Calcul du prix et des sensibilités d'une option américaine par une méthode de Monte-Carlo

LIONS.P.L[1] **REGNIER.H**[2]

Septembre 2000

[1]Ceremade. Université Paris IX
[2]CAR. 33 rue de Mogador. Paris

Contents

1 Résultats théoriques

1.1 Introduction

Une option américaine d'échéance T sur un actif X_t est une option dont le détenteur à le droit d'exercer à tout instant θ entre le moment de son achat et de son échéance T. Ce droit englobe la possibilité d'exercer à l'échéance.
Cette caractéristique des options américaines les rend difficiles à évaluer et à couvrir. Les travaux de Mc-Kean [15] ont permis d'écrire le problème de l'option américaine comme un problème de frontière libre, ce qui donne explicitement le prix de l'option en fonction de sa frontière d'exercice[3]. Van Moerbeke [16] a par la suite étudié les caractéristiques de cette frontière d'exercice et les travaux de Bensoussan [3] et de Karatzas [11] ont finalement donné un cadre financier et une justification par la théorie de l'arbitrage pour l'évaluation des options américaines.
Ces deux auteurs ont notamment montré que le prix de l'option américaine d'échéance T, de sous-jacent X_t et donnant droit à l'instant de son exercice t à un cash-flow noté $\Psi(s, X_s)$ est donné par

$$P^a(t, X_t) := \operatorname{ess}\sup_{\theta \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\Psi(\theta, X_\theta) \exp\left(-\int_t^\theta r_s ds\right) |\mathcal{F}_t\right], \tag{1}$$

où $\mathcal{T}_{t,T}$ désignera l'ensemble de tous les temps d'arrêts prenant leurs valeurs dans l'intervalle $[t, T]$ et (r_s) désignera le taux d'actualisation.
Par ailleurs, El-Karoui [9] reliant ce problème d'arrêt optimal avec la théorie des enveloppes de Snell a établi que le plus petit temps d'arrêt optimal est donné par :

$$\rho_t = \inf \{s \in [t, T], P^a(s, X_s) = \psi(s, X_s)\}.$$

Dans le cas des taux déterministes, le prix de l'option américaine est une fonction dépendante du temps et du prix du sous-jacent. A partir de la caractérisation donnée ci-dessus, et dans le cas des taux déterministes, on peut montrer l'existence d'une région dite d'arrêt (ou d'exercice), définie comme

$$\mathcal{E}_a = \{(t, X_t) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+,\ P^a(t, X_t) = \Psi(t, X_t)\}.$$

Le complémentaire de cet ensemble, appelé région de continuation, est défini comme :

$$\mathcal{E}_c = \{(t, X_t) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+,\ P^a(t, X_t) > \Psi(t, X_t)\}.$$

En particulier, on montre par le lemme d'Itô que dans la région de continuation, le prix de l'option américaine vérifie l'équation aux dérivées partielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} P^a(t, .) + \mathcal{L} P^a(t, .) - r P^a(t, .) = 0,$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du sous-jacent X.

Remarque :

[3] La frontière d'exercice est le prix au-dessus (resp. en-dessous) duquel le détenteur du Call (resp. Put) a intérêt à l'exercer.

Dans le cas des taux aléatoires, on prendra comme variables explicatives du prix de l'option américaine, le prix du sous-jacent X_t et le prix $B(t,T)$ du zéro-coupon de même maturité que l'option (i.e $P^a(t, X_t, B(t,T))$).

Les résultats énoncés ci-dessus mettent en avant le caractère fortement non-linéaire d'une option américaine et donc l'impossibilité de trouver des formules fermées[4]. Partant de ce constat, les gens ont cherché ces dernières années à élaborer des algorithmes de résolution pouvant se répartir comme suit :

1. Algorithme déterministe (différence finie[5], éléments finis).
2. Algorithme de Monte-Carlo.

Pour chaque classe, ces algorithmes peuvent être décrits sommairement de la manière suivante :

- **Algorithme déterministe**

Bensoussan-Lions [4] montre en usitant des techniques variationnelles que le prix d'une option américaine peut être interprété comme la solution d'une inéquation variationnelle. Partant de ce résultat, Jaillet-Lamberton-Lapeyre [10] ont étudié, dans le cas scalaire, un schéma numérique, permettant d'approcher numériquement la solution de cette inéquation variationnelle[6]. Dans le cas de la dimension multiple, des algorithmes fondés sur la décomposition de Trotter permettent d'approcher la solution de l'inéquation variationnelle.
Une approche de type éléments finis peut être élaborée. Il faut, pour cela, non plus considérer le prix de l'option américaine comme la solution d'une inéquation variationnelle, mais comme la solution d'un problème de Stefan[7]. Les éléments finis mis en oeuvre seront des éléments finis espace-temps. Concernant la précision du calcul de la frontière d'exercice (in fine le prix de l'option), le gain de cette approche est énorme. L'inconvénient de cette dernière est de nécessiter une dimension supplémentaire par rapport à une méthode de type différences finies.

De manière générale, et ce quelle que soit l'approche choisie (méthode aux différences finies, ...), ces algorithmes, pour être mis en place, supposent d'une part que l'opérateur de la diffusion est strictement elliptique[8] et que d'autre part, la dimension[9] du problème est inférieure à 3. En conséquence, les gens ont cherché à développer des algorithmes de type Monte-Carlo[10].

- **Algorithme de Monte-Carlo**

[4] Hormis certains cas simples comme : call américain ne versant pas de dividende, put américain dont le sous-jacent a un drift négatif,... .

[5] Ceci inclut les méthodes d'arbres.

[6] Algorithme de Breman et Schwartz. Mais, on peut citer d'autres schémas telle que : Cranck-Nicholson, Cryer,...

[7] i.e problème de frontière libre.

[8] Condition non vérifiée lorsque l'on a plusieurs sous-jacents fortements corrélés.

[9] Rappelons que la complexité des algorithmes déterministes croît de manière exponentielle avec la dimension.

[10] Les algorithmes de Monte-Carlo outre le fait qu'ils ne supposent pas d'hypothèse de non-dégénerescence de l'opérateur, ont leur complexité qui croît de manière linéaire avec la dimension.

Contrairement aux méthodes déterministes, les méthodes de Monte-Carlo partent de la représentation probabiliste du prix de l'option américaine (cf égalité (1)). On montre par un principe de programmation dynamique, que chercher à évaluer $P^a(0,x_0)$ revient à approcher numériquement une famille d'espérances conditionnelles. Or, la plupart des méthodes de Monte-Carlo existantes vont évaluer ces espérances conditionnelles à l'aide d'une stratification de l'espace des trajectoires. A partir de cette discrétisation spatiale et suivant la méthode usitée, on approche de manière plus ou moins savante la probabilité de transition du processus (X_t) (in fine l'espérance conditionnelle). Ces méthodes, simples à implémenter, se révèlent toutefois peu performantes dans les cas où la volatilité du processus est fortement diffusive[11] ou dans le cas d'une option ayant une longue maturité.
Parmis les méthodes les plus courantes, citons celles dûes à Barraquand-Martineau [2] et Broadie-Detemple [6]. Pour une liste plus ou moins exhaustive des méthodes de Monte-Carlo existantes, le lecteur pourra se réfèrer à l'article de Broadie-Glasserman [5].

La méthode que nous proposons est novatrice au sens où, pour calculer ces espérances conditionnelles, nous n'allons pas effectuer de discrétisation de l'espace des trajectoires. Ceci va se révéler possible via le calcul de Malliavin. L'avantage de cette approche est double. Outre le fait d'être une vraie méthode de Monte-Carlo[12], nous montrerons comment celle-ci peut-être étendue pour le calcul des différentes grecques de cette option.
A noter que l'idée d'utiliser le calcul de Malliavin pour l'évaluation d'instruments financiers résulte de l'article de Fournié.E &"all" [7].

Tout d'abord, nous allons rappeler succinctement dans la section qui suit en quoi approcher numériquement une espérance conditionnelle permet d'évaluer le prix d'une option américaine.

1.2 Une méthode de contrôle optimal

Dans toute cette étude, l'hypothèse de complètude du marché sera supposé vérifiée[13].

Dans cette section, nous adopterons les notations suivantes :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré muni d'un mouvement Brownien (W_t).
$(\mathcal{F}_t)$ désignera la filtration naturelle engendrée par le mouvement Brownien, i.e. $\sigma(W_s,\ s \leq t)$.
(X_t) désignera un processus de diffusion modèlisant la valeur du sous-jacent.
$\Psi(.)$ désignera la fonction pay-off indépendante du temps.

En outre, nous rappelons que l'on définit[14] le prix d'une option américaine à l'instant 0 comme,

$$P^a(0,x_0) := \text{ess} \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{0,T}} \mathbb{E}_{x_0}\left[e^{-r\tau}\Psi(X_\tau)\right]. \tag{2}$$

Précédemment, nous avons énoncé l'existence d'une région d'exercice pour une option américaine. Partant de ce résultat, il est aisé d'élaborer une stratégie qui consiste à regarder et ce à

[11] Cela revient à exclure par ces méthodes des événements "riches" en information.
[12] Facilement adaptable en dimension multiple.
[13] Existence et unicité d'une probabilité risque-neutre sous laquelle les prix actualisés des sous-jacents sont des martingales.
[14] Le taux d'actualisation est supposé constant.

chaque instant, si on exerce l'option ou non. Ainsi, on introduit la famille notée CMS[15] définie comme l'ensemble de tous les processus u, $\mathcal{F}_t$-adaptés vérifiant :

$$\forall t \in [0,T],\ u(t,X_t) \in \{\text{exercer, ne pas exercer}\},$$

et si pour tout $t < T$,

$$\{u(t,X_t) = \text{exercer}\} \text{ est réalisé } \Rightarrow \forall s \in\ ]\,t,T\,]\,,\ \{u(s,X_s) = \text{ne pas exercer}\} \text{ est réalisé.}$$

Par le biais du processus $u(t,X_t)$, on définit la mesure de saut notée $\delta(t,u(t,X_t))$ comme :

$$\delta(t,u(t,X_t)) = \begin{cases} \frac{1}{T-t}, & \text{sur l'évenement } \{u(t,X_t) = \text{exercer}\}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

A partir de la définition du prix de l'option américaine, du processus u et de la mesure δ, on montre que l'égalité (2) se récrit comme :

$$P^a(0,x_0) = \max_{u \in CMS} \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-r(T-\tau)} \Psi(X_\tau) \delta(\tau, u(\tau, X_\tau)) d\tau \right]. \tag{3}$$

A présent, on discrétise l'intervalle $[0,T]$ en L subdivisions égales de taille $\Delta t = \frac{T}{L}$. Par le biais de cette discrétisation, nous effectuons une discrétisation de l'expression continue du prix de l'option américaine donnée par l'égalité (3). Alors, pour tout $0 < \Delta t < 1$ et tout $k \in \{0,\ldots,L\}$, on définit l'approximation de P à l'instant $k\Delta t$ par :

$$\overline{P}_{k\Delta t}(X_{k\Delta t}) = \max_{u \in CMS} \mathbb{E} \left[\Delta t \sum_{j=k}^{L} \Psi(X_{j\Delta t}) e^{-r(k-j)\Delta t} \delta(j\Delta t, u(j\Delta t, X_{j\Delta t})) | \mathcal{F}_{k\Delta t} \right]. \tag{4}$$

De l'égalité ci-dessus, il est facile d'en déduire une équation de récurrence (principe de programmation dynamique de Bellman). Cela est d'autant plus simple que le processus (X_t) est Markovien. Cette formule de récurrence est énoncée dans le lemme 1.2.1 donné ci-dessous. La démonstration de ce lemme ne sera pas donnée. Cette dernière est facile et n'utilise que des résultats classiques sur les espérances conditionnelles :

Lemme 1.2.1 (Formule de récurrence sur le prix) *Pour tout* $0 < \Delta t < 1$ *et tout* $k \in \{0,\ldots,L\}$,

$$\overline{P}_{k\Delta t}(X_{k\Delta t}) = \max \left\{ \Psi(X_{k\Delta t}), \exp(-r\Delta t) \mathbb{E} \left[\overline{P}_{(k+1)\Delta t}(X_{(k+1)\Delta t}) | X_{k\Delta t} \right] \right\}. \tag{5}$$

Remarque : *Comme la mesure du sous-jacent est une mesure diffuse, il n'est donc pas possible d'effectuer une approche directe dans le but de calculer numériquement l'espérance conditionnelle donnée ci-dessus*[16]*. Les méthodes de Monte-Carlo existantes contournent cette difficulté en*

[15] Acronyme pour désigner Cash-flows Monitoring Strategies.

[16] De manière formelle, on a pour toute fonction Φ mesurable et bornée et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$,

$$E\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right] = \frac{E\left[\Phi(X_t) \mathbf{1}_{\{X_s = \alpha\}}\right]}{P(X_s = \alpha)}.$$

Or l'égalité ci-dessus ne peut être utilisée du fait que $P(X_s = \alpha) = 0$.

discrétisant l'espace des trajectoires[17]. *Elles ne cherchent pas à approcher numériquement cette espérance conditionnelle, mais la quantité suivante :*

$$\mathbb{E}\left[\overline{P}_{(k+1)\Delta t}(X_{(k+1)\Delta t})|X_{k\Delta t} \in O_i\right],$$

où O_i est un élément de la partition de l'espace des trajectoires.

Dans la section qui suit, nous présentons la méthode permettant d'approcher numériquement le prix ainsi que les différentes sensibilités d'une option américaine.

2 Pricing et hedging d'une option américaine

Dans un souci de confort de lecture, nous commençons par présenter le cas scalaire. Le cas multi-dimensionnel sera présenté par la suite.

2.1 Pricing et Hedging d'une option américaine : cas scalaire

Pour les raisons explicitées précédemment, le résultat du lemme 1.2.1 ne peut-être exploité directement. Un travail de réécriture d'une espérance conditionnelle est donc nécessaire. C'est l'objet de la section qui suit.

2.1.1 Prix d'une option américaine : réécriture d'une espérance conditionnelle

Tous les résultats que nous présentons partent de l'hypothèse que le sous-jacent suit un modèle log-normal. Ce choix est motivé pour les raisons suivantes :

1. Clarté de l'exposé. Les différents calculs que nous allons effectuer se font aisément sans supposer de fortes connaissances du calcul de Malliavin.
2. Les réécritures des espérances conditionnelles donnent lieu à des formules fermées.
3. Le modèle de Black-Scholes est le modèle le plus couramment usité par les praticiens.

Toutefois, et cela à titre indicatif, nous donnerons en annexe[18] la formule de réécriture d'une espérance conditionnelle dans le cas où le sous-jacent suit un processus de diffusion quelconque.

Notations :

Soit (X_t) le processus de diffusion définit comme la solution de l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = (r-d)X_t dt + \sigma X_t dW_t, \\ \\ x_0 = x, \end{cases}$$

[17] Cela revient à supposer qu'il existe une partition finie ou dénombrable de Ω générant la σ-algèbre $\mathcal{F}$.
[18] cf pp 45.

où r désignera le taux d'actualisation (non aléatoire et constant au cours du temps), d le dividende de l'option et σ la volatilité du modèle.
Par ailleurs, on notera par $H(.)$ la fonction d'Heaviside définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathcal{M}(\mathbb{R})$ désignera l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles.
$\mathcal{E}_b(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}),\ \exists C > 0 \text{ et } m \in \mathbb{N}\ ,\ f(y) \leq C\,(1 + |y|^m)\}$.
Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, on note : $\Delta W_{s,t} = tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)$.
On définit l'opérateur $T_{s,t}$ agissant sur les fonctions de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ comme :
pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$,

$$T_{s,t}[\Phi](.) := \frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s - .)}{X_s}\Delta W_{s,t}\right]. \tag{6}$$

On montre le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.1.1 (Réécriture d'une espérance conditionnelle) *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$:*

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)|X_s = \alpha\right] = T_{s,t}[\Phi](\alpha) \times \{T_{s,t}[\mathbf{1}_{\mathbf{R}}](\alpha)\}^{-1}. \tag{7}$$

Remarque :*Le lemme 2.1.1 est dû à Fournié & all [7]. Toutefois, et ce pour des raisons de compréhension des preuves des lemmes faites dans le cas multi-dimensionnel, nous effectuerons la preuve de ce dernier (cf pp 33).*

La démonstration du lemme 2.1.1 consiste à établir l'existence d'un processus $\pi_{s,t} \in L^2(\Omega \times [0,T])$ telle que :

$$"\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\delta_\alpha(X_s)\right]" = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)H(X_s - \alpha)\pi_{s,t}\right], \tag{8}$$

où $\delta_\alpha(.)$ désignera la masse de dirac au point α.

Remarque : *Afin de calculer le prix d'un Put, il se révélera plus astucieux de prendre pour $T_{s,t}(\Phi)$ la définition suivante :*

$$T_{s,t}[\Phi](\alpha) \quad := \quad -\frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(\alpha - X_s)}{X_s}\Delta W_{s,t}\right]. \tag{9}$$

Remarquons que la masse de Dirac intervenant dans le terme de gauche de l'égalité (8) est une "fonction" fortement irrégulière. Le fait d'utiliser l'intégration par parties permet de régulariser cette dernière au détriment d'un accroissement de la variance. Afin de remédier à cela, nous pouvons utiliser une méthode de localisation pour une espérance conditionnelle. Celle ci se décrit comme suit :
On considère une fonction f régulière vérifiant les conditions suivantes : soit K compact de $\mathbb{R}$ telle que,

$$Supp(f) \subset K \qquad \text{et} \qquad \int_{Supp(f)} f(y)dy = 1.$$

On définit F comme la fonction de répartion de f, i.e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.
En reprenant le raisonnement qui permettra d'établir le lemme 2.1.1, on montre :

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) f(X_s - \alpha)\right] = \frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) F(X_s - \alpha) \frac{\Delta W_{s,t}}{X_s}\right]. \tag{10}$$

Muni de cette égalité et du lemme 2.1.1 il est alors aisé de montrer le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.1.2 (Réécriture d'une espérance conditionnelle avec localisation) *Pour tout* $(s,t) \in [0,T]^2$ *avec* $s \leq t$*, tout* $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ *et pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ *:*

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right] = T_{s,t}^{loc}[\Phi](\alpha) \times \left\{T_{s,t}^{loc}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\alpha)\right\}^{-1}, \tag{11}$$

avec $T_{s,t}^{loc}$ *défini comme :*

$$T_{s,t}^{loc}[\Phi](\alpha) \quad = \quad \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) f(X_s - \alpha)\right] + \frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Big(H(X_s - \alpha) - F(X_s - \alpha)\Big) \frac{\Delta W_{s,t}}{X_s}\right]. \tag{12}$$

Remarque : *La fonction $H(.) - F(.)$ intervenant dans l'espérance donnée ci-dessus tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Pour préserver cette propriété, chaque espérance intervenant dans le lemme devra être calculée séparément.*
Afin de calculer le prix d'un Put, il se révélera plus astucieux de prendre pour $T_{s,t}^{loc}(\Phi)$ la définition suivante :

$$T_{s,t}^{loc}[\Phi](\alpha) \quad := \quad \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) f(\alpha - X_s)\right] + \frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Big(F(\alpha - X_s) - H(\alpha - X_s)\Big) \frac{\Delta W_{s,t}}{X_s}\right], \tag{13}$$

avec $F(x) := \int_{x}^{+\infty} f(y)dy$.

En couplant le résultat du lemme 1.2.1 avec celui du lemme 2.1.1 , on obtient le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.1.3 (Formule de récurrence du prix) *Pour tout* $0 < \Delta t < 1$*,* $k \in \{0, \ldots, L\}$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$*,*

$$\overline{P}_{k\Delta t}(\alpha) = \max\left(\Psi(\alpha), T_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}[\overline{P}_{(k+1)\Delta t}](\alpha) \times \left\{T_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\alpha)\right\}^{-1}\right). \tag{14}$$

Remarque : *Pour approcher numériquement la famille d'espérance conditionnelle à chaque instant de discrétisation temporel, il ne suffira que d'un seul jeu de trajectoires.*

A présent, nous allons présenter les résultats permettant de calculer les différentes grecques d'une option américaine.

2.1.2 Calcul des sensibilités d'une option américaine

2.1.2.1 Introduction et notations

Pour gérer sa position globale en temps réel, le teneur de marché utilise généralement cinq indicateurs qui le renseignent en continu sur l'évolution de sa position et des risques auxquels il est exposé. Il se sert de ces indicateurs afin d'orienter sa position globale dans le sens désiré et réviser sa stratégie en fonction de l'évolution du marché. Ces indicateurs (ou grecques) sont :

1. Senbilité par rapport à la condition initiale (i.e Delta et Gamma),
2. Sensibilité par rapport à la maturité (i.e Theta),
3. Sensibilité par rapport à la volatilité (i.e Vega),
4. Sensibilité par rapport au drift (i.e Rhô).

Concernant une option européenne, il est facile de donner un sens (mathématique) à tous ces indicateurs. Concernant les options américaines, il en va tout autrement.
Pour le Delta, à partir de résultats classiques sur les inéquations variationnelles, nous pouvons établir l'existence de celui-ci. Pour la position en Gamma et donc celle en Theta, ces mêmes résultats d'inéquations variationnelles montrent que si le point que l'on considère est dans un voisinage de la frontière d'exercice, alors ce Gamma (et donc Theta) est une fonction discontinue. Cela a pour conséquence de produire de fortes imprécisions numériques. Du fait du grand intérêt porté par les praticiens sur ces deux grecques, nous avons toutefois élaboré une méthode permettant de calculer ces dernières.
Concernant le Vega et le Rhô, on peut, via des résultats de contrôle stochastique, montrer que ces sensibilités sont bien définies. Ce résultat tient au fait que dans le cas du modèle de Black-Scholes, la frontière d'exercice de l'option américaine est "régulière".

Dans la présentation des résultats, nous utiliserons fréquemment les deux notations suivantes :

$$H(T,S,\Phi)(.) := \frac{(S[\Phi](.)T[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](.) - T[\Phi](.)S[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](.)}{T^2[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](.)},$$

où S et T désigneront deux opérateurs agissant sur les fonctions de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ et Φ une fonction de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R})$.

$$\omega_{k\Delta t} := \{\overline{P}_{k\Delta t}(\alpha) < \Psi(\alpha)\} \quad \text{où } \overline{P}_{k\Delta t}(\alpha) \text{ est la quantité définie dans l'égalité (4).}$$

Commençons par la présentation du Delta.

2.1.2.2 Calcul du Delta

Le Delta d'une position indique la variation de la valeur de la position par rapport à de faibles fluctuations du cours du sous-jacent. En d'autres termes, le Delta de l'option (noté $\Delta(0,x_0)$) sera défini comme :

$$\Delta(0,x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} P^a(0,x_0).$$

On notera, par $\overline{\Delta}(0,x_0)$, l'approximation de $\Delta(0,x_0)$.

A partir du lemme 2.1.3, on établit aisément le lemme suivant :

Lemme 2.1.4 *Pour tout $0 < \Delta t < 1$ et tout $\alpha \in I\!R$,*

$$\overline{\Delta}(\alpha) \quad := \quad \Psi'(\alpha)\mathbf{1}_{\{\omega_{\Delta t}\}} + \exp(-r\Delta t)\frac{\partial}{\partial\alpha} I\!E\left[\overline{P}_{2\Delta t}(X_{2\Delta t})|X_{\Delta t} = \alpha\right]\mathbf{1}_{\{\omega^c_{\Delta t}\}}, \tag{15}$$

$$\overline{\Delta}(0,x_0) \quad = \quad I\!E_{x_0}\left[\overline{\Delta}(\alpha)\right]. \tag{16}$$

Or, pour des raisons similaires à celles déjà évoquées dans la section précédente, il nous faut récrire le Delta d'une espérance conditionnelle sous une forme exploitable numériquement. Pour cela, on utilise le résultat du lemme 2.1.1, et le calcul de Malliavin. Dans le cas où l'on utilise le résultat du lemme 2.1.2 on montre un résultat similaire à celui donné dans le lemme 2.1.5. A titre purement indicatif et uniquement pour le calcul du delta d'une espérance conditionnelle, nous donnerons ce résultat.

Partant du lemme 2.1.1, on montre le lemme suivant :

Lemme 2.1.5 *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \le t$, tout $\alpha \in I\!R^+_*$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$,*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I\!E\left[\Phi(X_t)|X_s = \alpha\right] \quad = \quad H\left(R_{s,t}, T_{s,t}, \Phi\right)(\alpha), \tag{17}$$

avec $T_{s,t}$ défini dans l'égalité (9) et

$$\begin{aligned} R_{s,t}[\Phi](\alpha) \quad &:= \quad -\frac{1}{\sigma s(t-s)} I\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}(\Delta W_{s,t})^2\right] - I\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}\Delta W_{s,t}\right] + \\ &+ \quad \frac{t}{\sigma} I\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}\right] \end{aligned} \tag{18}$$

$$\Delta W_{s,t} \quad := \quad tW_s - sW_t + \sigma s(t-s). \tag{19}$$

Partant du lemme 2.1.2, on montre le lemme suivant :

Lemme 2.1.6 *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \le t$, tout $\alpha \in I\!R^+_*$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$,*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I\!E\left[\Phi(X_t)|X_s = \alpha\right] \quad = \quad H\left(R^{loc}_{s,t}, T^{loc}_{s,t}, \Phi\right)(\alpha), \tag{20}$$

avec $T^{loc}_{s,t}$ défini dans l'égalité (12) et

$$\begin{aligned} R^{loc}_{s,t}[\Phi](\alpha) \quad &:= \quad \frac{1}{\sigma s(t-s)} I\!E\left\{\Phi(X_t)\left[\frac{F(X_s-\alpha) - H(X_s-\alpha)}{X_s^2}\right]\left((\Delta W_{s,t})^2 + \sigma s(t-s) - st(t-s)\right)\right\} + \\ &+ \quad I\!E\left[\Phi(X_t)\frac{f(X_s-\alpha)}{X_s}\Delta W_{s,t}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

En couplant les résultats des lemmes 2.1.4 et 2.1.5 (ou des lemmes 2.1.2 et 2.1.6), on établit le lemme suivant :

Lemme **2.1.7 (Calcul du Delta)** *Pour tout* $0 < \Delta t < 1$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\alpha) &= \Psi'(\alpha)\mathbf{1}_{\{\omega_{\Delta t}\}} + \exp(-r\Delta t)H\left(R_{\Delta t,2\Delta t}, T_{\Delta t,2\Delta t}, \overline{P}_{2\Delta t}\right)(\alpha)\mathbf{1}_{\{\omega_{\Delta t}^c\}}, \\ \overline{\Delta}(0,x_0) &= \mathbb{E}_{x_0}\left[\overline{\Delta}(X_{\Delta t})\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Comme le Delta est lui-même fonction du cours du support, les teneurs de marché utilisent donc un autre indicateur qui les renseigne sur la variation du Delta par rapport au prix du sous-jacent. Cet indicateur est le Gamma.

2.1.2.3 Calcul du Gamma

Le Gamma mesure la convexité de la courbe représentative de la valeur de la position globale par rapport au prix de l'action. Il renseigne le teneur de marché sur l'évolution du Delta de sa position en fonction de la variation du prix de l'action. Il se trouve donc défini comme :

$$\Gamma(0,x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} P^a(0,x_0).$$

On notera par $\overline{\Gamma}(0,x_0)$ l'approximation de $\Gamma(0,x_0)$.
Afin d'approcher numériquement le Gamma, nous réitérons le raisonnement effectué précédemment permettant de calculer le Delta. On montre alors le lemme suivant :

Lemme **2.1.8 (Calcul du Gamma)** *Pour tout* $0 < \Delta t < 1$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\Gamma}(\alpha) = \Psi''(\alpha)\mathbf{1}_{\{\omega_{\Delta t}\}} + \exp(-r\Delta t)K_{\Delta t,2\Delta t}[\overline{P}_{2\Delta t}](\alpha)\mathbf{1}_{\{\omega_{\Delta t}\}}, \tag{23}$$

$$\overline{\Gamma}(0,x_0) = \mathbb{E}_{x_0}\left[\overline{\Gamma}(X_{\Delta t})\right], \tag{24}$$

avec K *défini comme : pour tout* $(s,t) \in [0,T]^2$ *avec* $s \le t$, *tout* $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ *et pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} K_{s,t}[\Phi](\alpha) &:= \Big\{U_{s,t}[\Phi]T_{s,t}^2[\mathbf{1}_R] - U_{s,t}[\mathbf{1}_R]T_{s,t}[\Phi]T_{s,t}[\mathbf{1}_R] - 2R_{s,t}[\Phi]R_{s,t}[\mathbf{1}_R]T_{s,t}[\mathbf{1}_R] + \\ &+ 2R_{s,t}^2[\mathbf{1}_R]T_{s,t}[\Phi]\Big\}(\alpha) \times \{T_{s,t}[\mathbf{1}_R](\alpha)\}^{-3}, \end{aligned}$$

et où les opérateurs T *et* R *sont définis par les égalités (9) et (18) et* U *est défini comme :*

$$\begin{aligned} U_{s,t}[\Phi](\alpha) &:= \frac{1}{\sigma s(t-s)}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^3}\left[\frac{(\Delta W_{s,t})^3}{\sigma s(t-s)} + 3(\Delta W_{s,t})^2 + \right.\right. \\ &+ \left.\left.(2\sigma s(t-s) - \frac{3t}{\sigma})\Delta W_{s,t} - 3st(t-s)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Comme le prix de l'option évolue en fonction du temps, les teneurs du marché utilisent donc un indicateur qui les renseigne sur la variation du prix de l'option par rapport à sa maturité. Cet indicateur est appelé Theta

2.1.2.4 Calcul du Theta

Le Theta mesure le montant gagné ou perdu en raison de l'écoulement du temps. Comme la valeur temps d'une option diminue quand l'échéance approche, un teneur de marché acheteur (resp. vendeur) d'options à courte échéance perd (resp. gagne) de l'argent au fur et à mesure que cette échéance approche. Le Theta est donc défini comme :

$$\Theta(0, S_0) := \frac{\partial}{\partial T} P^a(0, S_0).$$

$\overline{\Theta}(0, x_0)$ désignera l'approximation de $\Theta(0, x_0)$.

On ne peut pour calculer le Theta de l'option américaine reprendre la méthodologie employée précédemment. Il faudrait pour cela réécrire le Theta d'une espérance conditionnelle. Du fait que le Brownien n'est pas une fonction différentiable du temps, on ne peut espérer identifier cette dérivée avec un résultat d'intégration par parties[19]. Toutefois, nous pouvons contourner cette difficulté en interprétant cette espérance conditionnelle comme la solution d'une E.D.P parabolique. De cette interprétation, nous pouvons établir une relation liant le Theta d'une espérance conditionnelle avec cette espérance conditionnelle, le Delta et le Gamma.
Cette relation est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.1.9 (Calcul du Theta d'une espérance conditionnelle) *Pour tout* $(s,t) \in [0,T]^2$ *avec* $s \le t$, *tout* $\alpha \in I\!R_*^+$ *et pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta} I\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right] &= -\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\partial^2_{\alpha^2} I\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right] - r\alpha\partial_\alpha I\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right] + \\ &+ \; rI\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

La preuve du lemme donnée ci-dessus est une conséquence directe de la formule d'Itô.
Muni du lemme 2.1.9, on calcule le Theta de l'option américaine comme :

Lemme 2.1.10 *Pour tout* $0 < \Delta t < 1$, $k \in \{1, \dots, L\}$ *et pour tout* $\alpha \in I\!R_*^+$,

$$\overline{\Theta}(\alpha) := e^{-r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\partial^2_{\alpha^2}\overline{P}_{\Delta t}(\alpha) - r\alpha\partial_\alpha\overline{P}_{\Delta t}(\alpha) + r\overline{P}_{\Delta t}(\alpha)\right)\mathbf{1}_{\omega^c_{\Delta t}}, \tag{27}$$

$$\overline{\Theta}(0, x_0) = I\!E_{x_0}\left[\overline{\Theta}(X_{\Delta t})\right]. \tag{28}$$

2.1.2.5 Calcul du Vega et du Rhô

[19] Contrairement aux autres grecques, il n'est pas licite pour le calcul du Theta de permuter la dérivation avec l'espérance.

Le Vega d'une option mesure la sensibilité du prix de cette option par rapport à la variation de la volatilité σ. Il est donc défini comme :

$$\zeta(0, x_0) = \frac{\partial}{\partial \sigma} P^a(0, x_0).$$

L'indicateur Rhô quant à lui, renseigne le teneur de marché sur le montant gagné ou perdu pour une variation du taux d'intérêt (taux de report). Il est donc défini comme

$$\rho(0, S_0) := \frac{\partial}{\partial r} P^a(0, S_0).$$

$\overline{\zeta}(0, x_0)$ et $\overline{\rho}(0, x_0)$ désigneront respectivement l'approximation de $\zeta(0, x_0)$ et $\rho(0, x_0)$.

En reprenant le raisonnement effectué pour calculer les précédentes sensibilités, il suffit, et cela afin de calculer ces deux sensibilités, de calculer le rhô et le véga d'une espérance conditionnelle. Ces résultats sont donnés dans les deux lemmes suivants :

<u>Lemme</u> 2.1.11 (Calcul du Vega) *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in I\!R_*^+$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$,*

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} I\!E\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right] \quad := \quad H\left(V_{s,t}, T_{s,t}, \Phi\right)(\alpha), \tag{29}$$

avec V défini comme :

$$\begin{aligned} V_{s,t}[\Phi](\alpha) \quad := \quad & \frac{1}{\sigma s(t-s)} I\!E\left[\Phi(X_t) \Delta W_{s,t} \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s} \Big((t-s) W_s^2 + s(W_t - W_s)^2 - \sigma s(t-s) W_t - 2s(t-s) \Big)\right] - \\ - \quad & I\!E\left[\Phi(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s} \Big(t W_s - s W_t \Big)\right] - \frac{\left[d(s,\alpha) - \sigma s\right] \alpha}{\sigma s(t-s)} I\!E\left[\Phi(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s^2} \Big((\Delta W_{s,t})^2 + \right. \\ + \quad & \left. \sigma s(t-s) \Delta W_{s,t} - st(t-s) \Big)\right], \end{aligned}$$

et où l'on a posé $d(s,\alpha) := \dfrac{1}{\sigma}\left[ln(\alpha) - ln(x_0) + (\dfrac{\sigma^2}{2} - r)s\right]$.

<u>Lemme</u> 2.1.12 (Calcul du Rhô) *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in I\!R_*^+$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$,*

$$\frac{\partial}{\partial r} I\!E\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right] \quad := \quad H\left(C_{s,t}, T_{s,t}, \Phi\right)(\alpha), \tag{30}$$

où pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in I\!R_*^+$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$

$$\begin{aligned} C_{s,t}[\Phi](\alpha) \quad := \quad & \frac{1}{\sigma} I\!E\left[\Phi(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s} \Delta W_{s,t} W_t\right] - \frac{\alpha}{\sigma(t-s)} I\!E\left[\Phi(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s^2} \Big((\Delta W_{s,t})^2 + \right. \\ + \quad & \left. \sigma s(t-s) \Delta W_{s,t} - st(t-s) \Big)\right]. \end{aligned}$$

La preuve du lemme 2.1.12 ne sera pas donnée. Celle-ci reprend de manière plus simple les arguments développés pour établir le lemme 2.1.11.

Remarque : *Le dernier terme apparaissant dans le membre de droite de la définition de l'opérateur V résulte du fait que α est une réalisation du processus (X_t) à l'instant s.*

Après avoir présenté les résultats dans le cas scalaire, nous allons aborder le cas multi-dimensionnel.

2.2 Pricing et Hedging d'une option américaine : cas multi-dimensionnel

2.2.1 Introduction et notations

Dans cette section, nous allons considérer des options américaines définies sur d sous-jacent.
Ce cas se présente lorsque l'on doit traiter des options à panier (i.e basket) ou lorsque la dynamique du sous-jacent suit un modèle à plusieurs facteurs.
Avant d'introduire ces différents résultats, nous allons commencer par donner les notations utilisées dans toute cette section.

<u>**Notations**</u> :
d désignera un entier strictement positif.
Ω désignera l'espace $\mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^d)$.
$\mathcal{F}$ désignera la tribu borélienne sur Ω munie de la topologie uniforme sur les compacts.
$\mathbb{P}$ désignera la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
$\mathcal{F}_t$ désignera la filtration naturelle du mouvement Brownien, (i.e $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$).
$W := (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})^T$ (la notation ^{T} désignera la transposition) désignera un mouvement Brownien défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.
(X_t) désignera la solution du système différentiel stochastique suivant : pour tout $t \in [0,T]$ et tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(EDS) \begin{cases} \dfrac{dX_t^{(i)}}{X_t^{(i)}} = (r - q_i)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_t^{(j)}, \\ x_0 \in \mathcal{F}_0, \end{cases}$$

où r désigne le taux d'actualisation, q_i le dividende de l'actif $X^{(i)}$ et $(\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ désigne la matrice de diffusion.

Le prix de l'option américaine est défini comme :

$$P^a(0, x_0) = \text{ess} \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{0,T}} \mathbb{E}\left[\exp(-r\tau)\Psi(X_\tau)\right].$$

2.2.2 Prix d'une option américaine

En réitérant le raisonnement effectué dans la section précédente, nous élaborons les algorithmes permettant de calculer le prix et les différentes sensibilités de notre option américaine dans le cas multi-dimensionnel. Nous avons vu en section 3, qu'afin de calculer le prix d'une option américaine, cela revenait à calculer une espérance conditionnelle du type :
pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right].$$

Or, pour la réécriture de cette espérance conditionnelle dans le cas de la dimension multiple via le calcul de Malliavin, deux approches sont envisageables. La première approche (dite Malliavin mixte), consiste à utiliser explicitement la relation liant le processus (X_t) avec (W_t). Outre le fait de permettre de calculer tous les poids de Malliavin de manière aisée, cette méthode se révèle stable lors de fortes corrélations entre les sous-jacents. Ce résultat s'explique en partie par le fait qu'exploiter cette relation permet de réintroduire de l'indépendance entre les sous-jacents. Or, lorsque l'on est amené à utiliser le calcul de Malliavin, cette propriété d'indépendance est cruciale. Rappelons que si de fortes corrélations existent entre les Browniens alors la densité du processus (X_t) est fortement dégénérée. Du fait que le calcul de Malliavin travaille sur les densités des processus, cela va se traduire par une formule de réécriture d'espérances conditionnelles peu stable. Les résultat numériques se trouveront alors entachés de fortes erreurs. En conséquence, la deuxième approche (approche dite Malliavin "pure") ne sera qu'esquissée.

2.2.2.1 Cas où tous les Browniens sont non totalement corrélés

Comme dit en introduction, afin d'élaborer notre méthode, nous exploitons, la relation reliant (X_t) à (W_t).

(X_t) désignera la solution de l'équation (EDS).

Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,d\}^2$, on définit la matrice K_{ij} comme : $K_{ij} := \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$.

$\tilde{X}_t := (X_t^{(1)}, \tilde{X}_t^{(2)}, \dots, \tilde{X}_t^{(d)})^T$ *où pour tout $i \in \{1,\dots d\}$ et tout $t \in [0,T]$, on définit :*

$$\tilde{X}_t^{(i)} = x_0^{(i)} \exp\left[\left(r - q_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} K_{ij}\right)t + \sum_{j=1}^{i-1}\sigma_{ij}\,\tilde{W}_t^{(j)} + \sigma_{ii}W_t^{(i)}\right],$$

avec $\tilde{W}_t$, solution de l'équation linéaire : $\sum_{k=1}^{d}\sigma_{dk}\,\tilde{W}_t^{(k)} = ln(\alpha_d) - ln(x_0^{(d)}) - [r - q_d - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}K_{dj}]t$.

Par un raisonnement similaire à celui effectué dans le cas scalaire et en utilisant les notations données ci-dessus, on montre le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.2.1 (Réécriture d'une espérance conditionnelle) *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \le t$, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)|X_s = \alpha\right] = \mathcal{I}_{s,t}(\Phi)(\alpha) \times \left[\mathcal{I}_{s,t}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d})(\alpha)\right]^{-1},$$

avec

$$\mathcal{I}_{s,t}(\Phi)(\alpha) = \prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sigma_{jj}s(t-s)}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{j=1}^{d}\frac{H(\tilde{X}_s^{(j)} - \alpha_j)}{\tilde{X}_s^{(j)}}\Delta W_{s,t}^{(j)}\right], \quad (31)$$

et où $\Delta W_{s,t}^{(j)} := tW_s^{(j)} - sW_t^{(j)} + \sigma_{jj}s(t-s)$.

En couplant le résultat du lemme ci-dessus avec celui du lemme 1.2.1, on obtient le lemme suivant,

<u>Lemme</u> 2.2.2 (Formule de récurrence) *Pour tout $0 < \Delta t < 1$, tout $k \in \{1,\dots,L\}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$,*

$$\overline{P}_{k\Delta t}(\alpha) = \max\left(\Psi(\alpha), e^{-r\Delta t}\mathcal{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}[\overline{P}_{(k+1)\Delta t}](\alpha) \times \left\{\mathcal{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}](\alpha)\right\}^{-1}\right). \quad (32)$$

Remarque : *La démonstration du lemme 2.2.1 ne sera pas effectuée. Ce résultat découle directement du lemme 2.2.4 énoncé ci-après.*

A présent, nous allons donner la formule de réécriture d'une espérance conditionnelle lorsque que l'on ne cherche pas à exploiter la relation liant (X_t) à (W_t). Outre le fait de n'être pas stable numériquement lors de fortes corrélations entre les sous-jacents, cette formule pour être exploitable passe préalablement par la résolution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre d. Afin de faciliter la lecture du lemme donné ci-dessous, nous avons posé les notations suivantes :

$\sum_{\mathcal{P}(\mu,I)}$ *désignera la somme de tous les choix possibles de choisir μ partitions (notées $(I_j)_{1\leq j\leq \mu}$) de l'ensemble I telles que :*

$$I_1 \cup \ldots \cup I_\mu = I.$$

$\sum_{k\in\mathcal{I}(\mu,I)}$ *désignera la somme de tous les choix possibles de choisir μ indices (notés $(k_j)_{1\leq j\leq \mu}$) parmis l'ensemble I. En particulier, ce choix inclut le fait que l'on puisse prendre plusieurs fois le même indice.*
$\prod_{j\in I}$ *désignera le produit sur tous les indices j parcourant l'ensemble I.*

Avec les notations définies ci-dessus, le lemme de réécriture d'une espérance conditionnelle s'énonce comme :

<u>**Lemme**</u> **2.2.3 (Réécriture d'une espérance conditionnelle)** *Il existe une fonction (notée κ) telle que : pour tout $(s,t)\in[0,T]^2$ avec $s\leq t$, pour toute fonction $\Phi\in\mathcal{E}_b(I\!R^d)$ et tout $\alpha\in I\!R^d$,*

$$I\!E\left[\Phi(X_t)|X_s=\alpha\right] \;=\; I\!E\left\{\Phi(X_t)\kappa(X_s)Y_s\left[(t-s)^d\mathcal{W}_s - s^d Z_{s,t}\right]\right\}\times\left[I\!E\left\{\kappa(X_s)Y_s\left[(t-s)^d\mathcal{W}_s - s^d Z_{s,t}\right]\right\}\right]^{-1},$$

avec $Y_s := \prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}$, $\mathcal{W}_s := \prod_{j=1}^d\left[W_s^{(j)} + \left(\sum_{l=j}^d \sigma_{j,l}\right)s\right]$ *et* $Z_{s,t} := \prod_{j=1}^d (W_t^{(j)} - W_s^{(j)})$,
et où κ désignera la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(E)\begin{cases}\displaystyle\sum_{\mathcal{P}(\mu,K)}\sum_{k\in\mathcal{I}(\mu,K)}\left[\prod_{\theta=1}^{\mu}\left(\prod_{l\in I_\theta}\sigma_{k_\theta l}\right)\right]x_{k_1}\ldots x_{k_\mu}\left(\partial^{|\mu|}_{x_{k_1},\ldots,x_{k_\mu}}\kappa\right)(x) = \prod_{i=1}^d \delta_{\alpha_i}(x_i)x_i, \quad \text{avec } K:=\{1\ldots,d\},\\ \kappa(0)=0,\end{cases}$$

La démonstration du lemme 2.2.3 sera effectuée en annexe.

Remarque : *Dans le cas bi-dimensionnel et en utilisant le fait que la matrice σ soit triangulaire, l'équation (E) se récrit comme :*

$$\sigma_{21}x_2^2\partial^2_{x_2,x_2}\kappa + \sigma_{11}x_1x_2\partial^2_{x_1,x_2}\kappa + \sigma_{21}x_2\partial_{x_2}\kappa = \frac{1}{\sigma_{22}}\delta_{\alpha_1}(x_1)\delta_{\alpha_2}(x_2)x_1x_2.$$

On montre que la solution de cette équation est :

$$\kappa(x_1,x_2) = H\left(x_1-\alpha_1\right)H\left((\sigma_{11}\alpha_1)^{\sigma_{22}}x_2 - \alpha_2(\sigma_{11}x_1)^{\sigma_{22}}\right).$$

2.2.2.2 Cas où des Browniens peuvent être totalement corrélés

Dans la section précédente, nous avons supposé qu'il n'existait pas de corrélation totale entre les Browniens. Or, il est bien évident qu'une telle situation peut avoir lieu. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas où la composante $X^{(i)}$ suit le même aléa que la composante $X^{(k)}$. Par rapport au cas où les Browniens sont non totalement corrélés, seul le lemme donnant lieu à la formule de réécriture d'une espérance conditionnelle se trouve modifié. En conséquence, cette section ne sera consacrée qu'à l'énoncé de ce résultat.

Dans cette section, nous considérons la situation générale suivante :

On suppose que parmis les d actifs, il y a ℓ actifs totalement corrélés. Comme ces ℓ actifs n'ont aucune raison d'être tous corrélés avec le même Brownien, on introduit un entier ν représentant le nombre de Browniens à partir desquels ces ℓ actifs sont corrélés. $I := \{i_1, \ldots, i_\nu\}$ désignera l'ensemble des indices de ces ν Browniens. A partir de ces derniers, on regroupe les ℓ actifs en paquets et on désignera par ℓ_j le nombre d'actifs corrélés avec le Brownien $(W_t^{(i_j)})$. Et donc, par définition des ℓ_j, on a :

$$\ell_1 + \ldots + \ell_\nu = \ell.$$

Ainsi, chaque classe d'actifs est caractérisée à partir d'un ensemble d'indices noté J_{i_θ} défini comme : pour tout $\theta \in \{1, \ldots, \nu\}$,

$$J_{i_\theta} := \left\{ j_1^{i_\theta}, \ldots, j_{\ell_{i_\theta}}^{i_\theta} \right\}.$$

A présent, nous allons énoncer le lemme permettant la réécriture d'une espérance conditionnelle. Pour faciliter la lecture de ce dernier, nous posons préalablement les notations suivantes :

$$P := \left\{ 1, \ldots, d \right\} \setminus \left[\bigcup_{\theta=1}^{\nu} J_{(i_\theta)} \right].$$

$\prod_{m \in J_{i_\theta}}$ *et* $\sum_{m \in J_{i_\theta}}$ *désigneront respectivement le produit et la somme sur tous les indices m parcourant l'ensemble J_{i_θ}.*

$$S_{(m)}^{\gamma} := \sum_{l \in J_m} (\sigma_{lm})^{\gamma} \, \tilde{X}_s^{(l)} \qquad \text{et} \qquad B_s^{(j)} := \frac{H(\tilde{X}_s^{(j)} - \alpha_j)}{\tilde{X}_s^{(j)}}.$$

A partir des notations ci-dessus, on énonce le lemme de réécriture d'une espérance conditionnelle comme :

Lemme 2.2.4 *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right] = \mathcal{H}_{s,t}(\Phi)(\alpha) \times \left[\mathcal{H}_{s,t}(\mathbf{1}_{R^d})(\alpha)\right]^{-1},$$

avec

$$\mathcal{H}_{s,t}(\Phi)(\alpha) = \frac{1}{\Gamma} \mathbb{E} \left\{ \Phi(X_t) \prod_{j \in P} \left(B_s^{(j)} \Delta W_{s,t}^{(j)} \right) \prod_{i \in I} \left[\left(\sum_{k \in J_i} B_s^{(k)} \right) \left(\ell_{(i)} \frac{\left[S_{(i)}^1 \left(t W_s^{(i)} - s W_t^{(i)} \right) + S_{(i)}^2 \right]}{\left[S_{(i)}^1 \right]^2} \right) \right] \right\}, \quad (33)$$

et où l'on a posé : $\Gamma := [s(t-s)]^{d+\nu-\ell} \prod_{j \in \mathcal{P}} \sigma_{jj}$.

Remarque : *Dans le cas où aucun Brownien n'est totalement corrélé*[20], *on retrouve le résultat énoncé dans le lemme 2.2.1.*
Dans le cas où tous les Browniens sont totalement corrélés[21], *on obtient*

$$\mathcal{H}_{s,t}(\Phi)(\alpha) = \frac{d}{s(t-s)} I\!E\left[\Phi(X_t) B_s^{(1)} \frac{\left[S^1_{(1)}\left(tW_s^{(1)} - sW_t^{(1)}\right) + S^2_{(1)}\right]}{\left[S^1_{(1)}\right]^2}\right].$$

Par ailleurs, si l'on suppose de plus que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on ait $\sigma_{i1} = \sigma$, alors l'égalité ci-dessus coïncide avec l'égalité (7) du lemme 2.1.1. Ce résultat s'explique par le fait que la dimension du problème considéré se réduit à un problème scalaire.

2.2.3 Calcul des sensibilités d'une option américaine

Cette section n'est consacrée qu'à une simple énumération des formules des différentes sensibilités d'une espérance conditionnelle. Afin de calculer les sensibilités des options américaines, il suffira muni du résultat de cette section de réitérer le raisonnement effectué dans le cas scalaire.
Afin de simplifier la présentation des lemmes donnés ci-dessous, nous allons poser :

$$A_{s,t}^{(i)} := \frac{1}{\tilde{X}_s^{(i)}}\left[\frac{\Delta W_{s,t}^{(i)}}{\sigma_{ii}s(t-s)} + 1\right] \quad \text{et} \quad B_{s,t}^{(i)} := \frac{H(\tilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{\tilde{X}_s^{(i)}} \Delta W_{s,t}^{(i)}$$

$$C_s^{(i),\theta} := \frac{H(\tilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{\sigma_{ii}[\tilde{X}_s^{(i)}]^\theta} \quad \text{et} \quad D_{s,t}^{(i)} = \frac{1}{\sigma_{ii}s(t-s)[\tilde{X}_s^{(i)}]^2}\left(\frac{[\Delta W_{s,t}^{(i)}]^2}{\sigma_{ii}s(t-s)} + 3\Delta W_{s,t}^{(i)} + (2\sigma_{ii}s(t-s) - \frac{3t}{\sigma_{ii}})\right).$$

$H(T,S,\Phi)(.) := \dfrac{(S[\Phi](.)T[\mathbf{1}_{I\!R^d}](.) - T[\Phi](.)S[\mathbf{1}_{I\!R^d}](.)}{T^2[\mathbf{1}_{I\!R^d}](.)}$, où S et T désigneront deux opérateurs agissant sur les fonctions de $\mathcal{E}_b(I\!R^d)$ et Φ une fonction de $\mathcal{E}_b(I\!R^d)$.

__Lemme__ **2.2.5 (Delta d'une espérance conditionnelle)** *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R^d)$, tout $\alpha \in I\!R^d$ et tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\partial_{\alpha_i} I\!E\left[\Phi(X_t) | X_s = \alpha\right] = H\left(\mathcal{R}_{s,t}, \mathcal{I}_{s,t}, \Phi\right)(\alpha), \tag{34}$$

avec $\mathcal{I}_{s,t}$ défini dans l'égalité (31) et

$$\mathcal{R}_{s,t}[\Phi](\alpha) := -I\!E\left[\Phi(X_t) A_{s,t}^{(i)} \prod_{j=1}^d B_{s,t}^{(j)}\right] + t I\!E\left[\Phi(X_t) C_s^{(i),2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d B_{s,t}^{(j)}\right]. \tag{35}$$

[20] On a $\ell = 0$, $\nu = 0$ et $P = \{1, \ldots, d\}$.
[21] On a $\ell = d-1$, $\nu = 1$, $I = \{1\}$, $J_{(1)} = \{1, \ldots, d\}$ et $\mathcal{P} = \emptyset$.

Lemme 2.2.6 (Gamma d'une espérance conditionnelle) *Pour tout* $(s,t) \in [0,T]^2$ *avec* $s \leq t$, *pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R^d)$, *tout* $\alpha \in I\!R^d$ *et tout* $(i,j) \in \{1,\dots,d\}^2$,

$$\begin{aligned}\partial^2_{i,j} I\!E\left[\Phi(X_t)|X_s=\alpha\right] &= \Big\{\mathcal{U}_{s,t}[\Phi]\mathcal{T}^2_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}] - \mathcal{U}_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}]\mathcal{T}_{s,t}[\Phi]\mathcal{T}_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}] - 2\mathcal{R}_{s,t}[\Phi]\mathcal{R}_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}]\mathcal{T}_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}] + \\ &+ 2\mathcal{R}^2_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}]\mathcal{T}_{s,t}[\Phi]\Big\}(\alpha) \times \left\{\mathcal{T}_{s,t}[\mathbf{1}_{I\!R^d}](\alpha)\right\}^{-3},\end{aligned}$$

et où les opérateurs $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{R}$ *sont définis par les égalités (31) et (35) et* $\mathcal{U}$ *est défini comme :*

- *Si* $i \neq j$,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{s,t}[\Phi](\alpha) &:= I\!E\left[\Phi(X_t)A^{(i)}_{s,t}A^{(j)}_{s,t}\left(\prod_{k=1}^d B^{(k)}_{s,t}\right)\right] - t I\!E\left[\Phi(X_t)\Big(A^{(i)}_{s,t}C^{(j),2}_s + A^{(j)}_{s,t}C^{(i),2}_s\Big)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^d B^{(k)}_{s,t}\right] - \\ &+ t^2 I\!E\left[\Phi(X_t)C^{(i),2}_s C^{(j),2}_s \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,\,k\neq j}}^d B^{(k)}_{s,t}\right].\end{aligned} \tag{36}$$

- *Si* $i = j$,

$$\mathcal{U}_{s,t}[\Phi](\alpha) := I\!E\left[\Phi(X_t)D^{(i)}_{s,t}\prod_{k=1}^d B^{(k)}_{s,t}\right] - 3t I\!E\left[\Phi(X_t)C^{(i),3}_s \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^d B^{(k)}_{s,t}\right]. \tag{37}$$

Avant de donner le lemme permettant de calculer le Theta d'une espérance conditionnelle, nous allons introduire quelques notations qui permettront de faciliter la lecture de ce dernier.
On pose : $\Sigma := (\sigma\sigma^T)_{1\leq i,j\leq d}$.
On notera par $\mathcal{L}$ le générateur infinitésimal du processus (X_t) défini comme : $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(I\!R^d)$,

$$\mathcal{L}\phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \Sigma_{ij}x_i x_j \partial^2_{x_i x_j}\phi(x) + \sum_{i=1}^d (r-d_i)x_i\partial_{x_i}\phi(x).$$

En réitérant le raisonnement fait dans le cas scalaire, on montre le lemme suivant :

Lemme 2.2.7 (Theta d'une espérance conditionnelle) *Pour tout* $(s,t) \in [0,T]^2$ *avec* $s \leq t$, *pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R^d)$, *tout* $\alpha \in I\!R^d$ *et tout* $(i,j) \in \{1,\dots,d\}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} I\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right] = -\mathcal{L}\Big(I\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right]\Big) + r I\!E\left[\Phi(X_{s+\theta})|X_s=\alpha\right]. \tag{38}$$

Seule la preuve du lemme 2.2.5 sera effectuée. Les preuves des autres lemmes consistent à adapter la démonstration faite dans le cas scalaire et à utiliser les arguments développés pour établir le lemme 2.2.5.

A présent, nous allons effectuer quelques tests numériques permettant de valider notre méthode.

3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus par la méthode de Malliavin et nous les comparons avec des résultats EDP. Précisons que dans tous nos tests numériques, nous avons employé des techniques de localisation et de partitionnement afin de minimiser la variance et le temps de calcul. A titre de comparaison et uniquement dans le cas scalaire, nous donnons à la fin de cette section quelques résultats numériques obtenus sans utiliser ces méthodes ainsi que les temps de calcul mis pour obtenir ces derniers.
P_{MA} désignera le prix du put américain approché numériquement par la méthode de Malliavin sans techniques de localisation et de partitionnement.
F^*_{MA} désignera la quantité F approchée numériquement par la méthode de Malliavin avec technique de localisation.
F_{EDP} désignera la quantité F approchée numériquement par une méthode déterministe.
Nous commençons nos tests par le cas scalaire.

3.1 Cas scalaire

Nous commençons par présenter tous les résultats obtenus. Par le biais de ces derniers, nous chercherons à dégager les caractéristiques principales de notre algorithme.

- **Calcul du prix du put américain**

		Put américain : $x_0 = \$40$, $r = 5\%$			
σ	**T**	K	$\mathbf{P^*_{MA}}$	$\mathbf{P_{EDP}}$	**Err**
20%	1	35	0.006	0.00	6.10^{-3}
		40	0.8578	0.8469	$1.09.10^{-2}$
		45	5.0	5.0	0.0
	4	35	0.1987	0.1996	9.10^{-4}
		40	1.5880	1.5680	2.10^{-2}
		45	5.0752	5.0783	$3.1.10^{-3}$
	7	35	0.4299	0.4289	$3.3.10^{-3}$
		40	1.9701	1.9731	3.10^{-3}
		45	5.2427	5.2494	$6.7.10^{-3}$
40%	1	35	0.249	0.241	8.10^{-3}
		40	1.775	1.742	$3.3.10^{-2}$
		45	5.312	5.275	$2.7.10^{-2}$
	4	35	1.342	1.323	$1.9.10^{-2}$
		40	3.388	3.371	$1.7.10^{-2}$
		45	6.499	6.472	$2.7.10^{-2}$
	7	35	2.155	2.221	$5.6.10^{-2}$
		40	4.331	4.308	$2.3.10^{-2}$
		45	7.372	7.355	$1.7.10^{-2}$

- **Calcul du Delta et du Gamma**

		Delta et Gamma d'un Put américain : $x_0 = \$40$, $r = 5\%$						
σ	**T**	K	$\mathbf{\Delta^*_M}$	$\mathbf{\Delta_E}$	$\mathbf{E_r^\Delta}$	$\mathbf{\Gamma^*_M}$	$\mathbf{\Gamma_E}$	$\mathbf{E_r^\Gamma}$
20%	1	35	-0.01	-0.016	6.10^{-3}	0.0012	0.0013	1.10^{-4}
		40	-0.46	-0.48	2.10^{-2}	0.172	0.169	3.10^{-3}
		45	-0.995	-0.994	5.10^{-3}	0.019	0.012	7.10^{-3}
	4	35	-0.099	-0.097	2.10^{-3}	0.039	0.036	3.10^{-3}
		40	-0.47	-0.45	2.10^{-2}	0.088	0.092	4.10^{-3}
		45	-0.882	-0.881	1.10^{-3}	0.074	0.083	9.103^{-3}
	7	35	-0.149	-0.141	8.10^{-3}	0.042	0.038	4.10^{-3}
		40	-0.441	-0.432	9.10^{-3}	0.065	0.071	6.10^{-3}
		45	-0.791	-0.799	8.10^{-3}	0.071	0.079	8.10^{-3}
40%	1	35	-0.121	-0.109	$1.2.10^{-2}$	0.045	0.042	3.10^{-3}
		40	-0.489	-0.472	$1.7.10^{-2}$	0.088	0.087	1.10^{-3}
		45	-0.869	-0.835	$3.4.10^{-2}$	0.051	0.054	3.10^{-3}
	4	35	-0.241	-0.234	7.10^{-3}	0.042	0.037	5.10^{-3}
		40	-0.466	-0.442	$2.4.10^{-2}$	0.047	0.045	2.10^{-3}
		45	-0.674	-0.649	$2.5.10^{-2}$	0.039	0.044	5.10^{-3}
	7	35	-0.277	-0.254	$2.3.10^{-2}$	0.036	0.027	9.10^{-3}
		40	-0.454	-0.421	$3.3.10^{-2}$	0.038	0.036	2.10^{-3}
		45	-0.601	-0.583	$1.8.10^{-2}$	0.031	0.032	1.10^{-3}

- **Calcul du Theta**

		Theta d'un Put américain : $x_0 = \$40$, $r = 5\%$			
σ	**T**	K	$\mathbf{\Theta^*_M}$	$\mathbf{\Theta_E}$	$\mathbf{E_r^\Theta}$
20%	1	35	-0.15	-0.23	8.10^{-2}
		40	-4.77	-5.01	$2.4.10^{-1}$
		45	-0.04	0	0.04
	4	35	-0.95	-0.95	0
		40	-1.91	-2.03	$1.2.10^{-1}$
		45	-0.59	-0.64	5.10^{-2}
	7	35	-0.92	-0.89	3.10^{-2}
		40	-1.24	-1.37	$1.3.10^{-1}$
		45	-0.56	-0.59	3.10^{-2}

		Theta d'un Put américain : $x_0 = \$40, \quad r = 5\%$			
σ	**T**	K	$\Theta^*_{\mathbf{M}}$	$\Theta_{\mathbf{E}}$	$\mathbf{E}_{\mathbf{r}}^{\Theta}$
40%	1	35	-4.87	-4.77	1.10^{-1}
		40	-10.51	-10.76	$2.5.10^{-1}$
		45	-5.66	-5.57	9.10^{-2}
	4	35	-3.99	-3.71	$2.8.10^{-1}$
		40	-4.85	-4.68	$1.7.10^{-1}$
		45	-4.00	-4.02	2.10^{-2}
	7	35	-3.11	-2.88	$2.3.10^{-1}$
		40	-3.42	-3.29	$1.3.10^{-1}$
		45	-2.99	-3.02	3.10^{-3}

3.2 Cas multi-dimensionnel

Nous testons notre algorithme dans le cas de la dimension 3. Ce choix nous est imposé par le fait que si nous voulons comparer nos résultats numériques avec des résultats obtenus par des algorithmes déterministes, nous devons nous restreindre à ce cas.

La fonction pay-off de notre put sera définie par : $\Psi(x) = \Big(K - \max(x_1, x_2, x_3)\Big)_+$, où K représente le strike de notre option.
(X_t) désignera la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$(EDS)\begin{cases} \dfrac{dX_t^{(i)}}{X_t^{(i)}} = (r - q_i)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_t^{(j)}, \\ x_0 \in \mathcal{F}_0, \end{cases}$$

où r désigne le taux d'actualisation, q_i le dividende de l'actif $X^{(i)}$ et $(\sigma_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ désigne la matrice de diffusion définie comme $\Sigma = (\sigma\sigma^T)$,

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & m\sigma_1\sigma_2 & m\sigma_1\sigma_3 \\ m\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & m\sigma_2\sigma_3 \\ m\sigma_1\sigma_3 & m\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } m \in [-1, 1].$$

Remarque : *Afin de faciliter nos tests numériques, nous avons opté pour une corrélation constante entre toutes les composantes du processus* (X_t).

- **Calcul du Prix**

		Put américain : $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = \$40$			
		$\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$, $\sigma_3 = 50\%$, $r = 5\%$			
m	**T**	K	$\mathbf{P}^*_{\mathbf{MA}}$	$\mathbf{P}_{\mathbf{EDP}}$	$\mathbf{Err_r}$
0%	1	35	0.00	0.00	0
		40	0.22	0.23	1.10^{-2}
		45	5.0	5.0	0.0
	4	35	0.03	0.01	2.10^{-2}
		40	0.45	0.45	0
		45	5.00	5.00	0
	7	35	0.04	0.04	0
		40	0.57	0.58	1.10^{-2}
		45	5.00	5.00	0
50%	1	35	0.00	0.00	0
		40	0.47	0.49	2.10^{-2}
		45	5.0	5.0	0.0
	4	35	0.12	0.09	3.10^{-2}
		40	0.91	0.94	3.10^{-2}
		45	5.00	5.00	0
	7	35	0.25	0.20	5.10^{-2}
		40	1.26	1.21	5.10^{-2}
		45	5.00	5.00	0
100%	1	35	0.009	0.01	1.10^{-3}
		40	0.86	0.84	2.10^{-2}
		45	5.0	5.0	0.0
	4	35	0.20	0.19	1.10^{-2}
		40	1.58	1.56	2.10^{-2}
		45	5.00	5.00	0.
	7	35	0.44	0.42	2.10^{-2}
		40	1.97	1.98	2.10^{-2}
		45	5.18	5.20	2.10^{-2}

Conclusion : *Au vu des résultats donnés ci-dessus, on peut observer un bon comportement de notre algorithme dans les diverses situations envisagées. En particulier, le calcul des différentes grecques se révèlent d'une précision très satisfaisante. Toutefois et cela sera l'objet de la remarque donnée ci-dessous, pour utiliser l'approche décrite dans ce rapport, il est* **impératif** *d'utiliser les techniques de localisation introduites précédemment. Dans le cas contraire, les résultats obtenus peuvent-être mauvais voir dans certaines situations faux. Afin de mettre l'accent sur cette remarque, nous allons donner deux exemples numériques significatifs.*

- **Comparaison entre les prix calculés avec et sans méthode de localisation**

Comme dit précédemment, afin de mettre en avant l'importance de l'utilisation des techniques de localisation et de partitionnement, nous présentons quelques résultats obtenus sans utiliser ces dernières. De plus, nous précisons à chaque fois les temps de calcul mis pour obtenir ces résultats. Le temps indiqué est un temps *cpu* de simulation. Ce temps dépend bien entendu de la machine utilisée, ici un SPARC Enterprise 450 de capacité 512 Meg cadencé à 250 Mhz. Afin de faciliter les comparaisons, nous donnons la correspondance en temps svu, dont l'unité est le temps de simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ par notre générateur (suite pseudo-aléatoire de la librairie NAG). La correspondance est ici : $1svu \simeq 10^{-8}$ cpu. Il sera ainsi plus aisé de faire des comparaisons de performance indépendamment des machines utilisées. Ainsi $409.cpu$ 6.52 s 99% indiquent respectivement le temps *cpu*, le temps écoulé pour l'utilisateur et le pourcentage de mémoire utilisée.

Dans le cas $\sigma = 0.2$, $T = 7$ mois et $K = 45$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{MA} &= 6.2864 \text{ pour un temps de calcul de } 409.cpu\ \ 6.52\ s\ 99\% \\ P_{MA} &= 5.2427 \text{ pour un temps de calcul de } 36.cpu\ \ 0.38\ s\ 95\% \\ P_{EDP} &= 5.2494. \end{aligned}$$

Dans le cas $\sigma = 0.4$, $T = 7$ mois et $K = 45$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{MA} &= 8.6035 \text{ pour un temps de calcul de } 409.cpu\ \ 6.52\ s\ 99\% \\ P_{MA} &= 7.3578 \text{ pour un temps de calcul de } 36.cpu\ \ 0.38\ s\ 95\% \\ P_{EDP} &= 7.3551. \end{aligned}$$

4 Annexe I : rappel de quelques formules élémentaires du calcul de Malliavin

Nous donnons dans cette section les principaux résultats concernant le calcul de Malliavin. Toutefois, les résultats concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la densité d'un processus de diffusion, solution d'une équation différentielle stochastique par rapport à la mesure de Lebesgue ne seront pas énoncés. Ces résultats ne sont pas nécessaires à l'élaboration des lemmes.
Pour des compléments d'informations, nous renvoyons le lecteur au livre de Nualart [17].

4.1 Introduction et notations

Le calcul de Malliavin s'appuie sur un calcul différentiel sur l'espace de Wiener pour établir par une méthode probabiliste des résultats d'existence de densité régulière pour la loi de la solution d'une équation différentielle stochastique . La méthodologie se décompose de la manière suivante,

1. Un critère général d'existence d'une densité régulière pour la loi d'un vecteur aléatoire, en terme de non dégénerescence de la matrice de "covariance de Malliavin".
2. La preuve que dans le cas d'une équation différentielle stochastique la condition de rang d'Hörmander (au point de départ de l'équation différentielle stochastique) entraîne la non-dégénerescence de la matrice de covariance de Malliavin.
3. Un critère général de régularité de la densité de la loi d'un vecteur aléatoire en terme d'appartenance à tous les $L^p(\Omega)$ de l'inverse du déterminant de la matrice de covariance de Malliavin.

Notations :

d désignera un entier strictement positif.
Ω désignera l'espace $\mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^d)$.
$\mathcal{F}$ désignera la tribu borélienne sur Ω munie de la topologie uniforme sur les compacts.
$\mathbb{P}$ désignera la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
En d'autres termes, le processus (W_t) défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par

$$W_t = \omega_t,$$

est un processus de Wiener standard (i.e processus canonique).
$\mathcal{F}_t$ désignera la filtration naturelle du mouvement Brownien, (i.e $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$.
$\mathcal{P}$ désignera la tribu sur $[0,t] \times \Omega$ des ensembles $\mathcal{F}_t$−progressivement mesurables.
$\mathbb{H}$ désignera l'espace $L^2(\,]\,0,t\,[\,,\mathbb{R}^d)$.
$(.,.)$ désignera le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et $\|.\|_2$ désignera la norme déduite de ce produit scalaire (i.e $\|f\|_2^2 = (f,f)$).
$S \subset L^2([0,T] \times \Omega)$ désignera l'ensemble des variables aléatoires élémentaires F de la forme :

$$F := f\left(\delta(h_1), \ldots, \delta(h_n)\right), \tag{39}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_K^\infty$, $h_1, \ldots h_n \in \mathbb{H}$ et

$$\delta(h_j) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^{+\infty} h_j^i(t) dW_t^i,$$

désignera l'intégrale de Wiener de h_j, $\forall j = 1, \ldots, n$.

4.2 Enoncés des propriétés élémentaires du calcul de Malliavin

Définition 4.2.1 *Si F est de la forme (39), alors on définit le gradient de F comme l'élément de $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ défini par :*

$$D_t F := \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\delta(h_1), \ldots, \delta(h_n)) h_i(t). \tag{40}$$

Proposition et définition 4.2.2 *On appelle intégrale de Skohorod, l'opérateur $\delta = D^*$ (i.e δ est l'opérateur non borné de $L^2(\Omega; \mathbb{H})$ dans $L^2([0,T] \times \Omega)$) défini par :*

1. *$Dom(\delta)$ est l'ensemble des $u \in L^2(\Omega; \mathbb{H})$ qui sont tels qu'il existe une constante C strictement positive avec :*

$$\left| \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (u_t, D_t F) dt \right] \right| \leq C \|F\|_2, \quad \forall F \in S. \tag{41}$$

2. *Si $u \in Dom(\delta)$, $\delta(u)$ est l'élément de $L^2([0,T] \times \Omega)$ (dont l'existence est assurée par le théorème de Riesz) qui satisfait :*

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (u_t, D_t F) dt \right], \quad \forall F \in S. \tag{42}$$

Remarque : *L'égalité (42) est appelée formule d'intégrations par parties qui fait intervenir l'intégrale d'Itô dans le cas adapté.*

Proposition 4.2.3

1. *$L^2(\Omega \times]0, t[, \mathcal{P}, d\mathbb{P} \times dt; \mathbb{R}^d) \subset Dom(\delta)$.*
2. *Si $u \in L^2(\Omega \times]0, t[, \mathcal{P}, d\mathbb{P} \times dt; \mathbb{R}^d)$, alors $\delta(u)$ est l'intégrale d'Itô (i.e $\int_0^t (u_s, dW_s)$).*

Il existe un autre cas où l'on a une formule explicite pour l'intégrale de Skohorod qui est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.2.4 (Intégration par parties (bis)) *Si $h \in \mathbb{H}$ et $F \in S$, alors :*

1. *$hF \in Dom(\delta)$.*

2. $\delta(hF) = F\delta(h) - \int_0^{+\infty} h_s D_s F ds$

Remarque : On ne suppose aucune condition d'adaptation de la variable aléatoire F. En particulier, F pourra être une variable aléatoire anticipante.

La proposition 4.2.4 est une conséquence immédiate de la définition de δ et du lemme suivant :

Lemme 4.2.5 *Si F, $G \in S$ alors,*

1. *$FG \in S$,*
2. *$D_t(FG) = FD_t(G) + GD_t(F)$.*

On désignera par $\|.\|_{1,2}$ la norme sur S définie par :

$$\|F\|_{1,2} := \sqrt{\mathbb{E}[F]^2} + \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}(D_tF)^2 dt\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathbb{D}^{1,2}$ sera défini comme la fermeture de S pour la norme $\|.\|_{1,2}$ (i.e $\mathbb{D}^{1,2} = \overline{S}^{\|\cdot\|_{1,2}}$).

Il résulte de la proposition 4.2.4 que $\mathbb{H} \otimes S \subset Dom(\delta)$.
De ce fait, $Dom(\delta)$ est dense dans $L^2(\Omega; \mathbb{H})$ et on en déduit que D est fermable.
La fermeture de D (que nous noterons encore D par abus de notation) est une application linéaire continue de $\mathbb{D}^{1,2}$ dans $L^2(\Omega; \mathbb{H})$.
La proposition 4.2.4 et le lemme 4.2.5 restent vrais avec $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $G \in \mathbb{D}^{1,2}$.
Remarquons en outre que si F est $\mathcal{F}_t$−adapté alors,

$$D_rF = 0,\ \forall r > t.$$

Remarque : *On peut noter l'analogie avec les espaces de Sobolev définis sur $\mathbb{R}^d$, où S joue ici le rôle de l'espace des fonctions $\mathcal{C}_K^\infty$.*

Le lemme 4.2.8 énoncé ci-après permet sous certaines hypothèses de calculer la dérivée de Malliavin de l'intégrale de Lebesgues et d'une intégrale stochastique. Le lemme 4.2.9, quant à lui, permet de calculer l'espérance et la variance d'une intégrale de Skohorod. Mais avant de donner ces deux lemmes, nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 4.2.6 $\mathbf{L}^{1,2}$ *désignera l'ensemble des processus $u \in L^2([0,T] \times \Omega)$ tels que pour tout $s \in [0,t]$, $u_s \in \mathbb{D}^{1,2}$.*
De plus, il existe une version mesurable de $D_v(u_s)$ par rapport à s et v telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^t [D_s(u_v)]^2 \mu(ds)\mu(dt)\right] < \infty. \tag{43}$$

La norme de $\mathbf{L}^{1,2}$ notée $\|.\|_{\mathbf{L}^{1,2}}$ sera définie comme :

$$\|F\|_{\mathbf{L}^{1,2}} = \|F\|_{L^2(\Omega\times[0,t])} + \|DF\|_{L^2(\Omega\times[0,t])}.$$

On montre facilement la proposition suivante :

Proposition 4.2.7 $\mathbf{L}^{1,2}$ *muni de la norme* $\|.\|_{\mathbf{L}^{1,2}}$ *est un espace de Hilbert. De plus* $\mathbf{L}^{1,2}$, *est isomorphe à* $L^2([0,t];\mathbb{D}^{1,2})$ *et* $\mathbf{L}^{1,2} \subset Dom(\delta)$.

A partir de la définition et de la proposition données ci-dessus, on montre les deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.8 *Si* $u \in \mathbf{L}^{1,2}$ *alors :*

1. $\int_0^t u_s ds$ *et* $\int_0^t u_s dW_s \in \mathbb{D}^{1,2}$.
2. $D_t\left[\int_0^t u_s ds\right] = \int_t^{+\infty} D_t[u_s]ds$.
3. $D_t^j\left[\int_0^{+\infty} u_s dW_s^j\right] = u_t\delta_{ij} + \int_t^{+\infty} D_t[u_s]dW_s^i$ *où* δ_{ij} *désignera le symbole de Kronecker.*

Afin de simplifier la lecture du lemme donné ci-dessous, nous utiliserons la convention d'Einsenstein du double indice répété (ex. $u_i v_i = \sum_i u_i v_i$).

Lemme 4.2.9 (Espérance et variance de l'intégrale de Skohorod)

1. $L^2(]\,0,t\,[\,;(\mathbb{D}^{1,2})^d) \subset Dom(\delta)$.
2. *Pour tout* $u \in L^2(]\,0,t\,[\,;(\mathbb{D}^{1,2})^d)$,

$$\mathbb{E}\left[\delta(u)\right] = 0. \tag{44}$$

$$\mathbb{E}\left[\delta(u)\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t u_s^2 ds\right] + \mathbb{E}\left\{\int_0^t\int_0^t \left[D_s^i(u_v^j)D_s^j(u_v^i)\right] dsdv\right\}. \tag{45}$$

5 Annexe II : preuve des lemmes 2.1.1, 2.1.5, 2.1.8 et 2.1.11

5.1 Introduction et résultats préliminaires

Avant d'effectuer les démonstrations des lemmes 2.1.1, 2.1.5, 2.1.8 et 2.1.11, nous allons commencer par introduire les différentes notations utilisées tout au long de cette section ainsi que deux lemmes. Le lemme 4.2.10 énoncé ci-dessous, donne une majoration exponentielle de la densité d'un processus de diffusion, solution d'une équation différentielle stochastique. Le lemme 4.2.11 énonce quant à lui deux résultats de convergence qui nous permettront d'établir aisément les lemmes 2.1.1, 2.1.5 et 2.1.8. La démonstration du lemme 2.1.1 est dûe à Fournié & all [7]. Toutefois, nous avons choisi de faire paraître cette démonstration car elle permet de manipuler dans un cas simple, les notions qui seront utilisées par la suite

Notations :

$\mathcal{M}(I\!R)$ désignera l'ensemble des fonctions mesurables de $I\!R$.
$\mathcal{E}_b(I\!R) := \{f \in \mathcal{M}(I\!R),\ \exists C > 0$ *et* $m \in I\!N\ ,\ |f(y)| \leq C\,(1 + |y|^m)\,.\}\,.$
Pour tout $\alpha \in I\!R$, on désignera par I_ε^α l'intervalle de $I\!R$ défini comme : $I_\varepsilon^\alpha := \,]\,\alpha_-^\varepsilon, \alpha_+^\varepsilon\,[$ avec $\alpha_\pm^\varepsilon = \alpha \pm \varepsilon$.
$\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}(x)$ désignera la fonction définie comme : pour tout $x \in I\!R$,

$$\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & si\ x \in I_\varepsilon^\alpha, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Pour tout $\delta > 0$, $g_\delta(x)$ désignera la fonction $g_\delta(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\delta}\right)$, $\forall x \in I\!R$.
$\rho_{\delta,\varepsilon}(x)$ désignera la fonction, $\rho_{\delta,\varepsilon}(x) := [g_\delta * \mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}](x)$, $\forall x \in I\!R$.
Ω désignera l'espace $\mathcal{C}^0([0,T], I\!R)$.
$\mathcal{F}$ désignera la tribu borélienne sur Ω munie de la topologie uniforme sur les compacts.
$I\!P$ désignera la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
$\mathcal{F}_t$ désignera la filtration naturelle du mouvement Brownien, (i.e $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$).
W désignera un mouvement Brownien défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, I\!P)$.
(X_t) désignera le processus log-normal défini comme :

$$X_t = X_0 \exp\left((r - d - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right),$$

où r désigne le taux d'actualisation, d le dividende et σ le coefficient de diffusion.
On notera par $p_t(x,.)$ la densité du processus (X_t^x), solution de (EDS) qui part presque sûrement de x à l'instant 0.

Afin d'établir nos résultats, nous utiliserons fréquemment les lemmes suivants :

<u>**Lemme**</u> **4.2.10 (Friedman [8] théorème 4.5 pp 141)** *La probabilité de transition du processus (X_t^x) admet une densité régulière. De plus, pour tout $T > 0$, il existe $\lambda > 0$ et une*

constante positive C_0 dépendantes de T telles que : pour tout $t \in]0,T]$,

$$p_t(x,y) \leq \frac{C_0}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\lambda t}\right). \tag{46}$$

Soit F une fonction vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :

(H1) $F \in \mathcal{E}_b(I\!R) \cap L^2(I\!R)$,

(H2) $F(.) = H(.)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $F^{(\varepsilon)}(.)$ comme : $F^{(\varepsilon)}(.) = [F * g_\varepsilon](.)$.
Par l'intermédiaire de la fonction $F^{(\varepsilon)}$, on pose :

$$G^{(\varepsilon)}_{s,t}(\alpha) := I\!E\left[\Phi(X_t)\frac{F^{(\varepsilon)}(X_s-\alpha)}{X_s^p}(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s))^q\right],$$

et

$$G_{s,t}(\alpha) := I\!E\left[\Phi(X_t)\frac{F(X_s-\alpha)}{X_s^p}(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s))^q\right].$$

<u>**Lemme**</u> **4.2.11** *Supposons l'hypothèse* **(H1)** *ou* **(H2)** *vérifiée.*
Alors, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$,

$$G^{(\varepsilon)}_{s,t}(.) \quad \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(R)} \quad G_{s,t}(.), \tag{47}$$

$$\partial_\alpha G^{(\varepsilon)}_{s,t}(.) \quad \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(R)} \quad \partial_\alpha G_{s,t}(.). \tag{48}$$

La preuve du lemme 4.2.11 sera effectuée à la fin de cette annexe.
Passons à la preuve du lemme 2.1.1.

5.2 Preuve du lemme 2.1.1

Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in I\!R^+_*$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!R)$, on pose :

$$u_{s,t}(\alpha) := I\!E[\Phi(X_t)|X_s = \alpha] \qquad \text{et} \qquad u^\varepsilon_{s,t}(\alpha) := I\!E[\Phi(X_t)|X_s \in I^\alpha_\varepsilon],$$

où ε est choisi de telle manière que $I\!P(X_s \in I^\alpha_\varepsilon) > 0$.
Remarquons que :

$$u^\varepsilon_{s,t}(\alpha) = \frac{I\!E\left[\Phi(X_t)\mathbf{1}_{I^\alpha_\varepsilon}(X_s)\right]}{I\!E\left[\mathbf{1}_{I^\alpha_\varepsilon}(X_s)\right]}. \tag{49}$$

Supposons l'égalité suivante vérifiée,

$$I\!E\left[\Phi(X_t)\mathbf{1}_{I^\alpha_\varepsilon}(X_s)\right] = I\!E\left[\Phi(X_t)\Psi^\varepsilon_{s,t}(X_s)\right], \tag{50}$$

avec $\Psi^{\varepsilon}_{s,t}(.) := \dfrac{1}{2\varepsilon}\left[(. - \alpha^{\varepsilon}_{+})_{+} - (. - \alpha^{\varepsilon}_{-})_{+}\right] \dfrac{\Delta W_{s,t}}{X_s}.$

En reportant l'égalité (50) dans l'égalité (49),

$$u^{\varepsilon}_{s,t}(\alpha) = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Psi^{\varepsilon}_{s,t}(X_s)\right] \times \left\{\mathbb{E}\left[\Psi^{\varepsilon}_{s,t}(X_s)\right]\right\}^{-1}. \tag{51}$$

Par ailleurs, on montre qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Psi^{\varepsilon}_{s,t}(X_s)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\left[(y - \alpha^{\varepsilon}_{+})_{+} - (y - \alpha^{\varepsilon}_{-})_{+}\right] \exp\left[-\frac{(x_0 - y)^2}{2s}\right] dy. \tag{52}$$

Muni de ce résultat, on montre

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Psi^{\varepsilon}_{s,t}(X_s)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Psi_{s,t}(X_s)\right],$$

avec $\Psi_{s,t}(x) = \dfrac{H(x-\alpha)}{x}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big).$

Ainsi, en faisant tendre ε vers zéro dans l'égalité (51) et en utilisant le résultat de convergence[22] donné ci-dessus,

$$u^{\varepsilon}_{s,t}(\alpha) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Psi_{s,t}(X_s)\right]}{\mathbb{E}\left[\Psi_{s,t}(X_s)\right]}.$$

Par ailleurs en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on montre

$$u^{\varepsilon}_{s,t}(.) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u_{s,t}(.).$$

On conclut la preuve du lemme à l'aide des deux résultats de convergence donnés ci-dessus.

• Preuve de l'égalité (50)

Du fait que la fonction $\mathbf{1}_{I^{\alpha}_{\varepsilon}}$ intervenant dans l'égalité (50) est une fonction discontinue, il faut, et cela afin d'utiliser les résultats concernant le calcul de Mallavin, régulariser cette dernière à l'aide de la fonction g_δ. On note par $\rho_{\delta,\varepsilon}$ ce résultat de régularisation.

Posons $I_{\delta,\varepsilon}$ la fonction de répartion de $\rho_{\delta,\varepsilon}$, i.e $\quad I_{\delta,\varepsilon}(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \rho_{\delta,\varepsilon}(y)dy.$

Par la proposition 4.2.3 et par la formule d'intégration par parties (cf proposition 4.2.4), on a pour tout processus $\eta_r \in L^2([0,T]\times\Omega)$,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\int_0^t \eta_r dW_r\right] = \mathbb{E}\left\{\int_0^t D_r\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]\eta_r dr\right\}. \tag{53}$$

Par la formule de dérivation du produit[23], on obtient pour tout $r \in [0,T]$,

$$D_r\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = D_r\left[\Phi(X_t)\right]I_{\delta,\varepsilon}(X_s) + \Phi(X_t)D_r\left[I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]. \tag{54}$$

[22] Ce résultat de convergence étant vraie pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$, il est en particulier vérifié lorsque $\Phi \equiv \mathbf{1}_{R}$.

[23] cf lemme 4.2.5 pp 30.

Maintenant en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée[24], on obtient :

$$D_r\left[\Phi(X_t)\right] = \Phi^{'}(X_t) D_r(X_t) \qquad \text{et} \qquad D_r\left[I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = \rho_{\delta,\varepsilon}(X_s) D_r(X_s). \tag{55}$$

Par ailleurs, il est aisé de montrer que pour tout $(r,t) \in [0,T]^2$, $\qquad D_r(X_t) = \sigma X_t \mathbf{1}_{[0,t]}(r)$.

Alors en utilisant l'égalité ci-dessus dans l'expression (55) et en reportant le résultat ainsi obtenu dans l'égalité (54), l'égalité (53) se récrit comme :

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^t D_r\left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]\eta_r dr\right\} = \sigma \mathbb{E}\left[\Phi^{'}(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(X_s) X_t \int_0^t \eta_r dr\right] + \sigma \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s) X_s \int_0^s \eta_r dr\right]. \tag{56}$$

A présent, il faut choisir un processus $\eta_r \in L^2([0,T]\times\Omega)$ tel que :

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = \mathbb{E}\left\{\int_0^t D_r\left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]\eta_r dr\right\}.$$

Par l'égalité (56), il suffit pour obtenir l'égalité ci-dessus que le processus (η_r) vérifie les conditions suivantes :

$$\sigma X_s \int_0^s \eta_r dr = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^t \eta_r dr = 0.$$

Un choix possible consiste à prendre :

$$\eta_r = \frac{1}{\sigma s(t-s) X_s}\left[(t-s)\mathbf{1}_{[0,s]}(r) - s\mathbf{1}_{[s,t]}(r)\right].$$

Ainsi, en injectant ce choix de η_r dans l'égalité (56) et en utilisant l'égalité (53), il vient

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\int_0^t \eta_r dW_r\right]. \tag{57}$$

Remarquons que :

$$\int_0^t \eta_r dW_r = \frac{1}{\sigma s(t-s)}\left[(t-s)\int_0^s \frac{1}{X_s} dW_r - \frac{s(W_t - W_s)}{X_s}\right].$$

Du fait que pour tout $r \in [0,s]$, la variable aléatoire $\frac{1}{X_s}$ anticipe la filtration $\mathcal{F}_r$, il faut donc pour calculer l'intégrale stochastique présente dans le terme de droite de l'égalité ci-dessus utiliser un résultat d'intégration par parties. Pour cela, on utilise la proposition 4.2.4 avec la variable aléatoire $\frac{1}{X_s}$ et le processus $u_r \equiv 1$.
Il vient :

$$\int_0^s \frac{1}{X_s} dW_r = \frac{W_s}{X_s} - \int_0^s D_r\left(\frac{1}{X_s}\right) dr = \frac{1}{X_s}(W_s - \sigma s).$$

Et donc,

$$\int_0^t \eta_r dW_r = \frac{1}{\sigma s(t-s)}\left[tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\right]. \tag{58}$$

[24]cf l'égalité (40) pp 29.

En reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (57), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = \frac{1}{\sigma s(t-s)}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{I_{\delta,\varepsilon}(X_s)}{X_s}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)\right]. \tag{59}$$

En utilisant l'assertion (47) du lemme 4.2.11, on montre :

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}(X_s)\right]. \tag{60}$$

Par ailleurs, on montre que :

$$I_{\delta,\varepsilon}(.) \xrightarrow[\delta\to 0]{L^p(\mathbb{R})} \left[(. - \alpha_+^\varepsilon)_+ - (. - \alpha_-^\varepsilon)_+\right].$$

En utilisant de nouveau l'assertion (47) du lemme 4.2.11 et le résultat donné ci-dessus, on montre:

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{I_{\delta,\varepsilon}(X_s)}{X_s}(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s))\right] \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Psi_{s,t}^\varepsilon(X_s)\right],$$

avec $\Psi_{s,t}^\varepsilon(.) := \dfrac{1}{X_s}\left[(. - \alpha_+^\varepsilon)_+ - (. - \alpha_-^\varepsilon)_+\right]\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)$.

L'égalité (59) étant vraie pour tout $\delta > 0$, il suffit pour conclure de faire tendre δ vers zéro dans cette dernière et d'utiliser les deux résultats de convergence donnés ci-dessus.

■

5.3 Preuve des lemmes 2.1.4 et 2.1.6

La preuve des égalités (18) et (25) des lemmes 2.1.4 et 2.1.6 découlent directement du lemme suivant :

Lemme 5.3.1 *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q\right] &= -\frac{1}{\sigma s(t-s)}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^{q+1}\right] - \\ -p\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^q\right] &+ \frac{qt}{\sigma}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^{q-1}\right].\end{aligned} \tag{61}$$

Remarque : Dans le cas où $p = q = 1$, le lemme ci-dessus est énoncé dans Fournié & al [7].

L'égalité (18) résulte d'une utilisation directe de l'égalité ci-dessus en prenant dans celle-ci $p = 1$ et $q = 1$.
Pour établir l'égalité (25), on part de l'égalité (18).
Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q\right] &= -\frac{1}{\sigma s(t-s)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}(\Delta W_{s,t})^2\right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}\Delta W_{s,t}\right] + \frac{t}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}\right].\end{aligned}$$

Pour conclure la preuve du lemme 2.1.8 on utilise de nouveau l'égalité (61).

Passons à présent à la preuve du lemme 5.3.1.

• Preuve du lemme 5.3.1

Afin d'établir l'égalité (61), nous réitérons le raisonnement effectué pour établir le lemme 1.2.1. Pour faciliter la lecture de la preuve du lemme 5.3.1, on pose :

$$\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) := \Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q \qquad \text{avec} \qquad \rho_\varepsilon(x) := [H(.)*g_\varepsilon](x).$$

$$\psi_{s,t}(\alpha) := \Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q.$$

$$A_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) := \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}\left[\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)\right] \qquad \text{et} \qquad A_{s,t}(\alpha) := \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}\left[\psi_{s,t}(\alpha)\right].$$

Par le lemme 4.2.10 et en utilisant l'hypothèse que $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$, on montre que l'on peut permuter l'espérance avec la dérivation. Ainsi,

$$A_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) = -\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{h_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q\right], \tag{62}$$

avec $h_\varepsilon(x) := \frac{\partial}{\partial y}\rho_\varepsilon(y)_{|y=x}$.

En utilisant les différentes propriétés concernant la dérivée de Malliavin, on a :

$$\begin{aligned} D_r[\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)] &= \\ &= \sigma\Phi'(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q X_t \mathbf{1}_{[0,t]}(r) + \sigma\Phi(X_t)\left[\frac{h_\varepsilon(X_s-\alpha)X_s - p\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}\right](\Delta W_{s,t})^q\mathbf{1}_{[0,s]}(r) + \\ &+ q\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^{q-1}\left(t\mathbf{1}_{[0,s]}(r) - s\mathbf{1}_{[0,t]}(r)\right). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} D_r[\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)]\eta_r dr\right] &= \\ &= \sigma\mathbb{E}\left[\Phi'(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q X_t\int_0^t \eta_r dr\right] - p\sigma\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^q\int_0^s \eta_r dr\right] + \\ &+ \sigma\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{h_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^{p-1}}(\Delta W_{s,t})^q\int_0^s \eta_r dr\right] + \\ &+ q\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^p}(\Delta W_{s,t})^{q-1}\left(t\int_0^s \eta_r dr - s\int_0^t \eta_r dr\right)\right]. \end{aligned} \tag{63}$$

Afin de faire apparaître dans l'égalité ci-dessus le terme $A_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)$, il faut déterminer un processus (η_r) tel que :

$$\sigma X_s\int_0^s \eta_r dr = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_s^t \eta_r dr = 0.$$

Un choix possible est donné par :

$$\eta_r = \frac{1}{\sigma s(t-s)X_s}\left[(t-s)\mathbf{1}_{[0,s]}(r) - s\mathbf{1}_{[s,t]}(r)\right].$$

En reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (63) et en utilisant le résultat d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} A^{(\varepsilon)}_{s,t}(\alpha) &= -\mathbb{E}\left[\psi^{(\varepsilon)}_{s,t}(\alpha)\int_0^{+\infty}\eta_r dW_r\right] - p\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^q\right] + \\ &+ \frac{tq}{\sigma}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^{q-1}\right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (58) dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} A^{(\varepsilon)}_{s,t}(\alpha) &= -\frac{1}{\sigma s(t-s)}\mathbb{E}\left[\psi^{(\varepsilon)}_{s,t}(\alpha)\frac{\Delta W_{s,t}}{X_s}\right] - p\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^q\right] + \\ &+ \frac{tq}{\sigma}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^{q-1}\right]. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers zéro et en utilisant l'assertion (47) du lemme 4.2.11, on montre :

$$\begin{aligned} A^{(\varepsilon)}_{s,t}(\alpha) &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{\sigma s(t-s)}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^{q+1}\right] - \frac{p}{\sigma}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^q\right] + \\ &+ \frac{tq}{\sigma}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^{p+1}}(\Delta W_{s,t})^{q-1}\right]. \end{aligned}$$

A partir du résultat de convergence donné ci-dessus et de l'assertion (48) du lemme 4.2.11 on conclut la preuve du lemme.

■

5.4 Preuve du lemme 2.1.11

La démonstration du lemme 2.1.11 suit en grande partie la démonstration faite pour établir le lemme 5.3.1. De ce fait, nous ne ferons qu'indiquer les grandes lignes de la démonstration. En particulier, l'étape de régularisation de la fonction d'Heaviside sera ommise.
Avant d'établir la preuve de l'égalité (30) du lemme 2.1.11, nous précisons les notations. On pose,

$$\psi_{s,t}(\alpha) := \Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\Delta W_{s,t} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{s,t}(\alpha) := \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\Delta W_{s,t}\right].$$

$$d(s,\alpha) := \frac{1}{\sigma}\left[\ln(\alpha) - \ln(x_0) + (\frac{\sigma^2}{2} - r)s\right].$$

Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}X_t = (W_t - \sigma t)X_t \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}\alpha = [d(s,\alpha) - \sigma s]\alpha.$$

Par simple dérivation,

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{s,t}(\alpha) &= I\!\!E\left[\Phi'(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\Delta W_{s,t}(W_t-\sigma t)X_t\right]+\\
&+ I\!\!E\left[\Phi(X_t)\left(\frac{\delta_\alpha(X_s)X_s-H(X_s-\alpha)}{X_s}\right)\Delta W_{s,t}(W_s-\sigma s)\right]-\\
&- [d(s,\alpha)-\sigma s]\alpha I\!\!E\left[\Phi(X_t)\frac{\delta_\alpha(X_s)}{X_s}\Delta W_{s,t}\right]+s(t-s)I\!\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\right]\\
&:= A_1+A_2+A_3+A_4. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Pour conclure la preuve du lemme 2.1.11, il suffit d'établir les deux égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_1+A_2 &= \frac{1}{\sigma s(t-s)}I\!\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\Delta W_{s,t}\Big((t-s)W_s^2+s(W_t-W_s)^2-\sigma s(t-s)W_t-2s(t-s)\Big)\right]-\\
&- I\!\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}(tW_s-sW_t)\right]. \qquad (65)\\
A_3 &= -\frac{[d(s,\alpha)-\sigma s]\alpha}{\sigma s(t-s)}I\!\!E\left\{\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s^2}\left[(\Delta W_{s,t})^2+\sigma s(t-s)\Delta W_{s,t}-st(t-s)\right]\right\} \qquad (66)
\end{aligned}
$$

La preuve de l'égalité (66) ne sera pas effectuée, celle-ci résulte directement de l'égalité (61).

- **Preuve de l'égalité (65).**

Par un calcul déjà effectué précédemment, on montre que pour tout processus $\eta_r \in L^2([0,T]\times\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
I\!\!E\left[\int_0^{+\infty} D_r[\psi_{s,t}(\alpha)]\eta_r dr\right] &= \sigma I\!\!E\left[\Phi'(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\Delta W_{s,t}X_t\int_0^t \eta_r dr\right]+\\
&+ \sigma I\!\!E\left\{\Phi(X_t)\left[\frac{\delta_\alpha(X_s)X_s-H(X_s-\alpha)}{X_s}\right]\Delta W_{s,t}\int_0^s \eta_r dr\right\}+\\
&+ I\!\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}\left(t\int_0^s \eta_r dr - s\int_0^t \eta_r dr\right)\right]. \qquad (67)
\end{aligned}
$$

Afin de faire apparaître la quantité A_1+A_2 dans l'égalité ci-dessus, il faut prendre pour (η_r) le processus suivant :

$$
\eta_r = \frac{1}{\sigma s(t-s)}\left[(t-s)W_s\mathbf{1}_{[0,s]}(r)+s(W_t-W_s)\mathbf{1}_{[s,t]}(r)-\sigma s(t-s)\mathbf{1}_{[0,t]}(r)\right].
$$

Ainsi en injectant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (67) et en utilisant le résultat d'intégration par parties,

$$
A_1+A_2 = I\!\!E\left[\psi_{s,t}(\alpha)\int_0^{+\infty}\eta_r dW_r\right]-I\!\!E\left[\Phi(X_t)\frac{H(X_s-\alpha)}{X_s}(tW_s-sW_t)\right].
$$

On conclut la preuve de l'égalité (65) en utilisant le choix de (η_r) donné ci-dessus et le fait que pour tout $(s,\theta) \in [0,T]^2$ avec $s \le \theta$,

$$\int_s^\theta W_\theta dW_r = W_\theta(W_\theta - W_s) - (\theta - s).$$

∎

5.5 Preuve des résultats intermédiaires

Nous n'allons dans cette section qu'établir le lemme 4.2.11.
Rappelons que l'on a posé pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ et toute fonction F vérifiant l'hypothèse **(H1)** ou **(H2)**,

$$G_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) := \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{F^{(\varepsilon)}(X_s-\alpha)}{X_s^p}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)^q\right],$$

et

$$G_{s,t}(\alpha) := \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{F(X_s-\alpha)}{X_s^p}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)^q\right].$$

• Preuve de l'assertion (47)

On forme la différence entre les fonctions $G_{s,t}^{(\varepsilon)}$ et $G_{s,t}$ puis on prend la norme $L^2(\mathbb{R})$ de cette différence. Ainsi,

$$\|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) - G_{s,t}(.)\|^2_{L^2(R)} \;=\; \int_R \left|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(x) - G_{s,t}(x)\right|^2 dx.$$

A partir de l'assertion (I) et de l'égalité ci-dessus,

$$\|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) - G_{s,t}(.)\|^2_{L^2(R)} \;\le\; \int_R \mathbb{E}\left[\frac{\Phi(X_t)}{X_s^p}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)^q \left|F^{(\varepsilon)}(X_s-x) - F(X_s-x)\right|\right]^2 dx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) - G_{s,t}(.)\|^2_{L^2(R)} \;\le\; \mathbb{E}\left[\frac{\Phi(X_t)}{X_s^p}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)^q\right]^2 \int_R \mathbb{E}\left[F^{(\varepsilon)}(X_s-x) - F(X_s-x)\right]^2 dx. \quad (68)$$

En utilisant l'hypothèse que $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ et le lemme 4.2.10, on montre qu'il existe une constante C_T strictement positive dépendante de T et un entier k telle que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(X_t)}{X_s^p}\Big(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\Big)^q\right]^2 \le C_T\left(1 + |x_0|^k\right).$$

Ainsi, en reportant cette inégalité dans l'inégalité (68),

$$\begin{aligned}\|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) - G_{s,t}(.)\|^2_{L^2(R)} &\le C_T \int_R \mathbb{E}\left[F^{(\varepsilon)}(X_s-x) - F(X_s-x)\right]^2 dx \\ &= \int_R\int_R \left[F^{(\varepsilon)}(y-x) - F(y-x)\right]^2 p_s(x_0,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.10, on montre qu'il existe une constante C_T strictement positive dépendante de T telle que :

$$\|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) - G_{s,t}(.)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_T}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[F^{(\varepsilon)}(y-x) - F(y-x)\right]^2 \exp\left(-\frac{(x_0-y)^2}{2\lambda s}\right) dydx.$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\|G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) - G_{s,t}(.)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \frac{C_T}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[F^{(\varepsilon)}(y-x) - F(y-x)\right]^2 dx \exp\left(-\frac{(x_0-y)^2}{2\lambda s}\right) dy \\
&\leq C\|F^{\varepsilon}(.) - F(.)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \qquad (69)
\end{aligned}$$

Sous les hypothèses **(H1)** ou **(H2)**, il est évident de montrer la convergence de suite (F^{ε}) vers F. Et donc, en reportant ce résultat dans l'inégalité ci-dessus et en utilisant la continuité de la fonction $G_{s,t}^{(\varepsilon)}$, on conclut la preuve de l'assertion (47).

$\blacksquare$

• Preuve de l'assertion (48)

(I) Supposons qu'il existe une fonction f telle que :

$$G_{s,t}^{(\varepsilon)}(x) := \mathbb{E}\left[f(X_s, W_s)F^{(\varepsilon)}(X_s - x)\right], \qquad (70)$$

$$G_{s,t}(x) := \mathbb{E}\left[f(X_s, W_s)F(X_s - x)\right], \qquad (71)$$

avec pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{x^p}\mathbb{E}\left[\Phi(xX_{t-s})\left(ty - sW_{t-s} + \sigma s(t-s)\right)^q\right]$.
Supposons de plus, qu'il existe une constante C_T strictement positive dépendante de T et un entier m telle que :

$$|f(x,y)| \leq C_T(1+|y|^m)(1+|x|^q). \qquad (72)$$

Muni de ces deux résultats, la preuve de l'assertion (48) n'est qu'une réécriture de la preuve de l'inégalité (47).

• Preuve de l'égalité (70)

Remarquons,

$$\begin{aligned}
G_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{F^{(\varepsilon)}(X_s-\alpha)}{X_s^p}\left(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\right)^q \Big| \mathcal{F}_s\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\frac{F^{(\varepsilon)}(X_s-\alpha)}{X_s^p}\, \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\left(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\right)^q \Big| \mathcal{F}_s\right]\right\}. \qquad (73)
\end{aligned}$$

Posons : $\qquad A_s := \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\left(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)\right)^q \Big| \mathcal{F}_s\right].$

Dans A_s, nous utilisons successivement la propriété d'indépendance et de stationnarité des accroissements du mouvement Brownien. Ainsi, $X_{t-s} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t - X_s$ et est indépendant de $\mathcal{F}_s$. On montre qu'il existe une fonctionnelle J telle que :

$$A_s = J(X_s, W_s) \qquad \text{avec} \qquad J(x,y) := \mathbb{E}\left[\Phi(xX_{t-s})\Big((t-s)y - sW_{t-s} + \sigma s(t-s)\Big)^q\right].$$

Ainsi, en reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (73), il vient :

$$G_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) = \mathbb{E}\left[F^{(\varepsilon)}(X_s - \alpha)\frac{J(X_s, W_s)}{X_s^p}\right].$$

Afin de conclure la preuve de l'égalité (70), il suffit de poser dans l'égalité ci-dessus $f(x,y) := \dfrac{J(x,y)}{x^p}$.

• **Preuve de l'inégalité (72)**

On part de l'égalité (70). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on montre :

$$f(x,y) \leq \frac{1}{x^p}\sqrt{\mathbb{E}\left[\Phi^2(xX_{t-s})\right]\mathbb{E}\left[(ty - sW_{t-s} + \sigma s(t-s))^{2q}\right]}. \tag{74}$$

En utilisant une inégalité de convexité, il est aisé de montrer qu'il existe une constante C_T strictement positive dépendante de T telle que :

$$\mathbb{E}\left[(ty - sW_{t-s} + \sigma s(t-s))^{2q}\right] \leq C_T\left(1 + |y|^{2q}\right). \tag{75}$$

Par ailleurs en utilisant l'hypothèse que $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$, on montre qu'il existe une constante C strictement positive et un entier m tels que :

$$\mathbb{E}\left[\Phi^2(xX_{t-s})\right] \leq C\left(1 + x^{2m}\right)\mathbb{E}\left[X_{t-s}^{2m}\right]. \tag{76}$$

Par le lemme 4.2.10, on montre qu'il existe une constante C_T strictement positive dépendante de T telle que : pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[X_{t-s}^{2m}\right] \leq C_T.$$

Ainsi en reportant cette inégalité dans l'inégalité (76), il vient :

$$\mathbb{E}\left[\Phi^2(xX_{t-s})\right] \leq C_T\left(1 + x^{2m}\right).$$

Pour conclure la preuve de l'inégalité (72), il suffit de reporter les inégalités (75) et l'inégalité donnée ci-dessus dans l'inégalité (74).

■

6 Annexe III : réécriture d'une espérance conditionnelle : cas d'une diffusion quelconque

La démonstration du lemme 6.1.1 énoncée ci-dessous est une adptation de la démonstration faite par Fournie & all [7] d'un lemme de réécriture d'une espérance conditionnellle dans le cas où les coefficients de la diffusion sont homogènes en temps.

6.1 Introduction

On considère que le sous-jacent de notre actif suit une dynamique générale définie comme :

$$(E)\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \\ \\ X_0 \in \mathcal{F}_0, \end{cases}$$

où b et σ sont deux fonctions "régulières".
Par l'intermédiaire du processus (X_t), on définit les processus (Y_t) et (Z_t) comme les solutions respectives des équations intégrale suivantes : pour tout $t \in [r,T]$,

$$Y_t = 1 + \int_0^t b'(s,X_s)Y_s ds + \int_0^t \sigma'(s,X_s)Y_s dW_s \qquad (E_1).$$

$$Z_t = \int_0^t \left[b'(s,X_s)Z_s + b''(s,X_s)Y_s^2\right] ds + \int_0^t \left[\sigma'(s,X_s)Z_s + \sigma''(s,X_s)Y_s^2\right] dW_s \qquad (E_2).$$

Afin de pouvoir établir le résultat de réécriture de notre espérance conditionnelle, nous effectuons les hypothèses suivantes :

(H3) b et $\sigma \in \mathcal{C}_b^\infty(I\!\!R)$.

Il existe une constante H et une constante $\alpha \in \,]0,1[$,

$$|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| \leq C|t-s|^\alpha.$$

(H4) Il existe une constante C strictement positive telle que : pour tout $(t,x) \in [0,T] \times I\!\!R$,

$$\sigma(t,x) \geq C.$$

Remarque : A partir de l'hypothèses **(H3)** il est aisé de montrer qu'il existe une solution forte aux équations (E), (E_1) et (E_2).

Avec les hypothèses données ci-dessus, on montre le lemme suivant :

Lemme 6.1.1 (lemme de réécriture) *Supposons les hypothèses* **(H3)** *et* **(H4)** *vérifiées. Alors, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in I\!\!R_*^+$ et toute fonction $\Phi \in \mathcal{E}_b(I\!\!R)$:*

$$I\!\!E\left[\Phi(X_t)|X_s = \alpha\right] = Q_{s,t}[\Phi](\alpha) \times \left\{Q_{s,t}[\mathbf{1}_R](\alpha)\right\}^{-1},$$

avec :

$$Q_{s,t}(\Phi)(.) \quad = \quad \frac{1}{s(t-s)} I\!\!E\left\{\Phi(X_t)\frac{H(X_s - .)}{Y_s}\left[t\int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r - s\int_0^t \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r + s(t-s)\frac{Z_s}{Y_s} + \right.\right.$$

$$+ \quad (t-s)\int_0^s \left(\frac{\sigma'(r,X_r)}{\sigma(r,X_r)}Y_r - \frac{Z_r}{Y_r^2}\right) dr\Big]\Big\}. \tag{77}$$

Remarque : *En posant $\sigma(t,x) = \sigma x$ et $b(t,x) = bx$, on montre que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$Y_t = \frac{X_t}{X_0} \qquad et \qquad Z_t = 0.$$

En injectant ces deux résultats dans l'égalité (77), on retrouve le résultat du lemme 2.1.1.

La preuve du lemme 6.1.1 est fondée sur le lemme suivant :

<u>**Lemme**</u> **6.1.2** *Supposons les hypothèses* **(H3)** *et* **(H4)** *vérifiées.*
Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,T]$, $\quad X_t \in \mathbb{D}^{1,p}$.
De plus, pour tout $r \in [0,t]$,

$$D_r(X_t) = \sigma(r,X_r)\exp\left(\int_r^t \sigma'(u,X_u)dW_u + \int_r^t \left[b' - \frac{1}{2}(\sigma')^2\right](u,X_u)du\right). \tag{78}$$

Pour la preuve du lemme 6.1.2, le lecteur se réferera au livre de Nualart ([17] pp 107).

6.2 Preuve du lemme de réécriture

Supposons l'égalité suivante vérifiée :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}(X_s)\right] &= \frac{1}{s(t-s)}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\frac{\varphi^{(\varepsilon)}(X_s-.)}{Y_s}\left[t\int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r - s\int_0^t \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r +\right.\right.\\ &+ \left.\left. s(t-s)\frac{Z_s}{Y_s} + (t-s)\int_0^s \left(\frac{\sigma'(r,X_r)}{\sigma(r,X_r)}Y_r - \frac{Z_r}{Y_r^2}\right)dr\right]\right\},\end{aligned} \tag{79}$$

avec $\varphi^{(\varepsilon)}(.) := \frac{1}{2\varepsilon}\left[(.-\alpha_+^\varepsilon)_+ - (.-\alpha_-^\varepsilon)_+\right]$.

A partir de l'égalité ci-dessus, la démonstration du lemme 6.1.2 n'est qu'une adaptation de la preuve faite pour établir le lemme 2.1.1.

• Preuve de l'égalité (79)

On régularise la fonction $\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}$ intervenant dans le membre de gauche de l'égalité (79) avec la fonction $g_\delta(.)$. On note par $\rho_{\delta,\varepsilon}(.)$ ce résultat de régularisation.
Posons, $I_{\delta,\varepsilon}$, la fonction de répartion de $\rho_{\delta,\varepsilon}$, i.e $\quad I_{\delta,\varepsilon}(x) := \int_{-\infty}^x \rho_{\delta,\varepsilon}(y)dy$.
Par la proposition 4.2.3 et par la formule d'intégration par parties (cf proposition 4.2.4), on a : pour tout processus $\eta_r \in L^2([0,T]\times\Omega)$,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\int_0^t \eta_r dW_r\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t D_r\left(\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right)\eta_r dr\right]. \tag{80}$$

On montre :

$$D_r\left[\Phi(X_t)\right] = \Phi'(X_t)D_r(X_t) \qquad \text{et} \qquad D_r\left[I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = \rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)D_r(X_s). \tag{81}$$

En utilisant l'égalité (78) du lemme 6.1.2, on montre que pour tout $(r,t) \in [0,T]^2$,

$$D_r(X_t) = \sigma(r, X_r)\frac{M_{0,t}}{M_{0,r}}\mathbf{1}_{[0,t]}(r),$$

avec $M_{0,t} := \exp\left(\int_0^t \sigma'(s,X_s)dW_s + \int_0^t \left[b' - \frac{1}{2}(\sigma')^2\right](s,X_s)ds\right)$.

Alors en reportant l'égalité ci-dessus dans l'expression (81),

$$\begin{aligned} I\!\!E\left\{\int_0^t D_r\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]\eta_r dr\right\} &= I\!\!E\left[\Phi'(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)M_{0,t}\int_0^t \frac{\sigma(r,X_r)}{M_{0,r}}\eta_r dr\right] + \\ &+ I\!\!E\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)M_{0,s}\int_0^s \frac{\sigma(r,X_r)}{M_{0,r}}\eta_r dr\right]. \end{aligned} \tag{82}$$

Il faut choisir un processus $\eta_r \in L^2([0,T]\times\Omega)$ tel que :

$$I\!\!E\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = I\!\!E\left\{\int_0^t D_r\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]\eta_r dr\right\}.$$

Par l'égalité (82) il suffit afin d'obtenir l'égalité ci-dessus que le processus (η_r) vérifie les conditions suivantes :

$$M_{0,s}\int_0^s \frac{\sigma(r,X_r)}{M_{0,r}}\eta_r dr = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^t \frac{\sigma(r,X_r)}{M_{0,r}}\eta_r dr = 0.$$

Un choix possible consiste à prendre :

$$\eta_r = \frac{M_{0,r}}{\sigma(r,X_r)M_{0,s}}\left[\frac{1}{s}\mathbf{1}_{[0,s]}(r) - \frac{1}{(t-s)}\mathbf{1}_{[s,t]}(r)\right].$$

Ainsi, en injectant ce choix dans l'égalité (82) et en utilisant l'égalité (80),

$$I\!\!E\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] = I\!\!E\left[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(X_s)\int_0^t \eta_r dW_r\right]. \tag{83}$$

A présent, nous allons calculer l'intégrale stochastique définie dans l'égalité ci-dessus.
Remarquons tout d'abord que les processus $(M_{0,t})$ et (Y_t) sont indistinguables. En utilisant ce résultat et avec le choix du processus (η_r) donné précédemment,

$$\int_0^t \eta_r dW_r = \frac{1}{s}\int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)Y_s}dW_r - \frac{1}{(t-s)Y_s}\int_s^t \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r.$$

Afin de calculer la première intégrale stochastique, nous allons utiliser la proposition 4.2.4 avec la variable aléatoire $\frac{1}{Y_s}$ et le processus $u_r = \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}$.
Il vient :

$$\int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)Y_s}dW_r = \frac{1}{Y_s}\int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r + \int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}\frac{D_r(Y_s)}{Y_s^2}dr. \tag{84}$$

Il faut à présent calculer $D_r(Y_s)$. Pour cela, supposons l'égalité suivante vérifiée : pour tout $r \le t$,

$$D_r(Y_t) = \left[\frac{\sigma(r,X_r)}{Y_r} Z_t + \sigma'(r,X_r)Y_t - \sigma(r,X_r)\frac{Z_r}{Y_r^2}Y_t\right] \mathbf{1}_{[0,t]}(r). \tag{85}$$

En injectant l'égalité (85) dans l'égalité (84) et en reportant l'égalité ainsi obtenue dans l'égalité (83), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] &= \frac{1}{s(t-s)}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\frac{I_{\delta,\varepsilon}(X_s)}{Y_s}\left[t\int_0^s \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r - s\int_0^t \frac{Y_r}{\sigma(r,X_r)}dW_r + s(t-s)\frac{Z_s}{Y_s} + \right.\right. \\ &+ \left.\left. (t-s)\int_0^s \left(\frac{\sigma'(r,X_r)}{\sigma(r,X_r)}Y_r - \frac{Z_r}{Y_r^2}\right)dr\right]\right\}. \end{aligned} \tag{86}$$

A partir des hypothèses **(H3)** et **(H4)**, les résultats des lemmes 4.2.10 et 4.2.11 énoncés pour le cas d'un processus log-normal sont encore vrais pour un processus quelconque.
En partant de l'égalité ci-dessus, des lemmes 4.2.10 et 4.2.11 et en réitérant la démonstration faite pour établir l'égalité (50), il est aisé d'établir l'égalité (79).

• Preuve de l'égalité (85)

Posons $\xi_t^r := D_r(Y_t)$.
En partant de l'équation que vérifie (Y_t), on montre que le processus (ξ_t^r) est solution de l'équation suivante : pour tout $r \le t$,

$$\xi_t^r = \sigma'(r,X_r)Y_r + \int_r^t \left[b'(s,X_s)\xi_s^r + b''(s,X_s)Y_sD_r(X_s)\right]ds + \int_r^t \left[\sigma'(s,X_s)Z_s + \sigma''(s,X_s)Y_sD_r(X_s)\right]dW_s. \tag{87}$$

Or on a montré précédemment que pour tout $r \le t$, $\qquad D_r(X_t) = \sigma(r,X_r)\dfrac{M_{0,t}}{M_{0,r}}$.
Ainsi en utilisant cette égalité et en utilisant de nouveau le fait que les processus (Y_t) et $(M_{0,t})$ sont indistinguables, l'équation (87) se récrit comme :

$$\xi_t^r = \sigma'(r,X_r)Y_r + \int_r^t \left[b'(s,X_s)\xi_s^r + \frac{\sigma(r,X_r)}{Y_r}b''(s,X_s)Y_s^2\right]ds + \int_r^t \left[\sigma'(s,X_s)\xi_s^r + \frac{\sigma(r,X_r)}{Y_r}\sigma''(s,X_s)Y_s^2\right]dW_s.$$

Posons, $\qquad \mu_t := \xi_t^r - \dfrac{\sigma(r,X_r)}{Y_r}Z_t$.
Par la formule d'Itô on montre que le processus (μ_t) vérifie l'équation suivante :

$$\mu_t = \sigma'(r,X_r)Y_r - \frac{\sigma(r,X_r)}{Y_r}Z_r + \int_r^t b'(s,X_s)\mu_s ds + \int_r^t \sigma'(s,X_s)\mu_s dW_s.$$

L'équation ci-dessus est une équation linéaire en μ_t. Ainsi il est aisé de montrer que la solution est

$$\mu_t = \sigma'(r,X_r)Y_t - \frac{\sigma(r,X_r)Z_r}{Y_r^2}Y_t.$$

En utilisant la définition du processus (μ_t) dans l'égalité ci-dessus, on conclut à la preuve de l'égalité (85).

$\blacksquare$

7 ANNEXE IV : preuve des lemmes 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5

7.1 Introduction et résultats préliminaires

Avant d'effectuer les démonstrations des lemmes 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5, nous allons commencer par introduire les différentes notations utilisées tout au long de cette section ainsi que les lemmes 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3 et 7.1.4. Les lemmes 7.1.1 et 7.1.2 sont les extensions naturelles des lemmes 4.2.10 et 4.2.11 dans le cas multi-dimensionnel. Le lemme 7.1.3 énonce une formule d'intégration par parties dans ce cas. Notons qu'il existe des formules d'intégration par parties dans le cas multi-dimensionnel mais ces dernières ne peuvent être utilisées au cas qui nous intéresse. Le lemme 7.1.4 quant à lui donne la dérivée de Malliavin d'un produit de deux fonctions vectorielles dans le cas où chaque variable d'espace suit un modèle log-normal. La preuve du lemme 7.1.2 ne sera pas donnée. Celle ci est une adaptation facile de la preuve du lemme 4.2.11. Les preuves des lemmes 7.1.3 et 7.1.4 seront effectuées après les preuves des lemmes 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5.

Notations :

d désignera un entier strictement positif.
$\|.\|_2$ désignera la norme euclidienne de $I\!R^d$.
$\mathcal{M}(I\!R^d)$ désignera l'ensemble des fonctions mesurables de $I\!R^d$.
$\mathcal{E}_b(I\!R^d) := \left\{ f \in \mathcal{M}(I\!R^d),\ \exists C > 0 \text{ et } m \in I\!N\ ,\ |f(y)| \leq C\,(1 + \|y\|_2^m) \right\}.$
$L^p(I\!R^d)$ désignera l'espace des fonctions mesurables vérifiant : $\displaystyle\int_{I\!R^d} |f(x)|^p dx < \infty.$
$L^{1,loc}(I\!R^d)$ désignera l'espace des fonctions mesurables et localement intégrables.
Pour tout $\alpha \in I\!R^d$, on désignera par I_ε^α, un pavé de $I\!R^d$ défini comme :
$I_\varepsilon^\alpha := \displaystyle\prod_{i=1}^{d} \,]\, \alpha_i^{-,\varepsilon}, \alpha_i^{+,\varepsilon}\, [$ *avec* $\alpha_i^{\pm,\varepsilon} = \alpha_i \pm \varepsilon.$
$\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}(x)$ désignera la fonction définie comme : pour tout $x \in I\!R^d$,

$$\mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\varepsilon)^d}, & si\ x \in I_\varepsilon^\alpha, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Pour tout $\delta > 0$, $g_\delta(x)$ désignera la fonction,

$$g_\delta(x) := \frac{1}{(2\pi\delta)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\delta} \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right), \quad \forall x \in I\!R^d.$$

$\rho_{\delta,\varepsilon}(x)$ désignera la fonction, $\rho_{\delta,\varepsilon}(x) := [g_\delta * \mathbf{1}_{I_\varepsilon^\alpha}](x)$, $\forall x \in I\!R^d$.
Ω désignera l'espace $\mathcal{C}^0([0,T], I\!R^d)$.
$\mathcal{F}$ désignera la tribu borélienne sur Ω munie de la topologie uniforme sur les compacts.
$I\!P$ désignera la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
$\mathcal{F}_t$ désignera la filtration naturelle du mouvement Brownien, (i.e $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$).
$W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})^T$ (la notation ^{T} désignant la transposition) désignera un mouvement Brownien défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, I\!P)$.
Le processus (X_t) désignera la solution de l'équation (EDS) suivante : pour tout $t \in [0,T]$ et tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(EDS)\begin{cases} \dfrac{dX_t^{(i)}}{X_t^{(i)}} = (r - q_i)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_t^{(j)}, \\ x_0 \in \mathcal{F}_0, \end{cases}$$

où r désigne le taux d'actualisation, q_i le dividende de l'actif $X^{(i)}$ et $(\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ désigne la matrice de diffusion.

Par l'intermédiaire de (X_t), on définit le processus $(\widetilde{X}_t)$ comme : $\widetilde{X}_t := (X_t^{(1)}, \widetilde{X}_t^{(2)}, \ldots, \widetilde{X}_t^{(d)})^T$, où pour tout $i \in \{1, \ldots d\}$ et tout $t \in [0, T]$,

$$\widetilde{X}_t^{(i)} = X_0^{(i)} \exp \left[\left(r - d_i - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{j=1}^{i} \sigma_{ij}^2 \right) t + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{ij} \widetilde{W}_t^{(j)} + \sigma_{ii} W_t^{(i)} \right],$$

et $\widetilde{W}_t$ solution de l'équation linéaire : $\sum_{k=1}^{d} \sigma_{dk} \widetilde{W}_t^{(k)} = ln(\alpha_d) - ln(x_0^{(d)}) - [r - q_d - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{dj}^2]t$.
$D_r^{(k)}[X_t]$ désignera la dérivée de Malliavin du processus (X_t) dans la direction k.
Pour toute variable aléatoire régulière notée F, on pose :

$$D_{r_1,\ldots,r_d}^{(1),\ldots,(d)}[F] = D_{r_1}^{(1)} \left(D_{r_2}^{(2)} \left(\ldots \left(D_{r_d}^{(d)}(F) \right) \ldots \right) \right).$$

I désignera un ensemble d'indices appartenant à $\{1, \ldots, d\}$.
$\mathcal{I}(i, I)$ désignera une famille de i indices appartenant à l'ensemble I.
$j \in \mathcal{I}(i, j)$ désignera les indices $j_1, \ldots, j_i$ appartenant à $\mathcal{I}(i, I)$.
$\sum_{\mathcal{P}(\mu, I)}$ désignera la somme de tous les choix possibles de choisir μ partitions (notées $(I_j)_{1 \leq j \leq \mu}$) de l'ensemble I telles que :

$$I_1 \cup \ldots \cup I_\mu = I.$$

$\sum_{k \in \mathcal{I}(\mu, I)}$ désignera la somme de tous les choix possibles de choisir μ indices (notés $(k_j)_{1 \leq j \leq \mu}$) dans l'ensemble I. En particulier, ce choix inclut le fait que l'on puisse prendre plusieurs fois le même indice.
$\prod_{j \in I}$ désignera le produit pour tous les indices j parcourant l'ensemble I.
Pour toute fonction f régulière de $\mathbb{R}^d$ et tout sous-ensemble E de I, on définit l'opérateur **K** *comme :*

$$\mathbf{K}(X_t, f, E) := \sum_{\mathcal{P}(\mu, E)} \sum_{k \in \mathcal{I}(\mu, E)} \left[\prod_{\theta=1}^{\mu} \left(\prod_{l \in I_\theta} \sigma_{k_\theta l} \mathbf{1}_{[0,t]}(r_{k_\theta}) \right) \right] X_t^{(k_1)} \ldots X_t^{(k_\mu)} \left(\partial_{x_{k_1}, \ldots, x_{k_\mu}}^{|\mu|} f \right) (X_t).$$

Afin d'établir nos résultats, nous utiliserons fréquemment les lemmes suivants :

<u>**Lemme**</u> **7.1.1 (Friedman [8] théorème 4.5 pp 141)** *La probabilité de transition du processus (X_t^x) solution de l'équation (EDS) admet une densité régulière. De plus, pour tout $T > 0$, il existe $\lambda > 0$ et une constante positive C_0 dépendantes de T telles que : pour tout $t \in]0, T]$,*

$$p_t(x, y) \leq \frac{C_0}{t^{\frac{d}{2}}} \exp \left(-\frac{\|x - y\|_2^2}{2\lambda t} \right), \tag{88}$$

où $p_t(x, .)$ désignera la densité du processus (X_t^x), solution de l'équation (EDS), qui part presque sûrement de x à l'instant 0.

Soit F une fonction vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :

(H1d) $F \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$,

(H2d) $F(.) = \prod_{i=1}^{d} H(.)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $F^{(\varepsilon)}(.)$ comme : $F^{(\varepsilon)}(.) = [F * g_\varepsilon](.)$. Par l'intermédiaire de cette fonction, on pose :

$$G_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha) := \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{F^{(\varepsilon)}(X_s-\alpha)}{X_s^p}(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s))^q\right]$$

et

$$\partial_{x_i} G_{s,t}(\alpha) := \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{F(X_s-\alpha)}{X_s^p}(tW_s - sW_t + \sigma s(t-s))^q\right].$$

Lemme 7.1.2 *Supposons l'hypothèse* **(H1d)** *ou* **(H2d)** *vérifiée.*
Alors, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ avec $s \le t$ et tout $i \in \{1,\ldots,d\}$,

$$G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2(R^d)} G_{s,t}(.), \tag{89}$$

$$\partial_{\alpha_i} G_{s,t}^{(\varepsilon)}(.) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2(R^d)} \partial_{\alpha_i} G_{s,t}(.). \tag{90}$$

Lemme 7.1.3 (Intégration par parties) *Pour toute fonction $F \in S$ et tout processus $(\eta_r) \in L^2([0,T]^d \times \Omega)$,*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} D^{(1),\ldots,(d)}_{r_1,\ldots,r_d}[F]\eta(r_1,\ldots,r_d)dr_1\ldots dr_d\right] = \mathbb{E}\left[F\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \eta(r_1,\ldots,r_d)dW^{(1)}_{r_1}\ldots dW^{(d)}_{r_d}\right].$$

Lemme 7.1.4 *Pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ et pour toutes fonctions Φ et Ψ régulières :*

$$D^{(1),\ldots,(d)}_{r_1,\ldots,r_d}[\Phi(X_t)\Psi(X_s)] = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j \in \mathcal{I}(i,I)} \mathbf{K}\Big(X_t, \Phi, \mathcal{I}(i,I)\Big)\mathbf{K}(X_s, \Psi, M),$$

avec $M = \{1,\ldots,d\}\backslash\mathcal{I}(i,I)$.

Nous allons à présent établir le lemme 2.2.4. Afin de faciliter la lecture de cette démonstration, nous allons rappeler les notations prises lors de l'énoncé de ce dernier.

ℓ désignera le nombre d'actifs totalement corrélés.
$I := \{i_1,\ldots,i_\nu\}$ désignera l'ensemble des indices des ν Browniens à partir desquels ces ℓ actifs sont corrélés.
ℓ_j désignera le nombre d'actifs corrélés avec le Brownien $(W_t^{(j)})$.
J_θ désignera l'ensemble d'indices défini comme : $J_\theta := \left\{j_1^\theta,\ldots,j_{\ell_\theta}^\theta\right\}$.
$P := \{1,\ldots,d\} \setminus \left[\bigcup_{\theta=1}^{\nu} J_{(i_\theta)}\right]$.

$\prod_{m\in J_{i_\theta}}$ *et* $\sum_{m\in J_{i_\theta}}$ *désigneront respectivement le produit et la somme sur tous les indices* m *parcourant l'ensemble* J_{i_θ}.

7.2 Preuve du lemme 2.2.4

Pour tout $(s,t)\in[0,T]^2$ avec $s\le t$, pour toute fonction $\Phi\in\mathcal{E}_b(I\!R^d)$ et tout $\alpha\in I\!R^d$, on pose :

$$u_{s,t}(\alpha):=I\!E\,[\Phi(X_t)|\mathcal{G}]\qquad\text{avec}\qquad \mathcal{G}=\bigcap_{i=1}^{d}\{X_s^{(i)}=\alpha_i\}.$$

En distinguant dans l'événement $\mathcal{G}$, les actifs totalement corrélés et en utilisant les notations introduites précédemment,

$$\mathcal{G}=\left[\bigcap_{i\in P}\{X_s^{(i)}=\alpha_i\}\right]\cap\left[\bigcap_{\theta\in I}\bigcap_{j\in J_\theta}\{X_s^{(j)}=\alpha_j\}\right].$$

Or rappelons que par définition, les composantes $(X_t^{(j)})_{j\in J_\theta}$ sont totalement corrélées avec le Brownien $(W_t^{(\theta)})$. De plus les $(\alpha_j)_{j\in J_\theta}$ représentent une réalisation du processus $(X_t^{(j)})_{j\in J_\theta}$ à l'instant s. En conséquence, si l'événement $\{X_s^{(j)}=\alpha_j\}$ est réalisé alors pour tout $k\in J_\theta$ l'événement $\{X_s^{(k)}=\alpha_k\}$ sera lui même réalisé. Ainsi pour tout $k\in\{1,\dots,\ell_\theta\}$,

$$\bigcap_{j\in J_\theta}\{X_s^{(j)}=\alpha_j\}=\{X_s^{(j_k^\theta)}=\alpha_{j_k^\theta}\}.\tag{91}$$

En reportant l'égalité ci-dessus dans l'événement $\mathcal{G}$, on obtient pour tout $k\in\{1,\dots,\ell_\theta\}$,

$$\mathcal{G}=\left[\bigcap_{i\in P}\{X_s^{(i)}=\alpha_i\}\right]\cap\left[\bigcap_{\theta\in I}\{X_s^{(j_k^\theta)}=\alpha_{j_k^\theta}\}\right].$$

Or, par définition des processus (X_t) et $(\widetilde{X}_t)$, il résulte que si l'événement $\{X_s^{(i)}=\alpha_i\}$ est réalisé alors l'événement $\{\widetilde{X}_s^{(i)}=\alpha_i\}$ l'est de même. Ainsi, pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$,

$$\mathcal{G}=\left[\bigcap_{i\in P}\{\widetilde{X}_s^{(i)}=\alpha_i\}\right]\cap\left[\bigcap_{\theta\in I}\{\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)}=\alpha_{j_k^\theta}\}\right],$$

et donc

$$u_{s,t}(\alpha)=I\!E\left[\Phi(X_t)\middle|\left(\bigcap_{i\in P}\{\widetilde{X}_s^{(i)}=\alpha_i\}\right)\cap\left(\bigcap_{\theta\in I}\{\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)}=\alpha_{j_k^\theta}\}\right)\right].$$

Posons,

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon,\alpha_i}\ &:=\ ]\,\alpha_i^{-,\varepsilon},\alpha_i^{+,\varepsilon}\,[,\ \text{avec }\alpha_i^{\pm,\varepsilon}=\alpha_i\pm\varepsilon.\\
u^{\varepsilon}_{s,t}(\alpha)\ &:=\ I\!E\left[\Phi(X_t)\middle|\left(\bigcap_{i\in P}\{\widetilde{X}_s^{(i)}\in I_{\varepsilon,\alpha_i}\}\right)\cap\left(\bigcap_{\theta\in I}\{\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)}\in I_{\varepsilon,\alpha_{j_k^\theta}}\}\right)\right],
\end{aligned}$$

où ε est un paramètre choisi de telle manière à ce que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\mathbb{P}(\widetilde{X}_s^{(i)} \in I_{\varepsilon,\alpha_i}) > 0.$$

En utilisant la formule de Bayes,

$$u_{s,t}^{\varepsilon}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \prod_{i\in P} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon},\alpha_i}(\widetilde{X}_s^{(i)}) \prod_{\theta\in I} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon,\alpha_{j_k^\theta}}}(\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)})\right]}{\mathbb{E}\left[\prod_{i\in P} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon},\alpha_i}(\widetilde{X}_s^{(i)}) \prod_{\theta\in I} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon,\alpha_{j_k^\theta}}}(\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)})\right]}. \tag{92}$$

Or, par le raisonnement fait ci-dessus, il est aisé de montrer que pour tout $\theta \in I$ et tout $(k,l) \in \{1, \ldots, \ell_\theta\}^2$,

$$\mathbf{1}_{I_{\varepsilon,\alpha_{j_k^\theta}}}(\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)}) = I_{\varepsilon,\alpha_{j_l^\theta}}(\widetilde{X}_s^{(j_l^\theta)}). \tag{93}$$

Ainsi, en raisonnant de proche en proche, on montre que pour tout $k \in J_\theta$,

$$\mathbf{1}_{I_{\varepsilon,\alpha_{j_k^\theta}}}(\widetilde{X}_s^{(j_k^\theta)}) = \frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j\in J_\theta} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon,\alpha_j}}(\widetilde{X}_s^{(j)}).$$

En reportant cette égalité dans l'égalité (92),

$$u_{s,t}^{\varepsilon}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Pi_s\right]}{\mathbb{E}\left[\Pi_s\right]} \text{ avec } \qquad \Pi_s := \prod_{i\in P} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon},\alpha_i}(\widetilde{X}_s^{(i)}) \prod_{\theta\in I} \left(\frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j\in J_\theta} \mathbf{1}_{I_{\varepsilon,\alpha_j}}(\widetilde{X}_s^{(j)})\right). \tag{94}$$

A présent supposons l'égalité suivante vérifiée,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\Pi_s\right] = \frac{1}{\Gamma}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t) \prod_{i\in P} \varphi_s^{\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(i)})\Delta W_{s,t}^{(i)} \prod_{\theta\in I}\left[\left(\sum_{j\in J_\theta} \varphi_s^{\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)})\right) \Pi_{s,t}^{J_\theta}\right]\right\}, \tag{95}$$

où l'on a posé,

$\Gamma := [s(t-s)]^{d+\nu-\ell} \prod_{i\in\mathcal{P}} \sigma_{ii}$, $\qquad \varphi_s^{\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)}) := \frac{1}{2\varepsilon}\left[(\widetilde{X}_s^{(j)} - \alpha_j^{-,\varepsilon})_+ - (\widetilde{X}_s^{(j)} - \alpha_j^{+,\varepsilon})_+\right]$

et pour tout $\theta \in I$,

$$\Pi_{s,t}^{J_\theta} := \frac{(tW_s^{(\theta)} - sW_t^{(\theta)})}{\sum_{j\in J_\theta} \sigma_{j\theta}\, \widetilde{X}_s^{(j)}} + \frac{\sum_{j\in J_\theta} (\sigma_{j\theta})^2\, \widetilde{X}_s^{(j)}}{[\sum_{j\in J_\theta} \sigma_{j\theta}\, \widetilde{X}_s^{(j)}]^2}.$$

En reportant l'égalité (95) dans l'égalité (94) et en adaptant le raisonnement effectué dans la preuve du lemme 2.1.1, on montre

$$u_{s,t}^{\varepsilon}(\alpha) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{H}_{s,t}[\Phi](\alpha)}{\mathcal{H}_{s,t}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}](\alpha)},$$

avec $\mathcal{H}_{s,t}[\Phi](\alpha) := \frac{1}{\Gamma} \mathbb{E} \left\{ \Phi(X_t) \prod_{i \in P} \frac{H(\widetilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{\widetilde{X}_s^{(i)}} \Delta W_{s,t}^{(i)} \prod_{\theta \in I} \left[\left(\sum_{j \in J_\theta} H(\widetilde{X}_s^{(\theta)} - \alpha_\theta) \right) \Pi_{s,t}^{J_\theta} \right] \right\}$.

Par ailleurs, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on montre,

$$u_{s,t}^{\varepsilon}(.) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u_{s,t}(.).$$

On conclut la preuve du lemme à l'aide des deux résultats de convergence donnés ci-dessus.
Passons à la preuve de l'égalité (95).

• Preuve de l'égalité (95)

Afin d'alléger les notations n désignera dans toute la suite l'entier défini comme $n := d + \nu - \ell$.
Rappelons que cet entier désigne le nombre de Brownien mis en jeu initialement.
On régularise chaque fonction indicatrice intervenant dans la quantité Π_s (cf l'égalité (94) pour sa définition) avec la fonction $g_\delta(.)$. Ainsi la régularisée de Π_s s'écrit comme,

$$g_{\delta,\varepsilon}(X_s) = \prod_{i \in P} \rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(i)}) \prod_{\theta \in I} \left(\frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j \in J_\theta} \rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)}) \right),$$

où la fonction $\rho_{\delta,\varepsilon}(.) := [g_\delta * \mathbf{1}_{I_\varepsilon,\alpha_i}](.)$.
Posons $G_{\delta,\varepsilon}(.)$, la fonction de répartion de $\rho_{\delta,\varepsilon}(.)$: i.e $G_{\delta,\varepsilon}(x) := \int_{-\infty}^{x} \rho_{\delta,\varepsilon}(y) dy$.
Par l'intermédiaire de la fonction $G_{\delta,\varepsilon}(.)$, on définit la fonction $I_{\delta,\varepsilon}(.)$ comme,

$$I_{\delta,\varepsilon}(x) := \prod_{i \in P} G_{\delta,\varepsilon}(x_i) \prod_{\theta \in I} \left(\frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j \in J_\theta} G_{\delta,\varepsilon}(x_j) \right).$$

En utilisant la formule d'intégration par parties (cf proposition 7.1.3), on a pour tout processus $(\eta_r) \in L^2([0,T]^n \times \Omega)$,

$$\mathbb{E} \left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s) \int_0^T \dots \int_0^T \eta(r_1, \dots, r_n) dW_{r_1}^{(1)} \dots dW_{r_n}^{(n)} \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \dots \int_0^T D_{r_1,\dots,r_n}^{(1),\dots,(n)} \left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s) \right] \eta(r_1, \dots, r_n) dr_1 \dots dr_n \right\}. \quad (96)$$

En particulier, l'égalité ci-dessus est encore vraie pour le processus $\eta(r_1, \dots, r_n)$ défini comme $\prod_{i=1}^n \eta(r_i)$. Pour ce processus, l'égalité (96) se récrit,

$$\mathbb{E} \left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s) \int_0^T \dots \int_0^T \eta(r_1) \dots \eta(r_n) dW_{r_1}^{(1)} \dots dW_{r_n}^{(n)} \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \dots \int_0^T D_{r_1,\dots,r_n}^{(1),\dots,(n)} \left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s) \right] \eta(r_1) \dots \eta(r_n) dr_1 \dots dr_n \right\}. \quad (97)$$

Supposons l'égalité suivante vérifiée,

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T \ldots \int_0^T D^{(1),\ldots,(n)}_{r_1,\ldots,r_n}\left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\right]\eta(r_1)\ldots\eta(r_n)dr_1\ldots dr_n\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\prod_{k\in P}\left(\sigma_{kk}\,\widetilde{X}_s^{(k)}\,\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(k)})\int_0^s \eta(r_k)dr_k\right)\prod_{\theta\in I}\left[\left(\frac{1}{\ell_\theta}\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\widetilde{X}_s^{(j)}\,\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)})\right)\int_0^s \eta(r_\theta)dr_\theta\right]\right\}, \quad (98)$$

où pour tout $i \in \{1,\ldots n\}$,

$$\int_0^t \eta(r_i)dr_i = 0.$$

Il faut déterminer un processus (η_r) afin d'obtenir l'égalité suivante,

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T \ldots \int_0^T D^{(1),\ldots,(n)}_{r_1,\ldots,r_n}\left[\Phi(X_t) I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\right]\eta(r_1)\ldots\eta(r_n)dr_1\ldots dr_n\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{k\in P}\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(k)})\prod_{\theta\in I}\left(\frac{1}{\ell_\theta}\sum_{j\in J_\theta}\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)})\right)\right]. \quad (99)$$

Pour obtenir l'égalité ci-dessus, on montre à partir de l'égalité (98) qu'il suffit que le processus (η_r) vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1. \quad \sigma_{kk}\,\widetilde{X}_s^{(k)}\displaystyle\int_0^s \eta(r_k)dr_k = 1, & \text{pour tout } k \in P. \\ 2. \quad \left[\displaystyle\sum_{j\in J_k}\sigma_{jk}\,\widetilde{X}_s^{(j)}\,\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)})\right]\displaystyle\int_0^s \eta(r_k)dr_k = \sum_{j\in J_k}\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)}), & \text{pour tout } k \in I, \\ 3. \quad \displaystyle\int_0^t \eta(r_k)dr_k = 0, & \text{pour tout } k \in P\cup I. \end{cases}$$

Avec l'égalité (93), on montre que pour tout $(j,l) \in (J_k)^2$,

$$\rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(j)}) = \rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s^{(l)}).$$

Par cette égalité, la condition 2. se récrit comme[25] : pour tout $k \in I$,

$$\left[\sum_{j\in J_k}\sigma_{jk}\,\widetilde{X}_s^{(j)}\right]\int_0^s \eta(r_k)dr_k = \ell_k.$$

En résumé, pour identifier l'égalité (98) avec l'égalité (99) il suffit que le processus (η_r) vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1. \quad \sigma_{kk}\,\widetilde{X}_s^{(k)}\displaystyle\int_0^s \eta(r_k)dr_k = 1, & \text{pour tout } k \in P. \\ 2. \quad \left[\displaystyle\sum_{j\in J_k}\sigma_{jk}\,\widetilde{X}_s^{(j)}\right]\displaystyle\int_0^s \eta(r_k)dr_k = \ell_k, & \text{pour tout } k \in I. \\ 3. \quad \displaystyle\int_0^t \eta(r_k)dr_k = 0, & \text{pour tout } k \in P\cup I. \end{cases}$$

[25] Rappelons, que par définition, le cardinal de chaque ensemble J_k vaut ℓ_k.

Un choix possible consiste à prendre pour (η_r) le processus défini comme : pour tout $k \in P \cup I$,

$$\eta(r_k) = [\frac{1}{\sigma_{kk} \tilde{X}_s^{(k)}} \mathbf{1}_{\{k \in P\}} + \frac{\ell_k}{\sum_{j \in J_k} \sigma_{jk} \tilde{X}_s^{(j)}} \mathbf{1}_{\{k \in I\}}] \left[\frac{1}{s} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_k) - \frac{1}{(t-s)} \mathbf{1}_{[s,t]}(r_k)\right].$$

Ainsi en reportant ce choix dans l'égalité (97) il vient,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \prod_{k \in P} \rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(k)}) \prod_{\theta \in I} \left(\sum_{j \in J_\theta} \rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(j)})\right)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \prod_{k \in P} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(k)}) \prod_{\theta \in I} \left(\frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j \in J_\theta} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(j)})\right) \int_0^T \dots \int_0^T \eta(r_1) \dots \eta(r_n) dW_{r_1}^{(1)} \dots dW_{r_n}^{(n)}\right].$$

Or les Browniens étant mutuellement indépendants, on a,

$$\begin{aligned} \int_0^t \dots \int_0^t \eta(r_1) \dots \eta(r_n) dW_{r_1}^{(1)} \dots dW_{r_n}^{(n)} &= \prod_{i=1}^n \int_0^t \eta(r_i) dW_{r_i}^{(i)} \\ &= \prod_{k \in P} \int_0^t \eta(r_k) dW_{r_k}^{(k)} \prod_{\theta \in I} \int_0^t \eta(r_\theta) dW_{r_\theta}^{(\theta)}. \quad (100) \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité ci-dessus dans l'égalité précédente,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \prod_{k \in P} \rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(k)}) \prod_{\theta \in I} \left(\frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j \in J_\theta} \rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(j)})\right)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\Phi(X_t) \left(\prod_{k \in P} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(k)}) \int_0^t \eta(r_k) dW_{r_k}^{(k)}\right) \prod_{\theta \in I} \left[\left(\frac{1}{\ell_\theta} \sum_{j \in J_\theta} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}_s^{(j)})\right) \int_0^t \eta(r_\theta) dW_{r_\theta}^{(\theta)}\right]\right\}. \quad (101)$$

Pour conclure la preuve du lemme, il reste à calculer les intégrales stochastiques présentes dans le terme de droite de l'égalité ci-dessus.
En effectuant une adaptation du raisonnement permettant d'établir l'égalité (58), on montre que pour tout $k \in P$,

$$\int_0^t \eta(r_k) dW_{r_k}^{(k)} = \frac{\left[t W_s^{(k)} - s W_t^{(k)} + \sigma_{kk} s(t-s)\right]}{\sigma_{kk} s(t-s) \tilde{X}_s^{(k)}} := \frac{\Delta W_{s,t}^{(k)}}{\sigma_{kk} s(t-s) \tilde{X}_s^{(k)}}. \quad (102)$$

Nous allons à présent calculer la deuxième intégrale stochastique présente dans le terme de droite de l'égalité (101). Pour des raisons de commodité de lecture, nous raisonnons à θ fixé.
Avec le processus (η_r) choisi précédemment, on a pour tout $\theta \in I$,

$$\int_0^t \eta(r_\theta) dW_{r_\theta}^{(\theta)} = \frac{\ell_\theta}{s} \int_0^s \frac{dW_{r_\theta}^{(\theta)}}{\sum_{j \in J_\theta} \sigma_{j\theta} \tilde{X}_s^{(j)}} - \frac{\ell_\theta}{(t-s)} \int_s^t \frac{dW_{r_\theta}^{(\theta)}}{\sum_{j \in J_\theta} \sigma_{j\theta} \tilde{X}_s^{(j)}}$$

$$= \frac{\ell_\theta}{s}\int_0^s \frac{dW^{(\theta)}_{r_\theta}}{\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s} - \frac{\ell_\theta}{(t-s)\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}(W^{(\theta)}_t - W^{(\theta)}_s)$$

$$:= A - \frac{\ell_\theta}{(t-s)\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}(W^{(\theta)}_t - W^{(\theta)}_s). \qquad (103)$$

Pour le calcul de A, on effectue un raisonnement similaire à celui qui nous a permis d'établir l'égalité (58). Ainsi en utilisant un résultat d'intégration par parties, on montre :

$$A := \frac{\ell_\theta}{s\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}W^{(\theta)}_s - \frac{1}{s}\int_0^s D^{(\theta)}_{r_\theta}\left[\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s\right]^{-1} dr_\theta.$$

Or,

$$D^{(\theta)}_{r_\theta}\left[\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s\right]^{-1} = -\frac{\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}D^{(\theta)}_{r_\theta}[\tilde{X}^{(j)}_s]}{\left[\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s\right]^2} = -\frac{\sum_{j\in J_\theta}(\sigma_{j\theta})^2\,\tilde{X}^{(j)}_s}{\left[\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s\right]^2}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_\theta).$$

En reportant l'égalité ci-dessus dans l'expression de A et en reportant l'expression ainsi obtenue dans l'égalité (103), il vient :

$$\int_0^t \eta(r_\theta)dW^{(\theta)}_{r_\theta} = \frac{\ell_\theta}{\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}\left[\frac{(tW^{(\theta)}_s - sW^{(\theta)}_t)}{s(t-s)} + \frac{\sum_{j\in J_\theta}(\sigma_{j\theta})^2\,\tilde{X}^{(j)}_s}{\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}\right].$$

En reportant l'égalité (102) et l'égalité ci-dessus dans l'égalité (101),

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{k\in P}\rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}^{(k)}_s)\prod_{\theta\in I}\left(\frac{1}{\ell_\theta}\sum_{j\in J_\theta}\rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}^{(j)}_s)\right)\right] = \frac{1}{s^n(t-s)^n}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\prod_{k\in P}\left(G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}^{(k)}_s)\frac{\Delta W^{(k)}_{s,t}}{\sigma_{ii}\,\tilde{X}^{(i)}_s}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{\theta\in I}\left[\frac{\ell_\theta}{\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}\left(\sum_{j\in J_\theta}G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}^{(j)}_s)\right)\left(\frac{(tW^{(\theta)}_s - sW^{(\theta)}_t)}{s(t-s)} + \frac{\sum_{j\in J_\theta}(\sigma_{j\theta})^2\,\tilde{X}^{(j)}_s}{\sum_{j\in J_\theta}\sigma_{j\theta}\,\tilde{X}^{(j)}_s}\right)\right]\right\}. \qquad (104)$$

Par ailleurs, on montre que pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$,

$$G_{\delta,\varepsilon}(.) \xrightarrow[\delta\to 0]{L^2(\mathbb{R})} \left[(.-\alpha_i^{+,\varepsilon})_+ - (.-\alpha_i^{-,\varepsilon})_+\right].$$

A partir de l'égalité (104) et du résultat de convergence ci-dessus, il suffit pour conclure la preuve de l'égalité (95) de reprendre à partir de l'égalité (59) le raisonnement fait pour établir l'égalité (50).
Pour conclure, il reste à établir l'égalité (98).

• **Preuve de l'égalité (98)**

Pour établir cette égalité, il nous faut préalablement calculer la quantité suivante : $D^{(1),\dots,(n)}_{r_1,\dots,r_n}\Big[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\Big]$.
En utilisant la formule de Leibnitz pour l'opérateur $D^{(i)}$,

$$D^{(1),\dots,(n)}_{r_1,\dots,r_n}\Big[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\Big] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,n)} D^{(j_1),\dots,(j_i)}_{r_{j_1},\dots,r_{j_i}}\left[\Phi(X_t)\right] D^{(m_1),\dots,(m_{n-i})}_{r_{m_1},\dots,r_{m_{n-i}}}\Big[I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\Big], \quad (105)$$

où $\{m_1,\dots,m_{n-i}\}=\{1,\dots,n\}\backslash\mathcal{I}(i,n)$.
Nous allons calculer la dérivée de Malliavin de la fonctionnelle $I_{\delta,\varepsilon}$. Afin de faciliter la lecture de cette dernière, nous allons utiliser les notations suivantes :

$$F_\theta := \frac{1}{\ell_\theta}\sum_{k\in J_\theta} G_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}^{(k)}_s) \qquad \text{et} \qquad N^{m_i}_{m_1}(I) := \prod_{\theta\in I\backslash\{m_1,\dots,m_i\}} F_\theta.$$

$$B^k_\theta := \sigma_{k\theta}\ \widetilde{X}^{(k)}_s\ \rho_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}^{(k)}_s) \qquad \text{et} \qquad S_{J_\theta} := \frac{1}{\ell_\theta}\sum_{k\in J_\theta} B^k_\theta.$$

$$M^{j_i}_{j_1}(P) := \prod_{k\in P\backslash\{j_1,\dots,j_i\}} G_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}^{(k)}_s) \qquad \text{et} \qquad N := n-i.$$

Supposons l'égalité suivante vérifiée :

$$\begin{aligned} D^{(m_1),\dots,(m_N)}_{r_{m_1},\dots,r_{m_N}}\Big[I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\Big] &= \sum_{u=0}^{N}\sum_{v\in\mathcal{I}(u,N)}\Bigg[\left(\prod_{k=1}^{u} B^{v_k}_{v_k}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{v_k})\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}\right) M^{v_u}_{v_1}(P)\ \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^{N-u} S_{J_{\theta_k}}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{\theta_k})\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}\right) N^{\theta_{N-u}}_{\theta_1}(I)\Bigg], \end{aligned} \quad (106)$$

avec $\{\theta_1,\dots,\theta_{N-u}\}:=\{m_1,\dots,m_N\}\backslash\{v_1,\dots,v_u\}$.

Posons,

$$\mathcal{K} := I\!\!E\left\{\int_0^T\dots\int_0^T D^{(1),\dots,(n)}_{r_1,\dots,r_n}\Big[\Phi(X_t)I_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\Big]\eta(r_1)\dots\eta(r_n)dr_1\dots dr_n\right\}.$$

En reportant l'égalité (91) du lemme 7.1.4 et l'égalité (106) dans l'égalité (105) et en injectant l'égalité ainsi obtenue dans la définition de $\mathcal{K}$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,n)} I\!\!E\Bigg\{\int_0^T\dots\int_0^T \mathbf{K}(X_t,\Phi,\mathcal{I}(i,n))\sum_{u=0}^{N}\sum_{v\in\mathcal{I}(u,N)}\Bigg[\left(\prod_{k=1}^{u} B^{v_k}_{v_k}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{v_k})\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}\right) M^{v_u}_{v_1}(P)\times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^{N-u} S_{J_{\theta_k}}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{\theta_k})\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}\right) N^{\theta_{N-u}}_{\theta_1}(I)\Bigg]\eta(r_1)\dots\eta(r_n)dr_1\dots dr_n\Bigg\}. \end{aligned} \quad (107)$$

En utilisant la définition de $\mathbf{K}$ dans laquelle on a posé préalablement $E:=\mathcal{I}(i,n)$ et le fait que les variables d'intégration sont mutuellement indépendantes, alors l'égalité (107) se récrit comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j\in E} I\!\!E\left\{\left[\sum_{\mathcal{P}(\mu,E)}\sum_{k\in\mathcal{I}(\mu,E)}\left(\prod_{\theta=1}^{\mu}\left(\prod_{l\in I_\theta}\sigma_{k_\theta l}\right)\int_0^t \eta(r_{k_\theta})dr_{k_\theta}\right)X_t^{(k_1)}\dots X_t^{(k_\mu)}\left(\partial^{|\mu|}_{x_{k_1},\dots,x_{k_\mu}}\Phi\right)(X_t)\right]\times\right.\\ &\times \left.\sum_{u=0}^{N}\sum_{v\in\mathcal{I}(u,N)}\left[\left(\prod_{k=1}^{u}B_{v_k}^{v_k}\int_0^s\eta(r_{v_k})dr_{v_k}\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}\right)M_{v_1}^{v_u}(P)\left(\prod_{k=1}^{N-u}S_{J_{\theta_k}}\int_0^s\eta(r_{\theta_k})dr_{\theta_k}\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}\right)N_{\theta_1}^{\theta_{N-u}}(I)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{108}$$

Or, nous cherchons un processus (η_r) afin d'obtenir l'égalité suivante :

$$\mathcal{K} = I\!\!E\left[\Phi(X_t)\prod_{i\in P}\rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(i)})\prod_{\theta\in I}\left(\frac{1}{\ell_\theta}\sum_{j\in J_\theta}\rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(j)})\right)\right]. \tag{109}$$

Pour obtenir l'égalité ci-dessus et à partir de l'égalité (108), il est aisé de montrer que le processus (η_r) doit vérifier la condition suivante[26] :

$$\int_0^t \eta(r_i)dr_i = 0, \quad \forall i\in\{1,\dots d\}. \tag{110}$$

Ainsi en supposant la condition ci-dessus vérifiée et en remarquant que $N = n$, l'égalité (108) se récrit comme :

$$\mathcal{K} = \sum_{u=0}^{n}\sum_{v\in\mathcal{I}(u,n)} I\!\!E\left[\left(\prod_{k=1}^{u}B_{v_k}^{v_k}\int_0^s\eta(r_{v_k})dr_{v_k}\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}\right)M_{v_1}^{v_u}(P)\left(\prod_{k=1}^{n-u}S_{J_{\theta_k}}\int_0^s\eta(r_{\theta_k})dr_{\theta_k}\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}\right)N_{\theta_1}^{\theta_{n-u}}(I)\right].$$

Du fait que le cardinal des ensembles P et I est égal respectivement à $n-\nu$ et ν on a : pour tout $s\in[0,T]$,

$$\begin{cases}\displaystyle\prod_{k=1}^{u}B_{v_k}^{v_k}\int_0^s\eta(r_{v_k})dr_{v_k}\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}M_{v_1}^{v_u}(P) = 0, & \text{pour tout entier } u\geq n+1-\nu.\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n-u}S_{J_{\theta_k}}\int_0^s\eta(r_{\theta_k})dr_{\theta_k}\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}N_{\theta_1}^{\theta_{n-u}}(I) = 0, & \text{pour tout entier } u\leq n-1-\nu.\end{cases}$$

En utilisant les deux égalités ci-dessus dans l'égalité (111), on obtient

$$\mathcal{K} = \sum_{v\in\mathcal{I}(n-\nu,n)} I\!\!E\left[\left(\prod_{k=1}^{n-\nu}B_{v_k}^{v_k}\int_0^s\eta(r_{v_k})dr_{v_k}\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}\right)\left(\prod_{k=1}^{\nu}S_{J_{\theta_k}}\int_0^s\eta(r_{\theta_k})dr_{\theta_k}\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}\right)\right].$$

Remarquons que dans le premier et le second terme de droite de l'égalité ci-dessus, il faut choisir respectivement $n-\nu$ et ν indices parmis n. Or ces indices doivent appartenir respectivement aux ensembles P et I. En utilisant de nouveau, le fait que le cardinal des ensembles P et I sont égaux respectivement à $n-\nu$ et à ν, cela implique trivialement qu'il n'existe qu'une seule manière de choisir ces derniers. De ce fait,

$$\sum_{v\in\mathcal{I}(n-\nu,n)}\left(\prod_{k=1}^{u}B_{v_k}^{v_k}\int_0^s\eta(r_{v_k})dr_{v_k}\mathbf{1}_{\{v_k\in P\}}\right)\left(\prod_{k=1}^{N-u}S_{J_{\theta_k}}\int_0^s\eta(r_{\theta_k})dr_{\theta_k}\mathbf{1}_{\{\theta_k\in I\}}\right) =$$

[26] Cette condition provient du fait que dans le terme de droite de l'égalité (109) il n'y pas de terme comportant des dérivées de la fonction Φ.

$$= \left(\prod_{k\in P} B_k^k \int_0^s \eta(r_k)dr_k\right)\left(\prod_{\theta\in I} S_{J_\theta}\int_0^s \eta(r_\theta)dr_\theta\right).$$

Ainsi, en reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité précédente et en utilisant les définitions des quantités B_k^k et S_{J_k}, on obtient :

$$\mathcal{K} \;=\; \mathbb{E}\left\{\prod_{k\in P}\left(\sigma_{kk}\,\tilde{X}{}_s^{(k)}\;\rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(k)})\int_0^s \eta(r_k)dr_k\right)\prod_{\theta\in I}\left[\frac{1}{\ell_\theta}\sum_{j\in J_\theta}\left(\sigma_{\theta j}\,\tilde{X}{}_s^{(j)}\;\rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(j)})\right)\int_0^s \eta(r_\theta)dr_\theta\right]\right\}, \quad (111)$$

avec (η_r) vérifiant la condition donnée par l'égalité (110).
Muni de cette dernière égalité, on conclut la preuve de l'égalité (98). Passons à la preuve de l'égalité (106).

- **Preuve de l'égalité (106)**

Les notations que nous utiliserons lors de la preuve de l'égalité (106) ont été introduites lors de l'énoncé de cette égalité. Afin de faciliter la lecture de cette démonstration et sans aucune perte de généralité, nous allons prendre dans l'égalité (106), $m_1 = 1, \ldots, m_N = n$.
Ainsi nous allons établir l'égalité suivante,

$$\begin{aligned} D^{(1),\ldots,(n)}_{r_1,\ldots,r_n}\left[\prod_{k\in P} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(k)})\prod_{\theta\in I}F_\theta\right] &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,n)}\left[\left(\prod_{l=1}^{i} B_{j_l}^{j_l}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{j_l})\mathbf{1}_{\{j_l\in P\}}\right) M_{j_1}^{j_i}(P)\,\times\right.\\ &\left.\times\;\left(\prod_{l=1}^{n-i} S_{J_{m_l}}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_l})\mathbf{1}_{\{m_l\in I\}}\right) N_{m_1}^{m_{n-i}}(I)\right], \end{aligned} \quad (112)$$

avec $\{m_1,\ldots,m_{n-i}\} := \{1,\ldots,n\}\backslash\{j_1,\ldots,j_i\}$ et en prenant la convention $\prod_{i=1}^0 a_i = 1$.

En utilisant la formule de Leibnitz pour l'opérateur $D^{(i)}$, on montre :

$$D^{(1),\ldots,(n)}_{r_1,\ldots,r_n}\left[\prod_{k\in P} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(k)})\prod_{\theta\in I}F_\theta\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,n)} D^{(j_1),\ldots,(j_i)}_{r_{j_1},\ldots,r_{j_i}}\left[\prod_{k\in P} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(k)})\right] D^{(m_1),\ldots,(m_{n-i})}_{r_{m_1},\ldots,r_{m_{n-i}}}\left[\prod_{\theta\in I}F_\theta\right].$$

A partir de l'égalité ci-dessus, il suffit pour conclure la preuve de l'égalité (112) d'établir les égalités suivantes :

$$D^{(j_1),\ldots,(j_i)}_{r_{j_1},\ldots,r_{j_i}}\left[\prod_{k\in P} G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}_s^{(k)})\right] = \left(\prod_{l=1}^{i} B_{j_l}^{j_l}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{j_l})\mathbf{1}_{\{j_l\in P\}}\right) M_{j_1}^{j_i}(P) \quad (113)$$

$$D^{(m_1),\ldots,(m_{n-i})}_{r_{m_1},\ldots,r_{m_{n-i}}}\left[\prod_{\theta\in I}F_\theta\right] = \left(\prod_{l=1}^{n-i} S_{J_{m_l}}\mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_l})\mathbf{1}_{\{m_l\in I\}}\right) N_{m_1}^{m_{n-i}}(I). \quad (114)$$

Nous n'allons pas donner la preuve de l'égalité (113). Celle-ci reprend de manière plus simple la preuve de l'égalité (114). Afin d'établir cette égalité, nous allons raisonner par récurrence.
Pour simplifier les notations nous poserons dans toute la suite $N = n - i$.

Montrons l'égalité (114) dans le cas $N = 1$.
Pour tout entier $m_1 \in \{1, \ldots, n\}$,

$$D^{(m_1)}_{r_{m_1}} \left[\prod_{\theta \in I} F_\theta \right] = \sum_{\theta_1 \in I} \frac{1}{\ell_{\theta_1}} \left(\sum_{k \in J_{\theta_1}} D^{(m_1)}_{r_{m_1}} [G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}^{(k)}_s)] \right) \prod_{\theta \in I \setminus \{m_1\}} F_\theta. \tag{115}$$

Comme,

$$D^{(m_1)}_{r_{m_1}} [G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}^{(k)}_s)] = \rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}^{(k)}_s) D^{(m_1)}_{r_{m_1}} [\tilde{X}{}^{(k)}_s],$$

et en utilisant le fait que pour tout $j \neq m_1$, on a $\tilde{X}{}^{(j)}_s$ indépendant de $W^{(m_1)}$ alors[27], pour tout $j \in J_{\theta_1}$,

$$D^{(m_1)}_{r_{m_1}} [G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}^{(j)}_s)] = \sigma_{j m_1} \tilde{X}{}^{(j)}_s \rho_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}^{(j)}_s) \mathbf{1}_{\{m_1 \in J_{\theta_1}\}} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_1}).$$

Ainsi en reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (115) et en utilisant nos notations,

$$D^{(m_1)}_{r_{m_1}} \left[\prod_{\theta \in I} F_\theta \right] = \sum_{\theta_1 \in I} \left(S_{J_{\theta_1}} \mathbf{1}_{\{m_1 \in J_{\theta_1}\}} \right) \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_1}) \prod_{\theta \in I \setminus \{m_1\}} F_\theta.$$

Or, l'ensemble J_{θ_1} correspond aux composantes du processus (X_t) totalement corrélé avec le Brownien $W^{(\theta_1)}$. Ainsi en exploitant cette définition et le résultat d'indépendance énoncé précédemment, l'égalité ci-dessus devient

$$D^{(m_1)}_{r_{m_1}} \left[\prod_{\theta \in I} F_\theta \right] = S_{J_{m_1}} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_1}) N^{m_1}_{m_1} \sum_{\theta_1 \in I} \mathbf{1}_{\{m_1 \in J_{\theta_1}\}}. \tag{116}$$

En utilisant à présent que les ensembles $(J_k)_{1 \le k \le \nu}$ forment une partition disjointe de l'ensemble I, on a[28]

$$D^{(m_1)}_{r_{m_1}} [G_{\delta,\varepsilon}(\tilde{X}{}^{(j)}_s)] = S_{J_{m_1}} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_1}) N^{m_1}_{m_1} \mathbf{1}_{\{m_1 \in I\}}.$$

Par cette dernière égalité, on conclut la preuve de l'égalité (114) dans le cas $N = 1$.
Supposons l'égalité (114) vraie pour tout N et montrons qu'elle reste encore vraie au rang $N+1$.
Par notre hypothèse de récurrence, on a :

$$D^{(m_1),\ldots,(m_N)}_{r_{m_1},\ldots,r_{m_N}} \left[\prod_{\theta \in I} F_\theta \right] = \left(\prod_{l=1}^{N} S_{J_{m_l}} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_l}) \mathbf{1}_{\{m_l \in I\}} \right) N^{m_N}_{m_1}.$$

On calcule la dérivée $D^{(m_{N+1})}_{r_{m_{N+1}}}$ de l'égalité ci-dessus. Alors,

$$D^{(m_1),\ldots,(m_{N+1})}_{r_{m_1},\ldots,r_{m_{N+1}}} \left[\prod_{\theta \in I} F_\theta \right] = D^{(m_{N+1})}_{r_{m_{N+1}}} \left[\left(\prod_{l=1}^{N} S_{J_{m_l}} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_l}) \mathbf{1}_{\{m_l \in I\}} \right) N^{m_N}_{m_1} \right].$$

[27] On a donc $D^{(m_1)}_{r_{m_1}}[\tilde{X}{}^{(j)}_s] = 0$.
[28] i.e $I = \bigcup_{k=1}^{\nu} I_k$.

En remarquant que pour tout $k \in \{1, \ldots, m_N\}$, la variable aléatoire S_{J_k} est indépendante de $W^{(m_{N+1})}$,

$$D^{(m_1),\ldots,(m_{N+1})}_{r_{m_1},\ldots,r_{m_{N+1}}} \left[\prod_{\theta \in I} F_\theta \right] = \left(\prod_{l=1}^{N} S_{J_{m_l}} \mathbf{1}_{[0,s]}(r_{m_l}) \mathbf{1}_{\{m_l \in I\}} \right) D^{(m_{N+1})}_{r_{m_{N+1}}} \left[N^{m_N}_{m_1} \right].$$

Ainsi en reprenant les mêmes arguments qui nous ont permis d'établir l'égalité (116), on montre

$$D^{(m_{N+1})}_{r_{m_{N+1}}} \left[N^{m_N}_{m_1} \right] = S_{J_{m_{N+1}}} \mathbf{1}_{[0,s]}(m_{N+1}) \mathbf{1}_{\{m_{N+1} \in I\}} N^{m_{N+1}}_{m_1}.$$

En reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité précédente, on conclut la preuve de l'égalité (114).

■

7.3 Preuve du lemme 2.2.3

Supposons, l'égalité suivante vérifiée,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \prod_{i=1}^{d} \rho_{\delta,\varepsilon}(X^i_s) \right] &= \frac{1}{s^d (t-s)^d} \mathbb{E}\left\{ \Phi(X_t) \kappa_{\delta,\varepsilon}(X_s) \left(\prod_{i=1}^{d} \frac{1}{X^{(i)}_s} \right) \left[(t-s)^d \prod_{j=1}^{d} \left[W^{(j)}_s + \left(\sum_{l=j}^{d} \sigma_{j,l} \right) s \right] - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \; s^d \left(\prod_{j=1}^{d} (W^{(j)}_t - W^{(j)}_s) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{117}$$

où $\rho_{\delta,\varepsilon}(.)$ désignera la régularisation de la fonction $I^\varepsilon_{\alpha_i} := \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{x \in]\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon[}$ par un noyau gaussien paramètré par δ et où $\kappa_{\delta,\varepsilon}(.)$ désignera la solution de l'équation

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{P}(\mu,K)} \sum_{k \in \mathcal{I}(\mu,K)} \left[\prod_{\theta=1}^{\mu} \left(\prod_{l \in I_\theta} \sigma_{k_\theta l} \right) \right] x_{k_1} \ldots x_{k_\mu} \left(\partial^{|\mu|}_{x_{k_1},\ldots,x_{k_\mu}} \kappa_{\delta,\varepsilon} \right)(x) = \prod_{i=1}^{d} \rho_{\delta,\varepsilon}(x_i) x_i, \\ \kappa_{\delta,\varepsilon}(0) = 0, \end{cases}$$

On montre, que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \kappa_{\delta,\varepsilon}(x) = \kappa(x), \tag{118}$$

avec $\kappa(.)$ solution de l'équation,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{P}(\mu,K)} \sum_{k \in \mathcal{I}(\mu,K)} \left[\prod_{\theta=1}^{\mu} \left(\prod_{l \in I_\theta} \sigma_{k_\theta l} \right) \right] x_{k_1} \ldots x_{k_\mu} \left(\partial^{|\mu|}_{x_{k_1},\ldots,x_{k_\mu}} \kappa \right)(x) = \prod_{i=1}^{d} \delta_{\alpha_i}(x_i) x_i, \\ \kappa(0) = 0. \end{cases}$$

Muni de l'égalité (117) et du résultat de convergence donné ci-dessus, la preuve du lemme 2.2.3 n'est qu'une adaptation facile de la preuve effectuée pour établir le lemme 2.2.4. Afin de conclure, il reste à établir l'égalité (117).

- **Preuve de l'égalité (117)**

Supposons l'égalité suivante vérifiée :

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T \dots \int_0^T D^{(1),\dots,(d)}_{r_1,\dots,r_d}\left[\Phi(X_t)\kappa_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right]\eta(r_1,\dots,r_d)dr_1\dots dr_d\right\} = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{i=1}^d \rho_{\delta,\varepsilon}(X_s^{(i)})\right], \tag{119}$$

avec,

$$\eta(r_1,\dots,r_d) = \frac{1}{s^d(t-s)^d}\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\left[(t-s)\mathbf{1}_{[0,s]}(r_i) - s\mathbf{1}_{[s,t]}(r_i)\right].$$

Ainsi, en utilisant successivement la formule d'intégration par parties (cf proposition 7.1.3) et l'égalité donnée ci-dessus,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{i=1}^d \rho_{\delta,\varepsilon}(X_s^{(i)})\right] = \mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\kappa_{\delta,\varepsilon}(X_s)\int_0^T \dots \int_0^T \eta(r_1,\dots,r_d)dW^{(1)}_{r_1}\dots dW^{(d)}_{r_d}\right]. \tag{120}$$

Pour conclure la preuve de l'égalité (117), il reste à calculer pour le processus $(\eta(.))$ donné précédemment, l'intégrale stochastique présente dans le terme de droite de l'égalité ci-dessus. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^T \dots \int_0^T \eta(r_1,\dots,r_d)dW^{(1)}_{r_1}\dots dW^{(d)}_{r_d} &= \frac{1}{s^d(t-s)^d}\left[(t-s)^d\int_0^s \dots \int_0^s \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right)dW^{(d)}_{r_d}\dots dW^{(1)}_{r_1} - \right.\\ &\left. - \quad s^d\prod_{i=1}^d \frac{(W_t^{(i)} - W_s^{(i)})}{X_s^{(i)}}\right].\end{aligned}$$

Supposons que pour tout $k \in \{0,\dots,d-1\}$,

$$\int_0^s \dots \int_0^s \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right)dW^{(d)}_{r_d}\dots dW^{(d-k)}_{r_{d-k}} = \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right)\prod_{j=d-k}^d \left[W_s^{(j)} + \left(\sum_{l=j}^d \sigma_{j,l}\right)s\right]. \tag{121}$$

En posant $k = d-1$ dans l'égalité ci-dessus et en reportant l'égalité ainsi obtenue dans l'égalité précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^T \dots \int_0^T \eta(r_1,\dots,r_d)dW^{(1)}_{r_1}\dots dW^{(d)}_{r_d} &= \frac{1}{s^d(t-s)^d}\left\{(t-s)^d\left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right)\prod_{j=1}^d \left[W_s^{(j)} + \left(\sum_{l=j}^d \sigma_{j,l}\right)s\right] - \right.\\ &\left. - \quad s^d\left(\prod_{i=1}^d \frac{(W_t^{(i)} - W_s^{(i)})}{X_s^{(i)}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Pour conclure la preuve de l'égalité (117), il suffit de reporter l'égalité ci-dessus dans l'égalité (120).

• Preuve de l'égalité (121)

Nous allons établir l'égalité (121) par récurrence. On commence par établir l'égalité (121) pour $k=0$. En utilisant successivement le fait que pour tout $i \in \{1,\dots,d-1\}$, le processus $(X_s^{(i)})$ est indépendant de $(W_s^{(d)})$ et un résultat d'intégration par parties,

$$\int_0^s \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) dW_u^{(d)} = \prod_{i=1}^{d-1} \frac{1}{X_s^{(i)}} \int_0^s \frac{1}{X_s^{(d)}} dW_u^{(d)} = \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) \left[W_s^{(d)} + \sigma_{dd} s\right].$$

Supposons l'égalité vraie au rang k et montrons qu'elle reste vraie au rang $k+1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\int_0^s \dots \int_0^s \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) dW_{r_d}^{(d)} \dots dW_{r_{d-k-1}}^{(d-k-1)} = \int_0^s \prod_{j=d-k}^d \left[W_s^{(j)} + \left(\sum_{l=j}^d \sigma_{j,l}\right) s\right] \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) dW_{r_{k-1}}^{(k-1)}.$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, les Browniens $(W_t^{(i)})$ sont mutuellement indépendants. En outre, pour tout $j \in \{1,\dots,d-k-2\}$ les processus $(X_t^{(j)})$ sont indépendants de $(W_t^{(d-k-1)})$. Ainsi, en utilisant ces deux propriétés d'indépendances, l'égalité donnée ci-dessus se récrit comme :

$$\begin{aligned}
\int_0^s \dots \int_0^s \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) dW_{r_d}^{(d)} \dots dW_{r_{d-k-1}}^{(d-k-1)} &= \prod_{j=d-k}^d \left[W_s^{(j)} + \left(\sum_{l=j}^d \sigma_{j,l}\right) s\right] \prod_{i=1}^{d-k-2} \frac{1}{X_s^{(i)}} \times \\
&\times \int_0^s \left(\prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) dW_{r_{d-k-1}}^{(d-k-1)}. \qquad (122)
\end{aligned}$$

Afin de calculer l'intégrale stochastique du terme de droite, on utilise de nouveau un résultat d'intégration par parties. Ainsi,

$$\int_0^s \left(\prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) dW_{r_{k-1}}^{(k-1)} = \left(\prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) W_s^{(d-k-1)} - \int_0^s D_{r_{d-k-1}}^{(d-k-1)} \left[\prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right] dr_{d-k-1}.$$

Or, il est aisé de montrer que pour tout $r_{d-k-1} \in [0,T]$,

$$D_{r_{d-k-1}}^{(d-k-1)} \left[\prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right] = -\left(\prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}\right) \left(\sum_{j=d-k-1}^d \sigma_{d-k-1,j}\right).$$

Ainsi, en reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité précédente,

$$\int_0^s \prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}} dW_{r_{d-k-1}}^{(d-k-1)} = \left[W_s^{(d-k-1)} + \left(\sum_{j=d-k-1}^d \sigma_{d-k-1,j}\right) s\right] \prod_{i=d-k-1}^d \frac{1}{X_s^{(i)}}.$$

On conclut la preuve de l'égalité (121) en reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (122).

- **Preuve de l'égalité (119)**

Posons :

$$\mathcal{K} := \mathbb{E}\left\{\int_0^T \dots \int_0^T D_{r_1,\dots,r_d}^{(1),\dots,(d)} \left[\Phi(X_t)\kappa_{\delta,\varepsilon}(X_s)\right] \eta(r_1,\dots,r_d) dr_1 \dots dr_d\right\}.$$

En utilisant la formule de Leibnitz pour l'opérateur $D^{(i)}$,

$$D^{(1),\dots,(d)}_{r_1,\dots,r_d}\left[\Phi(X_t)\kappa_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\right] \;=\; \sum_{i=0}^{d}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,d)} D^{(j_1),\dots,(j_i)}_{r_{j_1},\dots,r_{j_i}}\left[\Phi(X_t)\right] D^{(m_1),\dots,(m_{d-i})}_{r_{m_1},\dots,r_{m_{d-i}}}\left[\kappa_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\right],$$

où $\{m_1,\dots,m_{d-i}\} := \{1,\dots,d\}\backslash\mathcal{I}(i,d)$ et nous désignerons par M cet ensemble.
En utilisant le lemme 7.1.4 avec les fonctions Φ et $\kappa_{\delta,\varepsilon}$, l'égalité ci-dessus se récrit,

$$D^{(1),\dots,(d)}_{r_1,\dots,r_d}\left[\Phi(X_t)\kappa_{\delta,\varepsilon}(\widetilde{X}_s)\right] \;=\; \sum_{i=0}^{d}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,d)} \mathbf{K}(X_t,\Phi,\mathcal{I}(i,d))\,\mathbf{K}(X_s,\kappa_{\delta,\varepsilon},M).$$

Ainsi, en reportant l'égalité ci-dessus dans la définition de $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} \;=\; \sum_{i=0}^{d}\sum_{j\in\mathcal{I}(i,d)} \mathbb{E}\left[\int_0^T\dots\int_0^T\Big(\mathbf{K}(X_t,\Phi,\mathcal{I}(i,d))\,\mathbf{K}(X_s,\kappa_{\delta,\varepsilon},M)\Big)\eta(r_1,\dots,r_d)dr_1\dots dr_d\right]. \quad (123)$$

Or, il nous faut déterminer un processus (η_r) de telle manière à ce que l'égalité suivante soit vérifiée,

$$\mathcal{K} = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{i=1}^{d}\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s^{(i)})\right]. \quad (124)$$

A partir de l'égalité (123) et afin d'obtenir l'égalité ci-dessus, il est immédiat que le processus $(\eta(.))$ doit vérifier la condition suivante : pour tout $t\in[0,T]$ et pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$,

$$\int_0^t \eta(r_1,\dots,r_d)dr_i = 0. \quad (125)$$

Ainsi, en supposant cette condition vérifiée, l'égalité (123) se récrit,

$$\mathcal{K} = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\int_0^T\dots\int_0^T \mathbf{K}(X_s,\kappa_{\delta,\varepsilon},E)\eta(r_1,\dots,r_d)dr_1\dots dr_d\right] \quad \text{avec} \quad E := \{1,\dots,d\}. \quad (126)$$

En utilisant la définition de l'opérateur $\mathbf{K}$ et de la fonction $\kappa_{\delta,\varepsilon}(.)$, on montre[29],

$$\mathcal{K} = \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\left(\prod_{i=1}^{d}\rho_{\delta,\varepsilon}(X_s^i)\right)\left(\prod_{i=1}^{d}X_s^i\right)\int_0^s\dots\int_0^s \eta(r_1,\dots,r_d)dr_1\dots dr_d\right].$$

A partir de l'égalité ci-dessus et afin d'obtenir l'égalité (124), il suffit que le processus $(\eta(.))$ vérifie la condition (125) et la condition suivante :

$$\int_0^s\dots\int_0^s \eta(r_1,\dots,r_d)dr_1\dots dr_d = \prod_{i=1}^{d}\frac{1}{X_s^{(i)}}.$$

On conclut la preuve de l'égalité (119) en remarquant que le processus $(\eta(.))$ défini comme :

$$\eta(r_1,\dots,r_d) = \frac{1}{s^d(t-s)^d}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{X_s^{(i)}}\left[(t-s)\mathbf{1}_{[0,s]}(r_i) - s\mathbf{1}_{[s,t]}(r_i)\right],$$

[29] Rappelons que la fonction $\kappa_{\delta,\varepsilon}$ est solution de l'équation (**??**).

vérifie la condition (125) et celle donnée ci-dessus.

■

7.4 Preuve du lemme 2.2.5

Afin d'établir le lemme 2.2.5, il suffit de montrer l'égalité suivante : pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_i}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\prod_{j=1}^{d}\frac{H(\tilde{X}_s^{(j)}-\alpha_j)}{\tilde{X}_s^{(j)}}\Delta W_{s,t}^{(j)}\right] &= \\
&= -\frac{1}{\sigma_{ii}s(t-s)}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\frac{\left(\Delta W_{s,t}^{(i)}+\sigma_{ii}s(t-s)\right)}{\tilde{X}_s^{(i)}}\left[\prod_{j=1}^{d}\frac{H(\tilde{X}_s^{(j)}-\alpha_j)}{\tilde{X}_s^{(j)}}\Delta W_{s,t}^{(j)}\right]\right\}+ \\
&+ \frac{t}{\sigma_{ii}}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{H(\tilde{X}_s^{(i)}-\alpha_i)}{[\tilde{X}_s^{(i)}]^2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\frac{H(\tilde{X}_s^{(j)}-\alpha_j)}{\tilde{X}_s^{(j)}}\Delta W_{s,t}^{(j)}\right].
\end{aligned} \tag{127}$$

Afin de faciliter la lecture de la preuve de l'égalité (127), on posera :

$$\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(i)} := \frac{\rho_\varepsilon(\tilde{X}_s^{(i)}-\alpha_i)}{\tilde{X}_s^{(i)}}\Delta W_{s,t}^{(i)} \qquad \text{et} \qquad \psi_{s,t}^{\varepsilon}(\alpha) := \Phi(X_t)\prod_{j=1}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(j)}.$$

$$\psi_{s,t}(\alpha) := \Phi(X_t)\prod_{j=1}^{d}\frac{H(\tilde{X}_s^{(j)}-\alpha_j)}{\tilde{X}_s^{(j)}}\Delta W_{s,t}^{(j)}.$$

$$A_{s,t}^{\varepsilon,(i)} := \partial_{\alpha_i}\mathbb{E}\left[\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)\right] \qquad \text{et} \qquad A_{s,t}^{(i)} := \partial_{\alpha_i}\mathbb{E}\left[\psi_{s,t}(\alpha)\right].$$

Par le lemme 7.1.1 et en utilisant l'hypothèse que $\Phi \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$, on montre que l'on peut permuter l'espérance avec la dérivation. Ainsi,

$$A_{s,t}^{\varepsilon,(i)} = -\mathbb{E}\left(\Phi(X_t)\frac{h_\varepsilon(\tilde{X}_s^{(i)}-\alpha_i)}{\tilde{X}_s^{(i)}}\Delta W_{s,t}^{(i)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(j)}\right), \tag{128}$$

avec $h_\varepsilon(x) := \partial_y\rho_\varepsilon(y)_{|y=x}$.

En remarquant que pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,d\}^2$ et tout $(r,t) \in [0,T]^2$,

$$\begin{aligned}
D_r^{(i)}(X_t^{(j)}) &= \sigma_{ij}X_t^{(j)}\mathbf{1}_{[0,t]}(r) \qquad \text{et} \qquad D_r^{(i)}(\tilde{X}_t^{(j)}) = \sigma_{ii}\,\tilde{X}_t^{(i)}\,\mathbf{1}_{[0,t]}(r)\delta_{ij}, \\
D_r^{(i)}(W_t^{(j)}) &= \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\delta_{ij},
\end{aligned}$$

on montre que pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$,

$$D_r^{(i)}[\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)] = \left(\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}\left(\partial_{x_j}\Phi\right)(X_t)X_t^{(j)}\right)\prod_{k=1}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(k)} + \Phi(X_t)\Big[\sigma_{ii}h_\varepsilon(\tilde{X}_s^{(i)}-\alpha_i)\Delta W_{s,t}^{(i)}+$$

$$+ \quad \frac{\rho_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{\widetilde{X}_s^{(i)}} \Big((t - \sigma_{ii}\Delta W_{s,t}^{(i)}) \mathbf{1}_{[0,s]}(r) - s\mathbf{1}_{[0,t]}(r) \Big) \Bigg] \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} \varphi_{s,t}^{\varepsilon,(j)}.$$

Ainsi en utilisant l'égalité ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T D_r^{(i)}\left(\psi_{s,t}^{\varepsilon}(\alpha)\right)\eta_r^{(i)}dr\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}\partial_{x_j}\Phi(X_t)X_t^{(j)}\int_0^t \eta_r^{(i)}dr\right)\prod_{k=1}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(k)}\right] + \\
&+ \quad \sigma_{ii}\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)h_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)\Delta W_{s,t}^{(i)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(j)}\int_0^s \eta_r^{(i)}dr\right] + \\
+\,\mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{\widetilde{X}_s^{(i)}}\left((t - \sigma_{ii}\Delta W_{s,t}^{(i)})\int_0^s \eta_r^{(i)}dr - s\int_0^t \eta_r^{(i)}dr\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(j)}\right]&. \qquad (129)
\end{aligned}$$

A présent, il faut choisir un processus $\eta_. \in L^2([0,T]\times\Omega)$ de telle manière à faire apparaître la quantité $A_{s,t}^{\varepsilon,(i)}$ dans l'égalité ci-dessus. A partir de l'égalité (128) et de l'égalité donnée précédemment, il suffit que le processus $\eta_r^{(i)}$ vérifie les conditions suivantes :

$$\int_0^t \eta_r^{(i)}dr = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{ii}\,\widetilde{X}_s^{(i)}\int_0^s \eta_r^{(i)}dr = 1.$$

Un choix possible consiste à prendre pour $\eta_r^{(i)}$ le processus suivant :

$$\eta_r^{(i)} = \frac{1}{\sigma_{ii}s(t-s)\,\widetilde{X}_s^{(i)}}\left[(t-s)\mathbf{1}_{[0,s]}(r) - s\mathbf{1}_{[0,t]}(r)\right].$$

Ainsi en reportant ce choix de $(\eta_r^{(i)})$ dans l'égalité (129) et en utilisant le résultat d'intégration par parties, il vient :

$$A_{s,t}^{\varepsilon,(i)} = -\mathbb{E}\left[\psi_{s,t}^{(\varepsilon)}(\alpha)\int_0^t \eta_r^{(i)}dW_r^{(i)}\right] + \mathbb{E}\left[\Phi(X_t)\frac{\rho_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{[\widetilde{X}_s^{(i)}]^2}\left(\frac{t}{\sigma_{ii}} - \Delta W_{s,t}^{(i)}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d}\varphi_{s,t}^{\varepsilon,(j)}\right].$$

Or, en réitérant le raisonnement fait pour établir l'égalité (58), on montre :

$$\int_0^t \eta_r^{(i)}dW_r^{(i)} = \frac{1}{\sigma_{ii}s(t-s)\,\widetilde{X}_s^{(i)}}\left[tW_s^{(i)} - sW_t^{(i)} + \sigma_{ii}s(t-s)\right] = \frac{\Delta W_{s,t}^{(i)}}{\sigma_{ii}s(t-s)}.$$

Ainsi en reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité précédente,

$$A_{s,t}^{\varepsilon,(i)} = -\frac{1}{\sigma_{ii}s(t-s)}\mathbb{E}\left\{\Phi(X_t)\frac{\left(\Delta W_{s,t}^{(i)} + \sigma_{ii}s(t-s)\right)}{\widetilde{X}_s^{(i)}}\left[\prod_{j=1}^{d}\frac{\rho_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(j)} - \alpha_j)}{\widetilde{X}_s^{(j)}}\Delta W_{s,t}^{(j)}\right]\right\} +$$

$$+ \quad \frac{t}{\sigma_{ii}} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \frac{\rho_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(i)} - \alpha_i)}{[\widetilde{X}_s^{(i)}]^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d} \frac{\rho_\varepsilon(\widetilde{X}_s^{(j)} - \alpha_j)}{\widetilde{X}_s^{(j)}}\right].$$

Il suffit pour conclure de faire tendre le paramètre ε vers zéro et de réitérer le raisonnement fait dans le cas scalaire.

■

7.5 Preuve des résultats intermédiaires

7.5.1 Preuve du lemme 7.1.3

Posons,

$$I \quad := \quad \mathbb{E}\left[F \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} \eta(r_1, \ldots, r_d) dW_{r_1}^{(1)} \ldots dW_{r_d}^{(d)}\right],$$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$u_{r_1,\ldots,r_i}^{(1),\ldots,(i)} \quad := \quad \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} \eta(r_1, \ldots, r_i) dW_{r_1}^{(1)} \ldots dW_{r_i}^{(i)}.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties (cf l'égalité (42)) avec la variable aléatoire F et le processus $u_{r_1,\ldots,r_{d-1}}^{(1),\ldots,(d-1)}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[F \int_0^{+\infty} u_{r_1,\ldots,r_{d-1}}^{(1),\ldots,(d-1)} dW_{r_d}^{(d)}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} D_{r_d}^{(d)}(F) u_{r_1,\ldots,r_{d-1}}^{(1),\ldots,(d-1)} dr_d\right].$$

En identifiant le terme de gauche avec I et en utilisant le théorème de Fubini dans le terme de droite de l'égalité précédente, on montre :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[D_{r_d}^{(d)}(F) u_{r_1,\ldots,r_{d-1}}^{(1),\ldots,(d-1)}\right] dr_d. \tag{130}$$

En remarquant que :

$$u_{r_1,\ldots,r_{d-1}}^{(1),\ldots,(d-1)} = \int_0^{+\infty} u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)} dW_{r_{d-1}}^{(d-1)},$$

l'égalité (130) se récrit alors :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[D_{r_d}^{(d)}(F) \int_0^{+\infty} u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)} dW_{r_{d-1}}^{(d-1)}\right] dr_d. \tag{131}$$

Et donc en utilisant de nouveau la formule d'intégration par parties avec la variable aléatoire $D_{r_d}^{(d)}(F)$ et le processus $u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)}$,

$$\mathbb{E}\left[D_{r_d}^{(d)}(F) \int_0^{+\infty} u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)} dW_{r_{d-1}}^{(d-1)}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} D_{r_{d-1}}^{(d-1)} \left(D_{r_d}^{(d)}(F)\right) u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)} dr_{d-1}\right].$$

En utilisant le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}\left[D_{r_d}^{(d)}(F) \int_0^{+\infty} u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)} dW_{r_{d-1}}^{(d-1)}\right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[D_{r_{d-1}}^{(d-1)} \left(D_{r_d}^{(d)}(F)\right) u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)}\right] dr_{d-1}.$$

En reportant l'égalité ci-dessus dans l'égalité (131),

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[D_{r_{d-1}}^{(d-1)} \left(D_{r_d}^{(d)}(F)\right) u_{r_1,\ldots,r_{d-2}}^{(1),\ldots,(d-2)}\right] dr_{d-1} dr_d.$$

Ainsi en raisonnant de proche en proche,

$$I = \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[D_{r_1}^{(1)} \left(D_{r_2}^{(2)} \ldots \left(D_{r_d}^{(d)}(F)\ldots\right)\right) \eta(r_1,\ldots,r_d)\right] dr_d \ldots dr_1.$$

En utilisant le fait que le processus $\eta(.) \in L^2([0,T]^d \times \Omega)$ et que la variable aléatoire $F \in S$, on a :

$$I = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} D_{r_1}^{(1)} \left(D_{r_2}^{(2)} \ldots \left(D_{r_d}^{(d)}(F)\ldots\right)\right) \eta(r_1,\ldots,r_d) dr_d \ldots dr_1\right].$$

Par cette dernière égalité, on conclut la preuve du lemme.

■

7.5.2 Preuve du lemme 7.1.4

Dans la preuve du lemme 7.1.4, nous utiliserons les notations qui ont été introduites en début de section.

Par la formule de Leibnitz pour l'opérateur $D^{(i)}$,

$$D_{r_1,\ldots,r_d}^{(1),\ldots,(d)}\left[\Phi(X_t)\Psi(X_s)\right] = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j \in \mathcal{I}(i,I)} D_{r_{j_1},\ldots,r_{j_i}}^{(j_1),\ldots,(j_i)}\left[\Phi(X_t)\right] D_{r_{m_1},\ldots,r_{m_{d-i}}}^{(m_1),\ldots,(m_{d-i})}\left[\Psi(X_s)\right]. \tag{132}$$

Afin de conclure la preuve du lemme, il suffit de calculer la dérivée de Malliavin du premier terme de droite de l'égalité ci-dessus. Nous allons donc établir l'égalité suivante :

$$D_{r_{j_1},\ldots,r_{j_i}}^{(j_1),\ldots,(j_i)}\left[\Phi(X_t)\right] = \sum_{\mathcal{P}(\mu,E)} \sum_{k \in \mathcal{I}(\mu,E)} \left[\prod_{\theta=1}^{\mu} \left(\prod_{l \in I_\theta} \sigma_{k_\theta l} \mathbf{1}_{[0,t]}(r_{k_\theta})\right)\right] X_t^{(k_1)} \ldots X_t^{(k_\mu)} \left(\partial_{x_{k_1},\ldots,x_{k_\mu}}^{|\mu|} \Phi\right)(X_t),$$

avec $E := \mathcal{I}(i,I)$.

Remarquons que pour tout $(j_1,j_2) \in \{1,\ldots,d\}^2$,

$$D_{r_{j_1}}^{(j_1)}\left[\Phi(X_t)\right] = \sum_{i_1=1}^{d} (\partial_{x_{i_1}}\Phi)(X_t) D_{r_{j_1}}^{(j_1)}[X_t^{(i_1)}].$$

$$D_{r_{j_2}}^{(j_2)}\left[D_{r_{j_1}}^{(j_1)}\left(\Phi(X_t)\right)\right] = \sum_{i_1,i_2=1}^{d} (\partial_{x_{i_1},x_{i_2}}^2 \Phi)(X_t) D_{r_{j_2}}^{(j_2)}[X_t^{(i_2)}] D_{r_{j_1}}^{(j_1)}[X_t^{(i_1)}] + \sum_{i_1=1}^{d} (\partial_{x_{i_1}}\Phi)(X_t) D_{r_{j_2},r_{j_1}}^{(j_2),(j_1)}[X_t^{(i_1)}].$$

Ainsi, en raisonnant de proche en proche,

$$D_{r_{j_1},\ldots,r_{j_i}}^{(j_1),\ldots,(j_i)}\left[\Phi(X_t)\right] = \sum_{\mathcal{P}(\mu,E)} \sum_{k \in \mathcal{I}(\nu,E)} \left(\partial_{k_1} \ldots \partial_{k_\mu} \Phi\right)(X_t) D_{r(I_1)}^{j(I_1)}\left[X_t^{(k_1)}\right] \ldots D_{r(I_\mu)}^{j(I_\mu)}\left[X_t^{(k_\mu)}\right], \tag{133}$$

où pour tout $k \in \{1,\ldots\mu\}$ on a posé,

$$D_{r(I_k)}^{j(I_k)}[F] := D_{r_{i_\theta^1},\ldots,r_{i_k^m}}^{(i_\theta^1),\ldots,(i_k^m)}[F], \quad \text{avec } I_k = \{i_k^1,\ldots,i_k^m\}.$$

A présent, calculons pour tout $\theta \in \{1, \ldots, \mu\}$, $\qquad D^{j(I_\theta)}_{r(I_\theta)}\left[X_t^{(k)}\right]$.
Supposons sans perte de généralité que $|I_\theta| = n$. Il est aisé de montrer les égalité suivantes :

$$\begin{aligned} D^{(i_\theta^1)}_{r_{i_\theta^1}}\left[X_t^{(k)}\right] &= \sigma_{ki_\theta^1} X_t^{(k)} \mathbf{1}_{[0,t]}(r_{i_\theta^1}), \\ D^{(i_\theta^1),(i_\theta^2)}_{r_{i_\theta^1}, r_{i_\theta^2}}\left[X_t^{(k)}\right] &= \sigma_{ki_\theta^1}\sigma_{ki_\theta^2} \mathbf{1}_{[0,t]}(r_{i_\theta^1}) \mathbf{1}_{[0,t]}(r_{i_\theta^2}) X_t^{(k)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en raisonnant de proche en proche, on montre :

$$D^{j(I_\theta)}_{r(I_\theta)}\left[X_t^{(k_\theta)}\right] = \left(\prod_{l \in I_\theta} \sigma_{k_\theta l}\right) X_t^{(k)} \mathbf{1}_{[0,t]}(r_{j_l}).$$

Pour conclure, il suffit de reporter cette égalité dans l'égalité (133).

■

References

[1] Barles.G *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques et Applications, SMAI (Springer-Verlag).

[2] Barraquand.J Martineau.D *Numerical valuation of high dimensionnal multivariate american securities*, Journal of Finance and quant.anal., 30, (1995).

[3] Bensoussan.A *On the theory of option pricing*, Acta Appl.math.,2, (1984).

[4] Bensoussan.A Lions.J.L *Impulse Control*, Gauthiers-Villars.

[5] Broadie.M Glasserman.P *Monte-Carlo methods for pricing high-dimensionnal american options : an overview* Preprint.

[6] Broadie.M Detemple.J *The valuation of American options on multiple assets*, Mathematical Finance, 3 (7), (1997).

[7] Fournié.E, Lasry.J-M, Lebuchoux.J, Lions.P-L, Touzi.N *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance*, Finance and Stochastics, **4**, (1999).

[8] Friedman.A *Partial Differential Equations and Applications*, Academic Press, **1**, (1975).

[9] El-Karoui.N

[10] Jaillet.P, Lamberton.D, Lapeyre.B *Variational inequalities and the pricing of american options*, Acta.Appl.Math, 21, (1990).

[11] Karatzas.I *Optimization problems in the theory on conitnuous trading*, SIAM J.Control Optimization, 27, (1989).

[12] Karatzas.I Shreve.S *Brownian motion and Stochastic calculus* Springer Verlag (1988).

[13] Crandall.M, Ishii.H, Lions.P.L *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, AMS, 1 (27), 1992.

[14] Malliavin.P *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*, Proc. Inter. Symp. on Stoch. Diff. Equa., Kyoto Wiley, (1978)

[15] Mc Kean.H.P *A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics*, Indust.Manage.Rev, 6, (1965).

[16] Van Moerbeke.P.L.J, On optimal stopping and free boundary problems, Arch.Rational.Merch.Anal, 60, (1976).

[17] Nualart.D *The Malliavin calculus and related topics* Springer Verlag.

[18] Tsitsiklis.j Van Roy.B *Optimal stopping of Markov processes : Hilbert Space theory, Approximation algorithms and an application to pricing High-dimensional Financial Derivatives*, working paper, Laboratory for Information and Decision Sciences, MIT, Cambridge, MA.