

# APLIKASI INTEGRAL



# INTEGRAL

---

**Standar kompetensi :**

**Menggunakan konsep integral dalam pemecahan masalah.**

---

**Kompetensi Dasar:**

- 1. Memahami konsep integral tak tentu dan tentu**
- 2. Menghitung integral tak tentu dan integral tentu dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri**
- 3. Menggunakan integral untuk menghitung luas daerah di bawah kurva dan volume benda putar**
  - a. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat.**
  - b. Menghitung volume benda putar.**



# PENERAPAN INTEGRAL

**Standar kompetensi :**

**Menggunakan konsep integral dalam pemecahan masalah.**

Tacoma Bridge, Washington, 1940



# History of Tacoma Bridge

- The original Tacoma Narrows Bridge stretched 1,810 m (5,940 ft) across a narrow channel of Puget Sound near Tacoma, Washington. After two years of construction, the bridge opened to traffic on July 1, 1940. Four months later the bridge collapsed during a windstorm with gusts that reached 68 km/h (42 mph). The catastrophe was attributed to faulty design. Instead of allowing the wind to pass through, the suspended girders caught the wind, causing the bridge to buck and roll. The bucking motion earned the bridge the nickname Galloping Gertie. The stronger the wind blew, the more violently the structure oscillated, until it finally broke apart and crashed into the water. In 1992 the bridge's sunken remains were placed on the United States National Register of Historic Places.
- **Encarta Encyclopedia**
- Archive Photos
- **Microsoft® Encarta® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation. All rights reserved.**



The Akashi Kaikyo Bridge in Japan is the longest suspension bridge in the world. Completed in 1998, it measures 1.99 km (1.24 mi) between its two supporting towers. The bridge connects the city of Kōbe with Awaji Island and carries both road and rail traffic. Built to withstand earthquakes, the bridge survived a 1995 tremor measuring 7.2 on the Richter scale. **Microsoft® Encarta® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation. All rights reserved.**



Encarta Encyclopedia, Kaku Kurita/Liaison Agency





## **Minaret of the Great Mosque at Sāmarrā'**

This spiral minaret, where the muezzin once called the faithful to prayer, is the only surviving feature of the Great Mosque at Sāmarrā', Iraq. At the time of its construction (848-852), the Great Mosque at Sāmarrā' was the largest Islamic mosque in the world.

SEF/Art Resource, NY



Encarta Encyclopedia, SEF/Art Resource, NY



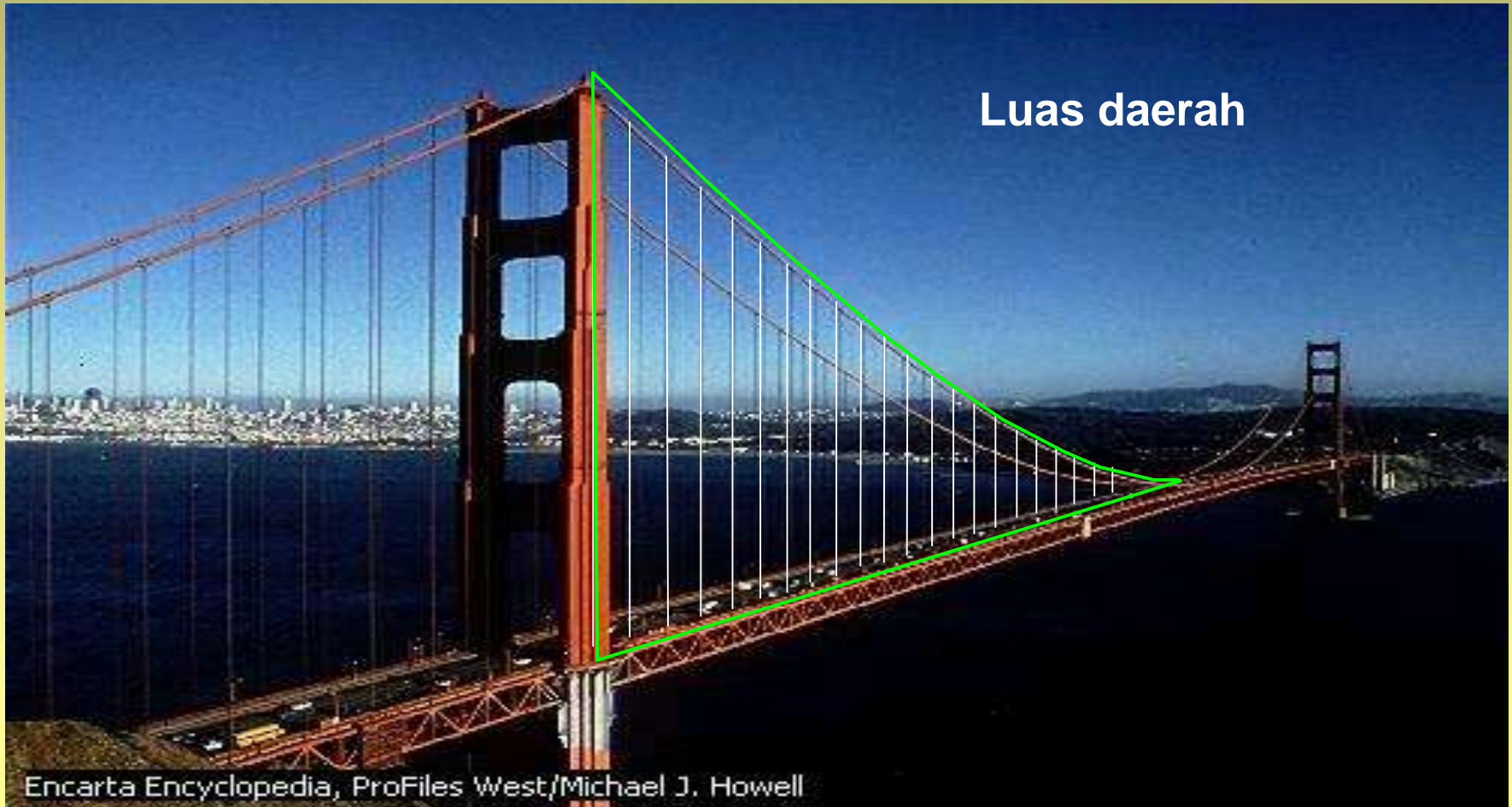
The Golden Gate Bridge links the city of San Francisco with Marin County to the north. The suspension bridge was opened in 1937 and since then has been one of the principal landmarks of both San Francisco and California



# PENERAPAN INTEGRAL

## INDIKATOR :

1. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat.
2. Menghitung volume benda putar.



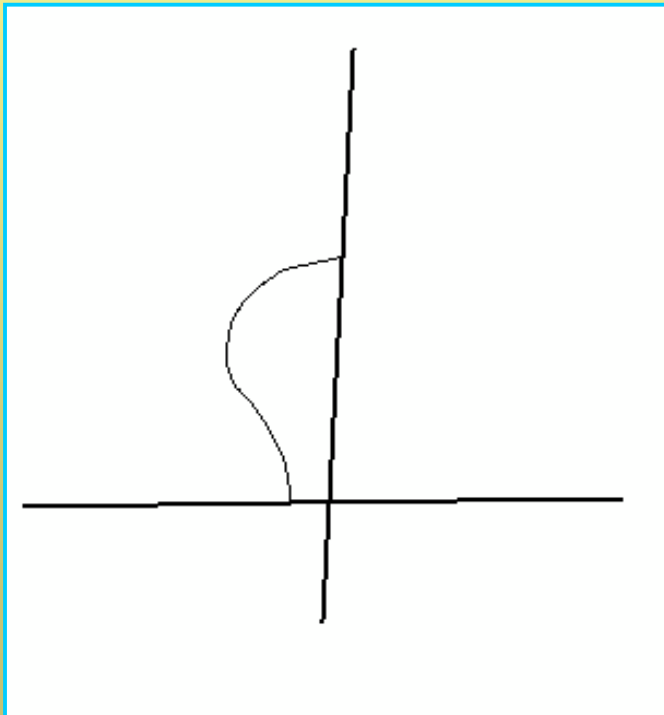


# PENERAPAN INTEGRAL

## INDIKATOR :

1. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat.
2. Menghitung volume benda putar.

### Volume benda putar



# PENERAPAN INTEGRAL

## INDIKATOR :

1. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat.
2. Menghitung volume benda putar.

Setelah pembelajaran siswa diharapkan dapat :

1. Menggambarkan suatu daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva.
2. Menentukan luas daerah dengan menggunakan limit jumlah.
3. Merumuskan integral tentu untuk luas daerah dan menghitungnya.
4. Merumuskan integral tentu untuk volume benda putar dari daerah yang diputar terhadap sumbu koordinat dan menghitungnya.

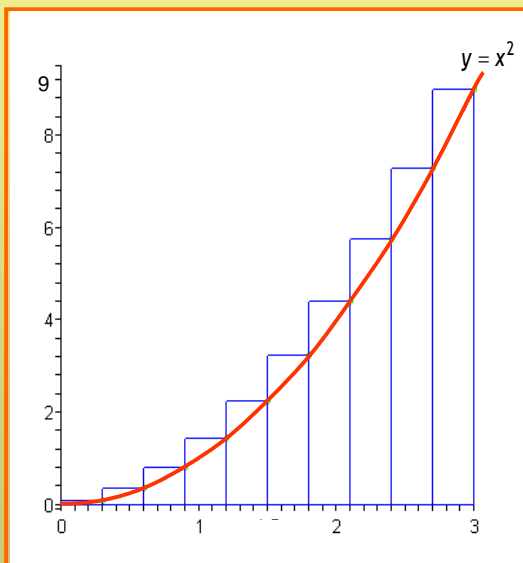


# PENERAPAN INTEGRAL

## INDIKATOR :

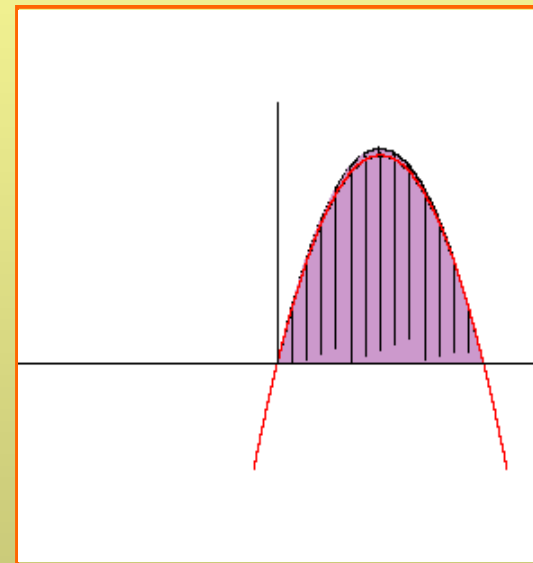
1. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat.
2. Menghitung volume benda putar.

Indikator 1



Luas daerah di bawah kurva  $y = x^2$

Indikator 2



Volume benda putar, jika kurva  $y = -x^2 + 4x$  diputar mengelilingi sumbu Y



**Teorema Dasar Kalkulus**

Misalkan  $f$  adalah fungsi yang kontinu pada selang  $[a, b]$  dan misalkan  $F$  adalah anti turunan dari  $f$  pada selang tersebut, maka

berlaku :  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Untuk meringkas penulisan,  $F(b) - F(a)$  dinotasikan sebagai  $[F(x)]_a^b$

**Contoh 1 :**

Hitunglah nilai dari  $\int_{-1}^2 (6x^2 - 4x) dx$

**Jawab**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (6x^2 - 4x) dx &= [2x^3 - 2x^2]_{-1}^2 \\ &= 2(2)^3 - 2(2)^2 - [2(-1)^3 - 2(-1)^2] \\ &= 16 - 8 + 2 + 2 = 12\end{aligned}$$

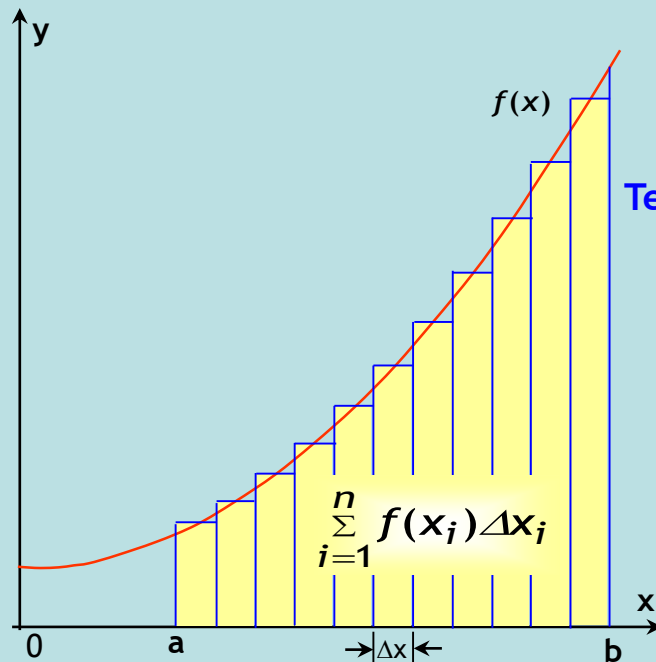


Secara geometri definisi integral Riemaan di atas dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva  $y = f(x)$  pada interval  $[a, b]$ .

Jumlah Luas Partisi

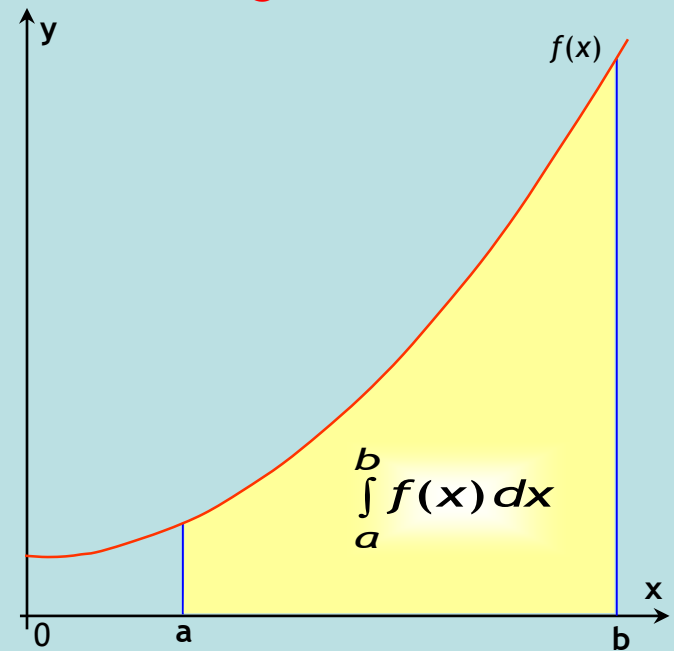
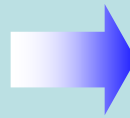
Berubah Menjadi

Integral



Tentukan limitnya

$$n \rightarrow \infty$$



$$L = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Kegiatan pokok dalam menghitung luas daerah dengan integral tentu adalah:

1. Gambar daerahnya.
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luas sebuah partisi

$$L_i \approx f(x_i) \Delta x_i$$

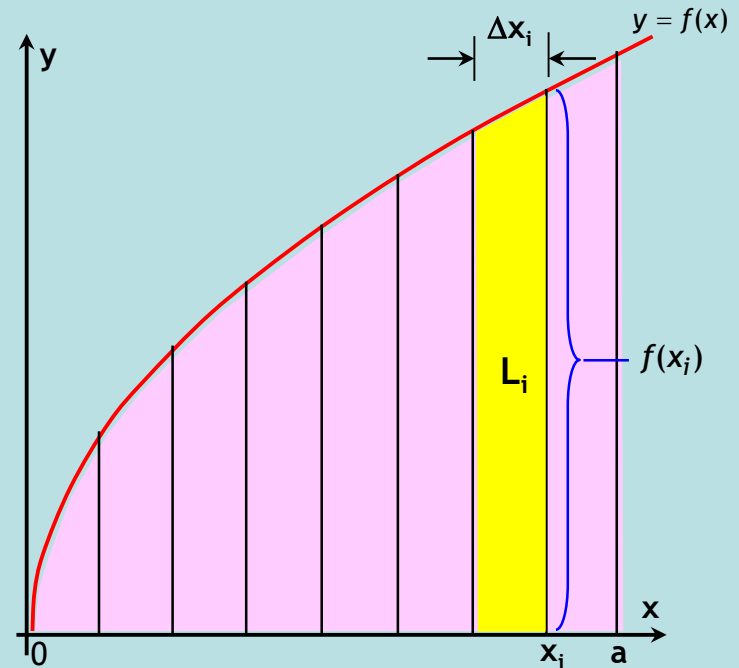
4. Jumlahkan luas partisi

$$L \approx \sum f(x_i) \Delta x_i$$

5. Ambil limitnya  $L = \lim \sum f(x_i) \Delta x_i$

6. Nyatakan dalam integral

$$L = \int_0^a f(x) dx$$



**Contoh 1.**

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = x^2$ , sumbu  $x$ , dan garis  $x = 3$

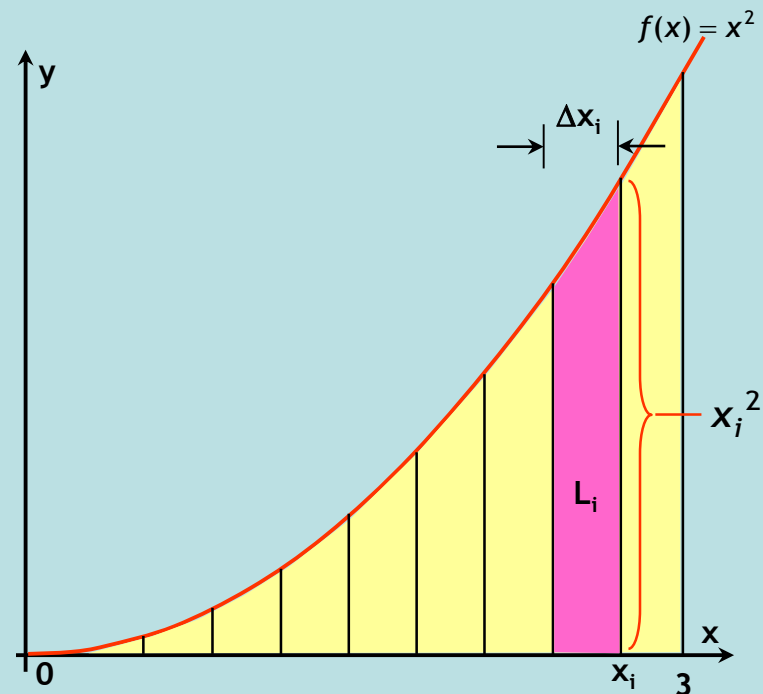
**Jawab****Langkah penyelesaian :**

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya  $L_i \approx x_i^2 \Delta x_i$
4. Jumlahkan luasnya  $L \approx \sum x_i^2 \Delta x_i$
5. Ambil limit jumlah luasnya

$$L = \lim \sum x_i^2 \Delta x_i$$

6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya  $L = \int_0^3 x^2 dx$

$$L = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$



**Contoh 2.**

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = x^2$ , sumbu Y, dan garis  $y = 4$

**Jawab****Langkah penyelesaian :**

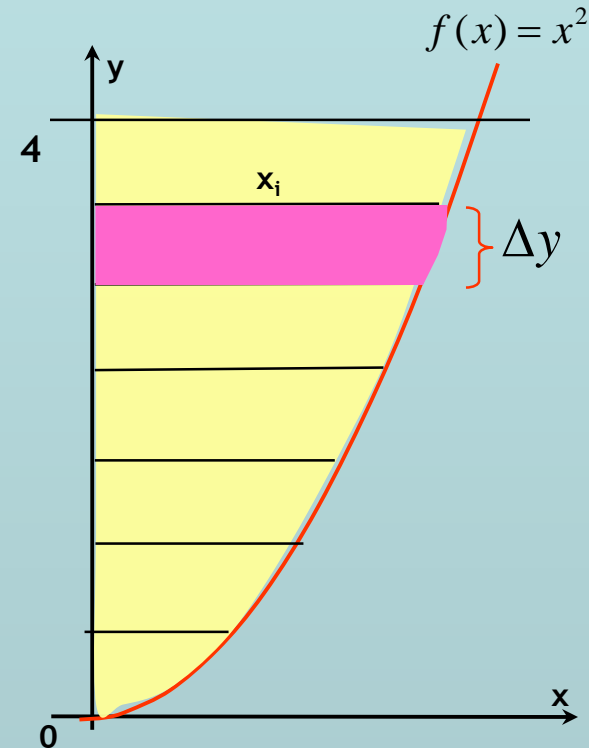
1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya  $L \approx x_i \cdot \Delta y$
4. Jumlahkan luasnya  $L \approx \sum \sqrt{y} \cdot \Delta y$
5. Ambil limit jumlah luasnya

$$L = \lim \sum \sqrt{y} \cdot \Delta y$$

6. Nyatakan dalam integral dan

hitung nilainya  $L = \int_0^4 \sqrt{y} \cdot dy$

$$L = \left[ \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$





## Contoh 3.

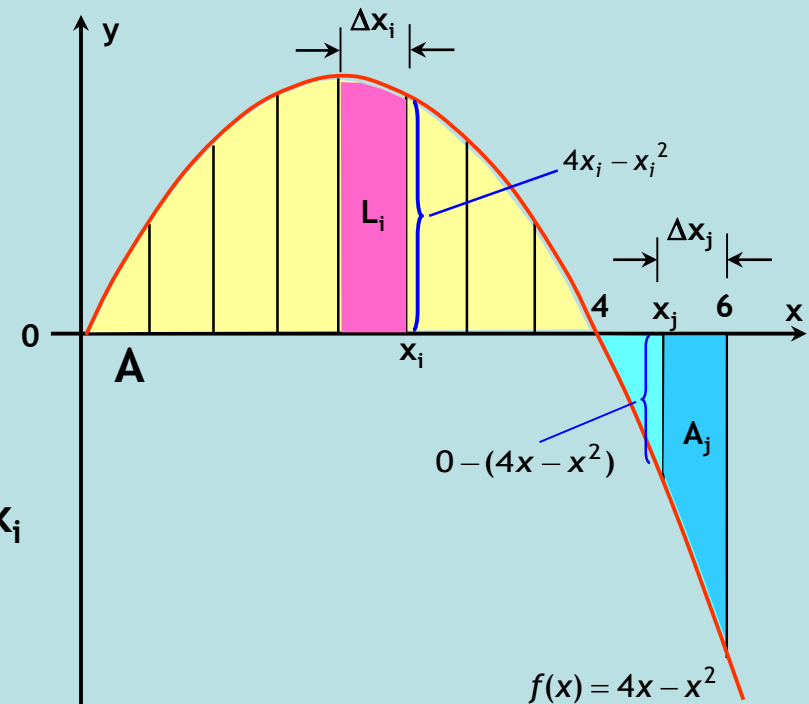
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = 4x - x^2$ , sumbu  $x$ , dan garis  $x = 6$

## Jawab

### Langkah penyelesaian:

1. Gambar dan Partisi daerahnya
2. Aproksimasi :  $L_i \approx (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$  dan  $A_j \approx -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
3. Jumlahkan :  $L \approx \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$  dan  $\approx \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
4. Ambil limitnya  $L = \lim \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$  dan  $A = \lim \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
5. Nyatakan dalam integral

$$L = \int_0^4 (4x - x^2) dx \quad A = \int_4^6 -(4x - x^2) dx$$



$$L = \int_0^4 (4x - x^2) dx$$

$$L = \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4$$

$$L = 2(4)^2 - \frac{1}{3}(4)^3 - 0 = 32 - \frac{64}{3}$$

$$A = \int_4^6 -(4x - x^2) dx$$

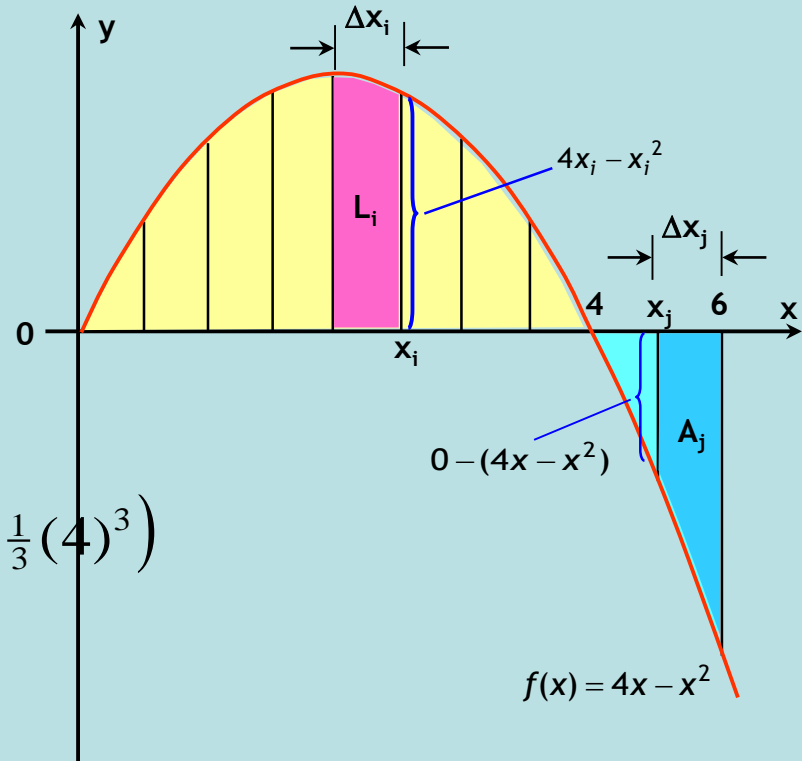
$$A = \left[ -2x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_4^6$$

$$A = -2(6)^2 + \frac{1}{3}(6)^3 - \left( -2(4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3 \right)$$

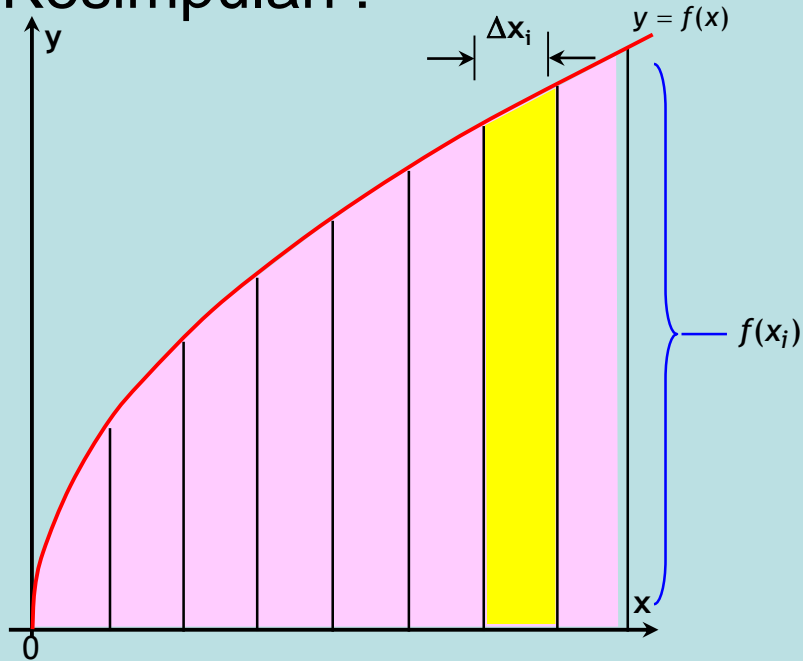
$$A = -72 + \frac{216}{3} + 32 - \frac{64}{3}$$

$$A = \frac{152}{3} - 40$$

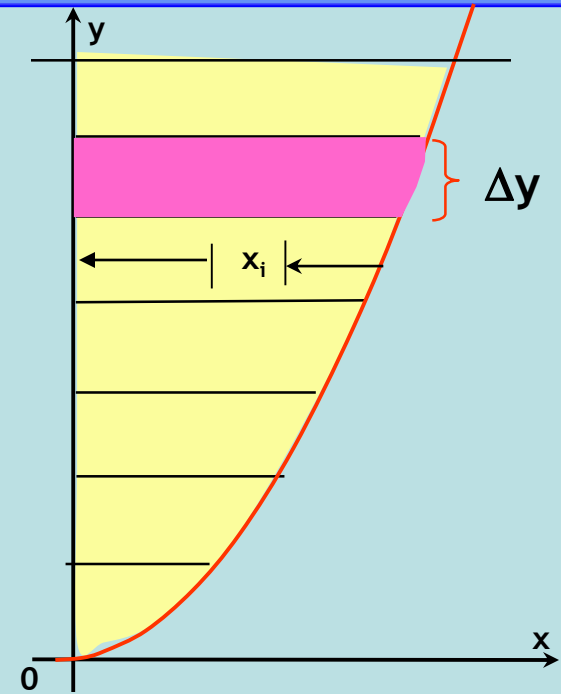
$$\text{Luas daerah} = 32 - \frac{64}{3} + \frac{152}{3} - 40 = 21\frac{1}{3}$$



Kesimpulan :



$$L = \int_a^b y \cdot dx$$



$$L = \int_a^b x \cdot dy$$

• Latihan 9 hal 35 no 1 – 25

## LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA

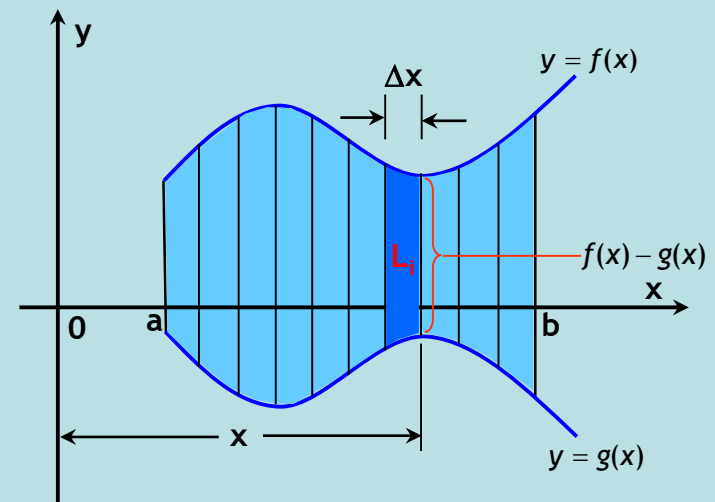
Perhatikan kurva  $y = f(x)$  dan  $y = g(x)$  dengan  $f(x) > g(x)$  pada selang  $[a, b]$  di bawah ini. Dengan menggunakan cara : *partisi, aproksimasi, jumlahkan, ambil limitnya, integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

### Langkah penyelesaian:

1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi :  $L_i \approx [f(x) - g(x)] \Delta x$
4. Jumlahkan :  $L \approx \sum [f(x) - g(x)] \Delta x$
5. Ambil limitnya :  

$$L = \lim \sum [f(x) - g(x)] \Delta x$$
6. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$





**Contoh 4.**

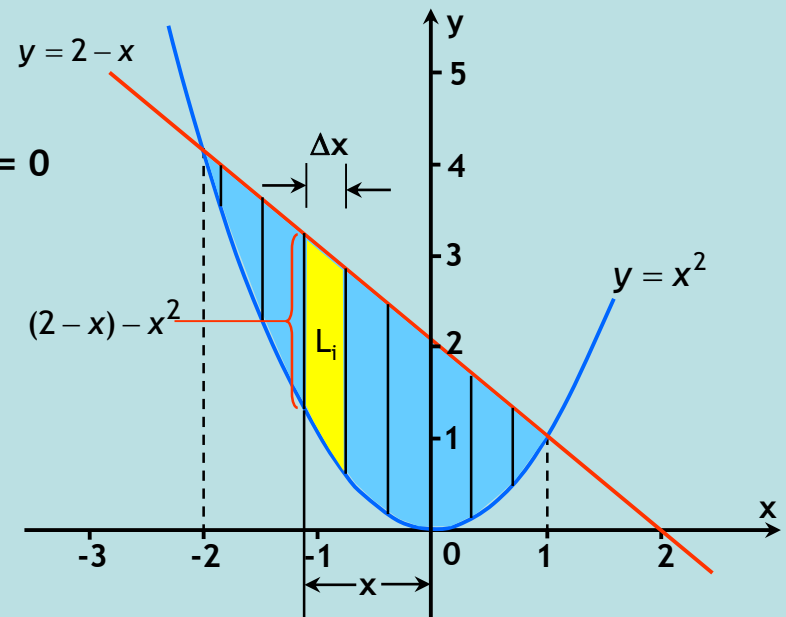
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = x^2$  dan garis  $y = 2 - x$

**Jawab**

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva  
 $x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$   
diperoleh  $x = -2$  dan  $x = 1$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya  
 $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$



$$L = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

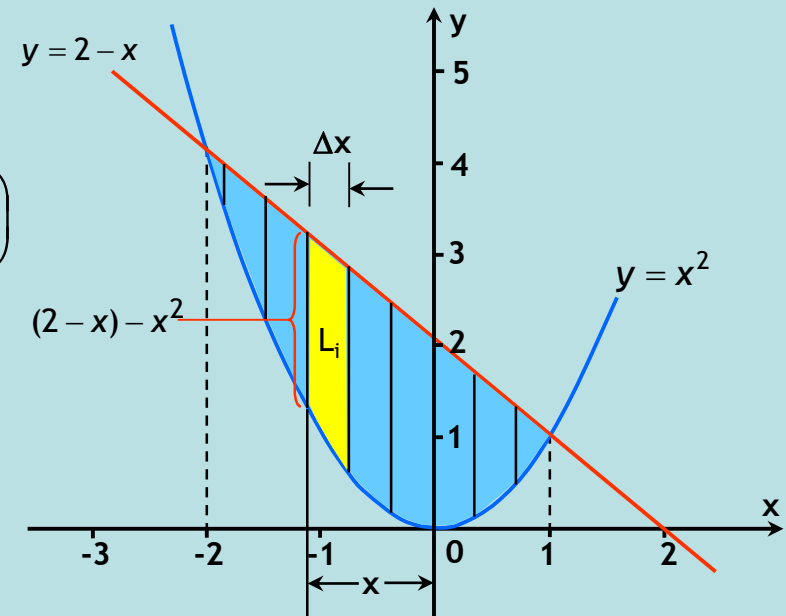
$$L = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

$$L = \left( 2(1) - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( 2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

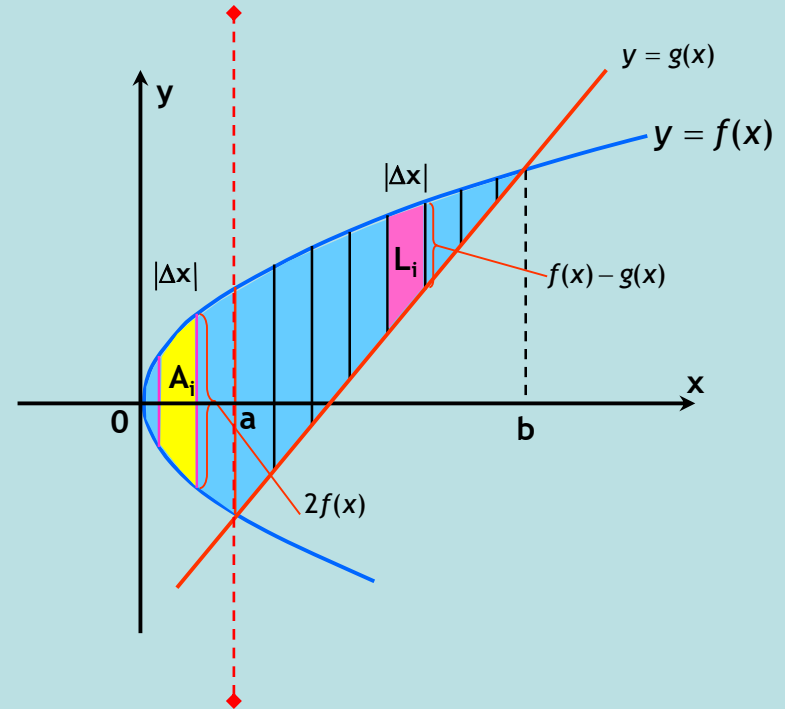
$$L = \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$L = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$L = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

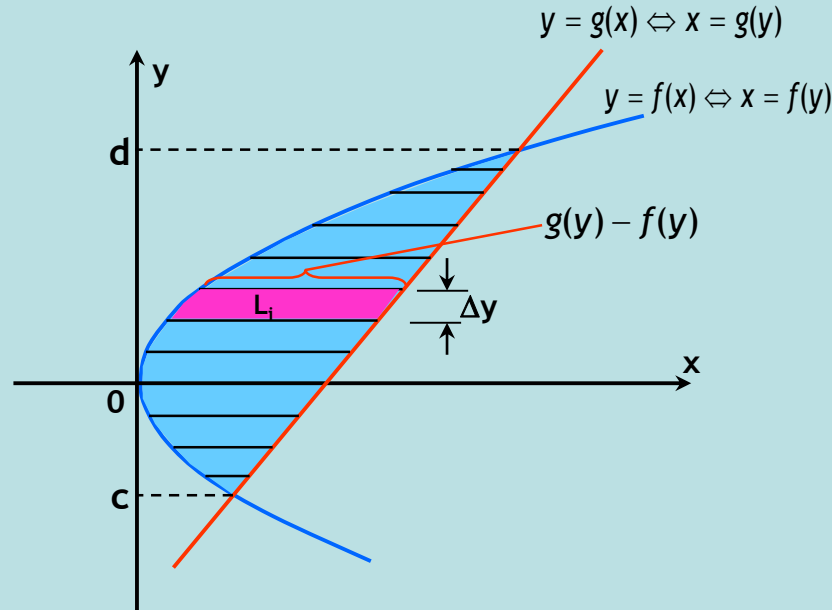


Untuk kasus tertentu pemartisian secara vertikal menyebabkan ada dua bentuk integral. Akibatnya diperlukan waktu lebih lama untuk menghitungnya.



$$\text{Luas daerah} = \int_0^a 2f(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Jika daerah tersebut dipartisi secara horisontal, maka akan diperoleh satu bentuk integral yang menyatakan luas daerah tersebut. Sehingga penyelesaiannya menjadi lebih sederhana dari sebelumnya.



$$\text{Luas daerah} = \int_c^d (g(y) - f(y)) dy$$



## Contoh 5.

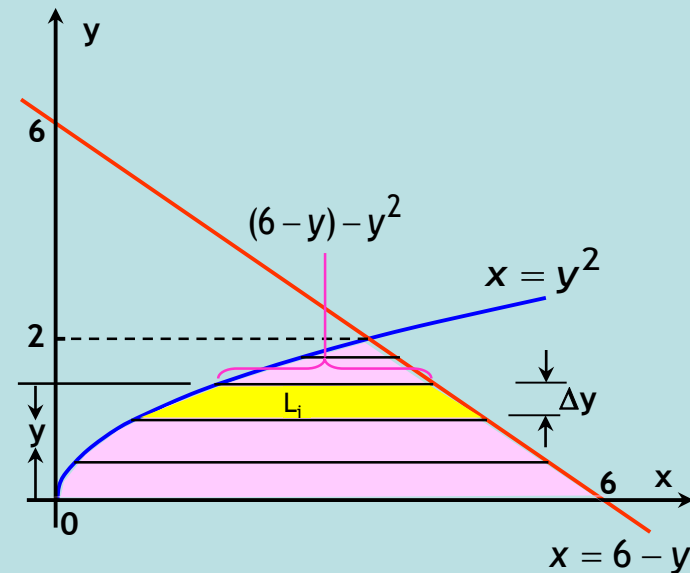
Hitunglah luas daerah di kuadran I yang dibatasi kurva  $y^2 = x$ , garis  $x + y = 6$ , dan sumbu x

## Jawab

## Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva  
 $y^2 = 6 - y \rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0$   
diperoleh  $y = -3$  dan  $y = 2$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya  
 $L_i \approx (6 - y - y^2)\Delta y$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$\text{Luas daerah} = \int_0^2 (6 - y - y^2) dy$$



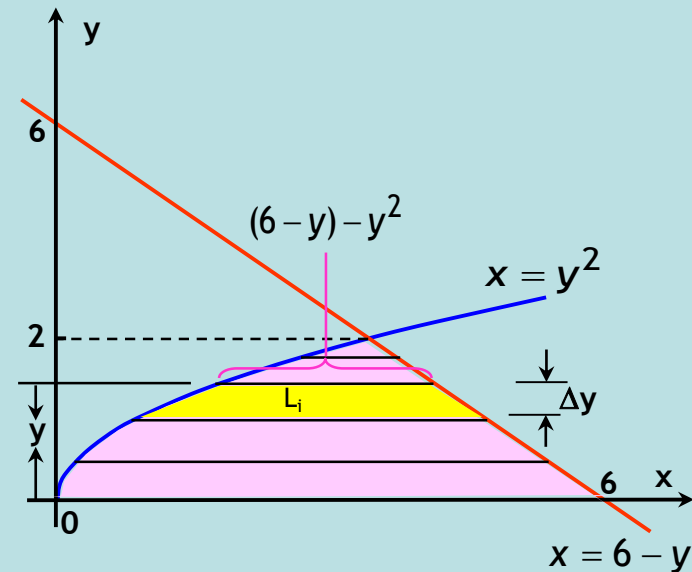
$$\text{Luas daerah} = \int_0^2 (6 - y - y^2) dy$$

$$\text{Luas daerah} = \left[ 6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$\text{Luas daerah} = \left( 6(2) - \frac{4}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - 0$$

$$\text{Luas daerah} = \left( 12 - 2 - \frac{8}{3} \right)$$

$$\text{Luas daerah} = \frac{22}{3}$$



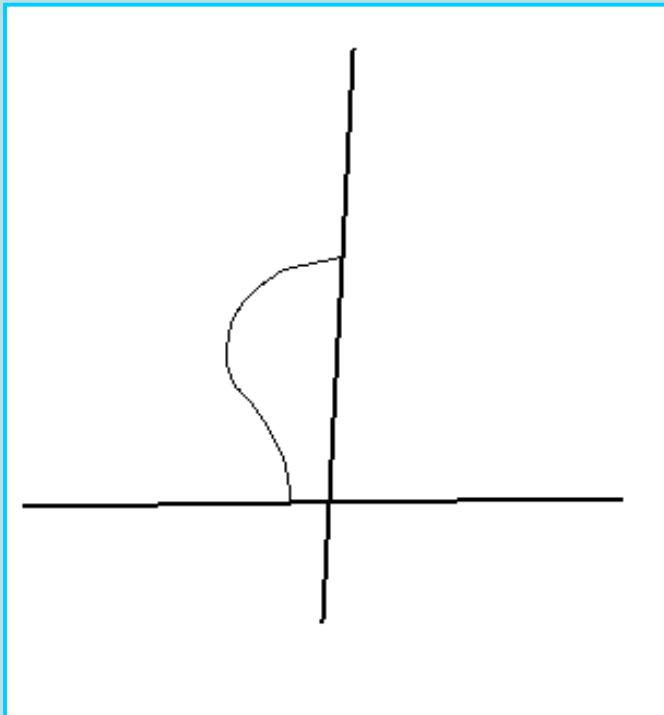
• Latihan 10 hal. 38 no. 1 – 25

# PENERAPAN INTEGRAL

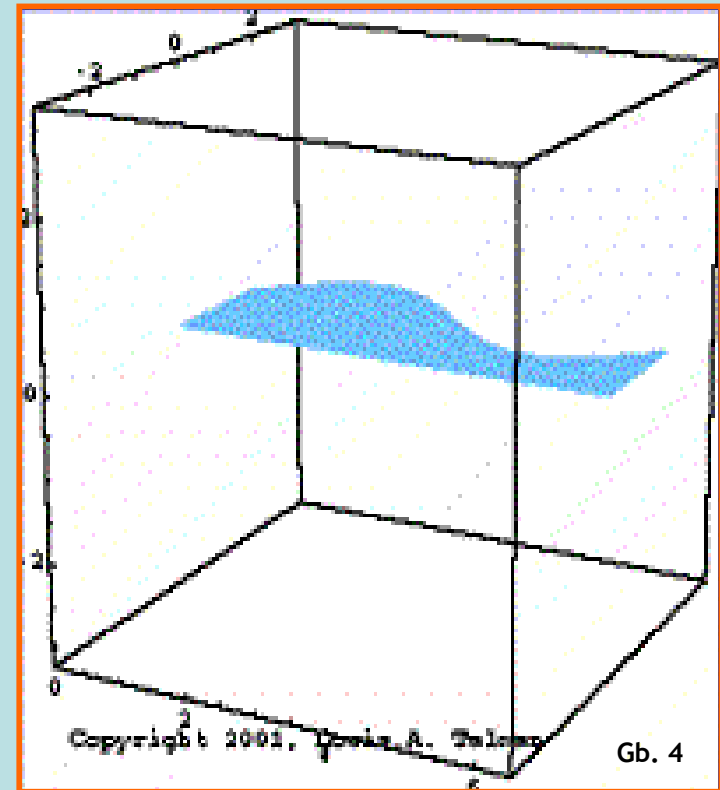
## INDIKATOR :

1. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat.
2. Menghitung volume benda putar.

### Volume benda putar

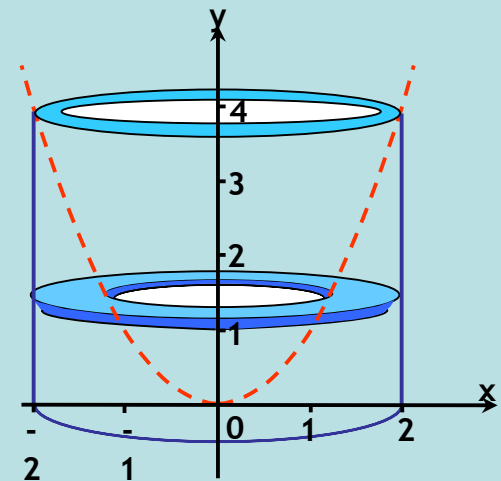
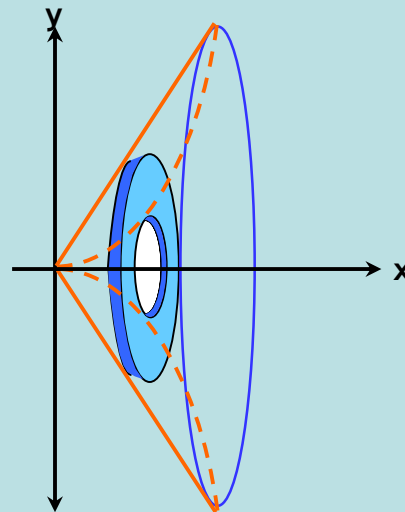
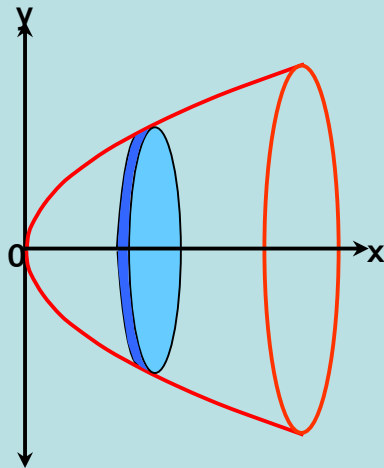


Suatu daerah jika di putar mengelilingi garis tertentu sejauh  $360^\circ$ , maka akan terbentuk suatu benda putar. Kegiatan pokok dalam menghitung volume benda putar dengan integral adalah: *partisi*, *aproksimasi*, *penjumlahan*, *pengambilan limit*, dan *menyatakan dalam integral tentu*.

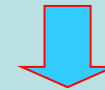
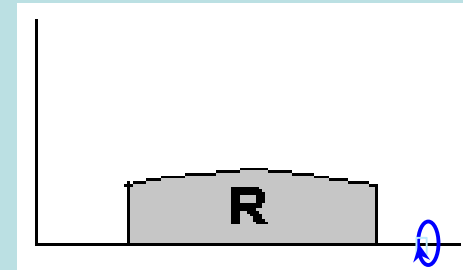


Dalam menentukan volume benda putar yang harus diperhatikan adalah bagaimana bentuk sebuah partisi jika diputar. Berdasarkan bentuk partisi tersebut, maka metode yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dibagi menjadi :

1. Metode cakram
2. Metode cincin
3. Metode kulit tabung



Metode cakram yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume mentimun dengan memotong-motongnya sehingga tiap potongan berbentuk cakram.



Bentuk cakram di samping dapat dianggap sebagai tabung dengan jari-jari  $r = f(x)$ , tinggi  $h = \Delta x$ . Sehingga volumenya dapat diaproksimasi sebagai  $\Delta V \approx \pi r^2 h$  atau  $\Delta V \approx \pi f(x)^2 \Delta x$ .

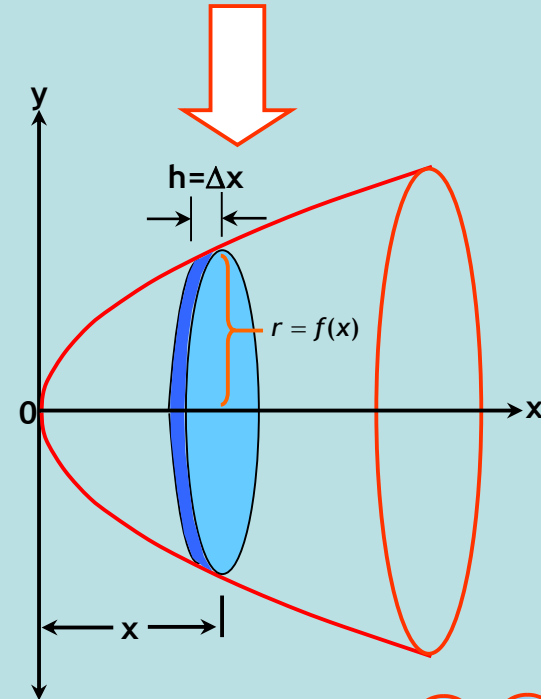
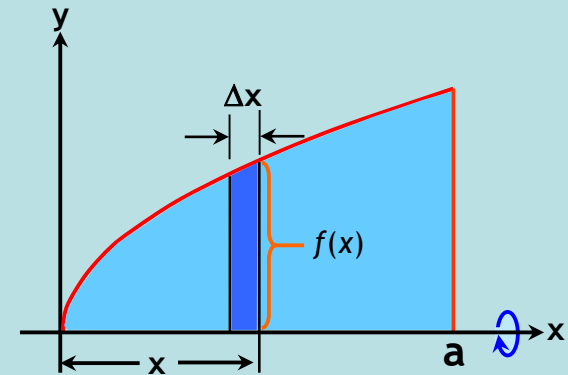
Dengan cara jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam integral diperoleh:

$$V \approx \sum \pi f(x)^2 \Delta x$$

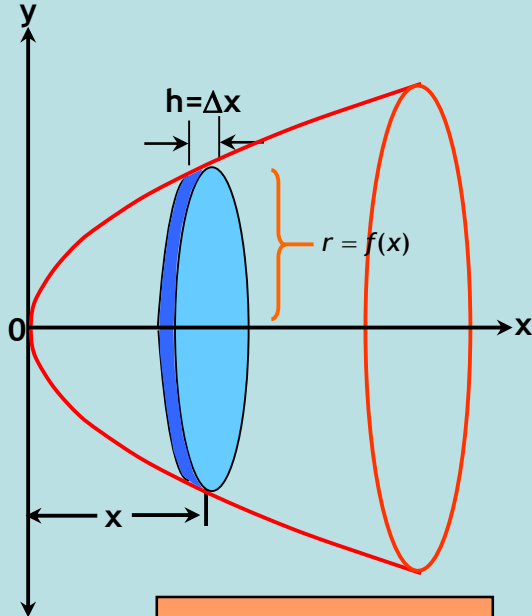
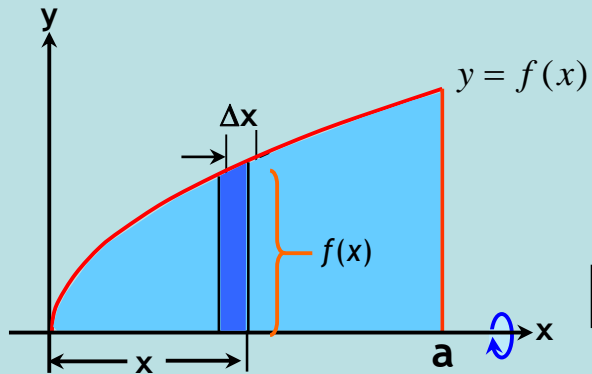
$$V = \lim \sum \pi f(x)^2 \Delta x$$

$$V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx$$

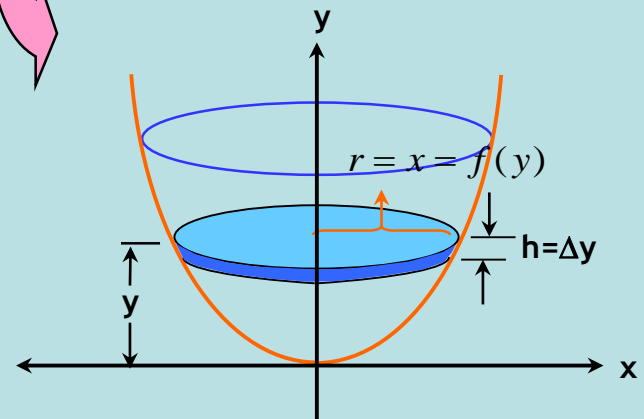
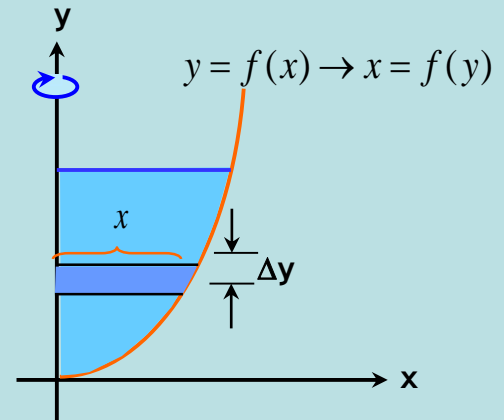
$$V = \pi \int_0^a y^2 dx$$







$$V = \pi \int_0^a y^2 . dx$$



$$V = \pi \int_0^a x^2 dy$$



## Contoh 6.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva  $y = x^2 + 1$ , sumbu x, sumbu y, garis  $x = 2$  diputar mengelilingi sumbu x sejauh  $360^\circ$ .

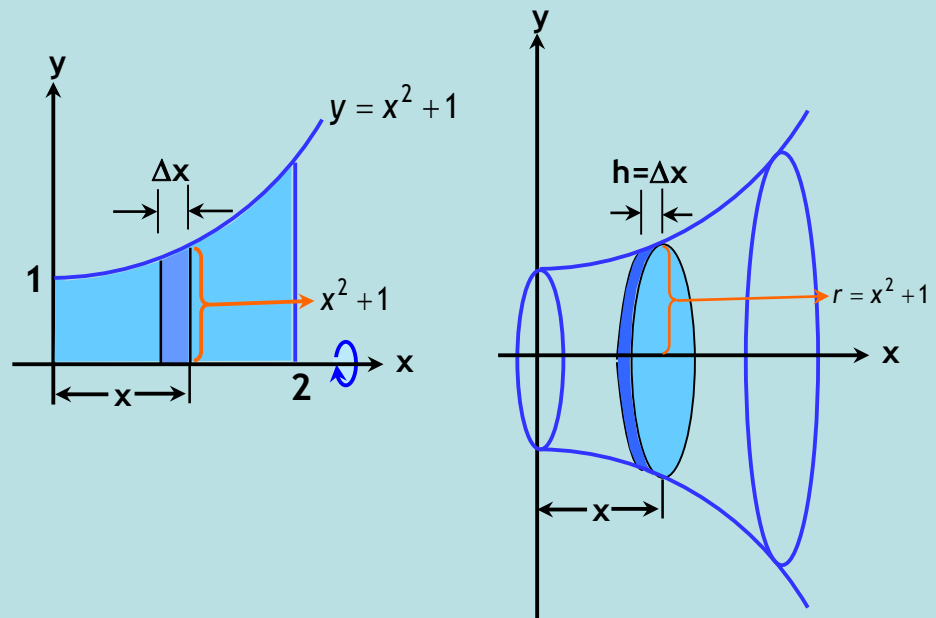
## Jawab

## Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buat sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Nyatakan dalam bentuk integral.

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$$



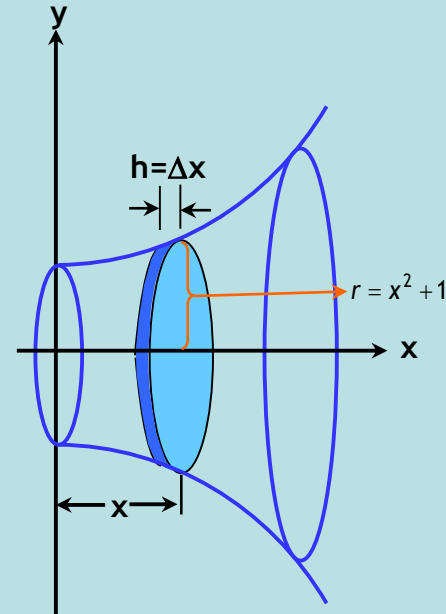
$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$V = \pi \left[ \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^2$$

$$V = \pi \left( \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 - 0 \right) = 13\frac{11}{15} \pi$$

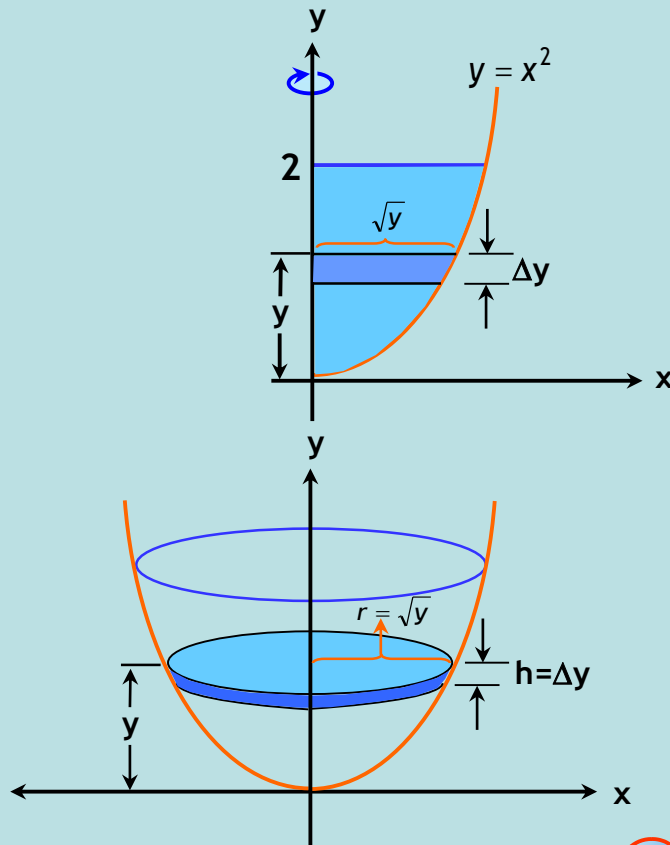


**Contoh 7.**

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva  $y = x^2$ , sumbu  $y$ , garis  $y = 2$  diputar mengelilingi sumbu  $y$  sejauh  $360^\circ$ .

**Jawab****Langkah penyelesaian:**

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.



$$V = \pi \int_0^2 x^2 dy$$

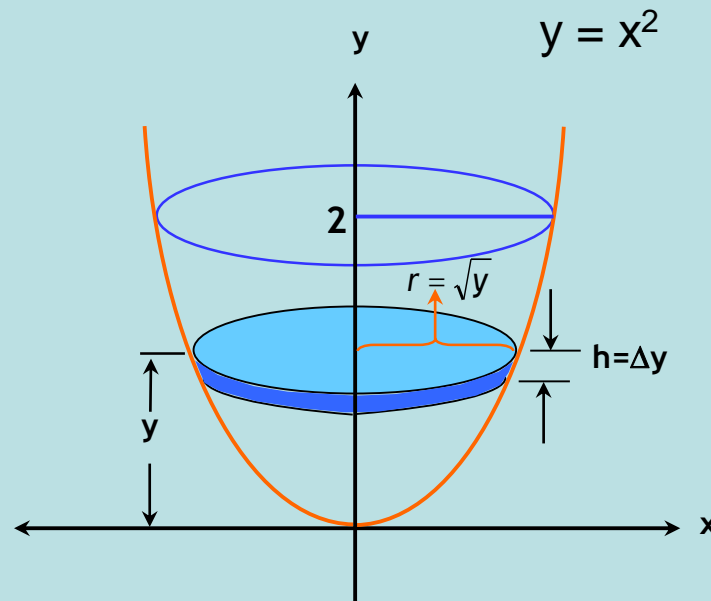
$$V = \pi \int_0^2 y dy$$

$$V = \pi \int_0^2 y dy$$

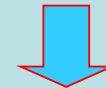
$$V = \pi \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left( \frac{1}{2} \times 4 - 0 \right)$$

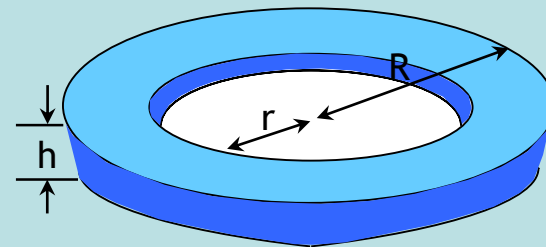
$$V = 2\pi$$



Metode cincin yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume bawang bombay dengan memotong-motongnya yang potongannya berbentuk cincin.



Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode cincin dilakukan dengan memanfaatkan rumus volume cincin seperti gambar di samping, yaitu  $V = \pi(R^2 - r^2)h$



$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

dan

$$V = \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2) dy$$

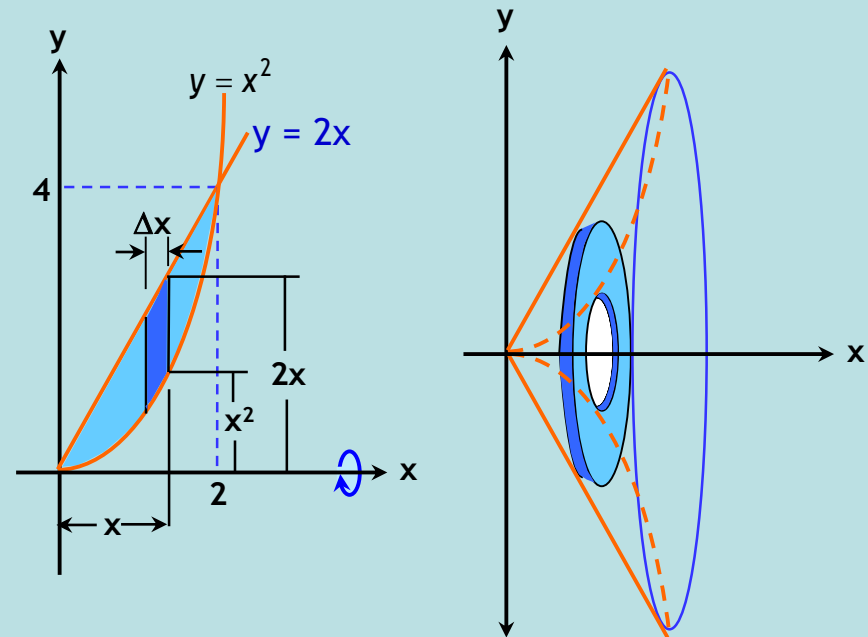
## Contoh 8.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva  $y = x^2$  dan garis  $y = 2x$  diputar mengelilingi sumbu  $x$  sejauh  $360^\circ$ .

## Jawab

## Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buat sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.





## Metode Cincin

## Volume Benda Putar

$$\Delta V \approx \pi(R^2 - r^2) h$$

$$\Delta V \approx \pi [(2x)^2 - (x^2)^2] \Delta x$$

$$V = \pi \int_0^2 (y_1^2 - y_2^2) dx$$

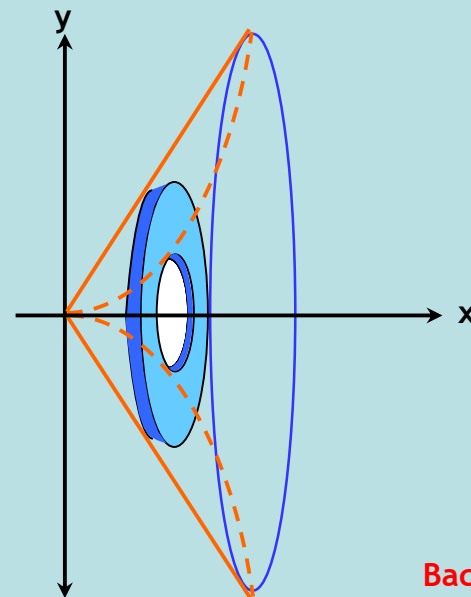
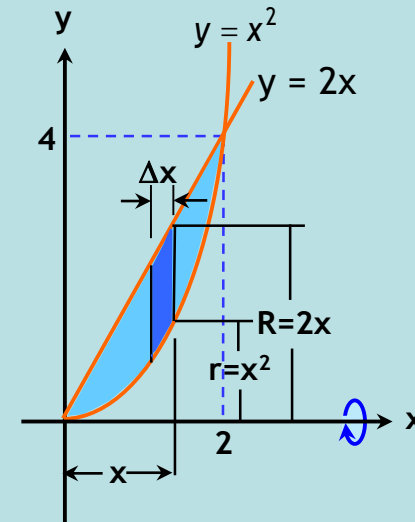
$$V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx$$

$$V = \pi \left[ \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right)$$

$$V = \pi \left( \frac{160 - 96}{15} \right)$$

$$V = \frac{64}{15} \pi$$



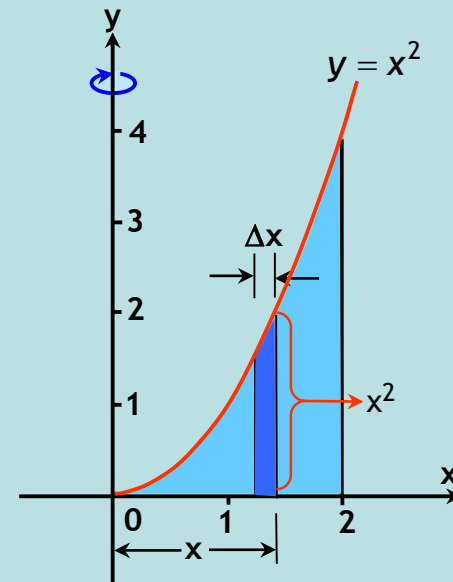
## Contoh 9.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva  $y = x^2$ , garis  $x = 2$ , dan sumbu  $x$  diputar mengelilingi sumbu  $y$  sejauh  $360^\circ$ .

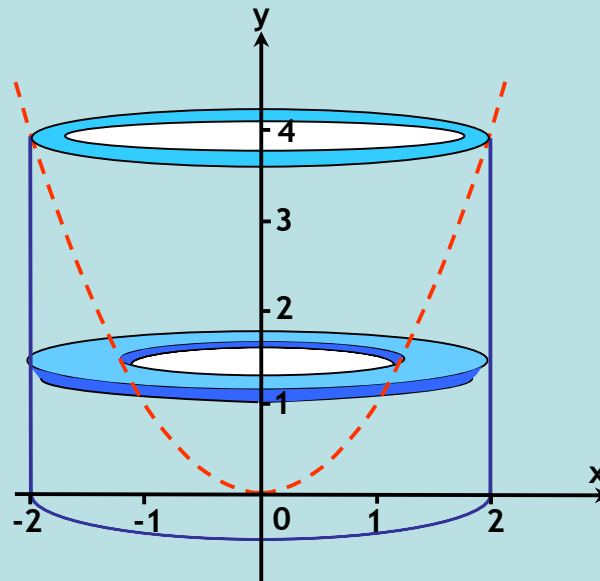
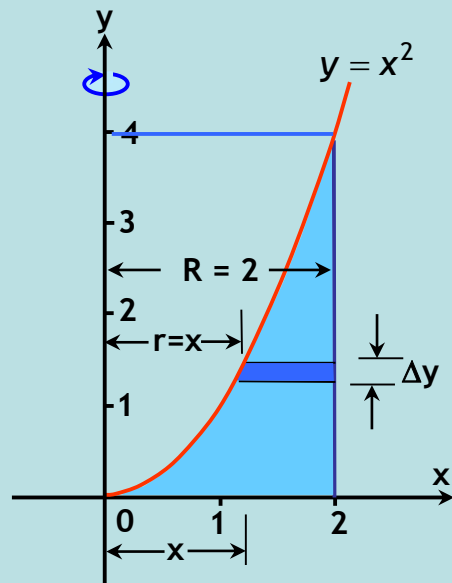
## Jawab

## Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi.
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.



Jika daerah pada contoh ke-9 tersebut dipartisi secara horisontal dan sebuah partisi diputar mengelilingi sumbu y, maka partisi tersebut membentuk cincin. Volume benda putar tersebut dihitung dengan metode cincin adalah sebagai berikut.



$$V = \pi \int_0^4 (x_1^2 - x_2^2) dy$$

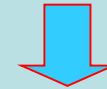
$$V = \pi \int_0^4 (4 - y) dy$$

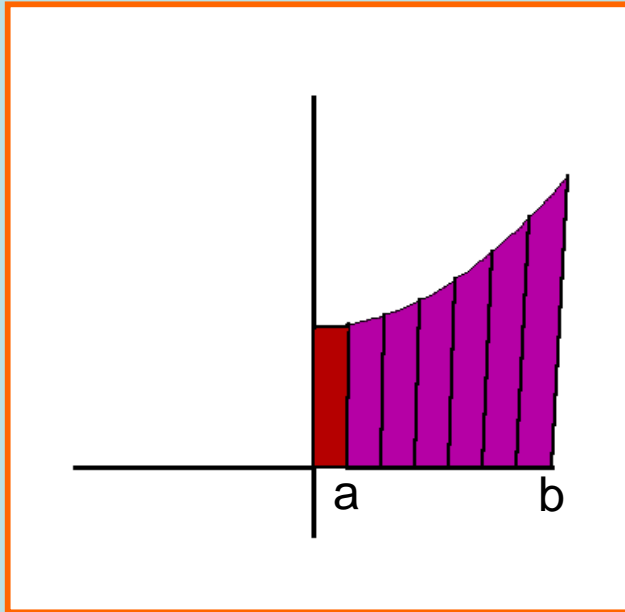
$$V = \pi \left[ 4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^4$$

$$V = (16 - 8)\pi$$

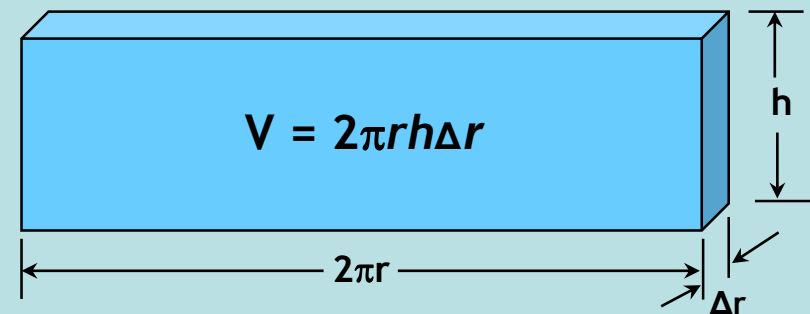
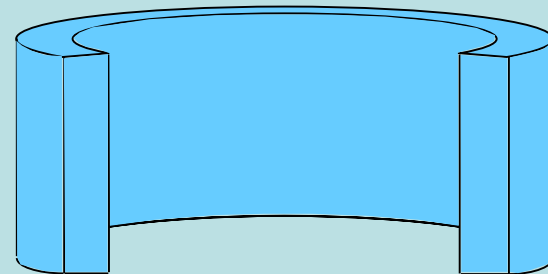
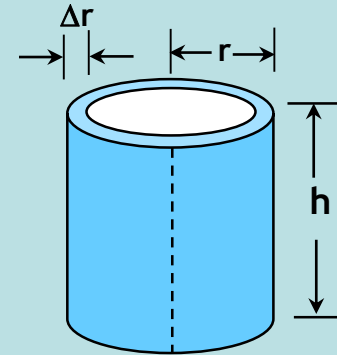
$$V = 8\pi$$

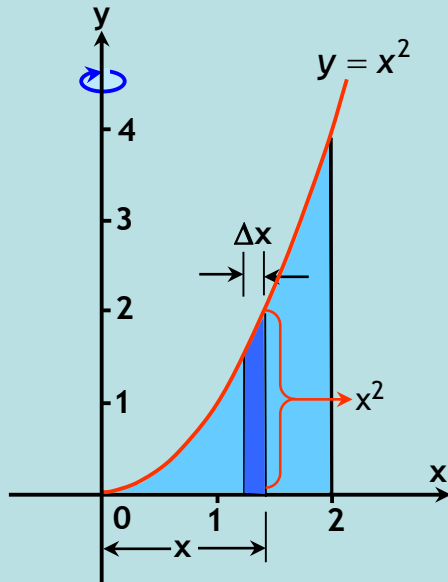
Metode kulit tabung yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume roti pada gambar disamping.





$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot y \cdot dx$$



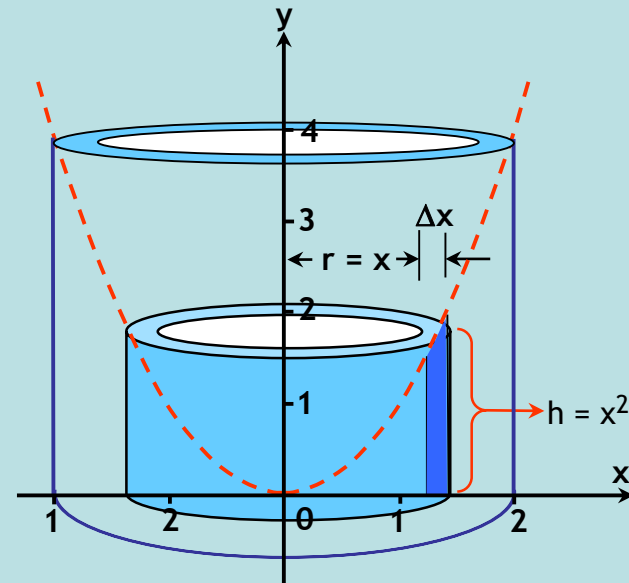


$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta x$$

$$\Delta V \approx 2\pi(x)(x^2)\Delta x$$

$$V \approx \sum 2\pi x^3 \Delta x$$

$$V = \lim \sum 2\pi x^3 \Delta x$$



$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot y \cdot dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 dx$$

$$V = 2\pi \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2$$

$$V = 8\pi$$