Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Расчётно-графическая работа

По дисциплине:

«Базовая математика»

Работу выполнили:

Студенты группы Р3112

Сенина Мария Михайловна

Разживин Даниил Андреевич

Залевский Дмитрий Евгеньевич

Седымов Алексей Александрович

Преподаватель:

Беспалов Владимир Владимирович

Санкт-Петербург

2020

Задание 1

1. https://www.desmos.com/calculator/7jmx2vzpt2 - ссылка на график зависимости расстояния между телами относительно другого в полярной системе координат. Получилась кривая второго порядка.
2. $\varepsilon -$ эксцентриситет кривой второго порядка. α – угол поворота кривой между фокальной осью и полярной осью СК.
3. Нам дана формула $r = \frac{p}{1-\,\varepsilon\cos{(\varphi-\alpha)}}$ в полярных координатах. В частном случае она описывает уравнение эллипса, переведём её в декартову систему координат, если известно, что $x' = r\cos(\varphi-\alpha)\,, y' = r\sin{(\varphi - \alpha)}$.

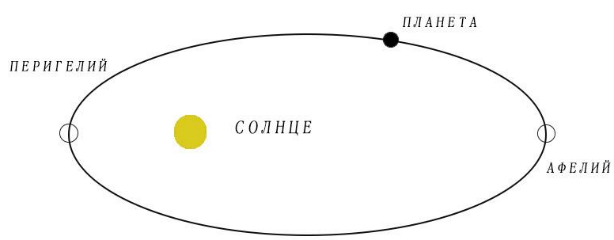
$$r = \frac{p}{1-\ \varepsilon\cos{(\varphi-\alpha)}} \Rightarrow r - r\varepsilon\cos(\varphi-\ \alpha) = p\ \Rightarrow r =\ r\varepsilon\cos(\varphi-\ \alpha) + p$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\varphi-\alpha) \\ r =\ r\varepsilon\, cos\,(\varphi-\ \alpha) + p \end{cases} \Rightarrow r = \varepsilon\, x' + p$$

$$\begin{cases} r = \varepsilon\, x' + p \\ x'^2 + y'^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow\ x'^2 + y'^2 = (\varepsilon\, x' + p)^2 = p^2 + 2p\varepsilon x' + e^2x'^2\ \Rightarrow$$
$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y'^2 - 2p\varepsilon x' - p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x' - \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} + \frac{y'^2}{p^2} = 1$$

4. Выберем систему координат так, чтобы точки афелия и перигелия лежали на полярной оси СК. Тогда расстояния афелия и перигелия ровны расстоянию от фокуса, в котором расположено Солнце до самой дальней и самой ближней точек орбиты. Тогда, $\cos(\varphi)$ для точки афелия равен 1. А $\cos(\varphi)$ для точки перигелия равен -1. Тогда $p_п$ вычисляется по следующей формуле: $p_п = r_п(1-\varepsilon)$, а $p_а = r_п(1+\varepsilon)$



Для Сатурна:

$$p_п = r_п(1-\varepsilon) = 1429,6 * 10^6 км$$

$$p_{\text{а}} = r_{\text{а}}(1+\varepsilon) = 1428,2 * 10^6 \text{км}$$

Для Нептуна:

$$p_{\text{п}} = r_{\text{п}}(1-\varepsilon) = 4493,4 * 10^6 \text{км}$$

$$p_{\text{а}} = r_{\text{а}}(1+\varepsilon) = 4495,7 * 10^6 \text{км}$$

Полученные значения p – фокальные параметры рассматриваемых кривых. Т.е. расстояния от фокуса до орбиты вдоль оси перпендикулярной большой полуоси орбиты. Они получились почти равными, потому что орбиты планет в Солнечной системе почти круговые и фокусы почти совпадают. Истинное значение p для орбиты планеты равно $p_{\text{п}}$, вычисляя p через афелий мы считаем, что фокусы совпадают и окружность – окружность.

5. Чтобы телу с пренебрежимо малой массой (относительно космического тела) выйти с его эллипсоидной орбиты минимальной скоростью, до которой надо разогнать малое тело будет вторая космическая скорость $V_{min} = \sqrt{2G\frac{M}{r^2}}$ где G – гравитационная постоянная, M- масса планеты, r – расстояние до центра планеты. Эта скорость переводит тело на параболическую траекторию относительно большего тела.

   Первая космическая скорость v1 — объект стал искусственным спутником центрального тела, то есть стал вращаться по круговой орбите вокруг него на нулевой или пренебрежимо малой высоте относительно поверхности.
   Вторая космическая скорость v2 — объект преодолел гравитационное притяжение центрального тела и начал двигаться по параболической орбите, получив тем самым возможность удалиться на бесконечно большое расстояние от него.

Задание 2

1. Первая поверхность $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ – эллиптический цилиндр
   Вторая поверхность $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ – эллиптический параболоид

   Значит их пересечение - $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} - z$

$$\frac{x^2a^2 - x^2A^2}{A^2a^2} + \frac{y^2b^2 - y^2B^2}{B^2b^2} = 1 - z$$

$$\frac{x^2(a^2-A^2)}{A^2a^2}+\frac{y^2(b^2-B^2)}{B^2b^2}=1-z$$

В сечении вдоль осей x и y мы получим это:

$z = z_0 = \ const$

$\frac{x^2(a^2-A^2)}{A^2a^2}+\frac{y^2(b^2-B^2)}{B^2b^2}=1-z_0$

$\frac{x^2}{\frac{A^2a^2}{(a^2-A^2)}(1-z_0)}+\frac{y^2}{\frac{B^2b^2}{(b^2-B^2)}(1-z_0)}=1$ – это эллипс

Вдоль сечений x и z или y и z кривая сечения будет одинаковой, не умоляя общности рассмотрим сечение x и y:

$y = y_0 = const$

$\frac{x^2(a^2-A^2)}{A^2a^2}+\frac{{y_0}^2(b^2-B^2)}{B^2b^2}=1-z$

$x^2\frac{(a^2-A^2)}{A^2a^2}=1-z-+\frac{{y_0}^2(b^2-B^2)}{B^2b^2}$ – это парабола

2. Рассмотрим пересечения поверхностей в сечении (x и z) и (y и z). Заметим, что если они вырождаются в прямую, то и всё пересечение поверхностей будет плоской кривой.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=z \\ y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2}+\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}{B^2} = \ z \ \Rightarrow \ \frac{x^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}-\frac{x^2b^2}{a^2B^2}=z \ \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{x^2b^2}{a^2B^2}=z+\frac{b^2}{B^2} \Rightarrow x^2\left(\frac{1}{A^2}-\frac{b^2}{a^2B^2}\right)=z-\frac{b^2}{B^2} \ \Rightarrow$$

$$x^2\left(\frac{1}{A^2b^2}-\frac{1}{a^2B^2}\right)=\frac{z}{b^2}-\frac{1}{B^2} \text{ симметрично для } y \ \Rightarrow z=const,$$

$$\frac{a^2B^2-\ A^2b^2}{A^2b^2a^2B^2}=0 \Rightarrow \frac{a^2}{A^2}=\frac{b^2}{B^2} \quad \frac{a}{A}=\pm\frac{b}{B}$$