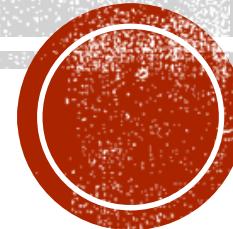


YÜKSEK GERİLİM TEKNİĞİ

Prof. Dr. Özcan KALENDERLİ



**Statik Elektrik Alanı - Sayısal Yöntemler
YÜK BENZETİM YÖNTEMİ**

YÜKSEK GERİLİM TEKNİĞİ - 2022 BAHAR YARIYILI

Dersi veren öğretim üyesi:
Prof. Dr. Özcan Kalenderli



2021-2022 Bahar Yarıyılı

CRN 22843	ELK 312	Yüksek Gerilim Tekniği	Özcan Kalenderli	Perşembe 08:30/11:30	Öğr. Sayısı 45
--------------	------------	------------------------	------------------	-------------------------	-------------------

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Bir fiziksel büyüklüğün bir bölge içindeki dağılımını incelemek için, dağılımı matematiksel olarak modelleyen, diferansiyel veya integral denklemlerden yararlanılır.

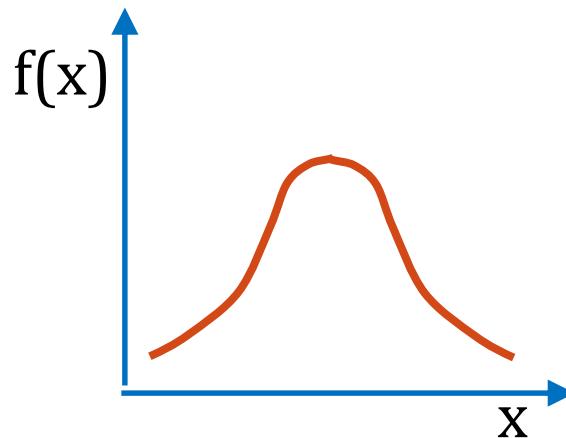


A black and white portrait of James Clark Maxwell, a man with a full, bushy beard and receding hairline, wearing a dark suit and white shirt. Below the portrait is his signature.

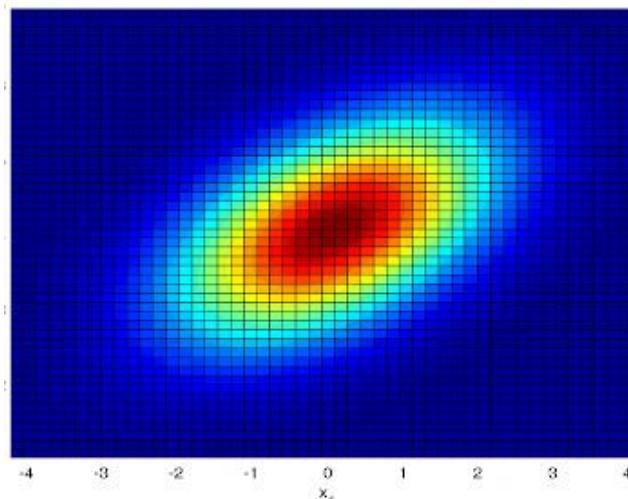
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\Psi = \iiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_v dV \quad (\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho)$$
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \left(\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$
$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{B} = 0)$$
$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

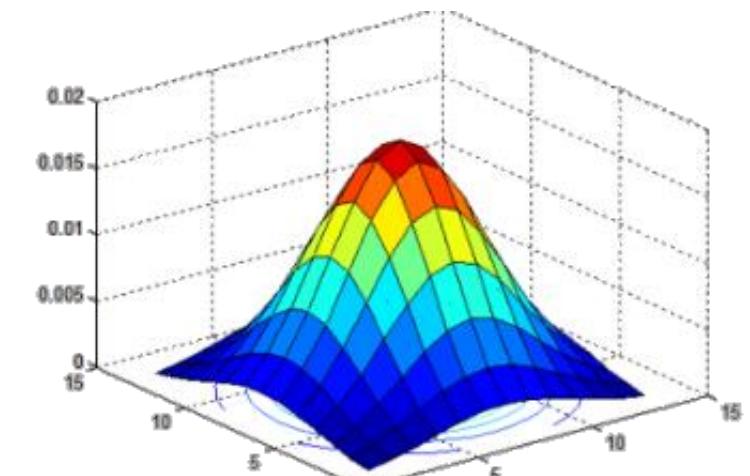
Bu denklemlerin çözümü, fiziksel büyülüğün ve ondan türetilen büyükliklerin bölge içindeki bir noktadaki değerini hesaplamada ve dağılımını belirlemede kullanılır.



Bir boyutlu dağılım, $f(x)$



İki boyutlu dağılım, $f(x, y)$



Üç boyutlu dağılım, $f(x, y, z)$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Bu denklemleri çözmek için analitik ve sayısal yöntemlerden yararlanılır.

Analitik Yöntemler	Sayısal Yöntemler
<ul style="list-style-type: none">• Diferansiyel denklem çözümü• Değişkenlere Ayırma Yöntemi• Koordinat dönüşümü• Kompleks dönüşüm• Schwarz-Christoffel dönüşümü• Konform dönüşüm ...	<ul style="list-style-type: none">• Sonlu Farklar Yöntemi (SFY)• Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY)• Sınır Elemanları Yöntemi (SINEY)• Yük Benzetim Yöntemi (YBY)• Moment Yöntemi (MY) (MoM)• Monte Carlo Yöntemi (MCY) ...

Integral denklemleri çözmek için kullanılabilecek en basit sayısal yöntemlerden birisi **Yük Benzetim Yöntemi**'dir.

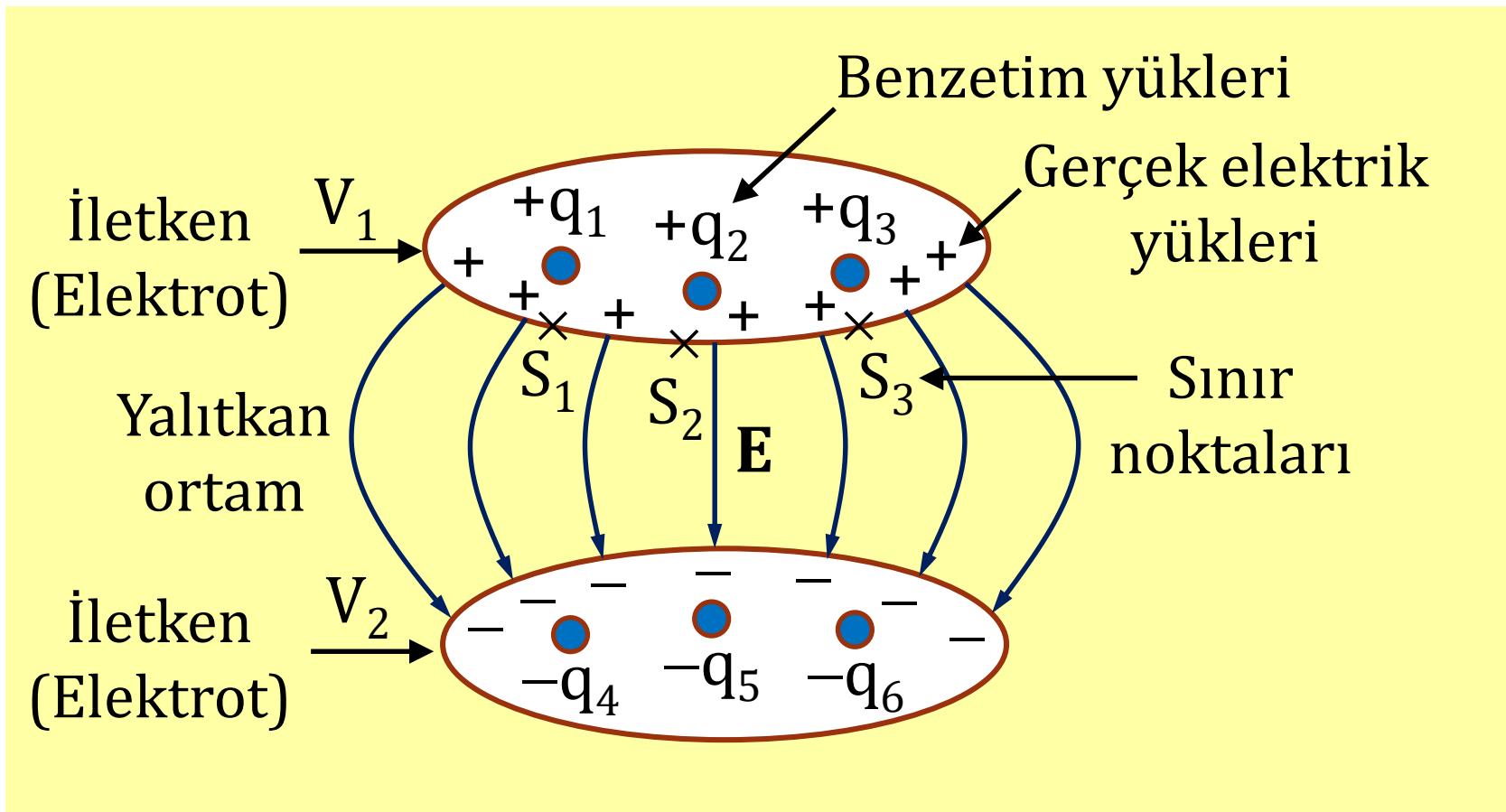
YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Yük Benzetim Yöntemi (YBY), ilkesi, gerçek elektrik yüklerinin yarattığı elektrik alan dağılımının, adına **benzetim yükleri** denilen ayrık yüklerle benzettimesidir.

Benzetim yükleri, elektrik alanı benzetilmeye çalışılan bölgenin dışına (örneğin elektrotların içine) yerleştirilir.

Benzetim için problemin geometrisine uygun olarak, noktalı, çizgisel, halkasal yükler gibi bilinen yük türleri kullanılır.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)



YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

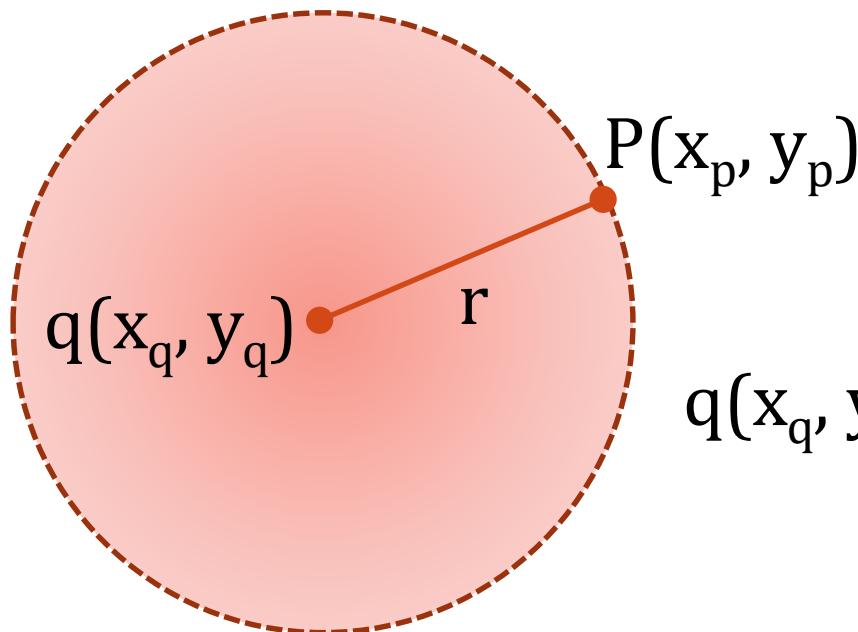
Yük Benzetim Yöntemi'nin doğruluğu (başarımı) dört özelliğe bağlıdır:

- 1) **Benzetimde kullanılan yüklerin türleri** (tipleri)
(noktasal, sonsuz çizgisel, sonlu çizgisel, halkasal yükler, ...)
(Problemin geometrisine göre seçilir. Küre için noktasal, silindir için çizgisel yüklerin kullanımı uygundur),
- 2) **Benzetimde kullanılan yük sayısı,**
- 3) **Benzetim yüklerinin yerleri** (konumları),
- 4) **Sınır noktası sayısı ve sınır noktalarının yerleri** (konumları)
(S_1, S_2, S_3, \dots Sınır noktalarıdır).

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Noktasal yük

Bir noktasal yükün kendinden r uzaklığında yarattığı potansiyel:



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} = p \cdot q$$

$$p = \frac{1}{4\pi\epsilon r}$$
 : potansiyel katsayısı

$q(x_q, y_q)$ ile $P(x_p, y_p)$ noktaları arasındaki uzaklık:

$$r = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

Bir noktasal yükün yarattığı eşpotansiyel yüzey, küredir.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

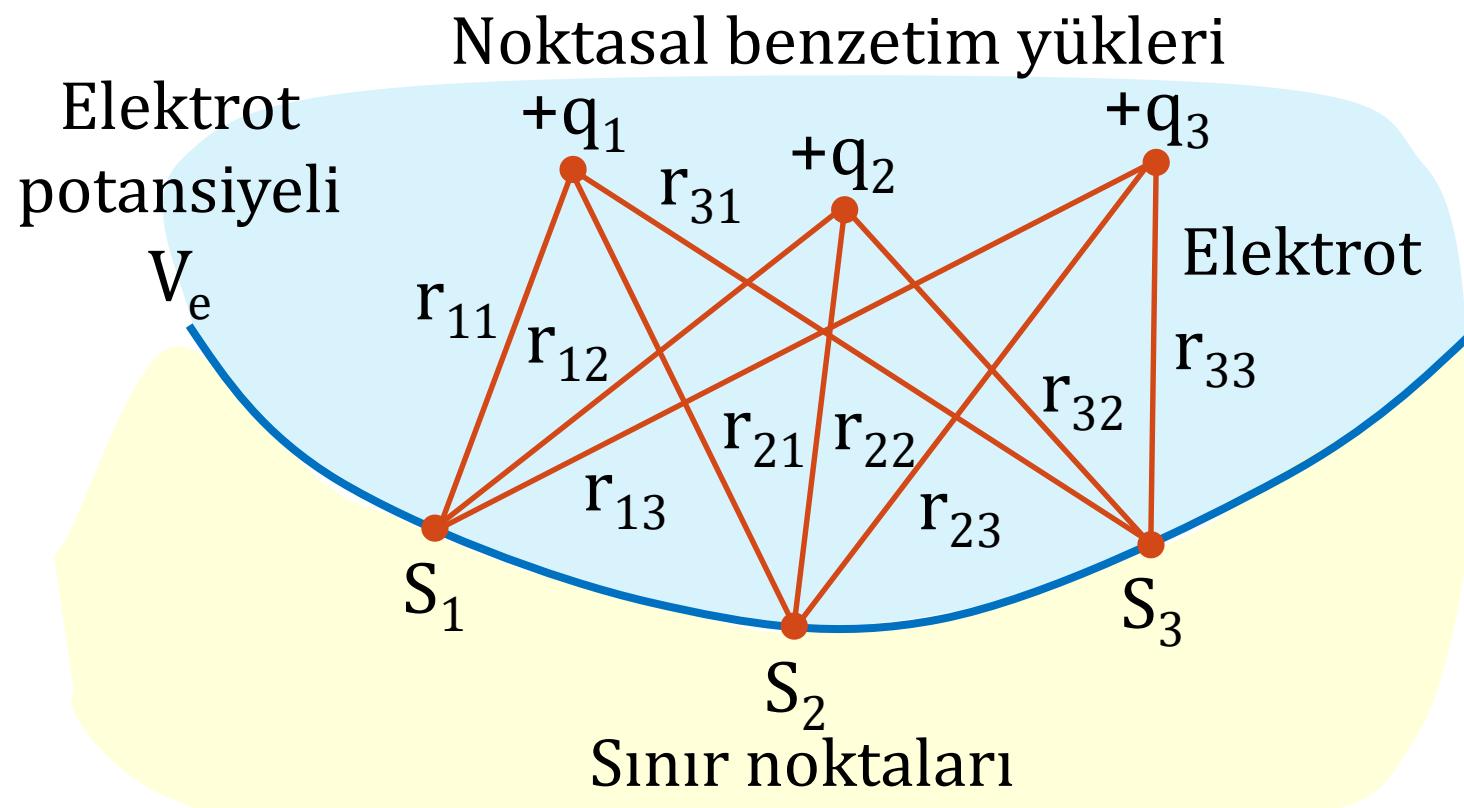
Benzetim yüklerinin değerleri, sınır noktaları için yazılan potansiyel bağıntılarından bulunur.

Potansiyel bağıntısı, **toplama (süperpozisyon)** ilkesine göre yazılır.

Toplama (süperpozisyon) ilkesine göre bir noktanın potansiyeli, her bir yükün o noktada yarattıkları potansiyellerin toplamına eşittir.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Örneğin 3 noktasal yükle yapılan bir benzetimde



S_1 sınır noktası için

$$V_{S1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{11}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{13}}$$

$$V_{S1} = p_{11} \cdot q_1 + p_{12} \cdot q_2 + p_{13} \cdot q_3$$

S_2 sınır noktası için

$$V_{S2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{21}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{22}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{23}}$$

$$V_{S2} = p_{21} \cdot q_1 + p_{22} \cdot q_2 + p_{23} \cdot q_3$$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

S₃ sınır noktası için

$$V_{S2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{21}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{22}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{23}}$$

$$V_{S2} = p_{21} \cdot q_1 + p_{22} \cdot q_2 + p_{23} \cdot q_3$$

Sınır noktaları, elektrot üzerinde alınmış noktalardır. Sınır noktası potansiyelleri elektrot potansiyeline eşittir.

yazılabilir. Bu denklemler matris biçiminde写字楼 ve çözülürse

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1} \\ V_{S2} \\ V_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_e \\ V_e \\ V_e \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

benzetim yük değerleri bulunur.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Benzetim yük değerleri bulununca, bölge içindeki herhangi bir P noktasındaki potansiyel

$$V_P = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{P1}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{P2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{P3}}$$

ile hesaplanabilir. Burada yüklerin $P(x_p, y_p)$ noktasına uzaklıkları

$$r_{pqi} = \sqrt{(x_p - x_{qi})^2 + (y_p - y_{qi})^2}$$

$i = 1, 2, 3$ (yük sayısı) alarak bulunur.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Genelleme yapılrsa

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} q_j$$

$$[p]_{n,n} \cdot [q]_{n,1} = [V]_{n,1}$$

Potansiyel
katsayıları
matrisi

Benzetim
yükleri
matrisi

Bilinen
sınır potansiyelleri
matrisi

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Noktasal yükün elektrik alanı

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} = p \cdot q$$

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

bağıntısıyla veya yük benzetim yöntemine uygun olarak

$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d(p \cdot q)}{dr} = -\frac{dp}{dr} \cdot q = f \cdot q = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

bağıntısıyla hesaplanır. Burada f , **elektrik alan katsayısı** olarak adlandırılır:

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} : \text{Alan katsayısı}$$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Benzetimin doğruluğu, potansiyeli bilinen veya elektrot üzerindeki herhangi bir K noktasındaki potansiyel hesaplanarak kontrol edilir.

$$V_K = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{K1}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{K2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{K3}}$$

Elektrot üzerinde alınacak bir **kontrol noktası** için hesaplanacak potansiyel, yaklaşık elektrot potansiyeline eşit olmalıdır. V_e ile V_k arasındaki fark, benzetimin doğruluğunu gösterir ve $|V_e - V_k| \leq \epsilon$ farkının sıfır veya sıfıra yakın olması istenir.

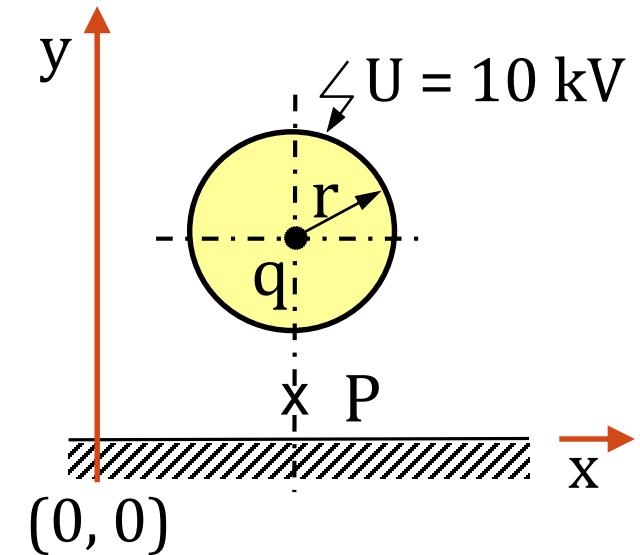
YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)



Örnek 1:

Merkezi (5 cm, 5 cm) noktasında bulunan $r = 2$ cm yarıçaplı bir küre elektrodun elektrik alanı, merkezine yerleştirilmiş bir noktasal yük ile benzetilmektedir.

Küre elektroda toprağa göre $U = 10$ kV uygulandığına göre P (5 cm, 1 cm) noktasındaki potansiyeli ve elektrik alan şiddetini ***Yük Benzetim Yöntemi*** ile hesaplayınız.



YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

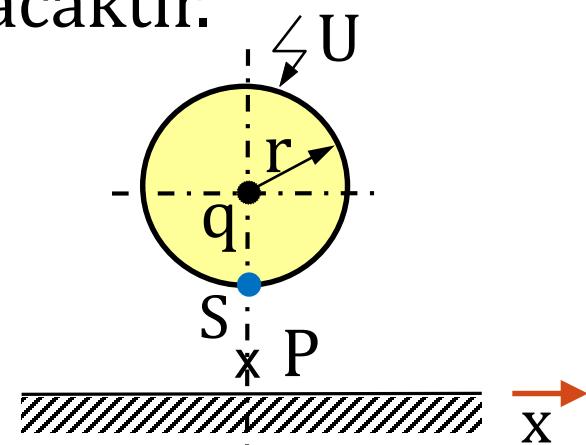
Çözüm 1:

Sınır noktası olarak $S(5 \text{ cm}; 3 \text{ cm})$ alarak çözüm yapılacaktır.

Noktasal yükün sınır noktasına uzaklığı $r = 2 \text{ cm}$ olur.

S sınır noktasındaki potansiyel:

$$V_s = \frac{q}{4\pi\epsilon \cdot r} = \frac{q}{4\pi\epsilon \cdot 2} = 10000 \text{ Volt}$$



olacaktır. Bu denklemden noktasal benzetim yükünün değeri:

$$q = 4\pi\epsilon \cdot 20000 \text{ Coulomb}$$

bulunur.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Bulunan yük değeri ile P noktasındaki potansiyel hesaplanabilir.
Bunun için yükün P noktasına olan uzaklığı bilinmelidir.
q(5 cm; 5 cm) yükünün P (5 cm, 1 cm) noktasına uzaklığını:

$$r_{qP} = \sqrt{(x_q - x_P)^2 + (y_q - y_P)^2} = \sqrt{(5 - 5)^2 + (5 - 1)^2} = 4\text{cm}$$

olur. P noktasındaki potansiyel:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon \cdot r_{qP}} = \frac{4\pi\epsilon \cdot 20000}{4\pi\epsilon \cdot 4} = 5000 \text{ Volt} = 5 \text{ kV}$$

P noktasındaki elektrik alan şiddetini:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon \cdot r_{qP}^2} = \frac{4\pi\epsilon \cdot 20000}{4\pi\epsilon \cdot 4^2} = 1250 \text{ V/cm} = 1,250 \text{ kV/cm}$$

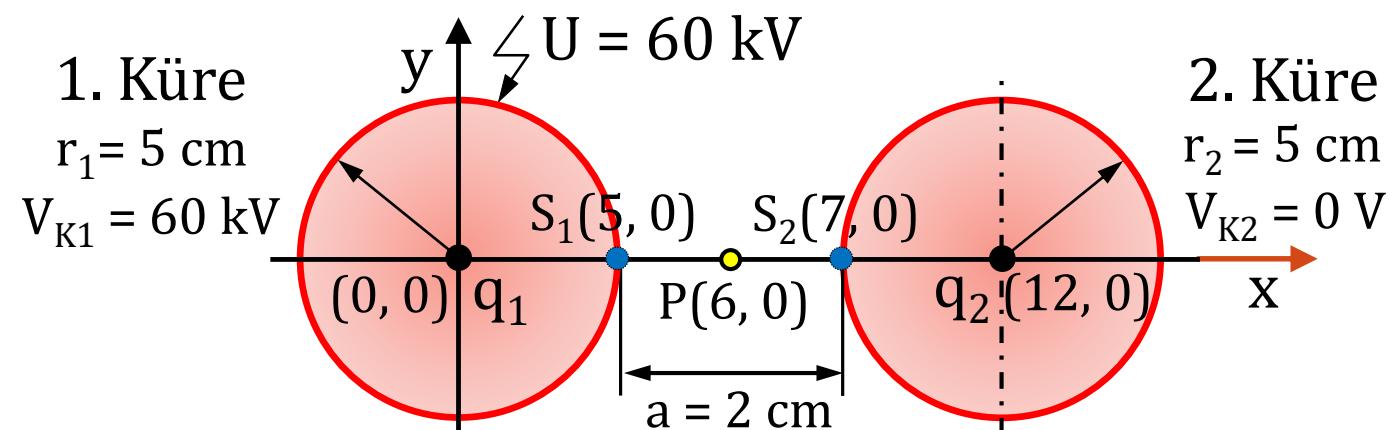
YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY)

CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)



Örnek 2:

Aralarında 2 cm açıklık bulunan, 10 cm çaplı küre-küre elektrot sisteminin elektrik alanı, merkezlerine yerleştirilmiş birer noktasal yük ile benzetilmektedir. Küre elektrotlar arasında $U = 60$ kV uygulandığına göre P (6 cm, 0) noktasındaki potansiyeli ve elektrik alan şiddetini *Yük Benzetim Yöntemi* ile hesaplayınız.



YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Çözüm 2:

Sınır noktaları olarak $S_1(5; 0)$ ve $S_2(7; 0)$ alarak çözüm yapılacaktır.

S_1 sınır noktasındaki potansiyel:

$$V_{S1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon \cdot (r_1 + a)} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot 5} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon \cdot 7} = 60000 \text{ Volt}$$
$$7q_1 + 5q_2 = 4\pi\epsilon \cdot 35 \cdot 60000 \quad (1)$$

S_2 sınır noktasındaki potansiyel:

$$V_{S1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot (r_1 + a)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon \cdot r_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot 7} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon \cdot 5} = 0 \text{ Volt}$$
$$5q_1 + 7q_2 = 0 \quad (2)$$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

(1) ve (2) denklemlerinden noktasal benzetim yükleri

$$q_1 = 4\pi\epsilon \cdot 612500 \text{ Coulomb} \quad q_2 = -4\pi\epsilon \cdot 437500 \text{ Coulomb}$$

olarak hesaplanır. Yük değerleri belli olduğuna göre, yüklerin uzaklıklarını 6 cm olan P (6; 0) noktasındaki potansiyel:

$$V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot r_{P1}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon \cdot r_{P2}} = \frac{4\pi\epsilon \cdot 612500}{4\pi\epsilon \cdot 6} + \frac{-4\pi\epsilon \cdot 437500}{4\pi\epsilon \cdot 6} = 29166 \text{ Volt} = 29,166 \text{ kV}$$

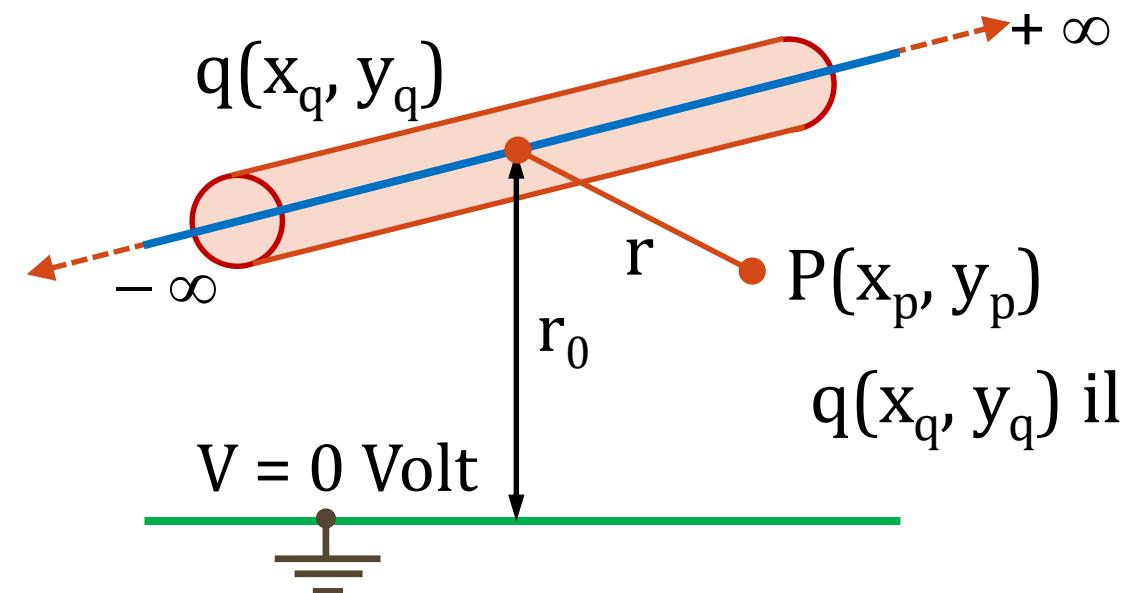
P (6; 0) noktasındaki elektrik alan şiddeti:

$$E_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot r_{P1}^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon \cdot r_{P2}^2} = \frac{4\pi\epsilon \cdot 612500}{4\pi\epsilon \cdot 6^2} + \frac{-4\pi\epsilon \cdot 437500}{4\pi\epsilon \cdot 6^2} = 4861 \text{ V/cm} = 4,861 \text{ kV/cm}$$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Sonsuz çizgisel yük

Bir çizgisel yükün kendinden r uzaklığında yarattığı potansiyel:



$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

$$p = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r} : \text{potansiyel katsayısı}$$

$q(x_q, y_q)$ ile $P(x_p, y_p)$ noktaları arasındaki uzaklık:

$$r = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

Bir çizgisel yükün yarattığı eşpotansiyel yüzey, silindirdir.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

Potansiyel bağıntısında

r_0 : Çizgisel yükün potansiyeli sıfır olan en yakın yere olan uzaklığı,

r : Çizgisel yük ile hesap yapılacak nokta arasındaki en kısa uzaklıktır.

Çizgisel yükün $q(x_q, y_q)$ kendinden r uzaklığında,

$P(x_p, y_p)$ noktasında yarattığı **elektrik alan şiddeti**:

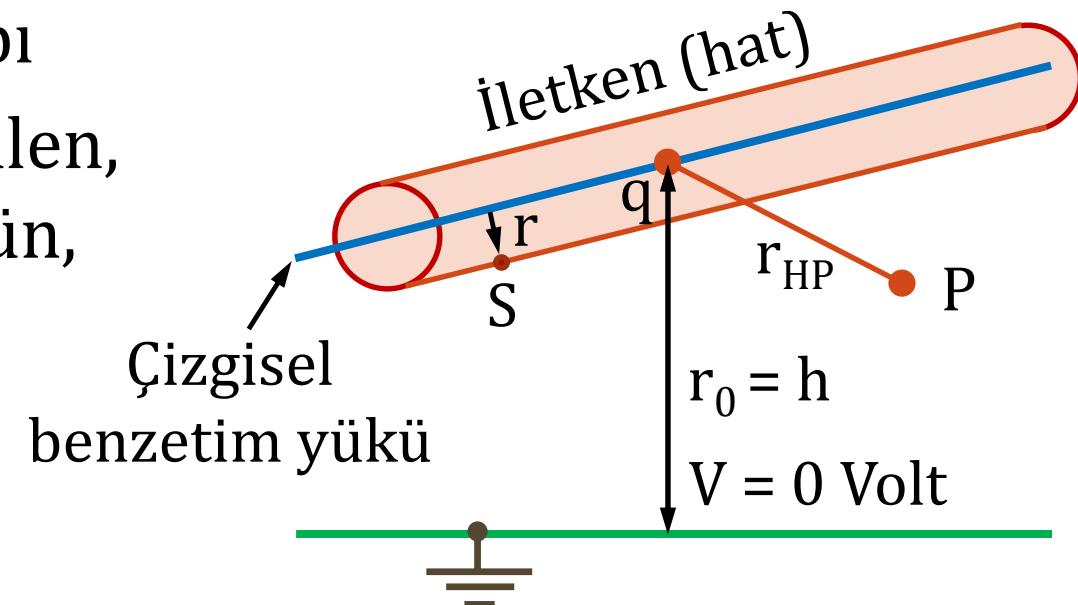
$$E_P = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{2\pi\epsilon \cdot r}$$

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)



Örnek 3: *Yük Benzetim Yöntemi* ile bir hattın çevresinde potansiyel hesabı
Hattın eksenine yerleştirildiği düşünülen, yük yoğunluğu q olan bir çizgisel yükün, r yarıçaplı hat iletkeni üzerindeki potansiyeli (sınır potansiyeli):

$$V_S = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{r} = V_{\text{hat}}$$



Burada, h : yükün (hattın) yerden yüksekliği; r : hat iletkeninin yarıçapı ve V_{hat} : hattın toprağa göre gerilimi, $V_{\text{hat}} = U/\sqrt{3}$, U : fazlar arası gerilimdir.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) CHARGE SIMULATION METHOD (CSM)

Sınır potansiyeli denkleminden benzetim yükü: $q = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(h/r)} \cdot V_{\text{hat}}$ olarak bulunur.

Böylece, P noktasındaki potansiyel:

$$V_P = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{r_{HP}} = \frac{[2\pi\epsilon/\ln(h/r)] \cdot V_{\text{hat}}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{r_{HP}} = \frac{\ln(h/r_{HP})}{\ln(h/r)} \cdot V_{\text{hat}}$$

olar.

Bu denklemde r_{HP} : hat ile hesap yapılacak nokta arasında en kısa (noktadan hatta dik) uzaklıktır. Elektrik alan şiddeti de

$$E_P = \frac{q}{2\pi\epsilon \cdot r_{HP}}$$

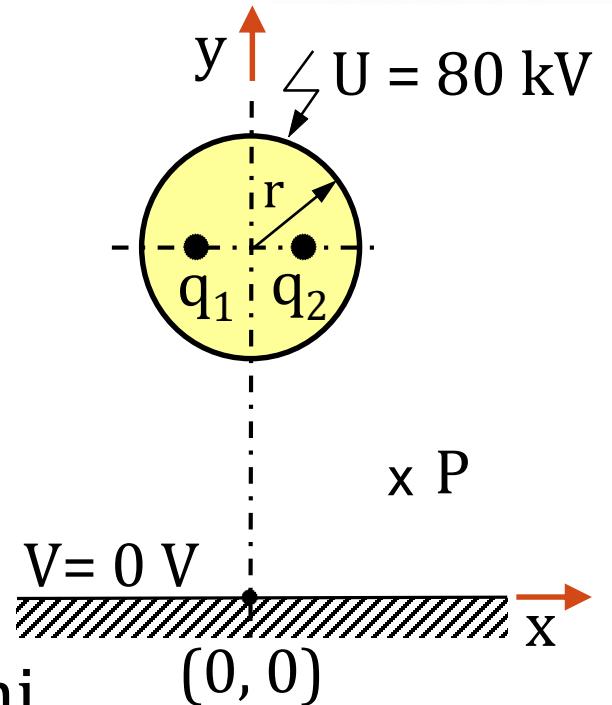
olar.

YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) ÇALIŞMA SORULARI



Çalışma soruları:

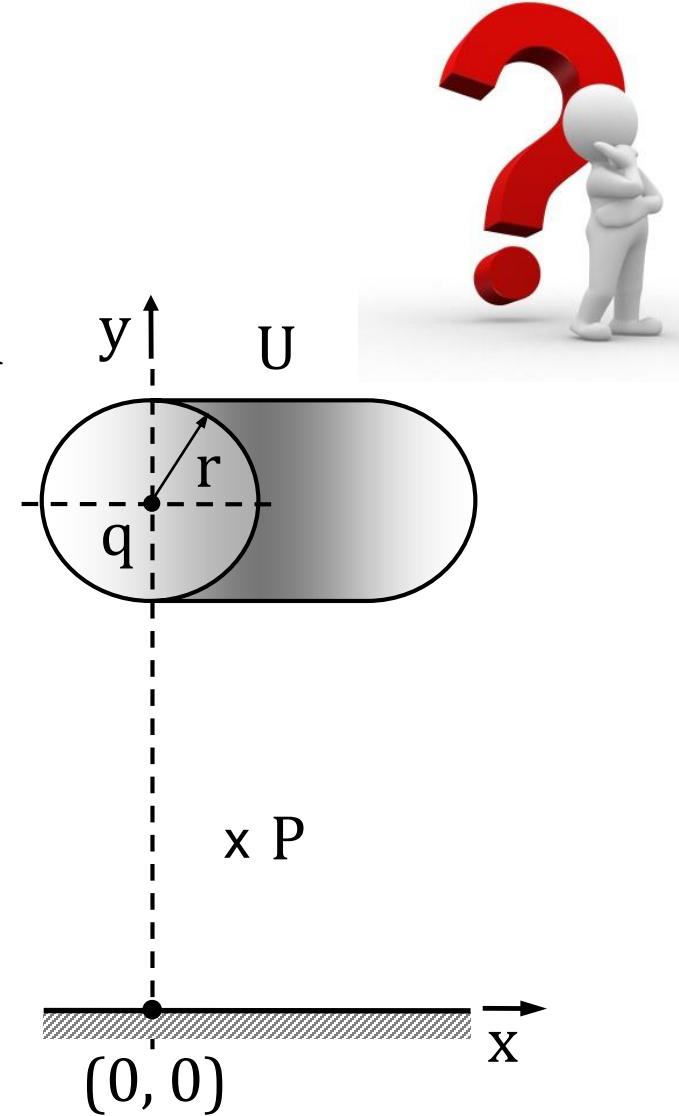
- 1) Merkezi $(0, 50 \text{ cm})$ noktasında bulunan $r = 1 \text{ cm}$ yarıçaplı bir küre elektrodun elektrik alanı, iki noktasal yük ile benzetilmektedir. q_1 yükü $(-0,25 \text{ cm}; 50 \text{ cm})$ noktasına, q_2 yükü $(0,25 \text{ cm}; 50 \text{ cm})$ noktasına yerleştirilmiştir. Küre elektroda, toprağa göre $U = 80 \text{ kV}$ uygulandığına göre $P (2 \text{ cm}, 15 \text{ cm})$ noktasındaki potansiyeli ve elektrik alan şiddetini ***Yük Benzetim Yöntemi*** ile hesaplayınız.



YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY) ÇALIŞMA SORULARI

2) Eksenin ($x_q = 0$, $y_q = 10 \text{ mm}$) noktasından geçen $r = 2 \text{ mm}$ yarıçaplı bir iletkenin, eksene yerleştirilmiş bir çizgisel yük ile benzetimi yapılmaktadır.

İletkene $U = 40 \text{ kV}$ uygulandığında P ($x = 1 \text{ mm}$; $y = 5 \text{ mm}$) noktasındaki potansiyeli ve elektrik alan şiddetini ***Yük Benzetim Yöntemi*** ile hesaplayınız.



YÜK BENZETİM YÖNTEMİ (YBY)

ÇALIŞMA SORULARI



3) Eksenleri $(0, 180 \text{ cm})$ ve $(50 \text{ cm}, 180 \text{ cm})$ üzerinde bulunan $r_1 = r_2 = 1 \text{ cm}$ yarıçaplı iki hattın elektrik alanının, eksenlerine yerleştirilmiş (q_1, q_2) çizgisel yükleri ile benzetimi yapılmaktadır.

Toprağa göre $V1 = 10 \text{ kV}$ ve $V2 = 10 \text{ kV}$ potansiyelinde olan bu hatların altındaki $P (20 \text{ cm}, 20 \text{ cm})$ noktasındaki potansiyeli ve elektrik alan şiddetini ***Yük Benzetim Yöntemi*** ile hesaplayınız.

