Veckouppgifter

Vecka 1

1. Anta vi kastar två vanliga tärningar. Den ena är röd och den andra är blå. Låt A vara händelsen att den röda tärningen visar 1 och låt B vara händelsen att summa av de båda tärningarna är 7. Är A och B oberoende händelser?

2. Anta vi kastar två vanliga tärningar. Den ena är röd och den andra är blå. Låt A vara händelsen att den röda tärningen visar 1 och låt B vara händelsen att summa av de båda tärningarna är 9. Är A och B oberoende händelser?

3. Anta att A är en händelse som är oberoende av sig själv. Vilka är de möjliga värdena av $P(A)$? (Det finns två.)

4. Låt A och B vara händelser i ett utfallsrum och anta att $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$ och $P(B|A) = 0.8$. Beräkna $P(A|B)$.

5. Låt A och B vara händelser i ett utfallsrum och anta att $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$ och $P(A \cap B) = 0.1$. Beräkna $P(A|B)$ och $P(B|A)$.

6. Vid ett visst tillfälle är 20% av befolkningen förkylda. Ett test för förkylning ger rätt resultat 95% av tiden för sjuka individer, och 80% av tiden för friska. Om en slumpmässigt utvald person testar positivt för förkylning, vad är sannolikheten att personen verkligen är förkyld?

7. Låt A och B vara händelser som är oberoende av varandra och har positiv sannolikhet. Visa att
$$P(A|B) = P(A).$$

8. Skriv talet i 378 i det binära talssystemet. (Inget vi pratade om på föreläsning, men något jag hoppas ni kommer ihåg.)

9. I ett exempel i avsnittet om väntevärde gav vi en kod för att koda symbolerna a, b, c, d.

   Avkoda följande sträng som vi fått från kodningen:

   010011101000.

10. Låt utfallsrummet vara $U = \{a, b, c\}$ och definiera $X(a) = -1$, $X(b) = 0$, $X(c) = 1$. Definiera också $Y(a) = -1$, $Y(b) = 0$ och $Y(c) = 2$. Anta att $P(\{a\}) = P(\{c\}) = \frac{1}{4}$ och $P(\{b\}) = \frac{1}{2}$. Beräkna $E(X)$, $E(Y)$ och $E(XY)$.

11. Anta att X är en stokastisk variabel och att $P(X = 0) = 0.5$, $P(X = 1) = 0.3$ och $P(X = 0.5) = 0.2$. Beräkna väntevärde, varians och standardavvikelse för X.

12. Johan har uppfunnit ett alternativ till variansen. Om X är en stokastisk variabel så tänker han sig definiera *spridningen* av X som $E(X - m)$, där m är väntevärdet av X. Förklara varför Johans idé är en dålig idé.

13. Ge ett exempel på två stokastiska variabler, X och Y, som båda har varians större än 0, men där $\mathrm{Var}(X + Y) = 0$.

14. (a) Vad är $\log_2(64)$?

    (b) Beräkna $\log_2(60)$ med miniräknare eller dator. Om miniräknaren inte har ett kommando för logaritmen i bas 2 så kan du använda att

    $$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

    (c) Plotta grafen av $x \cdot \log_2(x)$ för x-värden nära 0. Vad verkar $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log_2(x)$ vara? (Först måste du kanske be Johan förklara vad notationen betyder.)

Facit

1. De är oberoende.
2. De är inte oberoende.
3. 0 och 1
4. 0.4
5. $P(A|B) = 0.5$ och $P(B|A) = 0.2$.
6. $\frac{19}{35} \approx 0.54$.
7. Beviset finns i anteckningarna om sannolikhetsteori.
8. 101111010
9. acddab
10. $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{1}{4}$ och $E(XY) = \frac{3}{4}$.
11. $E(X) = 0.4$, $\mathrm{Var}(X) = 0.19$ och standardavvikelsen är $\sqrt{0.19}$.

12. Spridningen blir 0 för alla stokastiska variabler. Säger alltså ingenting om X.
13. Detaljerna kan göras på olika vis, men det ska gälla att $Y = -X$.
14.
    - 6
    - 5.90689...
    - Som vi nämnde på föreläsning går det mot 0.