小作业 1

1，随意构造一 6×4 的数值矩阵$\boldsymbol{A}$ ，对其进行奇异值分解（可以手算，也以可采用任意计算软件），给出其左奇异矩阵$\boldsymbol{U}$ 、右奇异矩阵$\boldsymbol{V}$以及对角矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$；分别取前 1 个、前 2 个奇异值来近似矩阵$\boldsymbol{A}$ 。

将矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$分解成三个矩阵的乘积：

$$A = U\Sigma V^T$$

奇异值矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$的值按从左上到右下降序排列的，经常出现前 10%的值占全部奇异值之和的 99%，这样一来，就可以用这 10%的奇异值近似替代整个矩阵：

$$A_{m\times n} \approx U_{m\times k}\Sigma_{k\times k}V_{k\times n}$$

2, 假设某疾病的感染概率为 0.02%，现在有针对该疾病的检测试剂。经过统计，对于没有患病的群体进行试剂测试，99.2%的测试结果呈阴性；对于患病的群体进行测试，99.5%的人检测结果呈阳性。现在随机选一个人，他的检测结果是阳性，那这个人感染了该疾病的概率是多少？如果该疾病的感染概率为 2 %，检测结果为阳性的感染概率是多少？如果该疾病的感染概率为 2 0 %，检测结果为阳性的感染概率是多少？请谈谈对不同感染概率计算结果的看法。

已知：$P(\text{病}) = 0.0002$，$P(\text{阴}|\text{无病}) = 0.992$，$P(\text{阳}|\text{病}) = 0.995$。求$P(\text{病}|\text{阳})$

由贝叶斯公式：

$$P(\text{病}|\text{阳}) = \frac{P(\text{病})P(\text{阳}|\text{病})}{P(\text{阳})} = \frac{P(\text{病})P(\text{阳}|\text{病})}{P(\text{病})P(\text{阳}|\text{病}) + P(\text{无病})P(\text{阳}|\text{无病})}$$

$$= \frac{0.0002 \times 0.995}{0.0002 \times 0.995 + (1 - 0.0002)(1 - 0.992)} \approx 2.43\%$$

该疾病的感染概率为 2 %时，$P(\text{病}) = 0.02$

$$P(\text{病}|\text{阳}) = \frac{0.02\times 0.995}{0.02\times 0.995 + (1 - 0.02)(1 - 0.992)} \approx 71.74\%$$

该疾病的感染概率为 2 0%时，$P(\text{病}) = 0.2$

$$P(\text{病}|\text{阳}) = \frac{0.2\times 0.995}{0.2\times 0.995 + (1 - 0.2)(1 - 0.992)} \approx 96.88\%$$

讨论：定义试剂准确率。对没病群体检测呈阴性的概率为 99.2%，则试剂错误率为0.8%。感染概率与试剂错误率相比，当感染概率（0.02%）远低于试剂错误率（0.8%）时，检测结果为阳性的感染概率会比较低（2.43%）；当感染概率（20%）远高于试剂错误率（0.8%）时，阳性的感染概率就会很高（96.88%）。

(开放答案，言之有理即可)

3，对某次全国英语考试进行抽样分析。样本大小为 100， 发现其平均分为 85 分，样本标准差为 12，求考试成绩的 90%置信区间。

在总体标准差未知的情况下求均值的 90%置信区间，可以认为考试成绩的均值近似服从 t 分布。

样本大小$n=100$，显著性水平 $\alpha = 0.10$，$\alpha/2 = 0.05$，自由度$= n-1 = 99$

查 t 分布表，知$t_{0.05}(99)=1.660$，由

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = 85 \pm 1.660 \times \frac{12}{\sqrt{100}} \approx 85 \pm 1.992$$

故，考试成绩平均分的 90%置信区间为：$83.008 \leq \mu \leq 86.992$

4，计算二元函数$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$在初始点$\boldsymbol{x}^{(0)}=(3,3)$处的函数值$f(\boldsymbol{x}^{(0)})$和梯度$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})$，以该处的**负梯度**$-\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})$作为前进方向，以$\lambda=0.1$ 作为步长，计算新的位置点$\boldsymbol{x}^{(1)}$、函数值$f(\boldsymbol{x}^{(1)})$和梯度$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)})$；再以$\boldsymbol{x}^{(1)}$处的**负梯度**$-\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)})$作为前进方向，以$\lambda=0.1$ 作为步长，计算新一步的位置点$\boldsymbol{x}^{(2)}$、函数值$f(\boldsymbol{x}^{(2)})$。对比$f(\boldsymbol{x}^{(2)})$和$f(\boldsymbol{x}^{(0)})$，计算函数值减小的百分比。

初始点$\boldsymbol{x}^{(0)}=(3,3)$

函数值$f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = f(3,3) = 3^2 + 2\times3\times3 + 3\times3^2 = 54$

梯度$\nabla f(x_1,x_2) = [\frac{f(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \frac{f(x_1,x_2)}{\partial x_2}] = [2x_1+2x_2, 2x_1+6x_2]$

故$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = [2\times3+2\times3\ ,\ 2\times3+6\times3] = [12,24]$

新的位置点：$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{d}^{(1)} = (3,3) + 0.1\times(-12,-24) = (1.8\ ,\ 0.6)$

函数值$f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = f(1.8,0.6) = 1.8^2 + 2\times1.8\times0.6 + 3\times0.6^2 = 6.48$

梯度$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = [2\times1.8+2\times0.6\ ,\ 2\times1.8+6\times0.6] = [4.8\ ,\ 7.2]$

新的位置点：$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda \boldsymbol{d}^{(2)} = (1.8,0.6) + 0.1\times(-4.8,-7.2)$

$$= (1.32\ ,\ -0.12)$$

函数值$f(\boldsymbol{x}^{(2)}) = f(1.32,-0.12) = 1.32^2 - 2\times0.12\times1.32 + 3\times0.12^2$

$$= 1.4688$$

$$\frac{f(\boldsymbol{x}^{(0)}) - f(\boldsymbol{x}^{(2)})}{f(\boldsymbol{x}^{(0)})} \times 100\% = \frac{54-1.4688}{54} \times 100\% \approx 97.28\%$$

故，函数值减小的百分比为 97.28%。