1 Reelle Zahlen

Definition 1 (Kommutativer Körper)

Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen, einer Addition und einer Multiplikation,

$$\begin{aligned} + : K \times K &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : K \times K &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto x \cdot y = xy \end{aligned}$$

(K1) *Assoziativität*: $\forall x, y, z \in K :$
$(x+y)+z = x+(y+z)$,
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(K2) *Neutrales Element (Null)*: $\exists 0 \in K : \forall x \in K :$
$x + 0 = x = 0 + x$

(K3) *Neutrales Element (Eins)*: $\exists 1 \in K \backslash \{0\} : \forall x \in R :$
$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$

(K4) *Inverse Elemente (Negative)*: $\forall x \in R : \exists -x \in K :$
$x + (-x) = 0 = (-x) + x$

(K5) *Inverse Elemente (Inverse)*: $\forall x \in K \backslash \{0\} : \exists x^{-1} \in K :$
$x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

(K6) *Kommutativität*: $\forall x, y \in K :$
$x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$

(K7) *Distributivität*: $\forall x, y, z \in K :$
$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,
$(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

heißt *kommutativer Körper*.

Definition 2 (Gesetze im Körper)

Sei $(K, +, \cdot)$ ein kommutativer Körper und $a, b \in K$, dann gilt:

1. $-(-a) = a$ und $(a^{-1})^{-1} = a$
2. $a \cdot 0 = 0$
3. $ab = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (Nullteilerfreiheit)
4. $a \cdot (-b) = -(ab)$, insbesondere $a \cdot (-1) = -a$
5. $(-a)(-b) = ab$

Definition 3 (Angeordneter Körper)

Ein kommutativer Körper heißt *angeordneter Körper*, falls in K eine Menge der *positiven Elemente* (Schreibweise: $a > 0$ steht für "a ist postitiv") ausgezeichnet ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der drei Bedingungen:

$$a > 0 \text{ oder } a = 0 \text{ oder } -a > 0$$

2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgen $a + b > 0$ sowie $ab > 0$.

Definition 4 (Archimedisch angrordneter Körper)

Ein angeordneter Körper heißt *archimedisch angeordnet*, falls zu $a > 0$ und $b > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$na := \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ Summanden}} > b$$

(Archimedisches Axiom)

Korollar 1 (Gesetze im angeordneten Körper)

1. $a < b, b < c \Longrightarrow a < c$ (Transitivität)
2. $a < v \Longleftrightarrow a + c < b + c$
3. $a < b, c > 0 \Longrightarrow ca < cb$
4. $a < b < 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
5. $0 \leq a \leq b \Longrightarrow a^2 < b^2$
6. $\forall a \neq 0 : a^2 > 0$ (insbesondere $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$)

Definition 5 (Diskrete Menge)

Eine Mege

Definition 6 (Fakultät)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$n! := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

die *Fakultät* von n.