



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

La place des ordinateurs quantiques dits analogiques (D-Wave)

Principe, utilisation, comparaison et limitations

Stéphane Louise

`stephane.louise@cea.fr`

CEA, LIST

2-5 Novembre 2021, école QOR

1 Hamiltonien et propagateur

- Fonction d'onde et espace d'état
- Évolution des systèmes quantiques et théorème adiabatique
- La mesure et la perte de l'information quantique

2 Application au calcul et à l'optimisation

- Application au calcul
- Principes et limitations de D-Wave

3 D-Wave utilisation : dépasser les contraintes

4 Le problème de cardinalité maximale et le D-Wave 2X

- Résultats expérimentaux

5 Problèmes d'optimisation sur circuits quantiques

6 Remarques de conclusion

Section 1

Hamiltonien et propagateur

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)}$ $\rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule associée à la fonction d'onde au point \vec{r} et au temps t

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)}$ $\rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule associée à la fonction d'onde au point \vec{r} et au temps t
- Condition de normalisation : $\forall t, \iiint |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule associée à la fonction d'onde au point \vec{r} et au temps t
- Condition de normalisation : $\forall t, \iiint |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$
- Les fonctions d'onde forment un espace vectoriel :
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ est une fonction d'onde

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule associée à la fonction d'onde au point \vec{r} et au temps t
- Condition de normalisation : $\forall t, \iiint |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$
- Les fonctions d'onde forment un espace vectoriel :
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ est une fonction d'onde
 $|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2|^2 = |\lambda_1|^2 |\psi_1|^2 + |\lambda_2|^2 |\psi_2|^2 +$

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule associée à la fonction d'onde au point \vec{r} et au temps t

- Condition de normalisation : $\forall t, \iiint |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$
- Les fonctions d'onde forment un espace vectoriel :

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ est une fonction d'onde

$$|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2|^2 = |\lambda_1|^2 |\psi_1|^2 + |\lambda_2|^2 |\psi_2|^2 + \lambda_1^* \lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle + \lambda_1 \lambda_2^* \langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

- Est une fonction ψ à valeurs complexes (scalaire si particule sans spin)
- $\overrightarrow{\psi(\vec{r}, t)} \rightarrow |\psi(t)\rangle$ (Notation de Dirac) $\psi(\vec{r}, t) = \hat{x} |\psi(t)\rangle$
- L'adjoint de la fonction d'onde ${}^t|\psi(t)\rangle^*$ Noté $\langle\psi(t)|$
- Produit scalaire : $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule associée à la fonction d'onde au point \vec{r} et au temps t
- Condition de normalisation : $\forall t, \iiint |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$
- Les fonctions d'onde forment un espace vectoriel :
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ est une fonction d'onde
 $|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2|^2 = |\lambda_1|^2|\psi_1|^2 + |\lambda_2|^2|\psi_2|^2 +$

$\lambda_1^*\lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle + \lambda_1\lambda_2^* \langle\psi_2|\psi_1\rangle \rightarrow$ Phénomène d'interférence

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{x} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{\hat{x}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{\hat{p}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla$

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{\hat{x}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{\hat{p}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{\hat{x}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{\hat{p}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier
- Opérateur d'énergie: Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{x} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{p} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier
- Opérateur d'énergie: Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$
- Les quantités physiques observables sont associées à des opérateurs auto-adjoints:
 $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ donc sont diagonalisables

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{\hat{x}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{\hat{p}} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier
- Opérateur d'énergie: Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$
- Les quantités physiques observables sont associées à des opérateurs auto-adjoints:
 $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ donc sont diagonalisables
 - $\exists \{t_0, t_1, \dots\}, \exists \{\psi_0, \psi_1, \dots\} / \hat{T} |\psi_0\rangle = t_0 |\psi_0\rangle, \hat{T} |\psi_1\rangle = t_1 |\psi_1\rangle, \dots$
 - Les ψ_i sont une base orthonormée, $\forall i, j, \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$
 - L'ensemble des valeurs propres (spectre des valeurs) peut être continu (e.g. \hat{x}), discret (pour les systèmes contraints), ou un mélange des deux

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{x} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{p} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier
- Opérateur d'énergie: Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$
- Les quantités physiques observables sont associées à des opérateurs auto-adjoints:
 $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ donc sont diagonalisables
 - $\exists \{t_0, t_1, \dots\}, \exists \{\psi_0, \psi_1, \dots\} / \hat{T} |\psi_0\rangle = t_0 |\psi_0\rangle, \hat{T} |\psi_1\rangle = t_1 |\psi_1\rangle, \dots$
 - Les ψ_i sont une base orthonormée, $\forall i, j, \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$
 - L'ensemble des valeurs propres (spectre des valeurs) peut être continu (e.g. \hat{x}), discret (pour les systèmes contraints), ou un mélange des deux
- Évolution= équation de Schrödinger : $\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\right) |\psi\rangle$

- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{x} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{p} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier
- Opérateur d'énergie: Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$
- Les quantités physiques observables sont associées à des opérateurs auto-adjoints:
 $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ donc sont diagonalisables
 - $\exists \{t_0, t_1, \dots\}, \exists \{\psi_0, \psi_1, \dots\} / \hat{T} |\psi_0\rangle = t_0 |\psi_0\rangle, \hat{T} |\psi_1\rangle = t_1 |\psi_1\rangle, \dots$
 - Les ψ_i sont une base orthonormée, $\forall i, j, \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$
 - L'ensemble des valeurs propres (spectre des valeurs) peut être continu (e.g. \hat{x}), discret (pour les systèmes contraints), ou un mélange des deux
- Évolution= équation de Schrödinger : $\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\right) |\psi\rangle$
- Exemple : oscillateur harmonique 1D
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

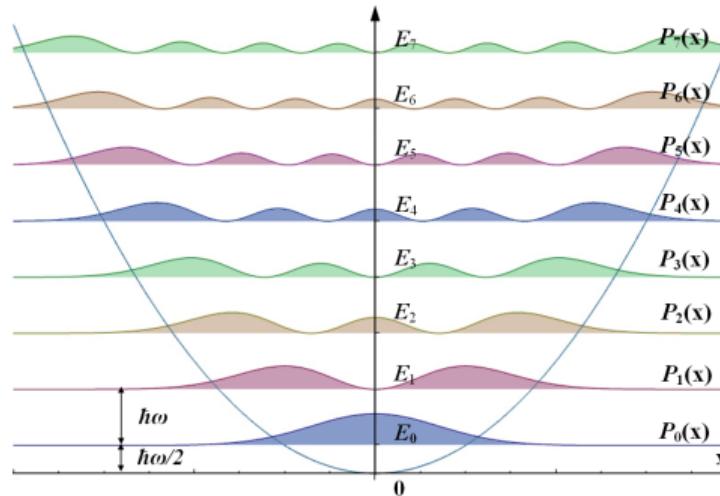
- Opérateur de position : $\hat{x}/\hat{x} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{r}, t)$
- Opérateur d'impulsion : $\hat{p}/\hat{p} |\psi(t)\rangle = \psi(\vec{p}, t)$,
en représentation spatiale $\hat{p} = -ih\nabla \rightarrow$ transformée de Fourier
- Opérateur d'énergie: Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$
- Les quantités physiques observables sont associées à des opérateurs auto-adjoints:
 $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ donc sont diagonalisables
 - $\exists \{t_0, t_1, \dots\}, \exists \{\psi_0, \psi_1, \dots\} / \hat{T} |\psi_0\rangle = t_0 |\psi_0\rangle, \hat{T} |\psi_1\rangle = t_1 |\psi_1\rangle, \dots$
 - Les ψ_i sont une base orthonormée, $\forall i, j, \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$
 - L'ensemble des valeurs propres (spectre des valeurs) peut être continu (e.g. \hat{x}), discret (pour les systèmes contraints), ou un mélange des deux
- Évolution= équation de Schrödinger : $\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\right) |\psi\rangle$
- Exemple : oscillateur harmonique 1D
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$
 - $e_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{N}$

Ex: l'oscillateur harmonique quantique

- Les solutions non stationnaires sont transitoires
- Les énergies apparaissent sur un spectre discret : $e_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$
 - l'énergie minimum est non nulle: $e_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

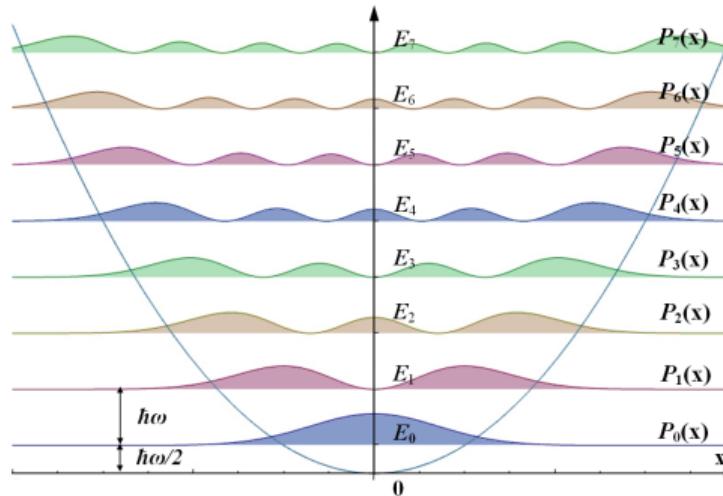
Ex: l'oscillateur harmonique quantique

- Les solutions non stationnaires sont transitoires
- Les énergies apparaissent sur un spectre discret : $e_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$
 - l'énergie minimum est non nulle: $e_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$



Ex: l'oscillateur harmonique quantique

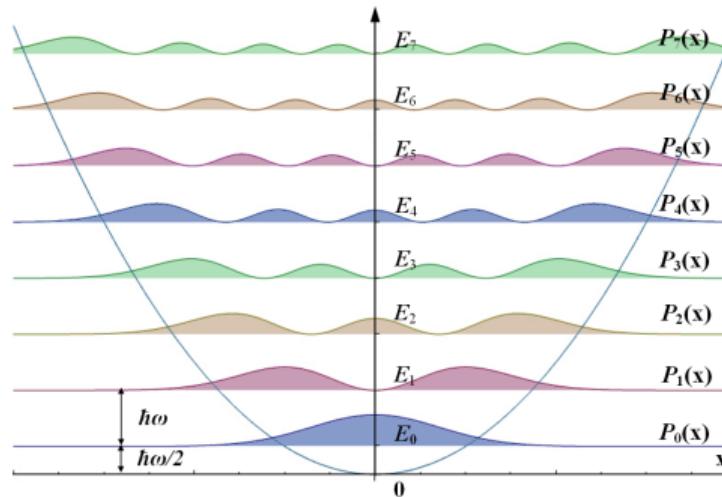
- Les solutions non stationnaires sont transitoires
- Les énergies apparaissent sur un spectre discret : $e_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$
 - l'énergie minimum est non nulle: $e_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$



- Systèmes quantiques \neq systèmes classiques

Ex: l'oscillateur harmonique quantique

- Les solutions non stationnaires sont transitoires
- Les énergies apparaissent sur un spectre discret : $e_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$
 - l'énergie minimum est non nulle: $e_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$



- Systèmes quantiques \neq systèmes classiques
- Système confiné → il existe des états discrets et une discrétisation des énergies associées

Évolutions d'un système quantique, propagateur:

- Cas de l'équation de Schrödinger: $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi(t)\rangle$
- Si \hat{H} est indépendant du temps : $|\psi(t)\rangle = e^{i\hat{H}\frac{t-t_0}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t-t_0) |\psi(t_0)\rangle$
- \hat{U} est l'opérateur de translation temporelle et $K(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) = \langle \hat{r} | \hat{U}(t-t_0) | \hat{r}_0 \rangle$ est le propagateur de Schrödinger
- La fonction d'onde en \vec{r}, t s'exprime directement comme produit de convolution de la fonction d'onde en \vec{r}_0, t_0

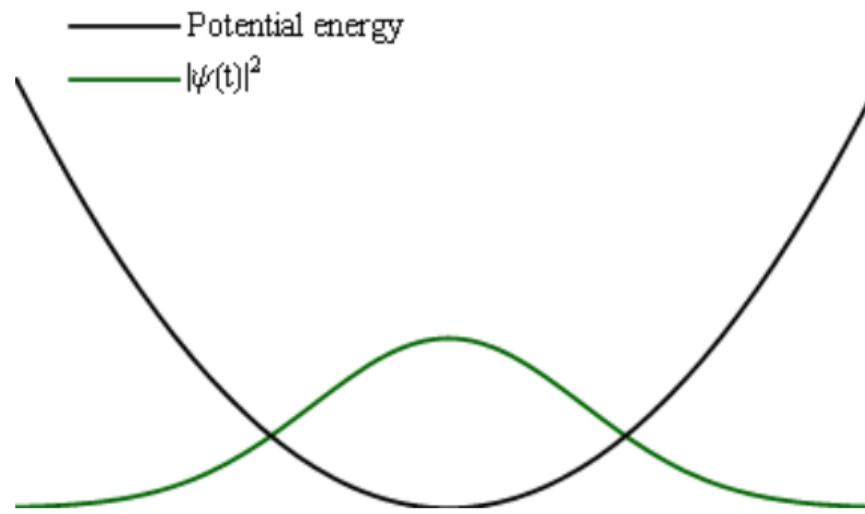
Évolutions d'un système quantique, propagateur:

- Cas de l'équation de Schrödinger: $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi(t)\rangle$
- Si \hat{H} est indépendant du temps : $|\psi(t)\rangle = e^{i\hat{H}\frac{t-t_0}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t-t_0) |\psi(t_0)\rangle$
- \hat{U} est l'opérateur de translation temporelle et $K(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) = \langle \hat{r} | \hat{U}(t-t_0) | \hat{r}_0 \rangle$ est le propagateur de Schrödinger
- La fonction d'onde en \vec{r}, t s'exprime directement comme produit de convolution de la fonction d'onde en \vec{r}_0, t_0
- **Les équations de la mécanique quantique sont déterministes**

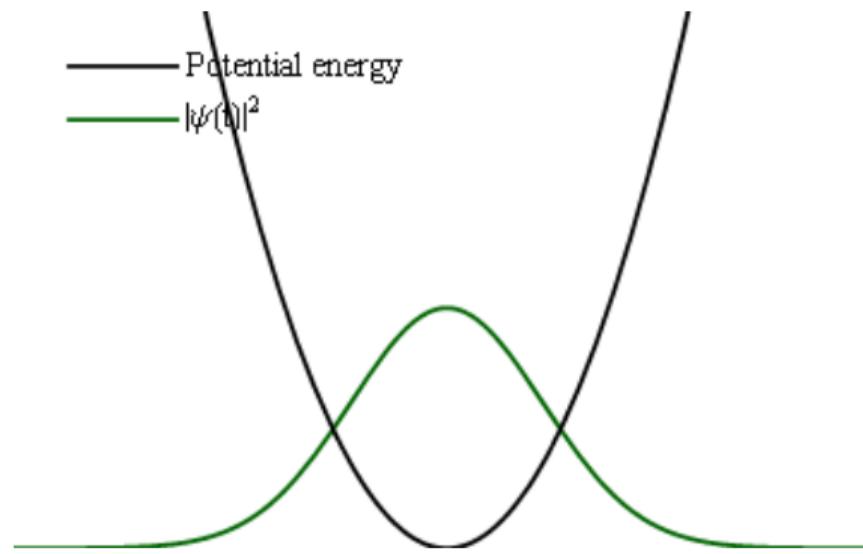
Théorème adiabatique [Born, Fock, 1928]

- Pour un système dont le hamiltonien $\hat{H}(t)$ dépend du temps
- Si la variation de $\hat{H}(t)$ est suffisemment lente
- Principe d'incertitude: $\Delta E \Delta t \geq \hbar$
en choisissant une constante de relaxation $\tau/\tau \gg \frac{\hbar}{\Delta H}$ le système quantique peut être vu comme une succession progressive d'états stationnaires de \hat{H}

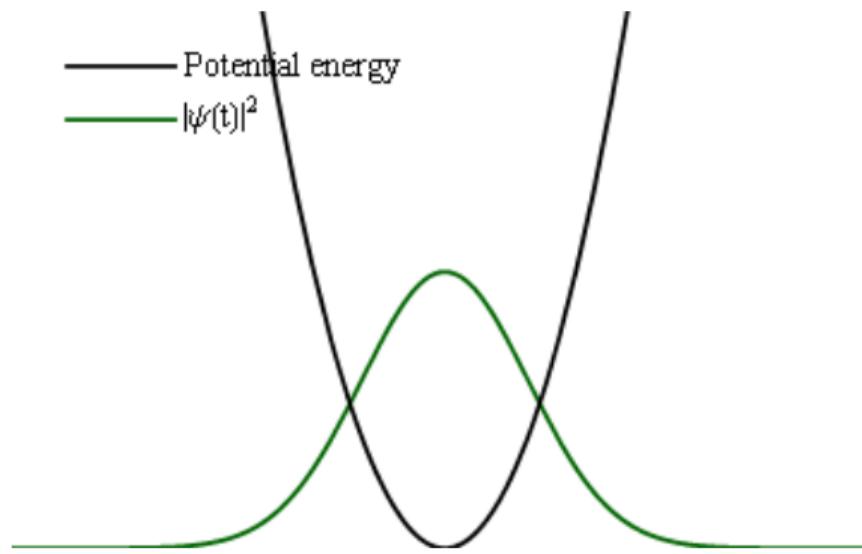
En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



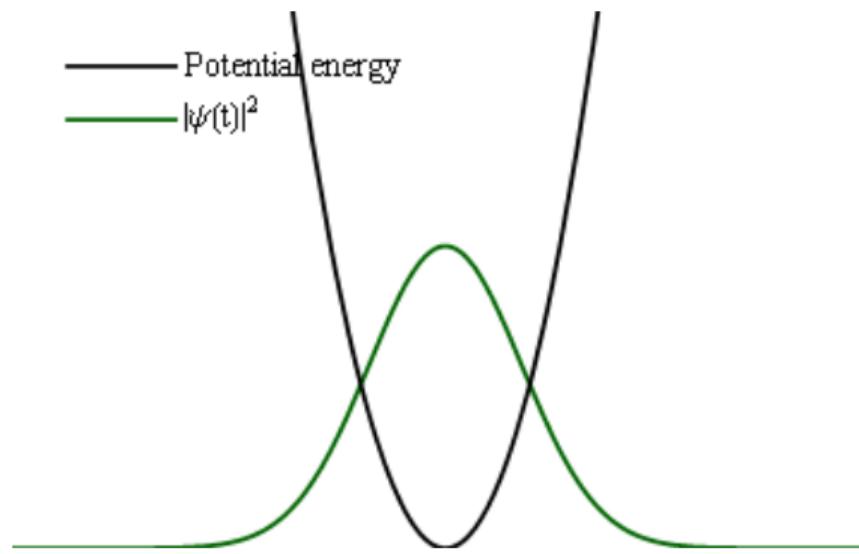
En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



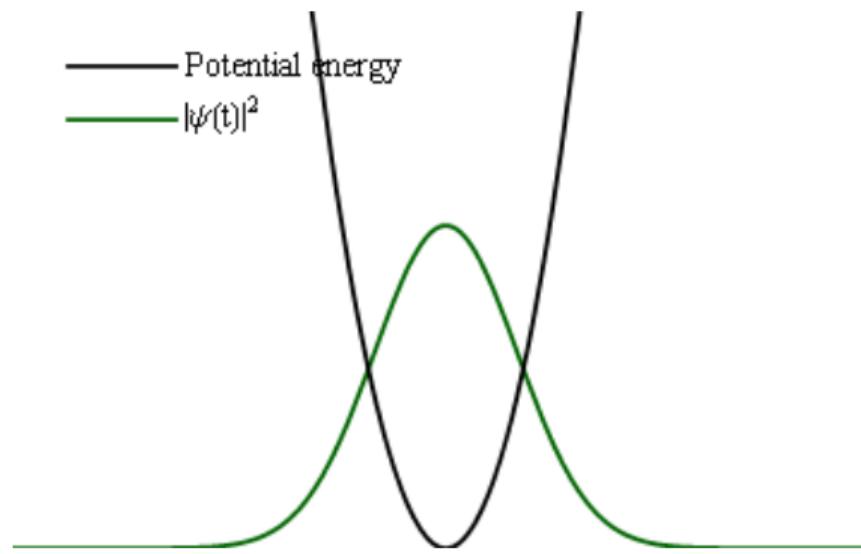
En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



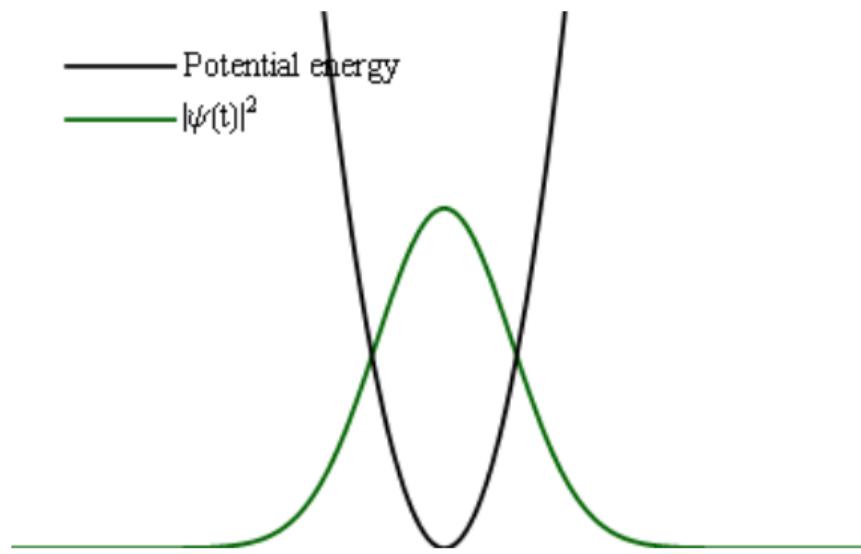
En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



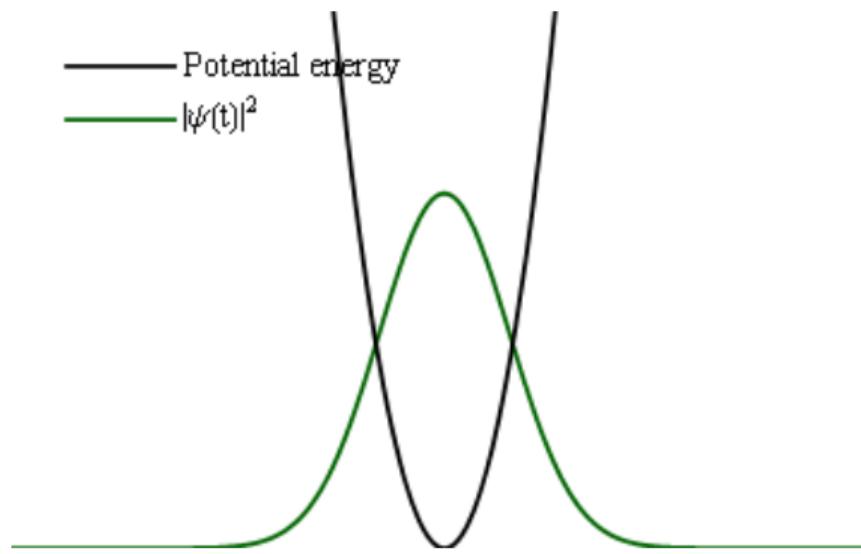
En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



En faisant varier doucement ω lentement, on reste sur l'état fondamental



La mécanique quantique est en général considérée non déterministe à cause de la mesure

- Lors de la mesure, le système quantique n'est plus isolé
- Le système n'est plus régit par l'équation de Schrödinger

La mécanique quantique est en général considérée non déterministe à cause de la mesure

- Lors de la mesure, le système quantique n'est plus isolé
- Le système n'est plus régit par l'équation de Schrödinger
- Interprétation de Copenhague de la mesure :
 - Avec $|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i |m_i\rangle$ où les $|m_i\rangle$ sont des valeurs propres de l'observable \hat{M}
 - La mesure de M sur le système quantique donne m_i avec la probabilité $|c_i|^2$

La mécanique quantique est en général considérée non déterministe à cause de la mesure

- Lors de la mesure, le système quantique n'est plus isolé
- Le système n'est plus régit par l'équation de Schrödinger
- Interprétation de Copenhague de la mesure :
 - Avec $|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i |m_i\rangle$ où les $|m_i\rangle$ sont des valeurs propres de l'observable \hat{M}
 - La mesure de M sur le système quantique donne m_i avec la probabilité $|c_i|^2$
 - Après la mesure il y a "réduction" de la fonction d'onde
 $|\psi(t_m)\rangle = |m_i\rangle$
 - **La mesure détruit l'information codée dans la fonction d'onde**

La mécanique quantique est en général considérée non déterministe à cause de la mesure

- Lors de la mesure, le système quantique n'est plus isolé
- Le système n'est plus régit par l'équation de Schrödinger
- Interprétation de Copenhague de la mesure :
 - Avec $|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i |m_i\rangle$ où les $|m_i\rangle$ sont des valeurs propres de l'observable \hat{M}
 - La mesure de M sur le système quantique donne m_i avec la probabilité $|c_i|^2$
 - Après la mesure il y a "réduction" de la fonction d'onde $|\psi(t_m)\rangle = |m_i\rangle$
 - **La mesure détruit l'information codée dans la fonction d'onde**
- Une autre limitation importante est le temps de cohérence

La mécanique quantique est en général considérée non déterministe à cause de la mesure

- Lors de la mesure, le système quantique n'est plus isolé
- Le système n'est plus régit par l'équation de Schrödinger
- Interprétation de Copenhague de la mesure :
 - Avec $|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i |m_i\rangle$ où les $|m_i\rangle$ sont des valeurs propres de l'observable \hat{M}
 - La mesure de M sur le système quantique donne m_i avec la probabilité $|c_i|^2$
 - Après la mesure il y a "réduction" de la fonction d'onde $|\psi(t_m)\rangle = |m_i\rangle$
 - **La mesure détruit l'information codée dans la fonction d'onde**
- Une autre limitation importante est le temps de cohérence
 - Tout algorithme quantique admettra ces bornes pour sa réalisation pratique : temps de relaxation adiabatique et temps de cohérence

Section 2

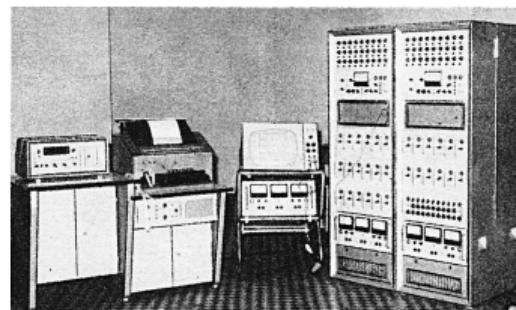
Application au calcul et à l'optimisation

Principe de l'utilisation en calcul et optimisation

- Rechercher un \hat{H} tel que :
 - la configuration d'énergie minimale est transformable en un problème dont on cherche la solution

Principe de l'utilisation en calcul et optimisation

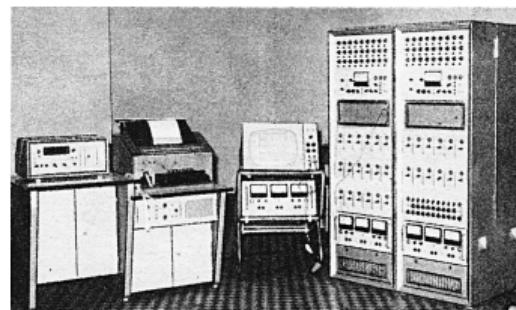
- Rechercher un \hat{H} tel que :
 - la configuration d'énergie minimale est transformable en un problème dont on cherche la solution
 - une analogie avec les ordinateurs analogiques des années 60-70 pour la résolution des équations différentielles



- utilisés pour le contrôle en automatique (e.g. CEA-CISI)

Principe de l'utilisation en calcul et optimisation

- Rechercher un \hat{H} tel que :
 - la configuration d'énergie minimale est transformable en un problème dont on cherche la solution
 - une analogie avec les ordinateurs analogiques des années 60-70 pour la résolution des équations différentielles



- utilisés pour le contrôle en automatique (e.g. CEA-CISI)
- Le but est que la configuration d'énergie minimale finale fournisse une solution à un problème qui nous intéresse

Cas du problème de verre de spin (problème d'Ising)

- C'est le problème de base des machines D-Wave



Cas du problème de verre de spin (problème d'Ising)

- C'est le problème de base des machines D-Wave



- Sur un verre de spin, les spins sont des valeurs binaires $| -1 \rangle_z$ et $| 1 \rangle_z$
- Le hamiltonien : $\mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_i h_i \sigma_i + \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$ avec σ_k les spins et $J_{i,j}$ les coefficients de couplage

Cas du problème de verre de spin (problème d'Ising)

- C'est le problème de base des machines D-Wave



- Sur un verre de spin, les spins sont des valeurs binaires $| -1 \rangle_z$ et $| 1 \rangle_z$
- Le hamiltonien : $\mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_i h_i \sigma_i + \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$ avec σ_k les spins et $J_{i,j}$ les coefficients de couplage
- Le problème d'Ising pour $J_{i,j}$ quelconque est équivalent par changement de variable au problème d'optimisation classique QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) $\rightarrow \min_{|t\rangle} \langle t | \hat{H} | t \rangle$

L'avantage des ordinateurs D-Wave

- Disponible commercialement aujourd'hui
- Grand nombre de qubits
- Potentiel d'utilisation pour les problèmes d'optimisation

L'avantage des ordinateurs D-Wave

- Disponible commercialement aujourd'hui
- Grand nombre de qubits
- Potentiel d'utilisation pour les problèmes d'optimisation

Limitations des ordinateurs D-Wave

- Très faible taux d'interconnexion (les $J_{i,j}$)
- Réduit dramatiquement les capacité de résolution et la portée de la capacité de résolution de problèmes concrets

L'avantage des ordinateurs D-Wave

- Disponible commercialement aujourd'hui
- Grand nombre de qubits
- Potentiel d'utilisation pour les problèmes d'optimisation

Limitations des ordinateurs D-Wave

- Très faible taux d'interconnexion (les $J_{i,j}$)
- Réduit dramatiquement les capacités de résolution et la portée de la capacité de résolution de problèmes concrets

Ces limitations importantes

Sont bien comprises par la société D-Wave et de mieux en mieux par la communauté

- La nouvelle version du processeur double l'interconnexion

L'avantage des ordinateurs D-Wave

- Disponible commercialement aujourd'hui
- Grand nombre de qubits
- Potentiel d'utilisation pour les problèmes d'optimisation

Limitations des ordinateurs D-Wave

- Très faible taux d'interconnexion (les $J_{i,j}$)
- Réduit dramatiquement les capacités de résolution et la portée de la capacité de résolution de problèmes concrets

Ces limitations importantes

Sont bien comprises par la société D-Wave et de mieux en mieux par la communauté

- La nouvelle version du processeur double l'interconnexion
- Doubler quelque chose de petit, ne fait pas forcément grand chose

L'avantage des ordinateurs D-Wave

- Disponible commercialement aujourd'hui
- Grand nombre de qubits
- Potentiel d'utilisation pour les problèmes d'optimisation

Limitations des ordinateurs D-Wave

- Très faible taux d'interconnexion (les $J_{i,j}$)
- Réduit dramatiquement les capacités de résolution et la portée de la capacité de résolution de problèmes concrets

Ces limitations importantes

Sont bien comprises par la société D-Wave et de mieux en mieux par la communauté

- La nouvelle version du processeur double l'interconnexion
- Doubler quelque chose de petit, ne fait pas forcément grand chose
- Amélioration qualitative et quantitative à évaluer

Section 3

D-Wave utilisation : dépasser les contraintes

L'évaluation des machines quantiques pose plusieurs questions:

- Avec quoi comparer ?

L'évaluation des machines quantiques pose plusieurs questions:

- Avec quoi comparer ?
 - Recuit adiabatique > Recuit simulé ?

L'évaluation des machines quantiques pose plusieurs questions:

- Avec quoi comparer ?
 - Recuit adiabatique > Recuit simulé ?
- Comment programmer ?
 - Passage d'un problème quelconque à un problème QUBO (Ising)

L'évaluation des machines quantiques pose plusieurs questions:

- Avec quoi comparer ?
 - Recuit adiabatique > Recuit simulé ?
- Comment programmer ?
 - Passage d'un problème quelconque à un problème QUBO (Ising)
 - Savoir faire à acquérir
- Comment obtenir des résultats les plus précis possible ?
 - qubit flip pour compenser les biais systématiques du HW

L'évaluation des machines quantiques pose plusieurs questions:

- Avec quoi comparer ?
 - Recuit adiabatique > Recuit simulé ?
- Comment programmer ?
 - Passage d'un problème quelconque à un problème QUBO (Ising)
 - Savoir faire à acquérir
- Comment obtenir des résultats les plus précis possible ?
 - qubit flip pour compenser les biais systèmes du HW
 - également : post-processing = des choses à tester et à inventer pour compenser les imperfections de la machine et avoir des résultats exploitables

L'évaluation des machines quantiques pose plusieurs questions:

- Avec quoi comparer ?
 - Recuit adiabatique > Recuit simulé ?
- Comment programmer ?
 - Passage d'un problème quelconque à un problème QUBO (Ising)
 - Savoir faire à acquérir
- Comment obtenir des résultats les plus précis possible ?
 - qubit flip pour compenser les biais systèmes du HW
 - également : post-processing = des choses à tester et à inventer pour compenser les imperfections de la machine et avoir des résultats exploitables

Beaucoup de savoir faire à apprendre avant de “programmer” un calculateur quantique et en exploiter les résultats

- Problème d'Ising généralisé: $\mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_i h_i \sigma_i + \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$ avec σ_k les spins et $J_{i,j}$
- Problème QUBO e.g. $f = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \sum_{i \leq j} q_{i,j} x_i x_j$ avec $x_i \in \{0, 1\}, \forall i$
- Changement de variable: $\sigma_i = 2x_i - 1$, on obtient:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \sum_{i \leq j} q_{ij} x_i x_j + C_H \quad \text{avec} \quad q_{ij} = \begin{cases} 4J_{ij} & i \neq j \\ -\sum_k 2J_{ki} - \sum_k 2J_{ik} + 2h_i & i = j \end{cases} \quad (1)$$

$$C_H = \sum_{ij} J_{ij} + \sum_i h_i$$

- Changement de variable: $x_i = \frac{\sigma+1}{2}$

$$f(\sigma) = \mathcal{H} = \sum_{i < j} J_{ij} + \sum_i h_i + C_x \quad \text{avec} \quad J_{ij} = \frac{q_{ij}}{4}$$

$$h_i = \frac{1}{4} \left(q_{ii} + \sum_k q_{ik} + \sum_k q_{ki} \right), \quad C_x = \frac{1}{4} \sum_{ij} q_{ij} \quad (2)$$

Autre changement de variable: Spin Reversal Transform (SRT)

- La SRT est simplement l'idée d'une transformation :

- Pour QUBO: $y_k = 1 - x_k$
- Pour Ising: $\sigma'_k = -\sigma_k$

Autre changement de variable: Spin Reversal Transform (SRT)

cea

- La SRT est simplement l'idée d'une transformation :
 - Pour QUBO: $y_k = 1 - x_k$
 - Pour Ising: $\sigma'_k = -\sigma_k$
- Pourquoi ?
 - Les ordinateurs quantiques actuels ne sont pas parfaits

Autre changement de variable: Spin Reversal Transform (SRT)

- La SRT est simplement l'idée d'une transformation :
 - Pour QUBO: $y_k = 1 - x_k$
 - Pour Ising: $\sigma'_k = -\sigma_k$
- Pourquoi ?
 - Les ordinateurs quantiques actuels ne sont pas parfaits
 - Une partie des imperfections = biais systémique
 - sur les valeurs des qubits
 - sur les couplages

Autre changement de variable: Spin Reversal Transform (SRT)

■ La SRT est simplement l'idée d'une transformation :

- Pour QUBO: $y_k = 1 - x_k$
- Pour Ising: $\sigma'_k = -\sigma_k$

■ Pourquoi ?

- Les ordinateurs quantiques actuels ne sont pas parfaits
- Une partie des imperfections = biais systémique
 - sur les valeurs des qubits
 - sur les couplages
- Les biais changent au cours du temps
- Utiliser la SRT est une façon d'en limiter l'impact

Autre changement de variable: Spin Reversal Transform (SRT)

■ La SRT est simplement l'idée d'une transformation :

- Pour QUBO: $y_k = 1 - x_k$
- Pour Ising: $\sigma'_k = -\sigma_k$

■ Pourquoi ?

- Les ordinateurs quantiques actuels ne sont pas parfaits
- Une partie des imperfections = biais systémique
 - sur les valeurs des qubits
 - sur les couplages
- Les biais changent au cours du temps
- Utiliser la SRT est une façon d'en limiter l'impact

■ Comment ?

- **Attention:** il ne faut pas changer le résultat optimal $J'_{ik} = -J_{ik}$ et $J'_{ki} = -J_{ki}$ et $h'_k = -h_k$ $q'_{ik} = -q_{ik}$, $q'_{ki} = -q_{ki}$, $i \neq k$ et $q'_{kk} = -q_{kk}$ et $q'_{ii} = q_{ii} + q_{ik} + q_{ki}$, $i \neq k$ et $C_{SRT} = q_{kk}$
- Comme les condiments en cuisine: ni trop, ni trop peu ($\simeq 10\%$)

Autre changement de variable: Spin Reversal Transform (SRT)

■ La SRT est simplement l'idée d'une transformation :

- Pour QUBO: $y_k = 1 - x_k$
- Pour Ising: $\sigma'_k = -\sigma_k$

■ Pourquoi ?

- Les ordinateurs quantiques actuels ne sont pas parfaits
- Une partie des imperfections = biais systémique
 - sur les valeurs des qubits
 - sur les couplages
- Les biais changent au cours du temps
- Utiliser la SRT est une façon d'en limiter l'impact

■ Comment ?

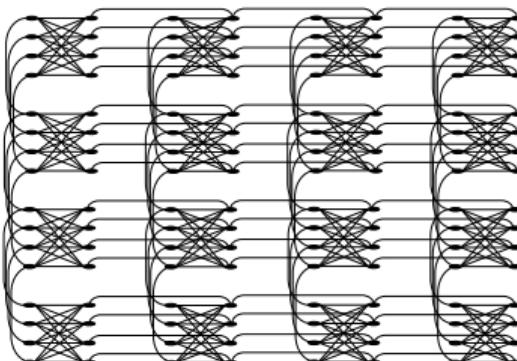
- **Attention:** il ne faut pas changer le résultat optimal $J'_{ik} = -J_{ik}$ et $J'_{ki} = -J_{ki}$ et $h'_k = -h_k$ $q'_{ik} = -q_{ik}$, $q'_{ki} = -q_{ki}$, $i \neq k$ et $q'_{kk} = -q_{kk}$ et $q'_{ii} = q_{ii} + q_{ik} + q_{ki}$, $i \neq k$ et $C_{SRT} = q_{kk}$
- Comme les condiments en cuisine: ni trop, ni trop peu ($\simeq 10\%$)

N.B.: le problème de biais de qubits existe aussi dans certains autres types d'ordinateurs quantiques

- D-Wave 1 (2011): ≤ 128 qubits, ≤ 312 coupleurs
- D-Wave 2 (2013): ≤ 512 qubits, ≤ 1472 coupleurs (Chimera) $\simeq 6$ coupleurs/qubit
- D-Wave 2X (2015): ≤ 1152 qubits, ≤ 3360 coupleurs (Chimera)
- D-Wave 200Q (2017): ≤ 2048 qubits, ≤ 6016 coupleurs (Chimera)
- D-Wave Advantage (2020): ≤ 5640 qubits, ≤ 40484 coupleurs (Pegasus) $\simeq 15$ coupleurs/qubit

- D-Wave 1 (2011): ≤ 128 qubits, ≤ 312 coupleurs
- D-Wave 2 (2013): ≤ 512 qubits, ≤ 1472 coupleurs (Chimera) $\simeq 6$ coupleurs/qubit
- D-Wave 2X (2015): ≤ 1152 qubits, ≤ 3360 coupleurs (Chimera)
- D-Wave 200Q (2017): ≤ 2048 qubits, ≤ 6016 coupleurs (Chimera)
- D-Wave Advantage (2020): ≤ 5640 qubits, ≤ 40484 coupleurs (Pegasus) $\simeq 15$ coupleurs/qubit
- D-Wave Advantage-2 (2023-2024): $\simeq 7000$ qubits, $\simeq 20$ coupleurs/qubit

Le graphe Chimera:



matrice d'adjacence:

$$A_X^{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Le graphe d'interconnexion est peu dense p/r aux nombre de qubits disponibles

- Le graphe d'interconnexion est peu dense p/r aux nombre de qubits disponibles
- Tous les qubits d'une machine réelle ne sont pas fonctionnels
 - on peut s'attendre à quelques pourcents des qubits non fonctionnels
 - le mapping des problèmes doit prendre les qubits non-fonctionnels en compte
 - cela varie d'une machine à l'autre

- Le graphe d'interconnexion est peu dense p/r aux nombre de qubits disponibles
- Tous les qubits d'une machine réelle ne sont pas fonctionnels
 - on peut s'attendre à quelques pourcents des qubits non fonctionnels
 - le mapping des problèmes doit prendre les qubits non-fonctionnels en compte
 - cela varie d'une machine à l'autre
- Les qubits peuvent avoir des biais qui dépendent de la machine et des couplages mis en œuvre (d'où les SRTs)

- Le graphe d'interconnexion est peu dense p/r aux nombre de qubits disponibles
- Tous les qubits d'une machine réelle ne sont pas fonctionnels
 - on peut s'attendre à quelques pourcents des qubits non fonctionnels
 - le mapping des problèmes doit prendre les qubits non-fonctionnels en compte
 - cela varie d'une machine à l'autre
- Les qubits peuvent avoir des biais qui dépendent de la machine et des couplages mis en œuvre (d'où les SRTs)
- Le recuit adiabatique est une heuristique qui tente d'approcher les conditions du théorème adiabatique, mais dont on ne peut pas connaître la précision

- L'évolution lente (adiabatique) d'un système quantique entre un hamiltonien initial \mathcal{H}_0 et un hamiltonien final \mathcal{H}_1 s'il part de l'état fondamental, reste dans l'état fondamental (Th adiabatique)

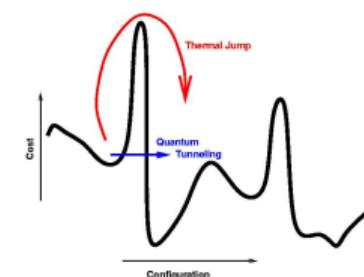
- L'évolution lente (adiabatique) d'un système quantique entre un hamiltonien initial \mathcal{H}_0 et un hamiltonien final \mathcal{H}_1 s'il part de l'état fondamental, reste dans l'état fondamental (Th adiabatique)
- En choisissant un \mathcal{H}_0 facile à résoudre, et un \mathcal{H}_1 qui nous intéresse, le théorème adiabatique permet théoriquement de résoudre n'importe quel problème d'Ising généralisé

- L'évolution lente (adiabatique) d'un système quantique entre un hamiltonien initial \mathcal{H}_0 et un hamiltonien final \mathcal{H}_1 s'il part de l'état fondamental, reste dans l'état fondamental (Th adiabatique)
- En choisissant un \mathcal{H}_0 facile à résoudre, et un \mathcal{H}_1 qui nous intéresse, le théorème adiabatique permet théoriquement de résoudre n'importe quel problème d'Ising généralisé
 - Soit $\mathcal{H}_0 = \sum_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x$ (hamiltonien ferromagnétique) dont les solutions sont $\sigma^x = \pm \mathbf{1}^x$
 - et $\mathcal{H}_1 = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z$
 - $\mathcal{H}(t) = \frac{t}{\tau} \mathcal{H}_0 + (1 - \frac{t}{\tau}) \mathcal{H}_1 / \mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}_1$

- L'évolution lente (adiabatique) d'un système quantique entre un hamiltonien initial \mathcal{H}_0 et un hamiltonien final \mathcal{H}_1 s'il part de l'état fondamental, reste dans l'état fondamental (Th adiabatique)
- En choisissant un \mathcal{H}_0 facile à résoudre, et un \mathcal{H}_1 qui nous intéresse, le théorème adiabatique permet théoriquement de résoudre n'importe quel problème d'Ising généralisé
 - Soit $\mathcal{H}_0 = \sum_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x$ (hamiltonien ferromagnétique) dont les solutions sont $\sigma^x = \pm \mathbf{1}^x$
 - et $\mathcal{H}_1 = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z$
 - $\mathcal{H}(t) = \frac{t}{\tau} \mathcal{H}_0 + (1 - \frac{t}{\tau}) \mathcal{H}_1 / \mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}_1$
 - Avec $\sigma_i^x(0) = |1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1\rangle_z + |1\rangle_z)$ $\Rightarrow \sigma_i^z(\tau)$ solution de $\min_{\sigma^z} \mathcal{H}_1(\sigma^z)$

- L'évolution lente (adiabatique) d'un système quantique entre un hamiltonien initial \mathcal{H}_0 et un hamiltonien final \mathcal{H}_1 s'il part de l'état fondamental, reste dans l'état fondamental (Th adiabatique)
- En choisissant un \mathcal{H}_0 facile à résoudre, et un \mathcal{H}_1 qui nous intéresse, le théorème adiabatique permet théoriquement de résoudre n'importe quel problème d'Ising généralisé
 - Soit $\mathcal{H}_0 = \sum_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x$ (hamiltonien ferromagnétique) dont les solutions sont $\sigma^x = \pm \mathbf{1}^x$
 - et $\mathcal{H}_1 = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z$
 - $\mathcal{H}(t) = \frac{t}{\tau} \mathcal{H}_0 + (1 - \frac{t}{\tau}) \mathcal{H}_1 / \mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}_1$
 - Avec $\sigma_i^x(0) = |1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1\rangle_z + |1\rangle_z)$ $\Rightarrow \sigma_i^z(\tau)$ solution de $\min_{\sigma^z} \mathcal{H}_1(\sigma^z)$
 - Mais vrai pour $\tau \propto \frac{1}{\Delta E^{*2}}$

- L'évolution lente (adiabatique) d'un système quantique entre un hamiltonien initial \mathcal{H}_0 et un hamiltonien final \mathcal{H}_1 s'il part de l'état fondamental, reste dans l'état fondamental (Th adiabatique)
- En choisissant un \mathcal{H}_0 facile à résoudre, et un \mathcal{H}_1 qui nous intéresse, le théorème adiabatique permet théoriquement de résoudre n'importe quel problème d'Ising généralisé
 - Soit $\mathcal{H}_0 = \sum_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x$ (hamiltonien ferromagnétique) dont les solutions sont $\sigma^x = \pm \mathbf{1}^x$
 - et $\mathcal{H}_1 = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z$
 - $\mathcal{H}(t) = \frac{t}{\tau} \mathcal{H}_0 + (1 - \frac{t}{\tau}) \mathcal{H}_1 / \mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}_1$
 - Avec $\sigma_i^x(0) = |1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (| -1 \rangle_z + | 1 \rangle_z)$ $\Rightarrow \sigma_i^z(\tau)$ solution de $\min_{\sigma^z} \mathcal{H}_1(\sigma^z)$
 - Mais vrai pour $\tau \propto \frac{1}{\Delta E^{*2}}$
- le recuit quantique/adiabatique reste une méta-heuristique du même type que le recuit simulé
 - Potentielle accélération quantique = effet tunnel
 - N.B.: sur D-Wave l'effet tunnel n'a été vérifié que sur des sous-graphes très petits



- Transformer le problème initial en QUBO/hamiltonien d'Ising
- Normaliser les couplages d'Ising/QUBO pour que $h_i \in [-2, 2]$ et $J_{ij} \in [-1, 1]$
- Mapper le problème sur le graphe d'interconnexion
 - Peu de chance que le problème corresponde à l'interconnexion
 - Méthode 1: utiliser les outils de base D-Wave qui partitionnent le hamiltonien
 - inconvénient: peu de visibilité sur les opérations sous-jacentes et donc sur le rapport entre les problèmes résolus et le problème que l'on cherche à résoudre
 - Méthode 2: utiliser des outils de duplication de variables sur plusieurs qubits
 - inconvénient: utilisation potentielle de nombreux qubits pour chaque variables et potentiellement venir rapidement à bout du nombre de qubits disponibles sur la machine
- Compenser les biais de spin de la machine par l'utilisation de plusieurs groupe de SRTs

- Faire attention aux paramètres de fonctionnement de la machine:
 - Le temps de recuit (annealing time)
 - Le temps de pause
 - Beaucoup de paramètres accessibles mais difficile de bien les maîtriser sans bien connaître la machine
- Faire des études statistiques sur des batchs de résultats

/!\ Les vrais ordinateurs quantiques fonctionnent bien loin d'un régime idéal que l'on pourrait attendre

- Faire attention aux paramètres de fonctionnement de la machine:
 - Le temps de recuit (annealing time)
 - Le temps de pause
 - Beaucoup de paramètres accessibles mais difficile de bien les maîtriser sans bien connaître la machine
- Faire des études statistiques sur des batchs de résultats

/!\ Les vrais ordinateurs quantiques fonctionnent bien loin d'un régime idéal que l'on pourrait attendre

Illustration sur un problème particulier: le problème de cardinalité maximale (maximum matching)

Section 4

Le problème de cardinalité maximale et le D-Wave 2X

Chercher à caractériser un ordinateur quantique est un problème pas si simple:

- Quel problème utiliser
- Avec quel algorithme “classique” le comparer

Chercher à caractériser un ordinateur quantique est un problème pas si simple:

- Quel problème utiliser
- Avec quel algorithme “classique” le comparer

Les deux problèmes sont liés

- L'utilisation idéale des QC sera sur des problèmes NP-difficiles
- Problème de comparaison alors

Chercher à caractériser un ordinateur quantique est un problème pas si simple:

- Quel problème utiliser
- Avec quel algorithme “classique” le comparer

Les deux problèmes sont liés

- L'utilisation idéale des QC sera sur des problèmes NP-difficiles
- Problème de comparaison alors
- Idée: comparer le recuit quantique et le recuit simulé

Chercher à caractériser un ordinateur quantique est un problème pas si simple:

- Quel problème utiliser
- Avec quel algorithme “classique” le comparer

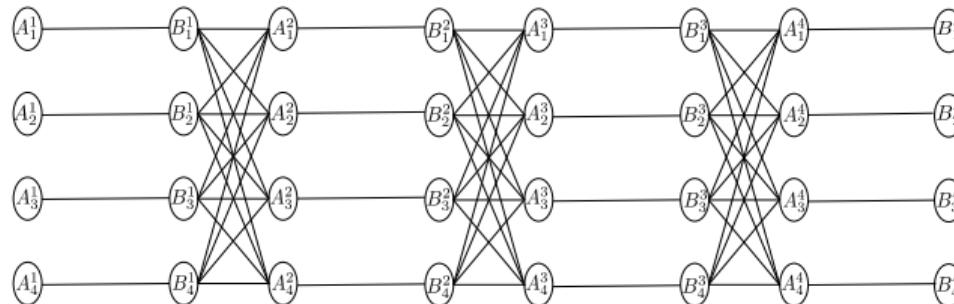
Les deux problèmes sont liés

- L'utilisation idéale des QC sera sur des problèmes NP-difficiles
- Problème de comparaison alors
- Idée: comparer le recuit quantique et le recuit simulé

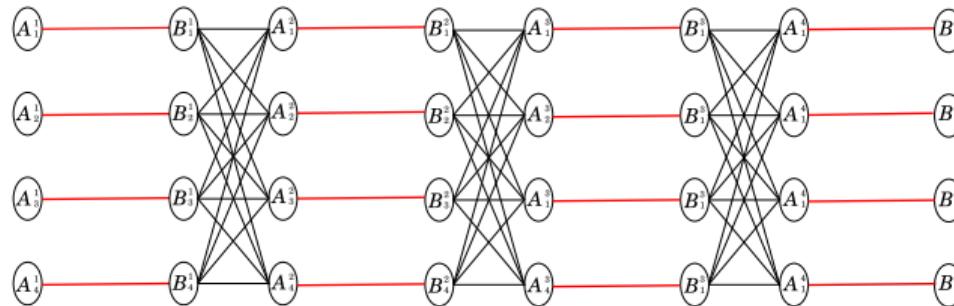
Résultat des années 80 [Sasaki & Hajek]

- Certains problèmes polynomiaux sont exponentiellement durs pour le recuit simulé, tout en étant polynomiaux
- C'est le cas du problème de cardinalité maximale
- Construction de la série de problème G_n

Exemple: G_3



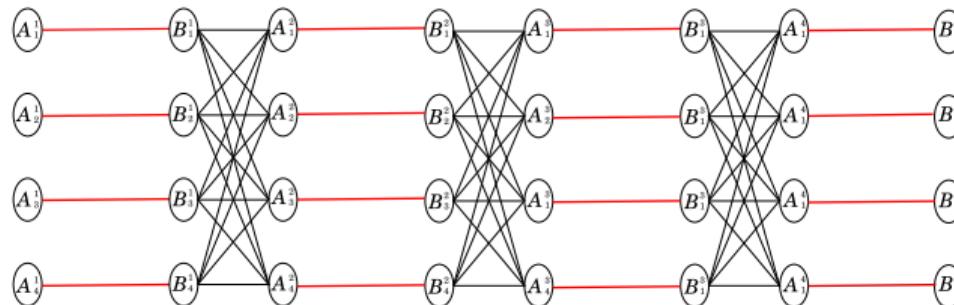
Exemple: G_3



Piège pour le recuit simulé:

- Risque de se perdre dans les parties denses du graphe

Exemple: G_3



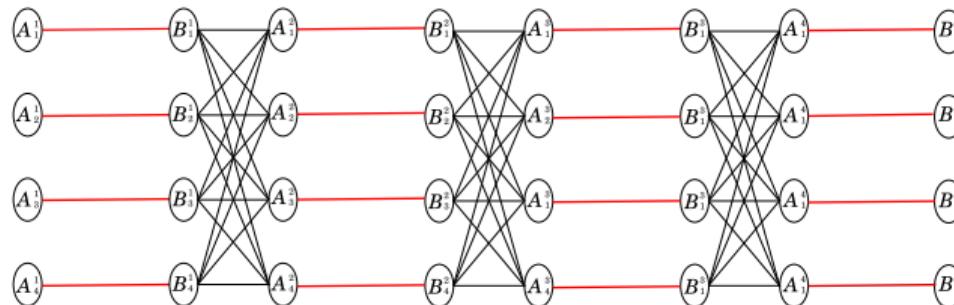
Piège pour le recuit simulé:

- Risque de se perdre dans les parties denses du graphe

Adaptation à un problème QUBO (Ising)

- Problème de cardinalité maximale = problème à contraintes \neq QUBO

Exemple: G_3



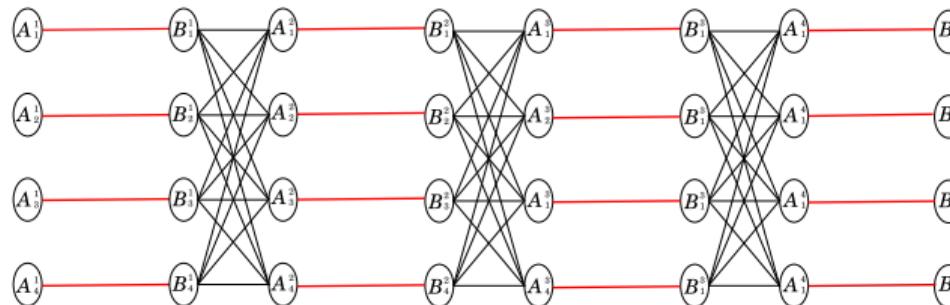
Piège pour le recuit simulé:

- Risque de se perdre dans les parties denses du graphe

Adaptation à un problème QUBO (Ising)

- Problème de cardinalité maximale = problème à contraintes \neq QUBO
- Faire rentrer les contraintes dans la fonction économique

Exemple: G_3



Piège pour le recuit simulé:

- Risque de se perdre dans les parties denses du graphe

Adaptation à un problème QUBO (Ising)

- Problème de cardinalité maximale = problème à contraintes \neq QUBO
- Faire rentrer les contraintes dans la fonction économique
- On passe de contraintes fortes à des contraintes molles

Obtention d'un QUBO pour le problème 1/2

Soit le graphe $G_n = (N, E)$ notre graphe de la série G . Si on associe une variable $x_e \in \{0, 1\}$ pour chaque arc, alors le problème peut s'exprimer sous la forme:

$$\sum_{e \in E} x_e \text{ maximum avec la contrainte } \forall v \in N, \sum_{e \in \Gamma(v)} x_e \leq 1$$

Obtention d'un QUBO pour le problème 1/2

Soit le graphe $G_n = (N, E)$ notre graphe de la série G . Si on associe une variable $x_e \in \{0, 1\}$ pour chaque arc, alors le problème peut s'exprimer sous la forme:

$$\sum_{e \in E} x_e \text{ maximum avec la contrainte } \forall v \in N, \sum_{e \in \Gamma(v)} x_e \leq 1$$

On peut maximiser par exemple:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} x_e - \lambda \sum_{v \in N} \left(\sum_{e \in \Gamma(v)} 1 - x_e \right)^2 &= \\ \sum_{e \in E} x_e - \sum_{v \in N} \sum_{e \in \Gamma(v)} \sum_{e' \in \Gamma(v)} \lambda x_e x_{e'} + \sum_{v \in N} \sum_{e \in \Gamma(v)} 2\lambda x_e - \lambda |N| & \end{aligned}$$

Il faut ensuite développer sur les arcs pour trouver la matrice QUBO

QUBO (après changement de signe pour minimisation):

$$q_{ee} = -1 - 2\lambda \text{ et } q_{ee'} = \begin{cases} 2\lambda & \text{si } \exists v \in N/e \in \Gamma(v) \text{ et } e' \in \Gamma(v) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\sum_{e \in E} x_e \leq \text{card}\{E\}$ on peut prendre $\lambda = \text{card}\{E\}$ comme majorant.

■ Exemple: G1

Figure TBD

$$Q_{G_1} = \begin{bmatrix} -17 & 0 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 & 0 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 16 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & 16 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \end{bmatrix}$$

1 arrête = 1 variable QUBO (un spin d'Ising)

- Même sur G_1 les couplages binaires sont trop nombreux (> 6)

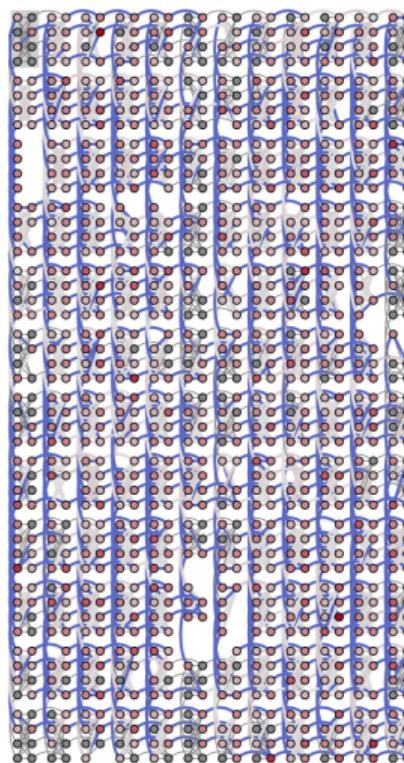
1 arrête = 1 variable QUBO (un spin d'Ising)

- Même sur G_1 les couplages binaires sont trop nombreux (> 6)
- Insuffisance de la connectivité de la machine D-Wave

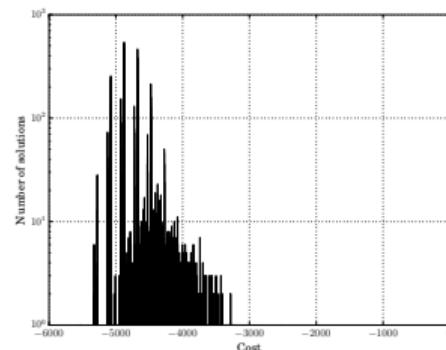
1 arrête = 1 variable QUBO (un spin d'Ising)

- Même sur G_1 les couplages binaires sont trop nombreux (> 6)
- Insuffisance de la connectivité de la machine D-Wave
- Nécessité de compenser la connectivité en dupliquant les variables sur plusieurs qubits
- Forte baisse des capacités de résolution des machines D-Wave à cause de cela

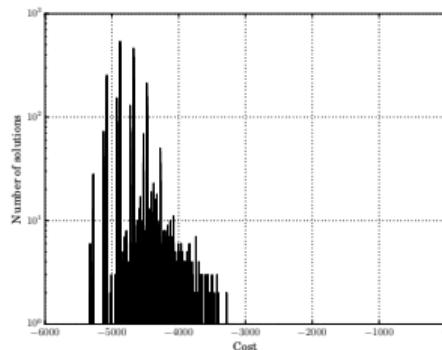
	#var.	#qubits	average dup.	max. dup.
G_1	8	16	2.0	6
G_2	27	100	3.7	6
G_3	64	431	6.7	18
G_4	125	951	7.6	18

Mapping de G_4 sur D-Wave 2X (USC)

Spectre du Hamiltonien/de la fonction économique sur 10000 exécutions

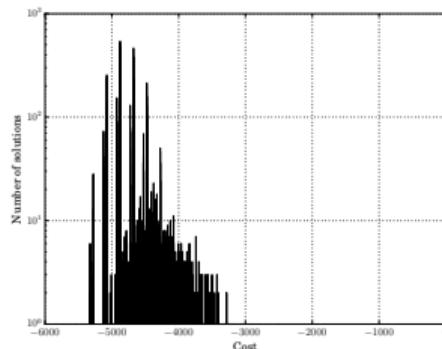


Spectre du Hamiltonien/de la fonction économique sur 10000 exécutions



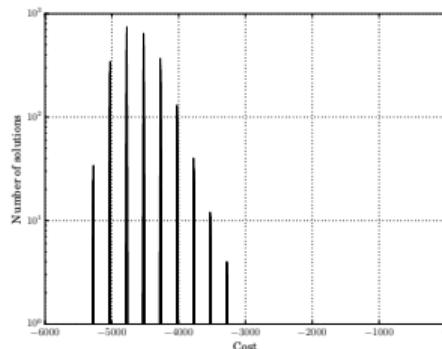
- La solution optimale n'est pas trouvée ni sur G_3 ni sur G_4
- Beaucoup de solutions ne sont pas correctes sur les duplications de variables

Spectre du Hamiltonien/de la fonction économique sur 10000 exécutions



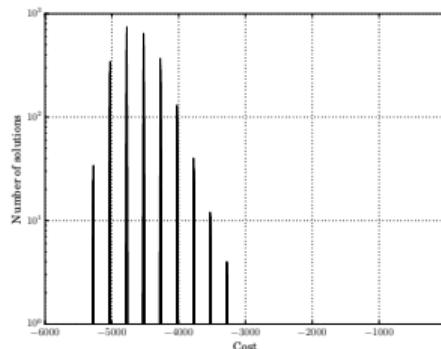
- La solution optimale n'est pas trouvée ni sur G_3 ni sur G_4
- Beaucoup de solutions ne sont pas correctes sur les duplications de variables
- Nécessité de post-traitements:
 - Bit-flip

Spectre du Hamiltonien/de la fonction économique sur 10000 exécutions



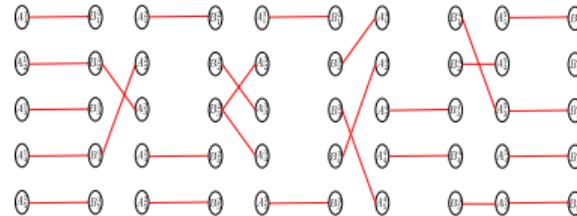
- La solution optimale n'est pas trouvée ni sur G_3 ni sur G_4
- Beaucoup de solutions ne sont pas correctes sur les duplications de variables
- Nécessité de post-traitements:
 - Bit-flip
 - Corrections d'inconsistances de variables dupliquées

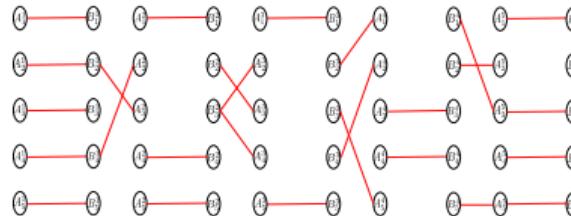
Spectre du Hamiltonien/de la fonction économique sur 10000 exécutions



- La solution optimale n'est pas trouvée ni sur G_3 ni sur G_4
- Beaucoup de solutions ne sont pas correctes sur les duplications de variables
- Nécessité de post-traitements:
 - Bit-flip
 - Corrections d'inconsistances de variables dupliquées
 - Il reste des inconsistances d'arrêtes sur les noeuds

Meilleure solution G_4 sur D-Wave 2X



Meilleure solution G_4 sur D-Wave 2X

Cas du recuit simulé

		opt.	best	worst	mean	median	stdev
G_1	n	-68	-68	-68	-68	-68	0
	$n^{1.5}$	-68	-68	-68	-68	-68	0
	n^2	-68	-68	-68	-68	-68	0
G_2	n	-495	-495	-495	-495	-495	0
	$n^{1.5}$	-495	-495	-495	-495	-495	0
	n^2	-495	-495	-495	-495	-495	0
G_3	n	-2064	-2064	-1810	-2004.7	-2064	79.9
	$n^{1.5}$	-2064	-2064	-2064	-2064	-2064	0
	n^2	-2064	-2064	-2064	-2064	-2064	0
G_4	n	-6275	-6275	-5528	-5785.3	-5777	178.9
	$n^{1.5}$	-6275	-6275	-6026	-6241.8	-6275	86.1
	n^2	-6275	-6275	-6275	-6275	0	

à la place des ordinateurs quantiques dits analogiques (D-Wave)

DCIN

Division | 2-5 Novembre 2021, école QOR | 31

- Le D-Wave doit résoudre des problèmes beaucoup plus gros
- Lié à la duplication de variable pour compenser les limites topologiques

- Le D-Wave doit résoudre des problèmes beaucoup plus gros
- Lié à la duplication de variable pour compenser les limites topologiques
- What if: si nous comparions les deux recuits tels que la machine D-Wave doit les résoudres ?

		opt.	best	worst	mean	median
G_4 (Chim.)	n	-6275	-2213	3662	1453.9	1401.0
	$n^{1.5}$	-6275	-4526	-2654	-3585.6	-3699.8
	n^2	-6275	-5028	-4027	-4473.1	-4527.0
D-Wave		-6275	-5025	-3551	-4447.7	-4525

- Le D-Wave doit résoudre des problèmes beaucoup plus gros
- Lié à la duplication de variable pour compenser les limites topologiques
- What if: si nous comparions les deux recuits tels que la machine D-Wave doit les résoudres ?

		opt.	best	worst	mean	median
G_4 (Chim.)	n	-6275	-2213	3662	1453.9	1401.0
	$n^{1.5}$	-6275	-4526	-2654	-3585.6	-3699.8
	n^2	-6275	-5028	-4027	-4473.1	-4527.0
D-Wave		-6275	-5025	-3551	-4447.7	-4525

- A topologie identique pour le recuit simulé, les résultats sont comparables

- Le D-Wave doit résoudre des problèmes beaucoup plus gros
- Lié à la duplication de variable pour compenser les limites topologiques
- What if: si nous comparions les deux recuits tels que la machine D-Wave doit les résoudres ?

		opt.	best	worst	mean	median
G_4 (Chim.)	n	-6275	-2213	3662	1453.9	1401.0
	$n^{1.5}$	-6275	-4526	-2654	-3585.6	-3699.8
	n^2	-6275	-5028	-4027	-4473.1	-4527.0
D-Wave		-6275	-5025	-3551	-4447.7	-4525

- A topologie identique pour le recuit simulé, les résultats sont comparables
- Le D-Wave garde un avantage de vitesse (< 1s pour 1000 exécutions)

Section 5

Problèmes d'optimisation sur circuits quantiques

Deux cadres d'études en cours:

- Temps d'exécution pire cas (Worst-Case Execution Time, WCET)
- Attaque cryptographique à clair connu

Deux problèmes connus comme étant NP-difficiles.

Deux cadres d'études en cours:

- Temps d'exécution pire cas (Worst-Case Execution Time, WCET)
- Attaque cryptographique à clair connu

Deux problèmes connus comme étant NP-difficiles.

Approches :

- Optimisation quantiques d'algorithmes de programmation dynamique

Deux cadres d'études en cours:

- Temps d'exécution pire cas (Worst-Case Execution Time, WCET)
- Attaque cryptographique à clair connu

Deux problèmes connus comme étant NP-difficiles.

Approches :

- Optimisation quantiques d'algorithmes de programmation dynamique
 - Appliqué au cas du WCET
 - Capacité de passer d'un algorithme en $O(N^3)$ à $O(N^2 + N)$
 - Utilisation d'un sous-algorithme de Grover pour résoudre une superposition des états internes de la boucle la plus profonde de la programmation dynamique (pending publication)

■ Quantum Approximate Optimisation Algorithm (QAOA, [Farhi & Goldstone 2014])

- Un des algorithmes phares pour l'utilisation du QC
- Approximation du recuit quantique par un circuit à porte quantique
- Algorithme hybride qui utilise un optimiseur classique
- Marche raisonnablement sur un simulateur

■ Quantum Approximate Optimisation Algorithm (QAOA, [Farhi & Goldstone 2014])

- Un des algorithmes phares pour l'utilisation du QC
- Approximation du recuit quantique par un circuit à porte quantique
- Algorithme hybride qui utilise un optimiseur classique
- Marche raisonnablement sur un simulateur

Les algorithmes sont souvent hybrides (à part un Grover pur, mais souvent il est utilisé à l'intérieur d'un autre algorithme).

Le manque de fidélité et de volume quantique des ordinateurs NISQ est très limitant.

Section 6

Remarques de conclusion

Approches hamiltoniennes et lagrangiennes du calcul quantique potentiellement moins forts que les approches numériques, avec toutefois des voies tracées claires :

- Recherche Opérationnelle
- Configuration des molécules (e.g. protéines), autres simulations physiques
- Potentiellement: IA (apprentissage ML), autres problèmes a priori combinatoires (WCET)
- Potentiel important: problèmes d'optimisation et de recherche d'extremums

Approches hamiltoniennes et lagrangiennes du calcul quantique potentiellement moins forts que les approches numériques, avec toutefois des voies tracées claires :

- Recherche Opérationnelle
- Configuration des molécules (e.g. protéines), autres simulations physiques
- Potentiellement: IA (apprentissage ML), autres problèmes a priori combinatoires (WCET)
- Potentiel important: problèmes d'optimisation et de recherche d'extremums

Avec aussi des inconvénients

- Autre façon d'appréhender les problèmes à résoudre
- D-Wave:
 - Entre le marteau (temps de relaxation adiabatique) et l'enclume (temps de cohérence)
 - Résultats plus faibles que QC numérique (donc plus de qubits requis)



Merci de votre attention