Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№6**
«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **6**

Преподаватель:

Выполнил:
Молодиченко Семен Андреевич
Группа: P3213

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель лабораторной работы: решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

Задачи:

Реализовать метод Эйлера

Реализовать метод Рунге–Кутты 4-го порядка

Реализовать многошаговый предиктор–корректорный метод Адамса

Сравнить с точным решением, оценить погрешности

Описание алгоритма:

Пошаговая схема работы программы:

Ввод задачи и параметров (начальные условия, отрезок, шаг, точность)

Выбор метода интегрирования

Расчёт сетки x0,x1,…,xnx_0, x_1, …, x_nx0,x1,…,xn

Итеративный перебор формул метода по шагам

Сбор результатов в таблицы

Оценка погрешности (правило Рунге или сравнение с точным решением)

Построение графиков и вывод отчёта

Рабочие формулы методов

- **Метод Эйлера**:

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$$

- **Метод Рунге–Кутты 4-го порядка**:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i),\\ k_2 &= f\big(x_i + \tfrac{h}{2},\ y_i + \tfrac{h}{2}\,k_1\big),\\ k_3 &= f\big(x_i + \tfrac{h}{2},\ y_i + \tfrac{h}{2}\,k_2\big),\\ k_4 &= f\big(x_i + h,\ y_i + h\,k_3\big),\\ y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

- **Метод Адамса (предиктор–корректор)**:
  - Предиктор (4-шаговый Адамс–Бэшфорд):

$$y_{i+1}^{(p)} = y_i + \frac{h}{24}\big(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\big)$$

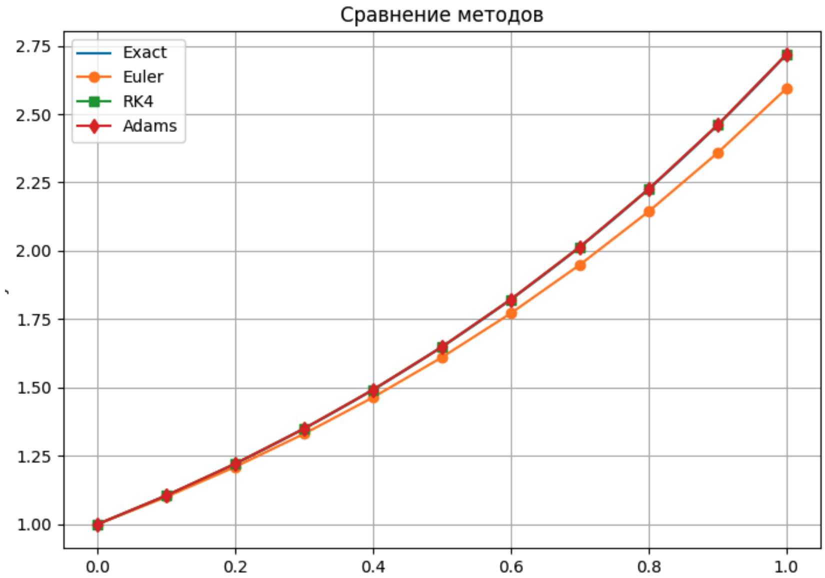
  - Корректор (Адамс–Мултон):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\big(9f_{i+1}^{(p)} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\big)$$

1.

```
Таблица решений:
i   x    Euler    RK4 Adams    Exact
0   0.0000  1.000000    1.000000    1.000000    1.000000
1   0.1000  1.100000    1.105171    1.105171    1.105171
2   0.2000  1.210000    1.221403    1.221403    1.221403
3   0.3000  1.331000    1.349858    1.349858    1.349859
4   0.4000  1.464100    1.491824    1.491825    1.491825
5   0.5000  1.610510    1.648721    1.648721    1.648721
6   0.6000  1.771561    1.822118    1.822119    1.822119
7   0.7000  1.948717    2.013752    2.013753    2.013753
8   0.8000  2.143589    2.225540    2.225542    2.225541
9   0.9000  2.357948    2.459601    2.459604    2.459603
10  1.0000  2.593742    2.718280    2.718284    2.718282

Оценка погрешности Эйлера (Рунге): 5.96e-02
Оценка погрешности RK4 (Рунге):    1.30e-07
Максимальная погрешность Адамса:  1.79e-06
```

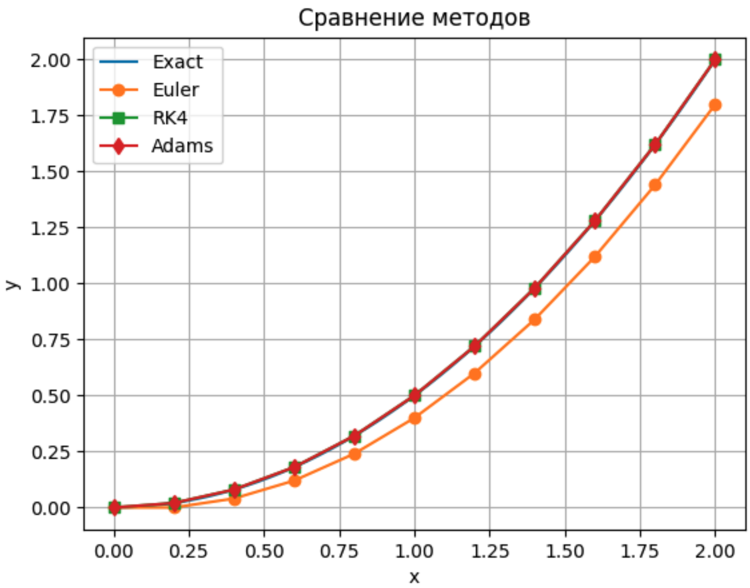


для «быстрого» роста (экспоненциального) незамедлительно сказывается низкий порядок Эйлера, тогда как методы 4-го порядка остаются точными.

2.

```
Таблица решений:
i   x    Euler    RK4 Adams    Exact
0   0.0000  0.000000    0.000000    0.000000    0.000000
1   0.2000  0.000000    0.020000    0.020000    0.020000
2   0.4000  0.040000    0.080000    0.080000    0.080000
3   0.6000  0.120000    0.180000    0.180000    0.180000
4   0.8000  0.240000    0.320000    0.320000    0.320000
5   1.0000  0.400000    0.500000    0.500000    0.500000
6   1.2000  0.600000    0.720000    0.720000    0.720000
7   1.4000  0.840000    0.980000    0.980000    0.980000
8   1.6000  1.120000    1.280000    1.280000    1.280000
9   1.8000  1.440000    1.620000    1.620000    1.620000
10  2.0000  1.800000    2.000000    2.000000    2.000000

Оценка погрешности Эйлера (Рунге): 1.00e-01
Оценка погрешности RK4 (Рунге):    2.96e-17
Максимальная погрешность Адамса:  2.22e-16
```



даже при относительно «спокойных» производных (линейный рост) метод Эйлера уступает в точности, а RK4/Adams обеспечивают очень точную аппроксимацию.

3.

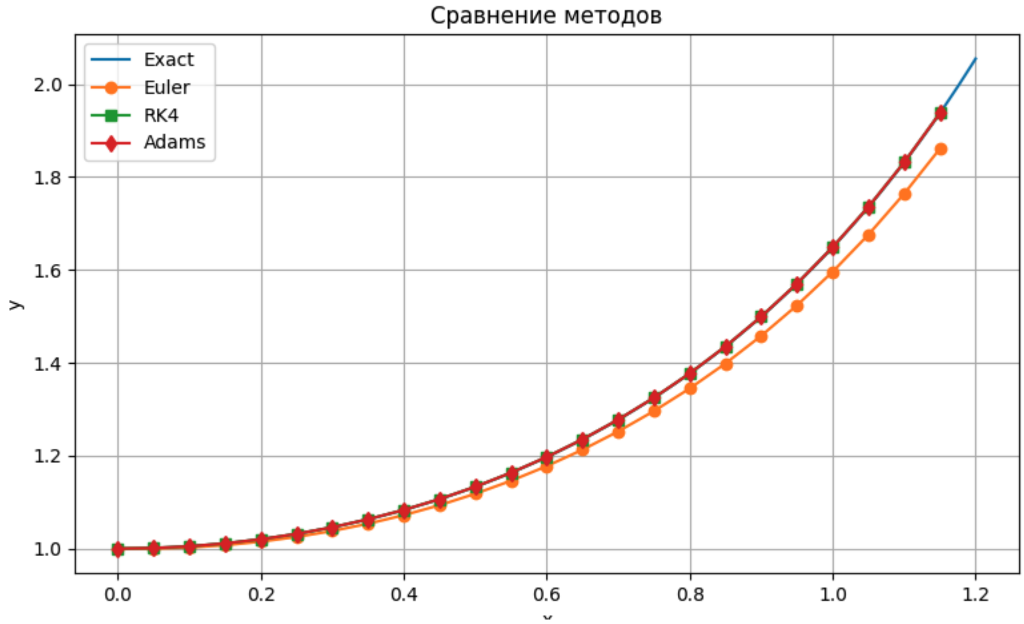
Таблица решений:

i	x	Euler	RK4	Adams	Exact
0	0.0000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.0500	1.000000	1.001251	1.001251	1.001251
2	0.1000	1.002500	1.005013	1.005013	1.005013
3	0.1500	1.007513	1.011314	1.011314	1.011314
4	0.2000	1.015069	1.020201	1.020201	1.020201
5	0.2500	1.025220	1.031743	1.031743	1.031743
6	0.3000	1.038035	1.046028	1.046028	1.046028
7	0.3500	1.053605	1.063165	1.063165	1.063165
8	0.4000	1.072043	1.083287	1.083287	1.083287
9	0.4500	1.093484	1.106553	1.106553	1.106553
10	0.5000	1.118088	1.133148	1.133149	1.133148
11	0.5500	1.146040	1.163287	1.163288	1.163287
12	0.6000	1.177556	1.197217	1.197218	1.197217
13	0.6500	1.212883	1.235221	1.235222	1.235221
14	0.7000	1.252301	1.277621	1.277622	1.277621
15	0.7500	1.296132	1.324785	1.324786	1.324785
16	0.8000	1.344737	1.377128	1.377129	1.377128
17	0.8500	1.398526	1.435122	1.435123	1.435122
18	0.9000	1.457964	1.499302	1.499304	1.499303
19	0.9500	1.523572	1.570274	1.570275	1.570274
20	1.0000	1.595942	1.648721	1.648723	1.648721
21	1.0500	1.675739	1.735421	1.735423	1.735421
22	1.1000	1.763715	1.831252	1.831255	1.831252
23	1.1500	1.860719	1.937212	1.937216	1.937212

Оценка погрешности Эйлера (Рунге): 3.73e-02

Оценка погрешности RK4 (Рунге): 2.52e-09

Максимальная погрешность Адамса: 3.28e-06



сокращение шага уменьшает ошибку Эйлера, но чтобы добиться сопоставимой с RK4 точности, надо брать очень маленькие h. Методы 4-го порядка (и многошаговый Adams) при том же h дают в разы более точный результат.

Программная реализация

https://github.com/semchik200001/mathematics-

Вывод

Сравнение скорости сходимости и точности каждого метода

Влияние размера шага h и критичность выбора шага/точности

Когда лучше использовать одношаговые, а когда — многошаговые методы

Возможные улучшения (адаптивный шаг, другие методы предиктор–корректор и т. д.)