Traitement numérique des signaux

Quantification

I - On échantillonne à la fréquence $F_e = 8kHz$ le signal suivant :

$$x(t) = sin(2\pi f_0 t) \;\; avec\, f_0 = 1\, kHz$$

Le signal $x(t)$ est quantifié sur 4 bits après échantillonnage.

Calculer les valeurs $x(n)$ du signal échantillonné puis celles $x_q(n)$ du signal échantillonné et quantifié.

II - Calculer la puissance du bruit de quantification et donner le rapport signal à bruit correspondant.

III - Le signal traité est maintenant légèrement différent :

$$y(t) = sin(2\pi f_1 t) \;\; avec\, f_1 = 1.008\, kHz$$

Le rapport signal à bruit de quantification sera-t-il différent de celui calculé dans le cas du signal $x(t)$.

Si oui, peut-on le calculer en adoptant la même démarche ou doit-on procéder différement. Proposer une solution.

IV - On dispose matériellement d'un convertisseur fonctionnant dans la plage [0v ; 5v] qui fournit des échantillons codés sur 4 bits.

Comment doit-on procéder pour échantillonner les signaux considérés précédemment $x(t)$ et $y(t)$.

Que deviennnent les rapports signal à bruit de quantification. On supposera que les états de quantification sont uniformément répartis entre 0 et 5v avec un pas égal à 0.3125 v.

Traitement numérique des signaux

Correction du TD

Quantification

I - Calculer les valeurs $x(n)$ du signal échantillonné puis celles $x_q(n)$ du signal échantillonné et quantifié.

La fréquence du signal est de $1kHz$ et la fréquence d'échantillonnage est de

$$x(n) = sin(2\pi 1.10^3 nT_e) \quad T_e = \frac{1}{F_e} = 125\mu s$$

$$x(n) = sin(2\pi .0.125.n)$$

La fréquence réduite du signal est de 0.125. La suite des échantillons du signal sera donc de longueur 8 :

```
t=0:8;
x=sin(2*pi*0.125*t);
```

$x(n)$ =0.00000 ; 0.70711 ; 1.00000 ; 0.70711 ; 0.00000 ; -0.70711 ; -1.00000 ; -0.70711 ; 0.00000 ...

Pour calculer les valeurs quantifiées, il faut établir les états de quantification. Nous disposons de 6 bits pour coder ces états. Leur nombre ne peut donc pas excéder 2^4 (*soit* 16). Le signal $x(t)$ évolue dans la plage [-1 ; +1] (il présente donc une dynamique de $A = 2$). Les états de quantification seront répartis de manière uniforme dans cette plage. L'écart (pas de quantification) entre deux états voisins sera donc :

$$q = \frac{A}{2^N} = \frac{2}{16} = 0.125$$

q est appelé *pas de quantification.*

Les états de quantification seront répartis de façon symétrique par rapport au centre de la plage de variation ; 0 dans le cas présent :

```
Eq=-1+q/2:q:1-q/2

    -0.9375  -0.8125  -0.6875  -0.5625  -0.4375  -0.3125  -0.1875 -0.0625
     0.0625   0.1875   0.3125   0.4375   0.5625   0.6875   0.8125  0.9375
```

Les représentations binaires de ces états devront être interprétées comme suit:

$$s \,.\, p_1 p_2 p_3$$

s, p_1, p_2, p_3 constituent les quatre bits de codage. s, le bit de poids le plus fort est destiné à coder le signe de l'échantillon. Les trois bits p_i sont des bits de poids 2^{-i}. Le dernier, celui de poids le plus faible présente un poid égal au pas de quantification. Il détermine la précision de codage.

La quantification du signal $x(n)$ consiste à remplacer chaque échantillon par l'état de quantification le plus proche :

```
x1q=q*round((x1-q/2)/q)+q/2;
```

$x_q(n)$ = 0.0625 ; 0.6875 ; 0.9375 ; 0.6875 ; 0.0625 ; -0.6875 ; -0.9375 ; -0.6875 ; 0.0625

Dans le cas du signal $x(n)$, certains échantillons sont à égale distance des deux plus proches états de quantification. C'est le cas pour les échantillons qui valent 0. Dans ces cas-là, l'erreur de quantification est maximale et égale à $\frac{q}{2}$.

Remarque : nous aurions certainement pu choisir des états de quantification mieux adaptés au signal que nous avions à traiter.

II - Calculer la puissance du bruit de quantification et donner le rapport signal à bruit correspondant.

Le bruit de quantification (ou erreur de quantification) est un signal constitué des différences entre les échantillons avant et après quantification : $e_q(n) = x(n) - x_q(n)$ et vaut dans notre cas :

-0.0625 ; 0.0196 ; 0.0625 ; 0.0196 ; -0.0625 ; -0.0196 ; -0.0625 ; -0.0196 ; -0.0625

De même que $x(n)$ et $x_q(n)$; $e_q(n)$ est une suite de période 8. Sa puissance vaut donc :

$$P_e = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} |e_q(n)|^2 = 0.0026$$

Le rapport signal à bruit de quantification est le rapport entre la puissance du signal traité (avant quantification) et celle de l'erreur de quantification. La puissance du signal traité dans notre cas peut être calculée de la même manière que nous avons calculé la puissance de l'erreur de quantification :

$$P_x = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} |x(n)|^2 = 0.5$$

Remarque : ce résultat confirme le fait que la puissance d'un signal sinusoïdal d'amplitude unité vaut 1.

Le rapport signal à bruit de quantification vaut donc :

$$S/B = \frac{0.5}{0.0026} = 189.85$$

ou encore en dB :

$$S/B = 10log_{10}189.85 = 22.78\,dB$$

III - Le signal traité est maintenant légèrement différent :

$$y(t) = sin(2\pi f_1 t) \;\; avec\, f_1 = 1.008\,kHz$$

Le signal échatillonné est le suivant :

$$y(n) = sin(2\pi\frac{1008}{8000}n) = sin(2\pi.0.126.n)$$

Le signal échantillonné $y(n)$ présente une expression différente de celle du signal $x(n)$. La suite d'échantillons sera donc également différente de celle de $x(n)$. La suite des valeurs quantifiées $y_q(n)$ pourra donc être différente de $x_q(n)$ ainsi que la puissance du bruit de quantification et le rapport signal à bruit.

Peut-on calculer le rapport signal à bruit en adoptant la même démarche que pour $x(n)$.

La démarche adoptée pour $x(t)$ consistait à calculer explicitement les puissances des suites $x(n)$ et $e_q(n)$ en profitant du fait qu'elles étaient périodiques. Est-ce encore le cas pour $y(t)$?

La période N d'une suite d'échantillons provenant de l'échantillonnage à la fréquence F_e d'un signal périodique à la fréquence f_1 est telle que

$$2\pi f_1 N T_e = 2k\pi$$

soit encore :

$$Nf_1 = kF_e \;\; N\, et\, k\, etant\, entiers$$

Elle peut donc être déterminée en divisant (ou en multipliant) ces fréquences jusqu'au moment où elles sont premières entre elles :

8000	1008
4000	504
2000	252
1000	126
500	63

On constate donc que $500 \times f_1 = 63 \times F_e$. La période de la suite est donc de 500 échantillons.

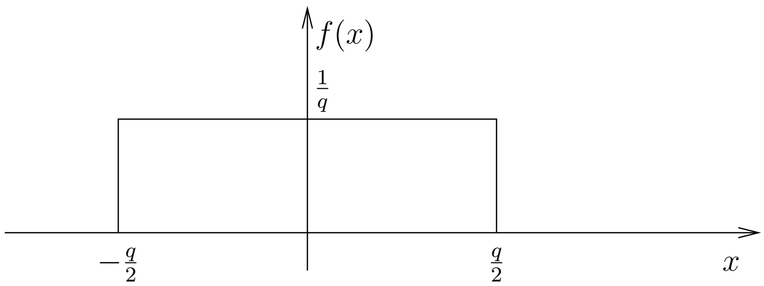
Pour calculer le rapport signal à bruit comme auparavant, il faudrait donc calculer les 500 échantillons des suites $y(n)$, $y_q(n)$ et $e_q(n)$. $\Rightarrow$Travail très fastidieux.

A défaut, on peut adopter une démarche statistique pour calculer la puissance de l'erreur de quantification (on sait déjà que la puissance du signal vaut 0.5). Il faut établir pour cela la densité de probabilité $f(x)$ de l'erreur de quantification. Cette fonction fournit la probabité de trouver l'erreur de quantification dans la fourchette d'amplitudes $[x\,;\, x+dx]$. Cette probabilité vaut $f(x).dx$.

Que vaut cette fonction dans notre cas ?

- On sait que l'erreur de quantification est inférieure en valeur absolue à $\frac{q}{2}$(On suppose qu'il n'y a pas de saturation). $f(x)$ sera donc nulle en dehors de l'intervalle $-\frac{q}{2}\,;\,+\frac{q}{2}$. (et la probabilité de trouver l'erreur dans cet intervalle vaut 1 $\Rightarrow \int_{-q/2}^{+q/2} f(x).dx = 1$
- Dans l'intervalle $-\frac{q}{2}\,;\,+\frac{q}{2}$, toutes les valeurs d'erreurs sont équiprobables

Ces deux remarques définissent $f(x)$:



A partir de là, la puissance de l'erreur de quantification est extrêmement facile à calculer :

$$P_e = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x).dx$$

Cette expression peut être interprétée comme la somme de toutes les valeurs possibles x, mises au carré (c'est une puissance), pondérée par la probabilité que la valeur a d'apparaître.

Dans notre cas :

$$P_e = \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} x^2 \frac{1}{q} dx = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{q}(\frac{q}{2})^3 = \frac{q^2}{12}$$

Lorsque $q = 0.125$, $P_e = 0.0013$

Le rapport signal à bruit de quantification vaut alors :

$$S/B = \frac{0.5}{0.0013} = 384 \Rightarrow \simeq 25,84dB$$

On peut aussi exploiter la formule établie dans le cas des signaux sinusoïdaux exploitant la pleine échelle :

$$(S/B)_{dB} = 1.76 + 6.02N = 25,84dB$$

Remarque : cette valeur n'est pas très éloignée de la valeur de $22.78\,dB$ déterminée auparavant.

IV - On dispose matériellement d'un convertisseur fonctionnant dans la plage [0v ; 5v] qui fournit des échantillons codés sur 4 bits.

Il suffit de mettre en forme le signal qui évolue initialement dans la plage $[-1\,; +1]$ de façon à lui faire occuper la plage [0v ; 5v]. Un simple circuit à base d'amplificateur opérationnel suffit pour appliquer un gain de 2.5 et un offset de 2.5v. Les constructeurs de convertisseurs Analogique-Numérique incluent quelquefois ce dispositif dans leur circuit.

A supposer que le circuit de mise en forme soit "parfait", les valeurs de rapport signal à bruit sont inchangées car la relation d'échantillonnage-quantification existant entre le signal $x(t)$ avant mise en forme et celle du signal numérique $x_q(n)$ demeure identique car le pas de quantification de 0.3125 v, spécifié dans la plage [0v ; 5v] correspond au pas d'origine considéré dans la plage [-1 ; +1] :

$$\frac{0.3125}{2.5} = 0.125$$

Fichier MATLAB

```
% Fe=1; f=0.125=Fe/8; ==> la suite d'echantillons est de periode 8.
t=0:8;
x=sin(2*pi*0.125*t);

% Qantification
% La dynamique du signal est 2 : Le signal évolue dans le plage [-1 ; +1]
% Le pas de quantification vaut q=2/2^N (N: Nb de bits)
N=4;
A=1;
q=(2*A)/(2^N);
% ==> 0.12500;

% Les etats de quantification au nombre de 2^N et seront les suivants :
Eq=-A+q/2:q:A-q/2;
% == >
% -0.9375 -0.8125 -0.6875 -0.5625 -0.4375 -0.3125 -0.1875 -0.0625
%  0.0625  0.1875  0.3125  0.4375  0.5625  0.6875  0.8125  0.9375

% 1 bit de signe
% 0 bit de partie entiere
% 3 bit pour la precision (q=2^-3)
% les valeurs quantifiees du signal x1 seront :
xq=q*fix((x-q/2)/q)+q/2;
% 0.0625  0.6875  0.9375  0.6875  0.0625  -0.6875  -0.9375  -0.6875  0.0625

% erreur de quantification :
eq=x-xq;
% -0.0625 0.0196 -0.0625 0.0196 -0.0625 -0.0196 -0.0625 -0.0196 -0.0625

% Puissance de l'erreur de quantification :
Pe=sum(eq.^2)/8;
% ==> 0.0026

% Puissance du signal avant quantification :
Ps=sum(x.^2)/8;
% ==> 0.5

% Rapport signal à bruit de quantification
SNR=Ps/Pe;
% ==> 189.85

% ou encore en dB :
10*log10(SNR)
% ==> 22.7842

% Approche statistique
Pe=(q^2)/12;
% ==> 0.0013

% Rapport signal à bruit de quantification
SNR=(A^2/2)/Pe;
% ==> 384

% ou encore en dB :
10*log10(SNR)
% ==> 25.84

1.76+6.02*N
% ==> 25.84
```