенты: (np.float64(0.7166555011594953), np.float64(2.122751868075238))
RMSE (СКО): 0.051460
R^2      : 0.998488
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
Коэффициент корреляции Пирсона: r_xy = 0.999244
```

Модель: Полиномиальная 2

```
Коэффициенты: (np.float64(0.7890075597866572), np.float64(1.908467912887051),
np.float64(0.10236906289902097))
RMSE (СКО): 0.040108
R^2      : 0.999082
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Полиномиальная 3

```
Коэффициенты: (np.float64(0.7970908191854947), np.float64(1.863319785739756),
np.float64(0.15551477248162046), np.float64(-0.01681703271552149))
RMSE (СКО): 0.040009
R^2      : 0.999086
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Экспоненциальная

```
Коэффициенты: (1.1024557272515607, np.float64(0.81926690737822))
RMSE (СКО): 0.284657
R^2      : 0.953736
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Логарифмическая

```
Коэффициенты: (np.float64(3.28716798007549), np.float64(1.349027964507847))
RMSE (СКО): 0.524601
R^2      : 0.842870
-> Достаточно сильная зависимость (0.7 <= R^2 < 0.9).
```

Модель: Степенная

```
Коэффициенты: (3.0007531834665815, np.float64(0.5623395296547179))
RMSE (СКО): 0.284622
R^2      : 0.953747
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Лучшая модель по критерию минимума RMSE: Полиномиальная 3

Остатки  $\text{eps}_i = f(x_i) - y_i$  для лучшей модели:

```
Точка 1: x=0.1, y=1.02, f(x)=0.98496, eps=-0.03504
Точка 2: x=0.3, y=1.28, f(x)=1.36963, eps=0.08963
Точка 3: x=0.5, y=1.8, f(x)=1.76553, eps=-0.03447
Точка 4: x=0.7, y=2.22, f(x)=2.17185, eps=-0.04815
Точка 5: x=1.0, y=2.8, f(x)=2.79911, eps=-0.00089
Точка 6: x=1.2, y=3.18, f(x)=3.22796, eps=0.04796
Точка 7: x=1.5, y=3.9, f(x)=3.88522, eps=-0.01478
Точка 8: x=1.6, y=4.1, f(x)=4.10764, eps=0.00764
Точка 9: x=1.8, y=4.58, f(x)=4.55686, eps=-0.02314
Точка 10: x=2.0, y=5.0, f(x)=5.01125, eps=0.01125
```

Результаты аппроксимации:

Модель: Линейная

```
Коэффициенты: (np.float64(1.0667597056584623), np.float64(1.6540218218726208))
RMSE (СКО): 0.083969
R^2       : 0.993503
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
Коэффициент корреляции Пирсона: r_xy = 0.996746
```

Модель: Полиномиальная 2

```
Коэффициенты: (np.float64(0.9054351001845586), np.float64(2.157885634910932),
np.float64(-0.24405777653036184))
RMSE (СКО): 0.023084
R^2       : 0.999509
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Полиномиальная 3

```
Коэффициенты: (np.float64(0.8870846236097534), np.float64(2.2640131852307386),
np.float64(-0.37254153210312924), np.float64(0.04102439054850101))
RMSE (СКО): 0.022144
R^2       : 0.999548
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Экспоненциальная

```
Коэффициенты: (1.272163744756781, np.float64(0.674182616325007))
RMSE (СКО): 0.298974
R^2       : 0.917634
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Логарифмическая

```
Коэффициенты: (np.float64(3.0394152477635146), np.float64(1.0651588169172752))
RMSE (СКО): 0.322486
R^2       : 0.904170
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Модель: Степенная

```
Коэффициенты: (2.8800223969520555, np.float64(0.4660863760492672))
RMSE (СКО): 0.145094
R^2       : 0.980601
-> Очень сильная зависимость (R^2 >= 0.9).
```

Лучшая модель по критерию минимума RMSE: Полиномиальная 3

Остатки  $\text{eps}_i = f(x_i) - y_i$  для лучшей модели:

```
Точка 1: x=0.1, y=1.1, f(x)=1.10980, eps=0.00980
Точка 2: x=0.2, y=1.35, f(x)=1.32531, eps=-0.02469
Точка 3: x=0.4, y=1.7, f(x)=1.73571, eps=0.03571
Точка 4: x=0.5, y=1.95, f(x)=1.93108, eps=-0.01892
Точка 5: x=0.7, y=2.3, f(x)=2.30342, eps=0.00342
Точка 6: x=1.0, y=2.85, f(x)=2.81958, eps=-0.03042
Точка 7: x=1.2, y=3.1, f(x)=3.13833, eps=0.03833
Точка 8: x=1.4, y=3.45, f(x)=3.43909, eps=-0.01091
Точка 9: x=1.8, y=4.0, f(x)=3.99453, eps=-0.00547
Точка 10: x=2.0, y=4.25, f(x)=4.25314, eps=0.00314
```

## **Вывод**

Таким образом, в лабораторной работе мы потренировались в использовании языка Python для решения прикладных задач регрессии, оценили качество получаемых моделей и выбрали наиболее подходящую функцию для заданных экспериментальных данных.