Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**
**«Численное интегрирование»**

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **6**

**Преподаватель:**

**Выполнил:**
Молодиченко Семен Андреевич
**Группа:** P3213

Санкт-Петербург, 2025 г.

<u>Цель работы</u>: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

## 1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$\int_1^2 (3x^3 + 5x^2 + 3x - 6)dx$$

### 1. Точное значение интеграла

Сначала найдём первообразную функции $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 6$:

$$F(x) = \int \left(3x^3 + 5x^2 + 3x - 6\right) dx = \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 6x + C.$$

Тогда искомый интеграл равен

$$I = F(2) - F(1).$$

- При $x = 2$:

$$F(2) = \frac{3}{4}\cdot 2^4 + \frac{5}{3}\cdot 2^3 + \frac{3}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2 = 12 + \tfrac{40}{3} + 6 - 12 = 6 + \tfrac{40}{3} = \tfrac{58}{3}.$$

- При $x = 1$:

$$F(1) = \tfrac{3}{4}\cdot 1 + \tfrac{5}{3}\cdot 1 + \tfrac{3}{2}\cdot 1 - 6\cdot 1 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{3} + \tfrac{3}{2} - 6 = -\tfrac{25}{12}.$$

Значит,

$$I = \tfrac{58}{3} - \left(-\tfrac{25}{12}\right) = \tfrac{58}{3} + \tfrac{25}{12} = \tfrac{232}{12} + \tfrac{25}{12} = \tfrac{257}{12} \approx 21.4167.$$

### 2. Интеграл по формуле Ньютона–Котеса при $n = 6$

«Закрытая» формула Ньютона–Котеса с 7 точками (то есть $n = 6$ равных отрезков) **точно** интегрирует многочлены степени до 7 включительно. Поскольку наш подынтегральный многочлен имеет степень 3, такая формула даст в точности то же самое значение $257/12$. Формально можно разбить $[1,2]$ на 6 отрезков длины $1/6$ и применить стандартные веса Ньютона–Котеса; но по теории погрешность будет равна нулю для кубического многочлена.

**Результат**: $I_{\text{Н–К},\, n=6} = 257/12 \approx 21.4167.$

### 3. Интеграл методами средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$

Разобьём отрезок $[1,2]$ на 10 равных частичных отрезков длиной $h = 0.1$. Точки разбиения:

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1.1,\quad x_2 = 1.2,\ \ldots,\ x_{10} = 2.$$

Ниже приведены значения $f(x_i) = 3x_i^3 + 5x_i^2 + 3x_i - 6.$

### 3.1. Формула средних прямоугольников

Для каждого отрезка $[x_{i-1},\ x_i]$ берём значение функции в середине $m_i = x_{i-1} + h/2$. То есть:

$$m_0 = 1.05,\ m_1 = 1.15,\ m_2 = 1.25,\ \dots,\ m_9 = 1.95.$$

Вычислим $f(m_i)$ и просуммируем:

$$I_{\text{mid}} \ \approx\ h \sum_{i=0}^{9} f(m_i).$$

Подстановка даёт (округление приведено здесь до 4 знаков для наглядности):

$$\sum_{i=0}^{9} f(m_i) \ \approx\ 214.014, \quad \text{а значит} \quad I_{\text{mid}} \ =\ 0.1 \times 214.014 \ \approx\ 21.4014.$$

**Погрешность** относительно точного $21.4167$ составляет примерно $0.0153$, то есть относительная ошибка $\approx 0.07\%$.

#### 3.2. Формула трапеций

Формула трапеций с шагом $h = 0.1$ имеет вид

$$I_{\text{trap}} \ =\ \frac{h}{2}\Big[f(x_0) \ +\ 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \ +\ f(x_n)\Big].$$

Подставляя вычисленные значения $f(1.0),\ f(1.1),\ \dots,\ f(2.0)$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{9} f(x_i) \ \approx\ 189.975,$$

$$I_{\text{trap}} \ =\ 0.05\,\big[f(1.0) + 2\cdot 189.975 + f(2.0)\big] \ =\ 0.05\,(5 + 379.95 + 44) \ =\ 21.4475.$$

**Погрешность** относительно точного $21.4167$ составляет примерно $0.0308$, то есть относительная ошибка $\approx 0.14\%$.

#### 3.3. Формула Симпсона

Композитная формула Симпсона (при чётном $n = 10$) для многочлена степени не выше 3 даёт **точный** результат. Формально:

$$I_{\text{Simpson}} \ =\ \frac{h}{3}\Big[f(x_0) \ +\ 4\sum_{\substack{i=1 \\ i\ \text{нечёт}}}^{9} f(x_i) \ +\ 2\sum_{\substack{i=2 \\ i\ \text{чёт}}}^{8} f(x_i) \ +\ f(x_{10})\Big].$$

Подстановка даёт ровно $\frac{257}{12} \approx 21.4167$ без погрешности.

## 4. Сравнение результатов с точным значением

- **Точное значение**: $I = 257/12 \approx 21.4167$.
- **Ньютон–Котес ($n = 6$)**: $21.4167$ (точно).
- **Средние прямоугольники ($n = 10$)**: $21.4014$ (ошибка $\approx 0.0153$).
- **Трапеции ($n = 10$)**: $21.4475$ (ошибка $\approx 0.0308$).
- **Симпсон ($n = 10$)**: $21.4167$ (точно).

### 5. Относительная погрешность

Пусть $I_{\text{approx}}$ — численное приближение интеграла, а $I_{\text{exact}} = 257/12$. Тогда относительная погрешность есть

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{|I_{\text{approx}} - I_{\text{exact}}|}{I_{\text{exact}}}.$$

По вычисленным выше значениям получаем (примерно):

- **Метод средних прямоугольников:** $0.07\%$.
- **Метод трапеций:** $0.14\%$.
- **Ньютон–Котес** $(n = 6)$ и **Симпсон** $(n = 10)$: $0\%$ (с точностью до машинных округлений).

# 2. Программная реализация задачи

https://github.com/semchik200001/mathematics-

**Результаты выполнения программы при различных исходных данных:**

```
Выберите функцию:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2
8. 10
9. 1 / sqrt(2x - x^2)
Ваш выбор: 7
Введите начальный предел интегрирования: -3
Введите конечный предел интегрирования: -1
Введите требуемую точность вычислений: 0.0001

*   Метод: rectangle_left
Значение интеграла: -3.3332761128112898
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 
524288

*   Метод: rectangle_right
Значение интеграла: -3.3333905537292567
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 
524288

*   Метод: rectangle_middle
Значение интеграла: -3.3333663940429688
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 
512
```

*   Метод: trapezoid
Значение интеграла: -3.3332672119140625
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 512

*   Метод: simpson
Значение интеграла: -3.333333333333333
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 8

Выберите функцию:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2
8. 10
9. 1 / sqrt(2x - x^2)
Ваш выбор: 5
Введите начальный предел интегрирования: 1
Введите конечный предел интегрирования: 10
Введите требуемую точность вычислений: 0.0001

*   Метод: rectangle_left
Значение интеграла: 2.3026468926456647
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 65536

*   Метод: rectangle_right
Значение интеграла: 2.3025232964542575
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 65536

*   Метод: rectangle_middle
Значение интеграла: 2.3025341206954915
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 256

*   Метод: trapezoid
Значение интеграла: 2.302610583913094
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 512

*   Метод: simpson
Значение интеграла: 2.3025975605281706
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 64

# Вывод

В ходе лабораторной работы были реализованы и изучены различные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, Ньютона–Котеса и Симпсона) с помощью Python. Сравнение вычисленных результатов с точными значениями показало, что наиболее точным и эффективным оказался метод Симпсона. Дополнительно была решена задача вычисления несобственных интегралов второго рода с разрывами, где выбранные методы, при корректном разбиении интервала, также подтвердили свою работоспособность и достаточную точность.