

опубликовать свое релятивистское волновое уравнение, оно было уже независимо переоткрыто Оскаром Клейном [7] и Вальтером Гордоном [8]. По этой причине релятивистский вариант называется "уравнением Клейна-Гордона".

Шредингер вывел свое релятивистское волновое уравнение, заметив, что гамильтониан H и импульс \mathbf{p} "электрона Лоренца" с массой m и зарядом e , находящегося во внешнем векторном потенциале \mathbf{A} и кулоновском потенциале ϕ , связаны следующим соотношением¹⁾:

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \quad (1)$$

Соотношения де Бройля для *свободной* частицы, представленной плоской волной $\exp\{2\pi i(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{x} - vt)\}$, можно получить, если произвести отождествление

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad E = h\nu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2)$$

где \hbar — удобное обозначение (введенное Дираком) для $h/2\pi$. Исходя из чисто формальной аналогии Шредингер предположил, что электрон во внешних полях \mathbf{A} , ϕ должен описываться волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению, получаемому при помощи той же самой замены в (1):

$$0 = \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2 \left(-i\hbar \nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

В частности, для стационарных состояний в атоме водорода справедливы равенства $\mathbf{A} = 0$ и $\psi = e/(4\pi r)$. Кроме того, в этом случае ψ зависит от времени t экспоненциально: $\exp(-iEt/\hbar)$. Поэтому (3) сводится к уравнению

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r} \right)^2 - c^2 \hbar^2 \nabla^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Решения уравнения (4) с наложенными на них разумными граничными условиями, определяют уровни энергии [9]

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (5)$$

где $\alpha \equiv e^2/(4\pi\hbar c)$ — "постоянная тонкой структуры", численное значение которой составляет приблизительно $1/137$, n — положительное целое число, а l — орбитальный угловой момент в единицах \hbar , принимающий целочисленные значения в интервале $0 \leq l \leq n-1$. Наличие...

¹⁾ Это соотношение лоренц-инвариантно, поскольку величины \mathbf{A} и ϕ при преобразованиях Лоренца изменяются точно так же, как $c\mathbf{r}$ и E соответственно. Гамильтониан H и импульс \mathbf{p} Шредингер представлял в виде частных производных действия, однако это неважно для нашего рассмотрения.