Diferensial fungsi sederhana

Materi Yang Dipelajari

- Kuosien Diferensi dan Derivatif
- Kaidah- Kaidah Diferensiasi
- Hakikat Derivatif dan Diferensial
- Derivatif dari Derivatif
- Hubungan antara Fungsi dan Derivatifnya
  - Fungsi menaik dan fungsi menurun
  - Titik ekstrim fungsi parabolik
  - Titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik

Kuosien Diferensi dan Derivatif

- y = f(x) dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δx
- Maka :

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \longrightarrow (1)$$

- Δ x adalah tambahan x, sedangkan Δ y adalah tambahan y akibat adanya tambahan x. Jadi Δy timbul karena adanya Δx.
- Apabila pada persamaan (1) ruas kiri dan ruas kanan sama-sama dibagi Δx, maka diperoleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Bentuk $\Delta y / \Delta x$ inilah yang disebut sebagai hasil bagi perbedaan atau kuosien diferensi (difference quotient), yang mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap perubahan variabel bebas x
- Proses penurunan fungsi disebut juga proses diferensiasi → merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensi (Δx sangat kecil)
- Hasil proses diferensiasi dinamakan turunan atau derivatif (*derivative*).

Jika *y = f(x)*

Maka kuosien diferensinya :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

penotasian

- Cara penotasian dari turunan suatu fungsi dapat dilakukan dengan beberapa macam :

Paling lazim digunakan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$$

Δx sangat kecil maka = Δy / Δx

Kuosien diferensi *Δy/ Δx* →slope / lereng dari garis kurva *y = f(x)*

Kaidah-kaidah diferensiasi

1. Diferensiasi konstanta

   Jika $y = k$, dimana k adalah konstanta, maka $dy/dx = 0$

   contoh : $y = 5 \rightarrow dy/dx = 0$

2. Diferensiasi fungsi pangkat

   Jika $y = x^n$, dimana n adalah konstanta, maka $dy/dx = nx^{n-1}$

   contoh : $y=x^3 \rightarrow dy/dx=3x^{3-1}=3x^2$

3. Diferensiasi perkalian konstanta dengan fungsi

Jika *y* = *kv*, dimana *v* = *h(x)*,

→ *dy/dx* = *k dv/dx*

contoh : $y = 5x^3$ → $dy/dx = 5(3x^2) = 15x^2$

4. Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi

jika *y = k/v, dimana v=h(x),* maka :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k\,dv/dx}{v^2}$$

$$contoh : y = \frac{5}{x^3}, \frac{dy}{dx} = -\frac{5(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{15x^2}{x^6}$$

5. Diferensiasi penjumlahan (pengurangan) fungsi

jika $y = u \pm v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

maka $dy/dx = du/dx \pm dv/dx$

contoh : $y = 4x^2 + x^3 \rightarrow u = 4x^2 \quad du/dx = 8x$

$\rightarrow v = x^3 \quad dv/dx = 3x^2$

$dy/dx = du/dx + dv/dx = 8x + 3x^2$

6. Diferensiasi perkalian fungsi

Jika $y = uv$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

$$maka \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$contoh : y = (4x^2)(x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = (4x^2)(3x^2) + (x^3)(8x) = 12x^4 + 8x^4 = 20x^4$$

7. Diferensiasi pembagian fungsi

Jika *y = u/v. dimana u = g(x) dan v = h(x)*

$$maka \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$contoh: y = \frac{4x^2}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{(x^3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$\frac{8x^4 - 12x^4}{x^6} = \frac{-4}{x^2} = -4x^{-2}$$

8. Diferensiasi Fungsi komposit

Jika *y=f(u)* sedangkan *u=g(x)*, dengan bentuk lain *y=f{g(x)}*, maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$contoh: y = (4x^3 + 5)^2 \Rightarrow misal: u = 4x^3 + 5 \Rightarrow y = u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 12x^2, \frac{dy}{du} = 2u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx} = 2u(12x^2) = 2(4x^3 + 5)(12x^2) = 96x^5 + 120x^2$$

9. Diferensiasi fungsi berpangkat

Jika $y=u^n$, dimana $u=g(x)$ dan n adalah konstanta, maka $dy/dx = nu^{n-1} .(du/dx)$

Contoh :

$$y=(4x^3+5)^2, \Rightarrow misal: u=4x^3+5 \rightarrow \frac{du}{dx}=12x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=nu^{n-1} \bullet \frac{du}{dx}=2(4x^3+5)(12x^2)=96x^5+120x^2$$

10. Diferensiasi fungsi logaritmik

Jika y = ${}^{a}\log_{x}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$contoh: y = {}^{5}\log 2, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{2 \ln 5}$$

11. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik

Jika $y={}^{a}\log u$, dimana $u=g(x)$,
maka :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{{}^{a}\log e}{u}\bullet\frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh}: y=\log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

$$\text{misalkan}: u=\frac{(x-3)}{(x+2)}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{{}^{a}\log e}{u}\bullet\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{\log e}{\left(\frac{x-3}{x+2}\right)}\bullet\frac{5}{(x+2)^2}=\frac{5\log e}{(x-3)(x+2)}=\frac{5\log e}{(x^2-x-6)}$$

12. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-berpangkat

Jika y = (^{a}logu)^n, dimana u = g(x) dan n adalah konstanta, maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{{}^a\log e}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh : } y = (\log 5x^2)^3$$

$$\text{misalkan} \quad u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\log 5x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5x^2}\right)(10x)$$

$$= \frac{30x(\log 5x^2)^2 \log e}{5x^2} = \frac{6}{x}(\log 5x^2)^2 \log e$$

13. Diferensiasi fungsi logaritmik-Napier

Jika y = ln x, maka dy/dx = 1/x

Contoh : y = ln 5, dy/dx = 1/x = 1/5

14. Diferensiasi fungsi Komposit-Logaritmik-Napier

Jika y = ln u, dimana u = g(x), maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh} : y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

$$\text{misalkan} \ : u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx} = \frac{\cancel{(x+2)}}{(x-3)} \bullet \frac{5}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{5}{(x^2 - x - 6)}$$

15. Diferensiasi fungsi Komposit-Logaritmik-Napier-berpangkat

Jika y = (ln u)^n, dimana u = g(x) dan n : konstanta

Maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh : } y = (\ln 5x^2)^3$$

$$\text{misalkan} \quad u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5x^2)^2 \left(\frac{1}{5x^2} \right)(10x) = \frac{6}{x}(\ln 5x^2)^2$$

16. Diferensiasi fungsi eksponensial

Jika $y = a^x$, dimana a : konstanta, maka :$dy/dx = a^x \ln a$

Contoh : y = 5^x,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a = 5^x \ln 5$$

$$\text{Dalam hal } y = e^x, \text{maka } \frac{dy}{dx} = e^x \text{ juga,}$$

$$\text{sebab } \ln e = 1$$

17. Diferensasi fungsi komposit - eksponensial

Jika y = a^u dimana u = g(x), maka :

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\text{Contoh : } y = 9^{3x^2-4} \quad \text{misalkan } u = 3x^2 - 4 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx} = 9^{3x^2-4}(\ln 9)(6x) = (6x)9^{3x^2-4} \ln 9$$

$$\text{Kasus Khusus : dalam hal } y = e^u \text{, maka } \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

18. Diferensiasi fungsi kompleks

Jika y = u^v, dimana u =g(x) dan v =h(x)

Maka :

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \bullet \frac{du}{dx} + u^v \bullet \ln u \bullet \frac{dv}{dx}$$

$$\text{contoh} : y = 4x^{x^3}, \text{misalkan} \; : u = 4x \rightarrow du/dx = 4$$

$$v = x^3 \rightarrow dv/dx = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \bullet \frac{du}{dx} + u^v \bullet \ln u \bullet \frac{dv}{dx}$$

$$= (x^3)4x^{x^3-1}(4) + 4x^{x^3} \ln 4x(3x^2)$$

$$= 16x^{x^3+2} + 12x^{x^3+2} \ln 4x$$

$$= 4x^{x^{3+2}}(4 + 3\ln 4x)$$

19. Diferensiasi fungsi balikan

Jika y = f(x) dan x = g(y) adalah fungsi-fungsi yang saling berbalikan (*inverse functions*)

Maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/dx}$$

$$contoh:$$

$$x = 5y + 0{,}5y^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 + 2y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{(5 + 2y^3)}$$

20. Diferensiasi Implisit

Jika f (x, y)=0 merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan), dy/dx dapat diperoleh dengan mendiferensiasikan suku demi suku, dengan menganggap y sebagai fungsi dari x

$$contoh:$$

$$4xy^2 - x^2 + 2y = 0, \text{tentukan } \frac{dy}{dx}$$

$$8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8xy+2)\frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-4y^2}{8xy+2} = \frac{x-2y^2}{4xy+1}$$