LA TRANSFORMADA DE HILBERT SOBRE LA PARÀBOLA

Carlos Domingo Salazar - Universitat de Barcelona

UNIVERSITAT DE BARCELONA

SIMBa
Seminari Informal
de Matemàtiques de Barcelona

10 d'octubre del 2012

1. Preliminars

2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz

3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats

4. El següent pas...

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

Espais de funcions

- Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacte, definim

$$\mathcal{C}^r(K) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^r \text{ en un entorn } U \text{ de } K\},$$

amb la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \sum_{j=0}^{r} \sup_{x \in K} |f^{(j)}(x)|.$$

Espais de funcions

- Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacte, definim

$$\mathcal{C}^r(K) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^r \text{ en un entorn } U \text{ de } K\},$$

amb la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \sum_{j=0}^{r} \sup_{x \in K} |f^{(j)}(x)|.$$

Exemple: $\sin(x) \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ i

$$\|\sin(x)\|_{\mathcal{C}^2} = \sup_{x\in[0,\pi]} |\sin(x)| + \sup_{x\in[0,\pi]} |\cos(x)| = 1 + 1 = 2.$$

Espais de funcions II

- Sigui $1 \leq p < \infty$, definim

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

i per $p = \infty$

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \}.$$

Espais de funcions II

- Sigui $1 \leq p < \infty$, definim

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

i per $p = \infty$

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \}.$$

També tenim l'espai L^1-dèbil

$$L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_{1,\infty} < \infty \},$$

on

$$\|f\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t |\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t \}|.$$

Com és L^1-dèbil?

Primer de tot observem que

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,\infty} &= \sup_{t>0} t|\{|f|>t\}| = \sup_{t>0} t \int_{|f|>t} dx \leq \sup_{t>0} t \int_{|f|>t} \frac{|f(x)|}{t} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Com és L^1-dèbil?

Primer de tot observem que

$$\|f\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t|\{|f| > t\}| = \sup_{t>0} t \int_{|f|>t} dx \leq \sup_{t>0} t \int_{|f|>t} \frac{|f(x)|}{t} dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1 .$$

Així, $L^1 \subseteq L^{1,\infty}$. A més a més, per exemple, $1/x \notin L^1(\mathbb{R})$, però

$$\left\| \frac{1}{x} \right\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|} > t \right\} \right| = \sup_{t>0} t \cdot \frac{2}{t} = 2,$$

pel que $1/x \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Com és L^1-dèbil?

Primer de tot observem que

$$\|f\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t|\{|f|>t\}| = \sup_{t>0} t\int_{|f|>t} dx \le \sup_{t>0} t\int_{|f|>t} \frac{|f(x)|}{t}dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_1.$$

Així, $L^1 \subseteq L^{1,\infty}$. A més a més, per exemple, $1/x \notin L^1(\mathbb{R})$, però

$$\left\|\frac{1}{x}\right\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t\left|\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{1}{|x|} > t\right\}\right| = \sup_{t>0} t\cdot\frac{2}{t} = 2,$$

pel que $1/x \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Conclusió:

$$L^1 \subsetneq L^{1,\infty}$$

Operadors

Donada una aplicació lineal

$$T : E \longrightarrow F$$

entre dos espais vectorials (quasi)normats E, F, direm que és un *operador acotat* si existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_F \leq C\|f\|_E, \quad \forall f \in E.$$

Operadors

Donada una aplicació lineal

$$T : E \longrightarrow F$$

entre dos espais vectorials (quasi)normats E, F, direm que és un *operador acotat* si existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_F \leq C\|f\|_E, \quad \forall f \in E.$$

Exemple:

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{C}^1([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

compleix

$$\|f'\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \|f\|_{\mathcal{C}^1}.$$

Transformada de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva transformada de Fourier per

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.$$

Transformada de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva transformada de Fourier per

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.$$

Observem que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ és un operador acotat.

Transformada de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva transformada de Fourier per

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Observem que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ és un operador acotat.
Aquesta definició es pot estendre a una classe de "funcions" molt més àmplia (les distribucions temperades) que inclou tots els espais L^p.

Transformada de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva transformada de Fourier per

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Observem que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ és un operador acotat.
Aquesta definició es pot estendre a una classe de "funcions" molt més àmplia (les distribucions temperades) que inclou tots els espais L^p.
El que cal saber és el Teorema de Plancherel:

$$\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$$

és un isomorfisme isomètric ($\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ per tota funció $f \in L^2$).

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

Definició

Definim la transformada de Hilbert

$$H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

per

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Definició

Definim la transformada de Hilbert

$$H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

per

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Aquesta definició és tal que, per funcions test $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (que és un subespai dens d'L^2), tenim

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon} f(x-t)\frac{dt}{t}.$$

Definició

Definim la transformada de Hilbert

$$H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

per

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Aquesta definició és tal que, per funcions test $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (que és un subespai dens d'L^2), tenim

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon} f(x-t)\frac{dt}{t}.$$

El teorema de Kolmogorov-Riesz diu que H es pot estendre a un operador tal que

$$H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad 1 < p < \infty,$$

i

$$H : L^1(\mathbb{R}) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}).$$

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

La idea darrere de la interpolació

$$
\begin{array}{ccc}
A & \qquad & A' \\
T \downarrow & & T \downarrow \\
B & & B'
\end{array}
$$

La idea darrere de la interpolació

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "T"'] & A'' \arrow[d, "T"'] & A' \arrow[d, "T"'] \\
B & B'' & B'
\end{tikzcd}
$$

Teorema d'interpolació de Marcinkiewicz

El teorema més important d'interpolació és el de *Marcinkiewicz*, que bàsicament diu que si T és un operador tal que

$$T : L^{p_0} \longrightarrow L^{p_0,\infty},$$
$$T : L^{p_1} \longrightarrow L^{p_1,\infty},$$

està acotat per certs $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$,

Teorema d'interpolació de Marcinkiewicz

El teorema més important d'interpolació és el de *Marcinkiewicz*, que bàsicament diu que si T és un operador tal que

$$T : L^{p_0} \longrightarrow L^{p_0,\infty},$$
$$T : L^{p_1} \longrightarrow L^{p_1,\infty},$$

està acotat per certs $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, aleshores

$$T : L^p \longrightarrow L^p$$

també està acotat per tot $p_0 < p < p_1$.

Exemple d'aplicació

Operador maximal de Hardy-Littlewood:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Continguts

1 Preliminars

2 La transformada de Hilbert clàssica
- Teoria d'interpolació
- La descomposició de Calderón-Zygmund
- El teorema de Kolmogorov-Riesz

3 La transformada de Hilbert sobre la paràbola
- Generalització de la transformada de Hilbert
- Lema de Van der Corput i acotació L^2
- Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
- Altres resultats

4 El següent pas...

Part bona i part dolenta

Donada una funció integrable $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la seva descomposició de Calderón-Zygmund a altura $\alpha > 0$ està donada per

$$f = g + b,$$

on g pertany a tots els espais L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ i b s'escriu com

$$b = \sum_{j \geq 0} b_j.$$

Part bona i part dolenta

Donada una funció integrable $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la seva descomposició de Calderón-Zygmund a altura $\alpha > 0$ està donada per

$$f = g + b,$$

on g pertany a tots els espais L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ i b s'escriu com

$$b = \sum_{j \geq 0} b_j.$$

A més, les b_j's tenen integral zero i estan suportades en cubs diàdics Q_j que són disjunts 2 a 2 i satisfan

$$\sum_j |Q_j| \leq \alpha^{-1} \|f\|_1.$$

La recompensa

Presentem la primera conseqüència de la descomposició de CZ:

Podem provar que si un operador $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ està *ben localitzat*, és a dir, que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} |Tb(x)| dx \leq C \int_Q |b(x)| dx,$$

per tota funció b suportada en un cub Q i tal que $\int_{\mathbb{R}^n} b = 0$,

La recompensa

Presentem la primera conseqüència de la descomposició de CZ:

Podem provar que si un operador $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ està *ben localitzat*, és a dir, que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} |Tb(x)| dx \leq C \int_Q |b(x)| dx,$$

per tota funció b suportada en un cub Q i tal que $\int_{\mathbb{R}^n} b = 0$,

aleshores,

$$T : L^1 \to L^{1,\infty}.$$

La recompensa

Presentem la primera conseqüència de la descomposició de CZ:

Podem provar que si un operador $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ està *ben localitzat*, és a dir, que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} |Tb(x)|dx \leq C \int_Q |b(x)|dx,$$

per tota funció b suportada en un cub Q i tal que $\int_{\mathbb{R}^n} b = 0$,

aleshores,

$$T : L^1 \to L^{1,\infty}.$$

Per exemple, la transformada de Hilbert clàssica està ben localitzada.

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

Fins ara, hem presentat dues tècniques:

- Teorema d'Interpolació de Marcinkiewicz

- Descomposició de Calderón-Zygmund

Fins ara, hem presentat dues tècniques:

- Teorema d'Interpolació de Marcinkiewicz
- Descomposició de Calderón-Zygmund

El nostre objectiu és provar que H es pot estendre a un operador tal que

$$H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad 1 < p < \infty,$$

i

$$H : L^1(\mathbb{R}) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}).$$

La manera ràpida

– Provem que H està *ben localitzat* i, per Calderón-Zygmund, tenim

$$H : L^1(\mathbb{R}) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}).$$

La manera ràpida

– Provem que H està *ben localitzat* i, per Calderón-Zygmund, tenim

$$H : L^1(\mathbb{R}) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}).$$

– Interpolem entre aquest fet i $H : L^2 \to L^2$ (que tenim per definició) per obtenir

$$H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad 1 < p \leq 2.$$

La manera ràpida

– Provem que H està *ben localitzat* i, per Calderón-Zygmund, tenim

$$H : L^1(\mathbb{R}) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}).$$

– Interpolem entre aquest fet i $H : L^2 \to L^2$ (que tenim per definició) per obtenir

$$H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad 1 < p \leq 2.$$

– Fem servir un argument de dualitat per aconseguir l'acotació per la resta de p's, $2 \leq p < \infty$.

La manera curiosa

– Provem un resultat que, començant d'una hipòtesi del tipus $H : L^p \to L^p$, dóna

$$H : L^{2p} \to L^{2p}.$$

La manera curiosa

– Provem un resultat que, començant d'una hipòtesi del tipus $H : L^p \to L^p$, dóna

$$H : L^{2p} \to L^{2p}.$$

– Fem servir aquest resultat recursivament, començant per $p = 2$ fins obtenir

$$H : L^{2^k} \to L^{2^k}, \quad k \geq 1.$$

La manera curiosa

– Provem un resultat que, començant d'una hipòtesi del tipus $H : L^p \to L^p$, dóna

$$H : L^{2p} \to L^{2p}.$$

– Fem servir aquest resultat recursivament, començant per $p = 2$ fins obtenir

$$H : L^{2^k} \to L^{2^k}, \quad k \geq 1.$$

– Usem interpolació entre cada parella de potències per concloure que tenim acotació per $2 \leq p < \infty$.

La manera curiosa

– Provem un resultat que, començant d'una hipòtesi del tipus $H : L^p \to L^p$, dóna

$$H : L^{2p} \to L^{2p}.$$

– Fem servir aquest resultat recursivament, començant per $p = 2$ fins obtenir

$$H : L^{2^k} \to L^{2^k}, \quad k \geq 1.$$

– Usem interpolació entre cada parella de potències per concloure que tenim acotació per $2 \leq p < \infty$.
– Altre cop, un argument de dualitat ens dóna acotació per $1 < p \leq 2$.

La manera curiosa

– Provem un resultat que, començant d'una hipòtesi del tipus $H : L^p \to L^p$, dóna

$$H : L^{2p} \to L^{2p}.$$

– Fem servir aquest resultat recursivament, començant per $p = 2$ fins obtenir

$$H : L^{2^k} \to L^{2^k}, \quad k \geq 1.$$

– Usem interpolació entre cada parella de potències per concloure que tenim acotació per $2 \leq p < \infty$.
– Altre cop, un argument de dualitat ens dóna acotació per $1 < p \leq 2$.
– Per acabar, provem que $H : L^1 \to L^{1,\infty}$ mostrant que H està ben localitzat, com abans.

Observació tècnica

Com s'estén H, inicialment definida a $L^2(\mathbb{R})$, a funcions d'$L^p(\mathbb{R})$?

Observació tècnica

Com s'estén H, inicialment definida a $L^2(\mathbb{R})$, a funcions d'$L^p(\mathbb{R})$?
Primer, es proven les desigualtats del tipus

$$\|Hf\|_p \leq C_p\|f\|_p \quad \text{i} \quad \|Hf\|_{1,\infty} \leq C_1\|f\|_1, \quad \text{per tota } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Observació tècnica

Com s'estén H, inicialment definida a $L^2(\mathbb{R})$, a funcions d'$L^p(\mathbb{R})$?
Primer, es proven les desigualtats del tipus

$$\|Hf\|_p \leq C_p\|f\|_p \quad \text{i} \quad \|Hf\|_{1,\infty} \leq C_1\|f\|_1, \quad \text{per tota } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

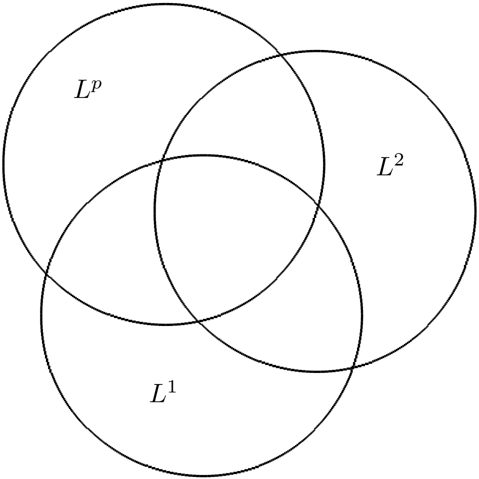
Un cop fet això, es fa servir que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ és dens a tots els espais L^p;
Podem definir, per tota funció $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$Hf = (L^p) - \lim_n Hf_n,$$

on $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tendeix a f en L^p.

Observació tècnica

Finalment, cal comprovar que si $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$, les dues definicions de Hf coincideixen!!!



Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

La transformada de Hilbert sobre corbes

Si f és una funció "prou bona", la seva transformada de Hilbert ve donada per

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x-t) \frac{dt}{t}.$$

La transformada de Hilbert sobre corbes

Si f és una funció "prou bona", la seva transformada de Hilbert ve donada per

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x-t) \frac{dt}{t}.$$

Si f està definida a $\mathbb{R}^2$, la generalització natural d'H és

$$Hf(x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f((x_1, x_2) - (t, t)) \frac{dt}{t}.$$

La transformada de Hilbert sobre corbes

Si f és una funció "prou bona", la seva transformada de Hilbert ve donada per

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x-t) \frac{dt}{t}.$$

Si f està definida a $\mathbb{R}^2$, la generalització natural d'H és

$$Hf(x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f((x_1, x_2) - (t, t)) \frac{dt}{t}.$$

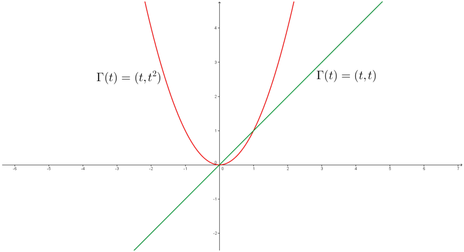
Tot i així, podem considerar tota una família d'operadors $\{H_\Gamma\}_\Gamma$ si escrivim

$$H_\Gamma f(x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f((x_1, x_2) - \Gamma(t)) \frac{dt}{t},$$

on $\Gamma(t)$ és una corba al pla.

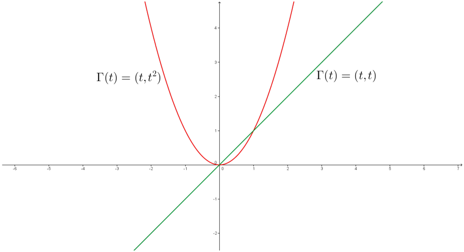
Objectiu

El nostre objectiu és estudiar l'acotació de la transformada de Hilbert sobre la paràbola $\Gamma(t) = (t, t^2)$.



Objectiu

El nostre objectiu és estudiar l'acotació de la transformada de Hilbert sobre la paràbola $\Gamma(t) = (t, t^2)$.



El PROBLEMA és que H_Γ no està ben localitzat i no satisfà la propietat de

$$\text{acotació} - L^p \Longrightarrow \text{acotació} - L^{2p},$$

així que cap de les dues tècniques que hem fet servir en el cas clàssic serveix ara.

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

Lema de Van der Corput

El lema de Van der Corput és l'eina més bàsica per estimar integrals oscil·latòries.

Lema de Van der Corput

El lema de Van der Corput és l'eina més bàsica per estimar integrals oscil·latòries. Afirma que si tenim una integral oscil·latòria de la forma

$$I(a,b)=\int_a^b e^{ih(t)}dt,$$

h és de classe $\mathcal{C}^k$ i $|h^{(k)}(t)|\geq\lambda>0$, aleshores

$$|I(a,b)|\leq\frac{C_k}{\lambda^{1/k}}.$$

Si $k=1$, h també ha de ser monòtona.

Lema de Van der Corput

El lema de Van der Corput és l'eina més bàsica per estimar integrals oscil·latòries. Afirma que si tenim una integral oscil·latòria de la forma

$$I(a,b) = \int_a^b e^{ih(t)}\,dt,$$

h és de classe $\mathcal{C}^k$ i $|h^{(k)}(t)| \geq \lambda > 0$, aleshores

$$|I(a,b)| \leq \frac{C_k}{\lambda^{1/k}}.$$

Si $k = 1$, h també ha de ser monòtona.

Les constants es poden calcular per $C_k = 3 \cdot 2^k - 2$.

Acotació L^2

Per tal de provar que H_Γ (que inicialment està definida a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) es pot estendre a un operador

$$H_\Gamma : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

fem servir el teorema de Benedeck-Calderón-Panzone.

Acotació L^2

Per tal de provar que H_Γ (que inicialment està definida a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) es pot estendre a un operador

$$H_\Gamma : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

fem servir el teorema de Benedeck-Calderón-Panzone.
H_Γ es pot escriure com un operador de convolució $H_\Gamma f = K * f$ i el teorema de BCP asegura l'acotació L^2 de H_Γ sempre i quan el nucli K satisfaci certes propietats.

Acotació L^2

Per tal de provar que H_Γ (que inicialment està definida a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) es pot estendre a un operador

$$H_\Gamma : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

fem servir el teorema de Benedeck-Calderón-Panzone.
H_Γ es pot escriure com un operador de convolució $H_\Gamma f = K * f$ i el teorema de BCP asegura l'acotació L^2 de H_Γ sempre i quan el nucli K satisfaci certes propietats.
Una d'aquestes condicions és que

$$|\widehat{\tilde{K}_j}(\xi)| = \left| \int_{1\leq|t|\leq 2} e^{-2\pi i \xi\cdot(t,t^2)} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{C}{|\xi|^{\varepsilon}},$$

on podem veure perquè el lema de Van der Corput juga un paper essencial en l'acotació L^2 de H_Γ.

Continguts

1. Preliminars
2. La transformada de Hilbert clàssica
   - Teoria d'interpolació
   - La descomposició de Calderón-Zygmund
   - El teorema de Kolmogorov-Riesz
3. La transformada de Hilbert sobre la paràbola
   - Generalització de la transformada de Hilbert
   - Lema de Van der Corput i acotació L^2
   - Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
   - Altres resultats
4. El següent pas...

Dificultats

La major diferència entre el cas clàssic i el de la paràbola és que, la qüestió de si

$$H_\Gamma : L^1(\mathbb{R}^2) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$$

està acotada o no és un problema obert. Per tant, no podem fer servir interpolació entre L^1 i L^2 i estem forçats a fer servir un apropament diferent. L'ingredient principal: *Teoria de Littlewood-Paley*.

Littlewood-Paley

Aquesta teoria intenta trobar un substitut pel teorema de Plancherel quan $p \neq 2$.

Littlewood-Paley

Aquesta teoria intenta trobar un substitut pel teorema de Plancherel quan $p \neq 2$.

Per exemple, per provar l'acotació L^p cal "tallar" funcions en "peces" i després reconstruir-les...

Littlewood-Paley

Aquesta teoria intenta trobar un substitut pel teorema de Plancherel quan $p \neq 2$.

Per exemple, per provar l'acotació L^p cal "tallar" funcions en "peces" i després reconstruir-les... Prenem $I_j = [-2^{j+1}, -2^j] \cup [2^j, 2^{j+1}]$ i definim S_j per

$$\widehat{S_j f}(\xi) = \chi_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Littlewood-Paley

Aquesta teoria intenta trobar un substitut pel teorema de Plancherel quan $p \neq 2$.

Per exemple, per provar l'acotació L^p cal "tallar" funcions en "peces" i després reconstruir-les... Prenem $I_j = [-2^{j+1}, -2^j] \cup [2^j, 2^{j+1}]$ i definim S_j per

$$\widehat{S_j f}(\xi) = \chi_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Aleshores, el teorema de Plancherel dóna

$$\|f\|_2 = \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |S_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_2 ,$$

i la teoria de Littlewood-Paley afirma que, per tot $1 < p < \infty$, aquestes quantitats són comparables:

$$c_p\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |S_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_p\|f\|_p.$$

Acotació L^p

Necessitem considerar també el operador maximal sobre la paràbola:

$$M_\Gamma f(x,y) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^{h} f(x-t, y-t^2)\,dt \right|.$$

Acotació L^p

Necessitem considerar també el operador maximal sobre la paràbola:

$$M_\Gamma f(x,y) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^{h} f(x-t, y-t^2)\,dt \right|.$$

Ara, prenem successions de mesures $\{\mu_j\}_j$ i $\{\sigma_j\}_j$ de manera que

$$H_\Gamma f = \sum_j \mu_j * f, \quad \text{and} \quad M_\Gamma f \leq 2 \sup_j \sigma_j * |f|.$$

Acotació L^p

Necessitem considerar també el operador maximal sobre la paràbola:

$$M_\Gamma f(x,y) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^{h} f(x-t, y-t^2)\,dt \right|.$$

Ara, prenem successions de mesures $\{\mu_j\}_j$ i $\{\sigma_j\}_j$ de manera que

$$H_\Gamma f = \sum_j \mu_j * f, \quad \text{and} \quad M_\Gamma f \leq 2 \sup_j \sigma_j * |f|.$$

Finalment, provem un parell de resultats sobre successions de mesures que donen resultats d'acotació per operadors de convolució com els anteriors.

Acotació L^p

Necessitem considerar també el operador maximal sobre la paràbola:

$$M_\Gamma f(x,y) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^{h} f(x-t, y-t^2)\,dt \right|.$$

Ara, prenem successions de mesures $\{\mu_j\}_j$ i $\{\sigma_j\}_j$ de manera que

$$H_\Gamma f = \sum_j \mu_j * f, \quad \text{and} \quad M_\Gamma f \leq 2 \sup_j \sigma_j * |f|.$$

Finalment, provem un parell de resultats sobre successions de mesures que donen resultats d'acotació per operadors de convolució com els anteriors. Amb aquests dos teoremes, som capaços d'obtenir el resultat d'acotació buscat.

Acotació L^p

Necessitem considerar també el operador maximal sobre la paràbola:

$$M_\Gamma f(x,y) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^{h} f(x-t, y-t^2)\,dt \right|.$$

Ara, prenem successions de mesures $\{\mu_j\}_j$ i $\{\sigma_j\}_j$ de manera que

$$H_\Gamma f = \sum_j \mu_j * f, \quad \text{and} \quad M_\Gamma f \leq 2 \sup_j \sigma_j * |f|.$$

Finalment, provem un parell de resultats sobre successions de mesures que donen resultats d'acotació per operadors de convolució com els anteriors. Amb aquests dos teoremes, som capaços d'obtenir el resultat d'acotació buscat.
És en les demostracions d'aquests dos resultats on cal aplicar la teoria de Littlewood-Paley.

Continguts

1 Preliminars

2 La transformada de Hilbert clàssica
- Teoria d'interpolació
- La descomposició de Calderón-Zygmund
- El teorema de Kolmogorov-Riesz

3 La transformada de Hilbert sobre la paràbola
- Generalització de la transformada de Hilbert
- Lema de Van der Corput i acotació L^2
- Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
- Altres resultats

4 El següent pas...

Recapitulant, fins ara hem provat que la transformada de Hilbert sobre la paràbola està acotada

$$H_\Gamma : L^p(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^2), \quad 1 < p < \infty,$$

però la pregunta de si

$$H_\Gamma : L^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$$

està acotada segueix oberta (per nosaltres i per tothom!).

Teoria d'extrapolació

Normalment, quan es té un operador acotat a L^p per $p > 1$ però el cas $p = 1$ continua obert, s'intenta "apropar-se" a L^1 mitjançant la teoria d'extrapolació. El resultat principal és el teorema de Yano:

Teoria d'extrapolació

Normalment, quan es té un operador acotat a L^p per $p > 1$ però el cas $p = 1$ continua obert, s'intenta "apropar-se" a L^1 mitjançant la teoria d'extrapolació. El resultat principal és el teorema de Yano:
Si $T : L^p \to L^p$ per $p > 1$ i la constant d'acotació es comporta com

$$\frac{1}{(p-1)^k}$$

per cert $k > 0$ quan $p \to 1^+$, aleshores

$$T : L(\log L)^k \to L^1_{loc}.$$

Teoria d'extrapolació

Normalment, quan es té un operador acotat a L^p per $p > 1$ però el cas $p = 1$ continua obert, s'intenta "apropar-se" a L^1 mitjançant la teoria d'extrapolació. El resultat principal és el teorema de Yano:
Si $T : L^p \to L^p$ per $p > 1$ i la constant d'acotació es comporta com

$$\frac{1}{(p-1)^k}$$

per cert $k > 0$ quan $p \to 1^+$, aleshores

$$T : L(\log L)^k \to L^1_{loc}.$$

Hem tractat de fer servir aquest argument, però les nostres constants per $p > 1$ no eren prou bones a prop de $p = 1$.

Resultats a prop de $p = 1$

Al 1987, M. Christ i E. M. Stein proven que

$$H_\Gamma : L(\log L)(B) \to L^{1,\infty}(B)$$

per tot conjunt acotat $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Resultats a prop de $p = 1$

Al 1987, M. Christ i E. M. Stein proven que

$$H_\Gamma : L(\log L)(B) \to L^{1,\infty}(B)$$

per tot conjunt acotat $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Per tal de fer això, introdueixen una variant de la descomposició de Calderón-Zygmund per trobar una desigualtat L^p per $p > 1$ amb constant com

$$\frac{1}{p-1} \quad \text{quan } p \to 1^+.$$

Resultats a prop de $p = 1$

Al 1987, M. Christ i E. M. Stein proven que

$$H_\Gamma : L(\log L)(B) \to L^{1,\infty}(B)$$

per tot conjunt acotat $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Per tal de fer això, introdueixen una variant de la descomposició de Calderón-Zygmund per trobar una desigualtat L^p per $p > 1$ amb constant com

$$\frac{1}{p-1} \quad \text{quan } p \to 1^+.$$

Això es fa servir amb el teorema d'extrapolació de Yano per la "part dolenta" de la descomposició. Per la "part bona", només els calen les propietats derivades del resultat de descomposició.

Resultats a prop de $p = 1$

Al 2004, A. Seeger, T. Tao i J. Wright van mostrar el millor resultat fins ara a prop de L^1:

$$H_\Gamma : L(\log \log L)(\mathbb{R}^2) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2).$$

Resultats a prop de $p = 1$

Al 2004, A. Seeger, T. Tao i J. Wright van mostrar el millor resultat fins ara a prop de L^1:

$$H_\Gamma : L(\log\log L)(\mathbb{R}^2) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2).$$

Aquí també fan servir una nova variant de la descomposició de Calderón-Zygmund.

Continguts

1 Preliminars

2 La transformada de Hilbert clàssica
- Teoria d'interpolació
- La descomposició de Calderón-Zygmund
- El teorema de Kolmogorov-Riesz

3 La transformada de Hilbert sobre la paràbola
- Generalització de la transformada de Hilbert
- Lema de Van der Corput i acotació L^2
- Teoria de Littlewood-Paley i acotació L^p
- Altres resultats

4 El següent pas...

Idees

– Sembla natural pensar que si es millora el resultat d'extrapolació de Yano, podem aconseguir acotació a $L(\log\log\log L)$. Per tant, un es pot proposar treballar en aquesta teoria per després aplicar-la a operadors pels que el cas $p = 1$ encara és obert.

Idees

– Sembla natural pensar que si es millora el resultat d'extrapolació de Yano, podem aconseguir acotació a $L(\log\log\log L)$. Per tant, un es pot proposar treballar en aquesta teoria per després aplicar-la a operadors pels que el cas $p = 1$ encara és obert.

– L'estudi de les diferents variants de la descomposició de Calderón-Zygmund també sembla interessant, ja que els dos últims avenços en aquesta direcció usen aquesta tècnica.

Idees

– Sembla natural pensar que si es millora el resultat d'extrapolació de Yano, podem aconseguir acotació a $L(\log \log \log L)$. Per tant, un es pot proposar treballar en aquesta teoria per després aplicar-la a operadors pels que el cas $p = 1$ encara és obert.

– L'estudi de les diferents variants de la descomposició de Calderón-Zygmund també sembla interessant, ja que els dos últims avenços en aquesta direcció usen aquesta tècnica.

– Finalment, la pregunta de si $H_\Gamma : L^1(\mathbb{R}^2) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ o no seria un objectiu ambiciós. Un argument d'extrapolació no funcionaria i s'hauria de trobar una estratègia nova i original.

=)

Gràcies per la vostra atenció!