

Nombres d'intersecció en espais de moduli de superfícies de Riemann i les equacions KdV

Elba García Failde



SIMBa

12/11/2012

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Introducció

- El nostre objectiu principal és entendre la conjectura de Witten, que va ser formulada l'any 1991. Actualment, ja no és una conjectura, ja que va ser demostrada per Kontsevich l'any 1992.



Introducció

- El nostre objectiu principal és entendre la conjectura de Witten, que va ser formulada l'any 1991. Actualment, ja no és una conjectura, ja que va ser demostrada per Kontsevich l'any 1992.



- En el seu article original, Witten va conjecturar que una funció generatriu particular dels nombres d'intersecció de l'espai de moduli de corbes satisfà la jerarquia Korteweg-de Vries (KdV).

Introducció

- El nostre objectiu principal és entendre la conjectura de Witten, que va ser formulada l'any 1991. Actualment, ja no és una conjectura, ja que va ser demostrada per Kontsevich l'any 1992.

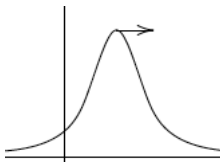


- En el seu article original, Witten va conjecturar que una funció generatriu particular dels nombres d'intersecció de l'espai de moduli de corbes satisfà la jerarquia Korteweg-de Vries (KdV).
- La motivació d'aquesta conjectura va ser que dos models diferents de gravetat quàntica 2-dimensional haurien de tenir la mateixa funció de partició. En un dels models la funció de partició es pot descriure en termes de nombres d'intersecció de l'espai de moduli de corbes. I la funció de partició de l'altre model es pot descriure usant diagrames de Feynman i tècniques de models matricials, que se sap que estan determinats per la jerarquia KdV.

Equacions KdV

"I believe I shall best introduce this phaenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintances with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped- not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such in the month of August 1834 was my first chance interview with that singular and beautiful phaenomenon which I have called the Wave of Translation..."

John Scott Russell (1808-1882)



Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars**
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Fibrats vectorials

Un *fibrat vectorial de rang n* ve donat per

- dos espais topològics: X (*espai base*) i E (*espai total*),
- una aplicació exhaustiva $\pi : E \rightarrow X$ (*projecció*),
- homeomorfismes $h_x : \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ per a cada $x \in X$
($E_x = \pi^{-1}(x)$ s'anomena la *fibra* sobre x),

Fibrats vectorials

Un *fibrat vectorial de rang n* ve donat per

- dos espais topològics: X (*espai base*) i E (*espai total*),
- una aplicació exhaustiva $\pi : E \rightarrow X$ (*projecció*),
- homeomorfismes $h_x : \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ per a cada $x \in X$
($E_x = \pi^{-1}(x)$ s'anomena la *fibra* sobre x),

tal que X admet un recobriment per oberts $\{U_i\}_{i \in I}$ amb homeomorfismes

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^n$$

\mathbb{R} -lineals a les fibres i tals que $\text{pr}_1 \circ \varphi_i = \pi$ per a tot i . Aquí pr_1 denota la projecció de la primera component i $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ s'anomena *atlas de trivialització*.

Podem denotar un fibrat vectorial:

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X.$$

Exemples

- 1 $X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} X$ és el fibrat vectorial *trivial* de rang n sobre X . En el cas $X = \mathcal{S}^1$, tenim el cilindre.

Exemples

- 1 $X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} X$ és el fibrat vectorial *trivial* de rang n sobre X . En el cas $X = \mathcal{S}^1$, tenim el cilindre.
- 2 Prenent també $X = \mathcal{S}^1$, la banda de Möbius és un fibrat vectorial no trivial.

Exemples

- 1 $X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} X$ és el fibrat vectorial *trivial* de rang n sobre X . En el cas $X = \mathcal{S}^1$, tenim el cilindre.
- 2 Prenent també $X = \mathcal{S}^1$, la banda de Möbius és un fibrat vectorial no trivial.
- 3 Sigui M una varietat diferenciable n -dimensional. Considerem el seu fibrat tangent:

$$\pi : TM \longrightarrow M,$$

on $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$. L'espai tangent $T_x M$ isomorf a \mathbb{R}^n és la fibra sobre x .

Pull-back

Donats un fibrat vectorial $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} Y$ i una aplicació $f : X \longrightarrow Y$, definim el *pull-back de ξ per f* :

$$f^*\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{\pi}} X$$

per

$$\tilde{E} = \{(x, z) \in X \times E \mid f(x) = p(z)\}$$

i projecció $\tilde{\pi}(x, z) = x$.

Pull-back

Donats un fibrat vectorial $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} Y$ i una aplicació $f : X \longrightarrow Y$, definim el *pull-back de ξ per f* :

$$f^*\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{\pi}} X$$

per

$$\tilde{E} = \{(x, z) \in X \times E \mid f(x) = p(z)\}$$

i projecció $\tilde{\pi}(x, z) = x$.

Observem que

$$\tilde{E}_x = \{z \in E \mid f(x) = p(z)\} = \pi^{-1}(f(x)) = E_{f(x)}$$

per cada $x \in X$. Per tant, la fibra de $f^*\xi$ sobre x coincideix amb la fibra de ξ sobre $f(x)$.

Classes de Chern

Una *estructura complexa* en un fibrat vectorial real $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow E \rightarrow X$ és un morfisme $J : \xi \rightarrow \xi$ tal que $J \circ J = -\text{id}$ a cada fibra. Llavors ξ esdevé un fibrat vectorial complex de rang n .

Classes de Chern

Una *estructura complexa* en un fibrat vectorial real $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow E \rightarrow X$ és un morfisme $J : \xi \rightarrow \xi$ tal que $J \circ J = -\text{id}$ a cada fibra. Llavors ξ esdevé un fibrat vectorial complex de rang n .

Siguin X un espai topològic i $\xi : \mathbb{C}^n \rightarrow E \rightarrow X$ un fibrat vectorial complex de rang n . Llavors hi ha una única col·lecció de classes de cohomologia

$$c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z}), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

anomenades *classes de Chern* tal que se satisfan, entre d'altres, les següents condicions:

Classes de Chern

Una *estructura complexa* en un fibrat vectorial real $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow E \rightarrow X$ és un morfisme $J : \xi \rightarrow \xi$ tal que $J \circ J = -\text{id}$ a cada fibra. Llavors ξ esdevé un fibrat vectorial complex de rang n .

Siguin X un espai topològic i $\xi : \mathbb{C}^n \rightarrow E \rightarrow X$ un fibrat vectorial complex de rang n . Llavors hi ha una única col·lecció de classes de cohomologia

$$c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z}), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

anomenades *classes de Chern* tal que se satisfan, entre d'altres, les següents condicions:

- $c_i(\xi) = 0$ si $i > n$.
- $c_0(\xi) = 1$.
- Si $\xi \cong \xi'$, llavors $c_i(\xi) = c_i(\xi')$ per tota i .
- ...

Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds**
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Orbifolds

Definició

Un acció de grup $G \times X \rightarrow X$ és *efectiva* si i només si l'únic element $g \in G$ tal que $g \cdot x = x \quad \forall x \in X$ és $g = \text{id}_G$.

Orbifolds

Definició

Un acció de grup $G \times X \rightarrow X$ és *efectiva* si i només si l'únic element $g \in G$ tal que $g \cdot x = x \quad \forall x \in X$ és $g = \text{id}_G$.

Definició

Sigui O un espai topològic.

- Una *carta d'orbifold (uniformitzador local)* $(U, \tilde{U}, \varphi, \Gamma)$ ve donada per
 - un obert $U \subset O$,
 - un obert $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$,
 - un grup finit Γ que actua diferenciable i efectivament a \tilde{U} ,
 - una aplicació contínua $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ que indueix un homeomorfisme

$$\tilde{U}/\Gamma \rightarrow U.$$

Orbifolds

Definició

- Siguin $(U, \tilde{U}, \varphi, \Gamma)$ i $(U', \tilde{U}', \varphi', \Gamma')$ uniformitzadors locals. Definim una *inclusió de cartes*

$$i : (U, \tilde{U}, \varphi, \Gamma) \rightarrow (U', \tilde{U}', \varphi', \Gamma')$$

com un parell d'aplicacions:

$$\begin{cases} i : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{U}', \text{ una inclusió,} \\ \zeta : \Gamma \hookrightarrow \Gamma', \text{ un monomorfisme de grups,} \end{cases}$$

tals que $\varphi' \circ i = \varphi$ i $i(\gamma \cdot x) = \zeta(\gamma) \cdot i(x)$ per a cada $x \in \tilde{U}$ i $\gamma \in \Gamma$.

Orbifolds

Definició

- Dues cartes d'orbifold $(U_i, \tilde{U}_i, \varphi_i, \Gamma_i)$ i $(U_j, \tilde{U}_j, \varphi_j, \Gamma_j)$ s'anomenen *compatibles* si per cada $z \in \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$ existeix una carta $(U_k, \tilde{U}_k, \varphi_k, \Gamma_k)$ amb $z \in \varphi_k(U_k)$ i inclusions

$$i : (U_k, \tilde{U}_k, \varphi_k, \Gamma_k) \rightarrow (U_i, \tilde{U}_i, \varphi_i, \Gamma_i),$$

$$j : (U_k, \tilde{U}_k, \varphi_k, \Gamma_k) \rightarrow (U_j, \tilde{U}_j, \varphi_j, \Gamma_j).$$

- Un *atles d'orbifold* és una col·lecció de cartes d'orbifold compatibles entre elles

$$\mathcal{U} := \{(U_i, \tilde{U}_i, \varphi_i, \Gamma_i)\}_{i \in I}$$

tal que $\cup_{i \in I} U_i = O$.

- Un *orbifold* és un parell (O, \mathcal{U}) , on O és un espai de Hausdorff i \mathcal{U} és un atles d'orbifold a O .

Un exemple

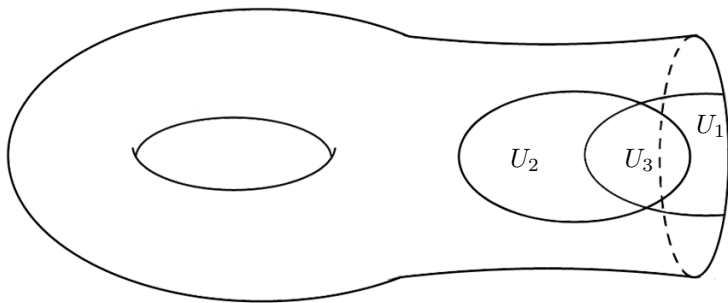
Exemple

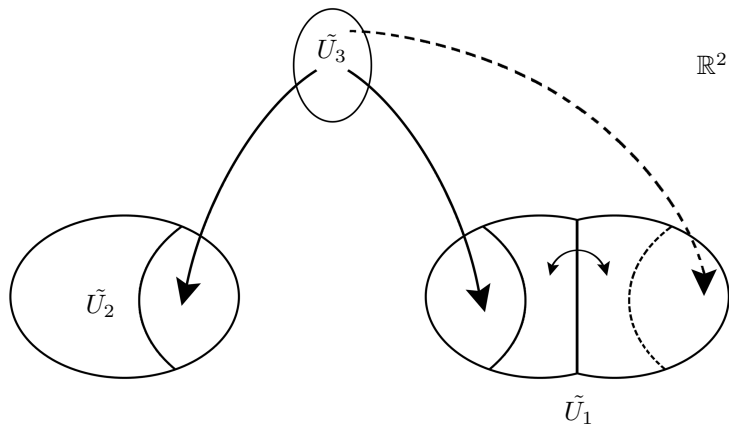
Una varietat amb vora M es pot dotar d'una estructura d'orbifold de manera que tot punt de la vora té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/(2))$, on $\mathbb{Z}/(2)$ actua per reflexió en un hiperplà.

Un exemple

Exemple

Una varietat amb vora M es pot dotar d'una estructura d'orbifold de manera que tot punt de la vora té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/(2))$, on $\mathbb{Z}/(2)$ actua per reflexió en un hiperplà.





Quocient global

Proposició

Sigui M una varietat diferenciable i Γ un grup finit actuant diferenciablement i efectiva en M . Llavors M/Γ té estructura d'orbifold.

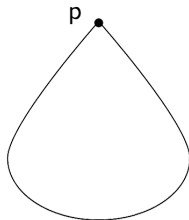
Quocient global

Proposició

Sigui M una varietat diferenciable i Γ un grup finit actuant diferenciablement i efectiva en M . Llavors M/Γ té estructura d'orbifold.

Exemple

L'espai topològic adjacent de la llàgrima és \mathcal{S}^2 . Té un únic punt singular l'entorn del qual és homeomorf a $U/(\mathbb{Z}/(n))$, on U es un entorn de l'origen de \mathbb{R}^2 i $\mathbb{Z}/(n)$ actua per rotacions al voltant de l'origen.



Quocient global. Una generalització

Proposició

La llàgrima no és un quocient global.

Quocient global. Una generalització

Proposició

La llàgrima no és un quocient global.

Teorema

Les següents afirmacions són equivalents:

- 1 *O té estructura d'orbifold.*
- 2 *O és un quocient de la forma M/G , on M és una varietat diferenciable i G és un grup de Lie compacte actuant diferenciablement, efectiva i amb estabilitzadors finits en M .*

Quocient global. Una generalització

Proposició

La llàgrima no és un quocient global.

Teorema

Les següents afirmacions són equivalents:

- 1 *O té estructura d'orbifold.*
- 2 *O és un quocient de la forma M/G , on M és una varietat diferenciable i G és un grup de Lie compacte actuant diferenciablement, efectiva i amb estabilitzadors finits en M .*

En el cas dels orbifolds les classes característiques són racionals. La cohomologia d'orbifold de O és isomorfa a la cohomologia equivariant de M :

$$H_G^*(M; \mathbb{Q}) \simeq H^*(O; \mathbb{Q}).$$

Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann**
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Superfícies de Riemann

Definició

Una *superfície de Riemann* ve donada per

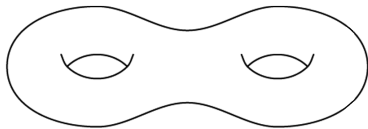
- un espai topològic Σ Hausdorff,
- un col·lecció d'oberts $U_i \subset \Sigma$ tal que $\bigcup_i U_i = \Sigma$,
- un col·lecció d'homeomorfismes $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{C}$ tals que el canvi de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ és holomorf en el seu domini de definició.

Superfícies de Riemann

Definició

Una *superfície de Riemann* ve donada per

- un espai topològic Σ Hausdorff,
- un col·lecció d'oberts $U_i \subset \Sigma$ tal que $\bigcup_i U_i = \Sigma$,
- un col·lecció d'homeomorfismes $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{C}$ tals que el canvi de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ és holomorf en el seu domini de definició.

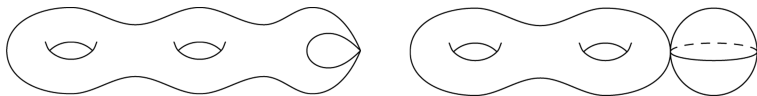


Corbes nodals

Un *node* és una singularitat analíticament isomorfa a $xy = 0$.

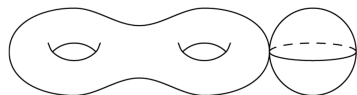
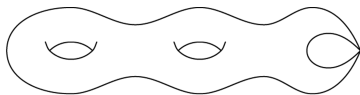
Corbes nodals

Un *node* és una singularitat analíticament isomorfa a $xy = 0$.



Corbes nodals

Un *node* és una singularitat analíticament isomorfa a $xy = 0$.



gènere 2

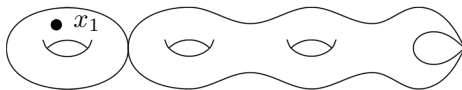
gènere 0

Corbes nodals puntejades

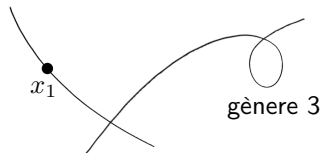
Una corba nodal és *puntejada* si té n punts marcats x_1, \dots, x_n , que han de ser no singulars.

Corbes nodals puntejades

Una corba nodal és *puntejada* si té n punts marcats x_1, \dots, x_n , que han de ser no singulars.



gènere 1



Teorema d'uniformització de Riemann

Teorema

Sigui Σ una superfície de Riemann connexa i simplement connexa. Aleshores, Σ és una de les superfícies següents:

- *el disc unitat obert,*
- *el pla complex \mathbb{C} ,*
- *l'esfera de Riemann \mathbb{CP}^1 .*

Automorfismes

Teorema

Sigui Σ una superfície de Riemann compacta. Llavors

- si $\Sigma \simeq \mathbb{CP}^1$ (l'única superfície de Riemann de gènere 0), tenim que*

$$\text{Aut}(\mathbb{CP}^1) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

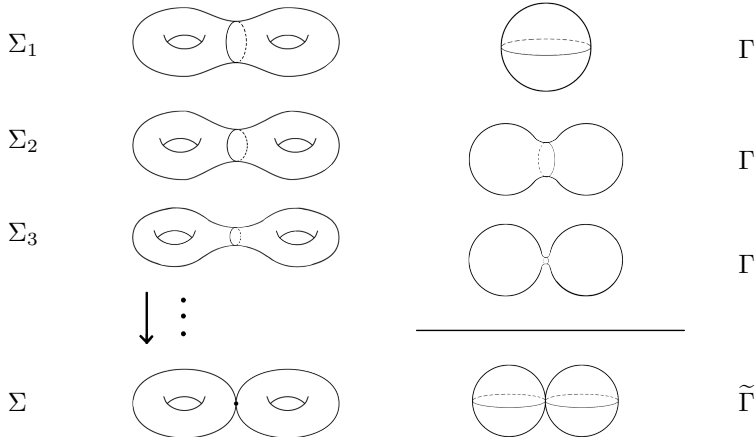
- si Σ té gènere 1, el seu grup d'automorfismes té infinits elements.
De fet,*

$$\text{Aut}(\Sigma) \supset \mathbb{C}.$$

- si Σ té gènere $g \geq 2$, llavors el seu grup d'automorfismes és finit.
Més concretament,*

$$|\text{Aut}(\Sigma)| \leq 84(g - 1).$$

Límits de superfícies de Riemann



Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes**
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Espais de moduli de corbes

Definició

Definim l'espai de moduli

$$\mathcal{M}_g := \{C \mid C \text{ és una corba algebraica de gènere } g\} / \sim ,$$

on $C \sim D$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D .

Espais de moduli de corbes

Definició

Definim l'espai de moduli

$$\mathcal{M}_g := \{C \mid C \text{ és una corba algebraica de gènere } g\} / \sim ,$$

on $C \sim D$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D .

Ens agradaria tenir una *família universal* π sobre \mathcal{M}_g .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & & \mathcal{C}_g \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_g \end{array} \quad \mathfrak{X} = f^* \mathcal{C}_g$$

Espais de moduli de corbes

Definició

Definim l'espai de moduli

$$\mathcal{M}_g := \{C \mid C \text{ és una corba algebraica de gènere } g\} / \sim ,$$

on $C \sim D$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D .

Ens agradaria tenir una *família universal* π sobre \mathcal{M}_g .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & & \mathcal{C}_g \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_g \end{array} \quad \mathfrak{X} = f^* \mathcal{C}_g$$

Però els grups d'automorfismes infinits ens porten problemes.

L'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$

Definició

Definim l'espai de moduli

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ (C, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} C \text{ és una corba algebraica} \\ \text{de gènere } g \text{ amb } n \text{ punts} \\ \text{marcats } x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right\} / \sim,$$

on $(C, x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (D, y_1, y_2, \dots, y_n)$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D que envia x_k a y_k per a tot k .

L'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$

Definició

Definim l'espai de moduli

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ (C, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} C \text{ és una corba algebraica} \\ \text{de gènere } g \text{ amb } n \text{ punts} \\ \text{marcats } x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right\} / \sim,$$

on $(C, x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (D, y_1, y_2, \dots, y_n)$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D que envia x_k a y_k per a tot k .

El grup d'automorfismes d'una corba puntejada és finit si:

- 1 Els components de gènere 0 tenen almenys 3 punts marcats.
- 2 Els components de gènere 1 tenen almenys 1 punt marcat.

L'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$

Definició

Definim l'espai de moduli

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ (C, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} C \text{ és una corba algebraica} \\ \text{de gènere } g \text{ amb } n \text{ punts} \\ \text{marcats } x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right\} / \sim,$$

on $(C, x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (D, y_1, y_2, \dots, y_n)$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D que envia x_k a y_k per a tot k .

El grup d'automorfismes d'una corba puntejada és finit si:

- 1 Els components de gènere 0 tenen almenys 3 punts marcats.
- 2 Els components de gènere 1 tenen almenys 1 punt marcat.

Per tant, considerarem només els espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ que satisfan la condició de la característica d'Euler

$$2 - 2g - n < 0.$$

El nostre orbifold

Tot i la modificació, seguim sense tenir corba universal $\mathcal{C}_{g,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,n}$, almenys no en el sentit que hem explicat. De fet, la fibra sobre un punt de $\mathcal{M}_{g,n}$ que correspon a una corba puntejada Σ amb grup d'automorfismes G és Σ/G .

El nostre orbifold

Tot i la modificació, seguim sense tenir corba universal $\mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$, almenys no en el sentit que hem explicat. De fet, la fibra sobre un punt de $\mathcal{M}_{g,n}$ que correspon a una corba puntejada Σ amb grup d'automorfismes G és Σ/G .

Teorema

L'espai de moduli de corbes puntejades $\mathcal{M}_{g,n}$ té estructura d'orbifold. La dimensió de $\mathcal{M}_{g,n}$ és $3g - 3 + n$.

El nostre orbifold

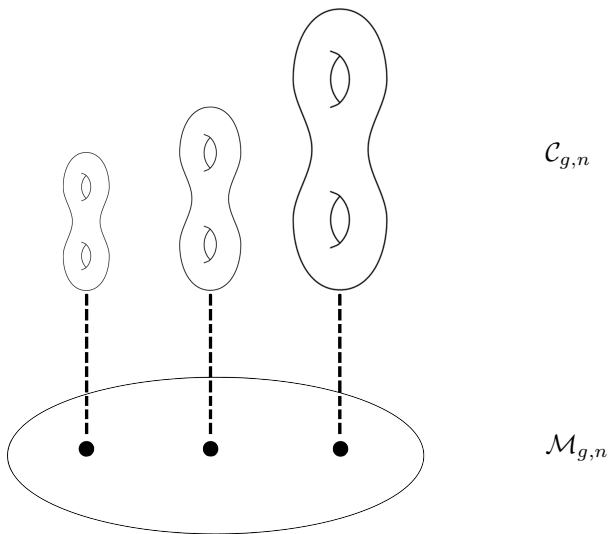
Tot i la modificació, seguim sense tenir corba universal $\mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$, almenys no en el sentit que hem explicat. De fet, la fibra sobre un punt de $\mathcal{M}_{g,n}$ que correspon a una corba puntejada Σ amb grup d'automorfismes G és Σ/G .

Teorema

L'espai de moduli de corbes puntejades $\mathcal{M}_{g,n}$ té estructura d'orbifold. La dimensió de $\mathcal{M}_{g,n}$ és $3g - 3 + n$.

Vist com a orbifold, l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ sempre ve acompanyat de la corba universal, i.e. d'un orbifold diferenciable $\mathcal{C}_{g,n}$ de dimensió $\dim \mathcal{M}_{g,n} + 1$, juntament amb una projecció $\mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$.

La corba universal



Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes**
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

No compacitat

$\mathcal{M}_{g,n}$ no és compacte:

No compacitat

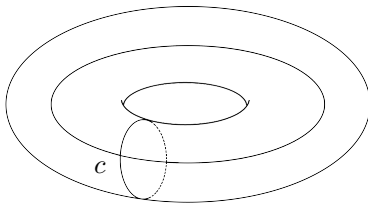
$\mathcal{M}_{g,n}$ no és compacte:

- Quan dos punts marcats en una corba puntejada s'acosten, el límit corresponent no existeix en $\mathcal{M}_{g,n}$.

No compacitat

$\mathcal{M}_{g,n}$ no és compacte:

- Quan dos punts marcats en una corba puntejada s'acosten, el límit corresponent no existeix en $\mathcal{M}_{g,n}$.
- Considerem una superfície de Riemann de gènere g amb una mètrica Riemanniana. Si anem fent petita la circumferència c , el límit és una corba nodal.



La compactificació de Deligne-Mumford

Definició

Una corba puntejada s'anomena *estable* si

- Les seves úniques singularitats són nodes.
- Els punts marcats són no singulars.
- El grup d'automorfismes de la corba és finit.

La compactificació de Deligne-Mumford

Definició

Una corba puntejada s'anomena *estable* si

- Les seves úniques singularitats són nodes.
- Els punts marcats són no singulars.
- El grup d'automorfismes de la corba és finit.

Definició

Definim la compactificació de Deligne-Mumford de l'espai de moduli

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} := \left\{ (C, x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \begin{array}{l} C \text{ és una corba estable} \\ \text{de gènere } g \text{ amb } n \text{ punts} \\ \text{marcats } x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right. \right\} / \sim,$$

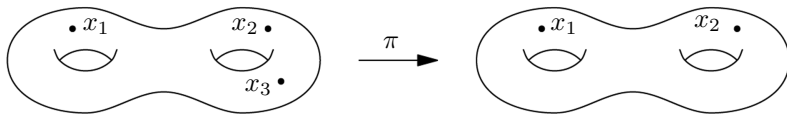
on $(C, x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (D, y_1, y_2, \dots, y_n)$ si i només si existeix un isomorfisme de C a D que envia x_k a y_k per tot k .

Índex

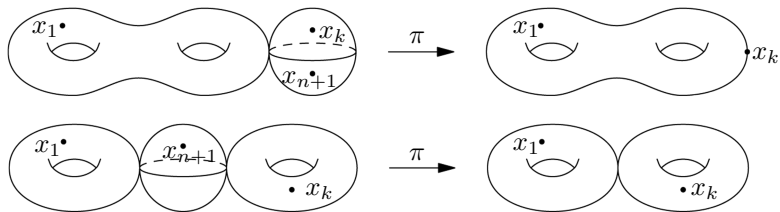
- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes**
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturels
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Morfisme d'oblit

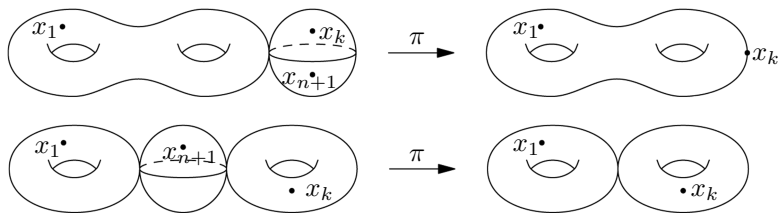
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{g,n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M}_{g,n} \\ (C; x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & \mapsto & (C; x_1, \dots, x_n) \end{array}$$



Morfisme d'oblit



Morfisme d'oblit



El morfisme d'oblit $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ es pot interpretar com la corba universal $\pi : \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. És a dir, si prenem una corba estable $\Sigma \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ amb un punt p a Σ , li podem associar una corba estable $\tilde{\Sigma} \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ al parell (Σ, p) de tres maneres diferents:

- Si p és un punt no singular i no marcat de Σ , llavors $\tilde{\Sigma}$ serà la corba Σ amb el punt p etiquetat amb $n + 1$.
- Si p és el punt de Σ marcat k , llavors $\tilde{\Sigma}$ serà la corba Σ amb una \mathbb{CP}^1 al punt p que contindrà els punts etiquetats amb k i $n + 1$.
- Si p és un punt nodal de Σ , llavors $\tilde{\Sigma}$ serà la corba Σ amb una \mathbb{CP}^1 al punt p que contindrà el punt etiquetat $n + 1$.

Seccions de π

Així, podem pensar que el punt amb etiqueta k defineix una secció

$$\sigma_k : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}, \text{ per a } k = 1, 2, \dots, n.$$

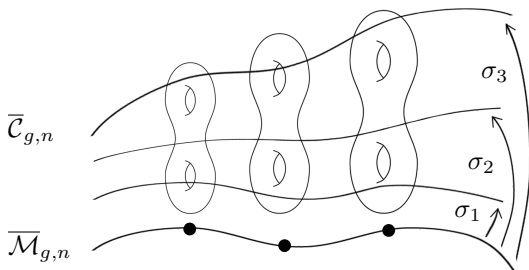
La imatge de σ_k està formada per totes les corbes en $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ amb una \mathbb{CP}^1 que conté els punts etiquetats amb k i $n+1$.

Seccions de π

Així, podem pensar que el punt amb etiqueta k defineix una secció

$$\sigma_k : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}, \text{ per a } k = 1, 2, \dots, n.$$

La imatge de σ_k està formada per totes les corbes en $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ amb una \mathbb{CP}^1 que conté els punts etiquetats amb k i $n+1$. Les seccions σ_k també es poden veure com a seccions de la corba universal $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.



Exemples

- Qualsevol superfície de Riemann de gènere 0 és isomorfa a \mathbb{CP}^1 . Sabem que existeix un únic automorfisme de \mathbb{CP}^1 que porta tres punts a $0, 1, \infty$. Així, $\mathcal{M}_{0,3}$ és un únic punt, i per tant és compacte i $\mathcal{M}_{0,3} = \overline{\mathcal{M}}_{0,3}$.

Exemples

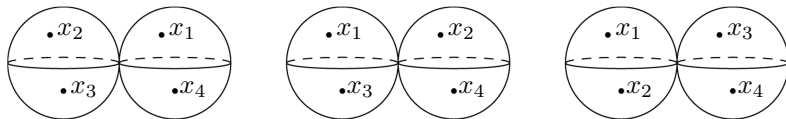
- Qualsevol superfície de Riemann de gènere 0 és isomorfa a \mathbb{CP}^1 . Sabem que existeix un únic automorfisme de \mathbb{CP}^1 que porta tres punts a $0, 1, \infty$. Així, $\mathcal{M}_{0,3}$ és un únic punt, i per tant és compacte i $\mathcal{M}_{0,3} = \overline{\mathcal{M}}_{0,3}$.
- Si x_1, x_2, x_3, x_4 són punts diferents de \mathbb{CP}^1 , llavors l'automorfisme de l'exemple anterior enviarà x_4 a un $\lambda \neq 0, 1, \infty$, que serà la raó doble

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \lambda = \frac{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}.$$

Per tant, l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,4}$ és isomorf a $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Exemples

Hi ha tres corbes estables singulars i racionals amb quatre punts marcats:



Aquestes tres corbes compactifiquen $\mathcal{M}_{0,4}$ a la recta projectiva \mathbb{CP}^1 .
Tenen coordenades $\lambda = \infty, 1, 0$ respectivament.

Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli**
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Classes característiques

Denotem K el fibrat cotangent de les fibres de $\bar{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$. Fent pull-back de K al llarg de les seccions σ_k obtenim els següents fibrats de línia naturals:

$$\mathcal{L}_k = \sigma_k^*(K), \text{ per a } k = 1, \dots, n.$$

La fibra de \mathcal{L}_k al punt $(\Sigma, p_1, \dots, p_n) \in \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ és l'espai cotangent a Σ en p_k : $T_{p_k}^* \Sigma$.

Classes característiques

Denotem K el fibrat cotangent de les fibres de $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Fent pull-back de K al llarg de les seccions σ_k obtenim els següents fibrats de línia naturals:

$$\mathcal{L}_k = \sigma_k^*(K), \text{ per a } k = 1, \dots, n.$$

La fibra de \mathcal{L}_k al punt $(\Sigma, p_1, \dots, p_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ és l'espai cotangent a Σ en p_k : $T_{p_k}^* \Sigma$.

Definició

Les classes de Chern dels fibrats \mathcal{L}_k s'anomenen *classes psi*

$$\psi_k := c_1(\sigma_k^*(K)) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

L'anell tautològic

Definició

El sistema d'*anells tautològics* $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ és

- 1 el sistema més petit de \mathbb{Q} -àlgebres tancat per push-forwards de morfismes naturals;
- 2 el sistema més petit de \mathbb{Q} -espais vectorials tancat per push-forwards de morfismes naturals, i que inclou totes les classes ψ .

L'anell tautològic

Definició

El sistema d'*anells tautològics* $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ és

- 1 el sistema més petit de \mathbb{Q} -àlgebres tancat per push-forwards de morfismes naturals;
- 2 el sistema més petit de \mathbb{Q} -espais vectorials tancat per push-forwards de morfismes naturals, i que inclou totes les classes ψ .

Ara tenim la motivació per estudiar nombres d'intersecció de la forma

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{\alpha_1} \psi_2^{\alpha_2} \cdots \psi_n^{\alpha_n} \in \mathbb{Q}.$$

Funcions de correlació

Definició

Definim les *funcions de correlació* com

$$\langle \tau_{\alpha_1} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{\alpha_1} \cdots \psi_n^{\alpha_n},$$

amb el conveni que el producte és zero si alguna de les següents condicions se satisfà:

- alguna de les α_i és negativa,
- $n = 0$,
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 3g - 3 + n$.

Funcions de correlació

Definició

Definim les *funcions de correlació* com

$$\langle \tau_{\alpha_1} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{\alpha_1} \cdots \psi_n^{\alpha_n},$$

amb el conveni que el producte és zero si alguna de les següents condicions se satisfà:

- alguna de les α_i és negativa,
- $n = 0$,
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 3g - 3 + n$.

$$\langle \tau_0^{d_0} \tau_1^{d_1} \tau_2^{d_2} \cdots \tau_m^{d_m} \rangle = \underbrace{\langle \tau_0 \cdots \tau_0 \rangle}_{d_0 \text{ factors}} \cdot \underbrace{\langle \tau_1 \cdots \tau_1 \rangle}_{d_1 \text{ factors}} \cdot \underbrace{\langle \tau_2 \cdots \tau_2 \rangle}_{d_2 \text{ factors}} \cdots \underbrace{\langle \tau_m \cdots \tau_m \rangle}_{d_m \text{ factors}}.$$

Exemples

Els següents exemples són els casos bàsics

$$\langle \tau_0 \tau_0 \tau_0 \rangle = \langle \tau_0^3 \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} \psi_1^0 \psi_2^0 \psi_3^0 = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} 1 = 1.$$

Exemples

Els següents exemples són els casos bàsics

$$\langle \tau_0 \tau_0 \tau_0 \rangle = \langle \tau_0^3 \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} \psi_1^0 \psi_2^0 \psi_3^0 = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} 1 = 1.$$

$$\langle \tau_1 \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}} \psi_1 = \frac{1}{24}.$$

Índex

- 1 Introducció
- 2 Preliminars
- 3 Orbifolds
- 4 Superfícies de Riemann
- 5 Espais de moduli de corbes
 - La compactificació de Deligne-Mumford
 - Morfismes naturals
- 6 Teoria d'intersecció en espais de moduli
- 7 La conjectura de Witten (Teorema de Kontsevich)

Funció generatriu

Definim la funció generatriu

$$\begin{aligned} F(t_0, t_1, \dots) &:= \left\langle \exp \left(\sum_i t_i \tau_i \right) \right\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \langle \tau_{\alpha_1} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle t_{\alpha_1} \cdots t_{\alpha_n} = \\ &= \sum_d \prod_{k=0}^{\infty} \frac{t_k^{d_k}}{d_k!} \langle \tau_0^{d_0} \tau_1^{d_1} \tau_2^{d_2} \cdots \rangle, \end{aligned}$$

on $d = (d_0, d_1, d_2, \dots)$ són totes les tires d'enters no negatius amb un nombre finit de termes no nuls.

La conjectura de Witten

Conjectura (Witten)

$F(t_0, t_1, \dots)$ està determinada per les dues condicions següents:

- ❶ L'objecte $U = \frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2}$ verifica les equacions KdV,

$$\frac{\partial U}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial t_0} R_{n+1}(U, \dot{U}, \ddot{U}, \dots),$$

on $\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t_0}$, $\ddot{U} = \frac{\partial^2 U}{\partial t_0^2}$, etc., són les derivades de U respecte t_0 , i $R_{n+1}(U, \dot{U}, \ddot{U}, \dots)$ són certs polinomis molt coneguts en la teoria d'equacions KdV (i que es poden definir mitjançant una recursió).

- ❷ A més, F verifica la "string equation" (o equació de les cordes),

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \frac{t_0^2}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \frac{\partial F}{\partial t_i}.$$

La conjectura de Witten

L'equació de les cordes és equivalent a la següent relació explícita entre els nombres d'intersecció

$$\langle \tau_0 \tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \tau_{\alpha_1} \cdots \tau_{\alpha_k-1} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle.$$

La conjectura de Witten

L'equació de les cordes és equivalent a la següent relació explícita entre els nombres d'intersecció

$$\langle \tau_0 \tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \tau_{\alpha_1} \cdots \tau_{\alpha_k-1} \cdots \tau_{\alpha_n} \rangle.$$

Proposició

La conjectura determina F unívocament.

Els polinomis R_n es poden definir recursivament de la següent manera:

$$R_1 = U, \quad \frac{\partial R_{n+1}}{\partial t_0} = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\partial U}{\partial t_0} R_n + 2U \frac{\partial R_n}{\partial t_0} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial t_0^3} R_n \right).$$

Versió explícita de la conjectura de Witten

Teorema (Conjectura de Witten)

La funció generatriu F satisfà les següents equacions en derivades parcials per tot enter positiu n

$$\begin{aligned} (2n+1) \frac{\partial^3 F}{\partial t_n \partial t_0^2} = \\ = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_{n-1} \partial t_0} \right) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t_0^3} \right) + 2 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t_{n-1} \partial t_0^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^5 F}{\partial t_{n-1} \partial t_0^4}. \end{aligned}$$

Exemple

Observem que

$$\left. \frac{\partial^n F}{\partial t_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \partial t_{i_n}^{d_{i_n}}} \right|_{t_j=0} = \langle \tau_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \tau_{i_n}^{d_{i_n}} \rangle,$$

Exemple

Observem que

$$\left. \frac{\partial^n F}{\partial t_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \partial t_{i_n}^{d_{i_n}}} \right|_{t_j=0} = \langle \tau_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \tau_{i_n}^{d_{i_n}} \rangle,$$

i considerem l'equació de la conjectura de Witten amb $n = 3$ avaluada a $t_j = 0$ per tot j :

$$7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^3 \rangle + 2\langle \tau_0^2 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle.$$

Exemple

Observem que

$$\left. \frac{\partial^n F}{\partial t_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \partial t_{i_n}^{d_{i_n}}} \right|_{t_j=0} = \langle \tau_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \tau_{i_n}^{d_{i_n}} \rangle,$$

i considerem l'equació de la conjectura de Witten amb $n = 3$ avaluada a $t_j = 0$ per tot j :

$$7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^3 \rangle + 2\langle \tau_0^2 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^2 \rangle + \frac{1}{4}\langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle.$$

Usant $\langle \tau_0^2 \rangle = 0$ i el cas bàsic $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$, tenim $7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle + \frac{1}{4}\langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle$.

Exemple

Observem que

$$\left. \frac{\partial^n F}{\partial t_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \partial t_{i_n}^{d_{i_n}}} \right|_{t_j=0} = \langle \tau_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \tau_{i_n}^{d_{i_n}} \rangle,$$

i considerem l'equació de la conjectura de Witten amb $n = 3$ avaluada a $t_j = 0$ per tot j :

$$7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^3 \rangle + 2\langle \tau_0^2 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle.$$

Usant $\langle \tau_0^2 \rangle = 0$ i el cas bàsic $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$, tenim $7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle$.
Aplicant l'equació de les cordes a cada terme, ens queda
 $7\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_1 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^3 \rangle$. Per tant, $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24} \langle \tau_0^3 \rangle = \frac{1}{24}$.

Exemple

Observem que

$$\left. \frac{\partial^n F}{\partial t_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \partial t_{i_n}^{d_{i_n}}} \right|_{t_j=0} = \langle \tau_{i_1}^{d_{i_1}} \cdots \tau_{i_n}^{d_{i_n}} \rangle,$$

i considerem l'equació de la conjectura de Witten amb $n = 3$ avaluada a $t_j = 0$ per tot j :

$$7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^3 \rangle + 2\langle \tau_0^2 \tau_2 \rangle \langle \tau_0^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle.$$

Usant $\langle \tau_0^2 \rangle = 0$ i el cas bàsic $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$, tenim $7\langle \tau_0^2 \tau_3 \rangle = \langle \tau_0 \tau_2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle$.
Aplicant l'equació de les cordes a cada terme, ens queda
 $7\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_1 \rangle + \frac{1}{4} \langle \tau_0^3 \rangle$. Per tant, $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24} \langle \tau_0^3 \rangle = \frac{1}{24}$.

Observació

$$\langle \tau_{3g-2} \rangle = \frac{1}{24^g g!}.$$

L'equació de les cordes i l'equació de dilatació

L'equació de les cordes (string equation):

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{t_0^2}{2}$$

L'equació de les cordes i l'equació de dilatació

L'equació de les cordes (string equation):

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{t_0^2}{2}$$

$$\left\langle \tau_0 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i - \delta_{ij}} \right\rangle + \delta_{n,2} \delta_{\alpha_1,0} \delta_{\alpha_2,0}.$$

L'equació de les cordes i l'equació de dilatació

L'equació de les cordes (string equation):

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{t_0^2}{2}$$

$$\left\langle \tau_0 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i - \delta_{ij}} \right\rangle + \delta_{n,2} \delta_{\alpha_1,0} \delta_{\alpha_2,0}.$$

L'equació de dilatació (dilation equation):

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) t_i \frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{1}{24}$$

L'equació de les cordes i l'equació de dilatació

L'equació de les cordes (string equation):

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{t_0^2}{2}$$

$$\left\langle \tau_0 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i - \delta_{ij}} \right\rangle + \delta_{n,2} \delta_{\alpha_1,0} \delta_{\alpha_2,0}.$$

L'equació de dilatació (dilation equation):

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) t_i \frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{1}{24}$$

$$\left\langle \tau_1 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i} \right\rangle = (2g-2+n) \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i} \right\rangle + \frac{1}{24} \delta_{g,1}.$$

Versió de Virasoro de la conjectura

Definim la successió d'operadors de Virasoro com

$$V_{-1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{t_0^2}{4},$$

$$V_0 = -\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) t_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{1}{48},$$

i, per a enters positius n ,

$$\begin{aligned} V_n = & -\frac{(2n+3)!!}{2} \frac{\partial}{\partial t_{n+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2n+1)!!}{2(2k-1)!!} t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} \\ & + \sum_{k_1+k_2=n-1} \frac{(2k_1+1)!!(2k_2+1)!!}{4} \frac{\partial^2}{\partial t_{k_1} \partial t_{k_2}}. \end{aligned}$$

Teorema (Conjectura de Witten - Versió de Virasoro)

Per a tot enter $n \geq -1$,

$$V_n(\exp F) = 0.$$

Els físics anomenen el funcional $\exp F$ la *funció de partició*.

Algunes demostracions

- Kontsevich:
 - Primera prova, un any després que Witten enunciés la conjectura.
 - Fórmula combinatòrica.
 - Diagrames de Feynmann i determinats models matricials.

Algunes demostracions

- Kontsevich:
 - Primera prova, un any després que Witten enunciiés la conjectura.
 - Fórmula combinatòrica.
 - Diagrames de Feynmann i determinats models matricials.
- Okounkov i Pandharipande:
 - Fórmula ELSV, que relaciona els nombres d'intersecció amb els nombres de Hurwitz.
 - Fórmula combinatòrica de Kontsevich.

Algunes demostracions

- Kontsevich:
 - Primera prova, un any després que Witten enunciiés la conjectura.
 - Fórmula combinatòrica.
 - Diagrames de Feynmann i determinats models matricials.
- Okounkov i Pandharipande:
 - Fórmula ELSV, que relaciona els nombres d'intersecció amb els nombres de Hurwitz.
 - Fórmula combinatòrica de Kontsevich.
- Mirzakhani
 - Geometria hiperbòlica.
 - Verificant les condicions de Virasoro.
 - Primera prova sense l'ús d'un model matricial.

Final