Veckouppgifter

Vecka 2

I vissa fall denna vecka kommer jag hänvisa till övningsuppgifter i boken.

1. Uppgift 2.1 från boken.
2. Alice och Bob kommunicerar över en binär kanal. Sannolikheten att kanalen flippar en bit är p. Om Alice skickar n bitar, vad är väntevärdet för antalet bitar som flippas?
3. Anta att $n = 7$ och $p = 0.05$ i förra uppgiften. Räkna ut sannolikheten för exakt 1 fel och för exakt 2 fel. Använd miniräknare.
4. Betrakta koden vi använde för att förebygga felskurar (bursts) av längd 3. Antag kodlängden är 10. Avgör om följande är kodord: 111 000 011 1 och 100 100 010 0.
5. Välj x så att $(x, 2, 4, 11)$ blir ett kodord enligt mod 37 metoden vi beskrev. Gör som Johan gjorde och anta vi multiplicerar x med 1, 2 med 2, osv.
6. I denna uppgift ska du räkna modulo 2. Beräkna
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
7. Vi definierar en linjär kod av längd 4 genom att ange den har checkmatrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Skriv upp alla kodorden för denna kod och ange hur många fel den kan rätta och hur många fel den kan upptäcka.
8. Alice och Bob använder Hammingkoden. Bob tar emot 0101010. Är det ett kodord? Om inte, vilket kodord ska han gissa Alice skickade? (Anta det inte sker mer än ett fel.)

9. Anta en linjär kod har checkmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Visa att om vi stryker sista raden får vi en ny matris som ändå definierar samma kod om vi använder den som checkmatris.

10. Vad blir egentligen kravet på kolonner i checkmatrisen om koden ska kunna rätta 2 fel?

Facit

1. 3 och 4

2. np

3. Sannolikheten för exakt 1 fel är $7 \cdot 0.05 \cdot 0.95^6 \approx 0.257$. Sannolikheten för exakt 2 fel är $21 \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^5 \approx 0.04$.

4. Första är kodord, andra inte.

5. $x = 14$

6. $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Kodorden är 0000 och 1111. Den kan rätta 1 fel och upptäcka 3 fel.

8. Det är ej ett kodord. Bob ska gissa på 0101110.

9. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ är ett kodord om och endast om

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

   Den sista ekvationen följer från de två första och är alltså onödig.

10. Kravet blir att allt detta ska vara sant

    - Ingen kolonn består av bara nollor
    - Ingen kolonn är lika med en annan kolonn
    - Ingen kolonn är lika med summan av två andra kolonner
    - Det finns inte fyra olika kolonner a, b, c, d sådana att $a + b = c + d$.