Э/магнитные волны. Вектор Пойнтинга

1. Шар радиуса R = 50 см находится в немагнитной среде проницаемости $\varepsilon = 4$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна, длина которой $\lambda \ll R$ и амплитуда электрической составляющей E_m = 200 В/м. Какая энергия падает на шар за время t = 60 с?

2. Плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени. Рассеянием поля на краях при расчете пренебречь.

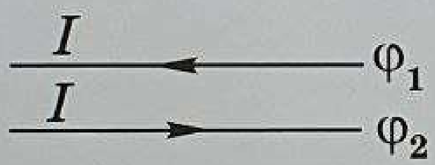
3. По прямому проводнику круглого сечения течет постоянный ток I. Найти поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление R.

4. Энергия от источника постоянного напряжения U передается к потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Потребляемый ток равен I. Найти поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя проводящая оболочка кабеля предполагается тонкостенной.

5. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя толщины d из диэлектрика, проницаемость которого уменьшается экспоненциально от ε_1 на передней поверхности до ε_2 на задней. Найти время распространения заданной фазы волны через этот слой.

6. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиуса R = 6 см, подключен к синусоидальному напряжению частоты $\omega = 1000\ c^{-1}$. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

7. На рисунке показан участок двухпроводной линии передачи постоянного тока, направление которого отмечено стрелками. Имея в виду, что потенциал ?2 > ?1, установить с помощью вектора Пойнтинга, где находится генератор тока (слева, справа?).



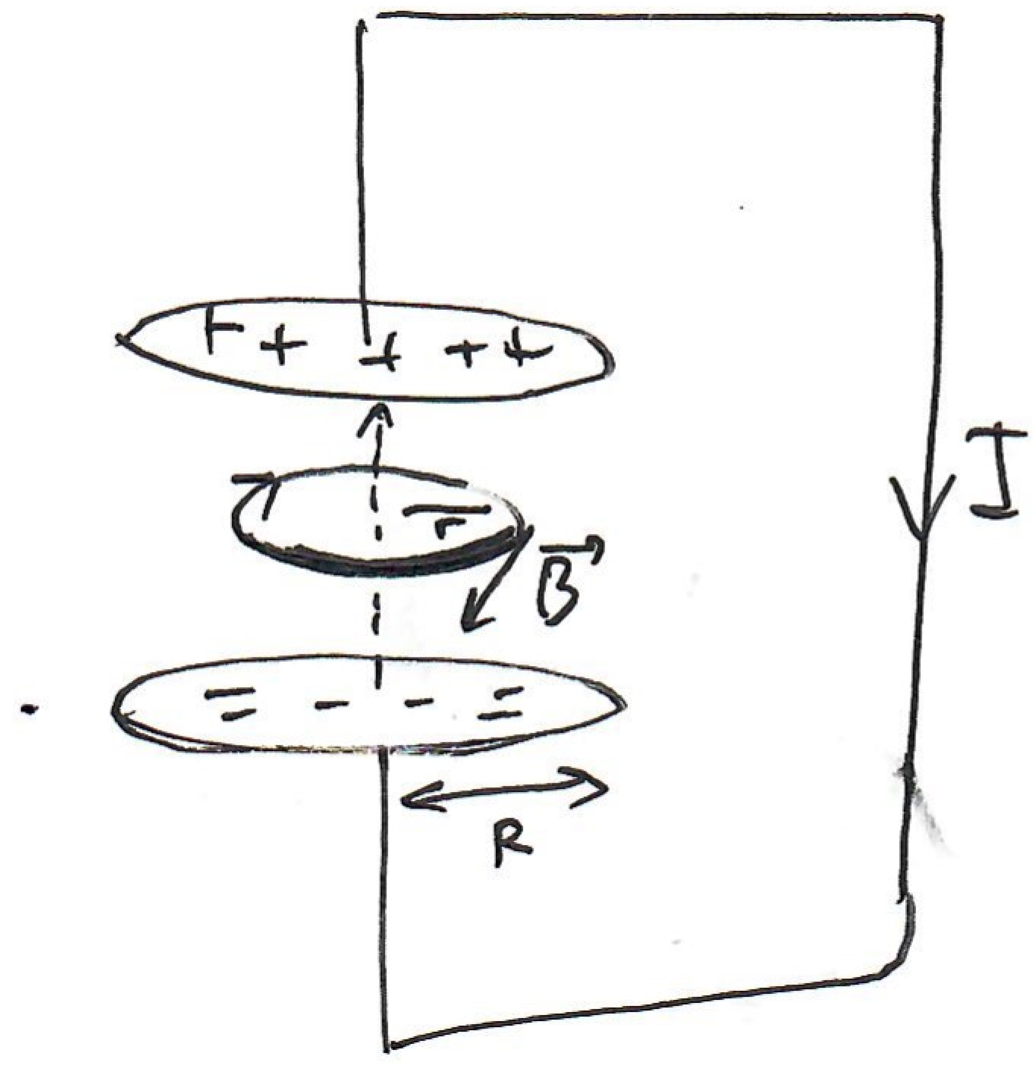
8. Генератор переменного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$ передает энергию потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Ток в цепи меняется по закону $I = I_0 \cos(\omega t - ?)$. Найти средний по времени поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя оболочка кабеля тонкостенная.

1

R

I

B – ?



$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,dS$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{\partial D}{\partial t}\pi r^2$$

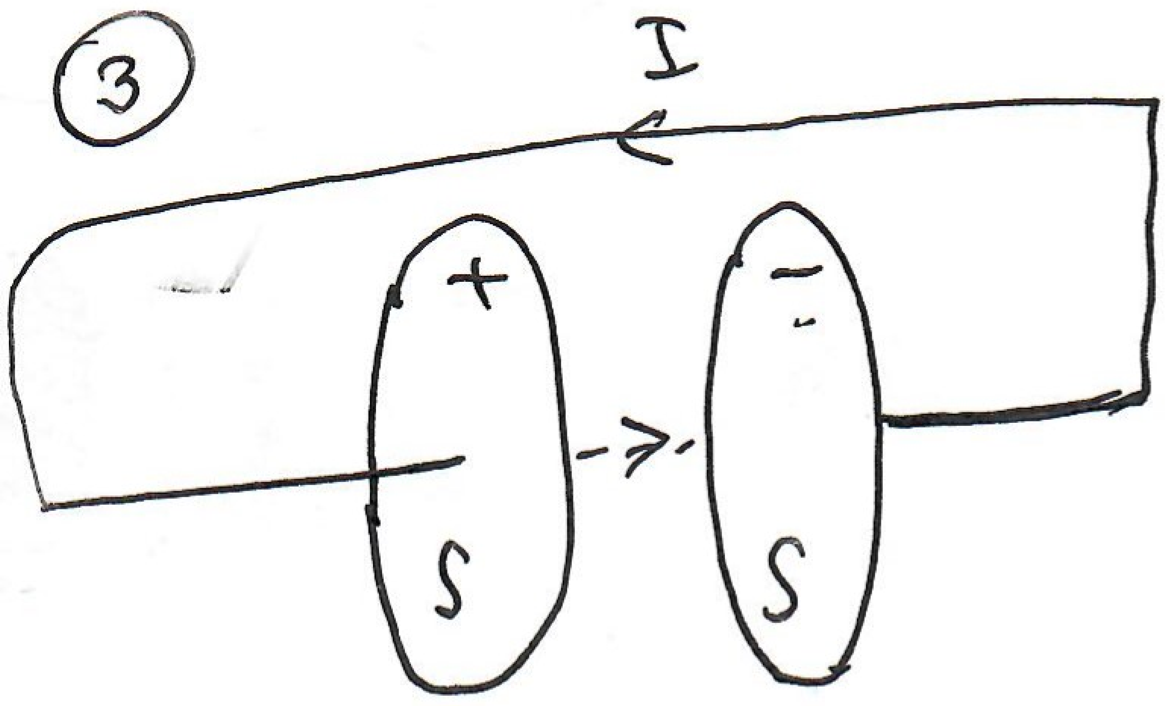
$$H = \frac{\partial D}{\partial t}\frac{r}{2}$$

$$\oint_S \vec{D}\,dS = q_{вн} = \sigma \cdot S$$

$$DS = \sigma S = \frac{q_{вн}}{\pi R^2} \Rightarrow H = \frac{\partial D}{\partial t}\frac{\cdot r}{\pi R^2 \cdot 2} = \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

3



$$\mathrm{rot}\,H = \underbrace{j}_{0} + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \oint \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S D\,d\vec{S}$$

$$j_{смещ} = \frac{\partial D}{\partial t} = -j = -\frac{I}{S} = -\frac{I_m \sin(\omega t)}{S}$$

$$d\vec{D} = -\frac{I_m \sin(\omega t)\,\partial t}{S}$$

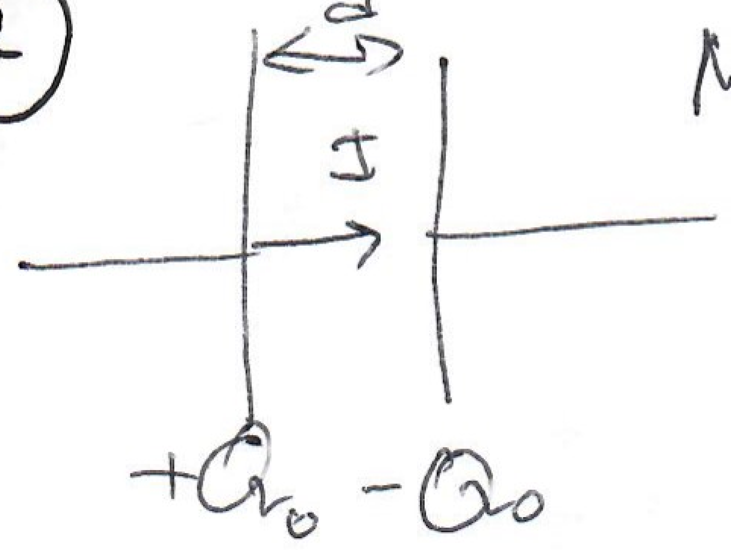
$S = 100\,см^2 = 0{,}1\,м^2$

$$\Rightarrow \vec{D} = -\int \frac{I_m \sin(\omega t)\,dt}{S} = +\frac{I_m \cos(\omega t)}{S\omega}$$

$$E = \varepsilon_0 D \qquad E_m = \varepsilon_0 D_m \Rightarrow E_m = \frac{I_m \varepsilon_0}{S\omega}$$

$$E = \frac{I_m \varepsilon_0}{S\omega}\cos(\omega t)$$

2



Магнитное поле внутри конденсатора получилось бы за счёт либо тока проводимости, либо тока смещения.

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = j + \frac{d\vec{D}}{dt}$. Т.к. среда слабопроводящая между обкладками течёт ток. $I(t)$

$\Rightarrow q(t) = Q_0 - dq =$; По определению $I(t) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q(t) = Q_0 - I(t)dt$

В тоже время: $D(t) = E(t)\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{U(t)}{d}\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{Q(t)}{Cd}\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{Q(t)\varepsilon\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}d} = \frac{Q(t)}{\varepsilon S}$

Т.к. $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$ $\quad j = \frac{d\vec{D}}{dt} = I(t)/S = \frac{Q(t)}{dtS}$

④ $\nabla \cdot j = -\partial\rho/\partial t$ – доказать.

Запишем уравнение о том, что поток $\vec{D}$ через поверхность создаётся зарядом внутри неё:

(1) $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ и то, что меняющееся электрическое поле порождает магнитное:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2)$$

Из (1) можно записать: Из (2) можно записать:

$$\underbrace{\operatorname{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) = \operatorname{div}\vec{j} + \operatorname{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

(3) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) - \operatorname{div}\vec{j} = \operatorname{div}\vec{j}$$ ← что и требовалось доказать

равно 0.

Т.к. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A})$ это то, какой будет поток вектора $\operatorname{rot}\vec{H}$ через поверхность, а т.к. $\operatorname{rot}\vec{H}$ это про то, как будет завихряться поле, т.е. поток через поверхность будет 0.

⑤

$\nu = 10$ МГц, $\omega = 2\pi\nu$

$\sigma = 10 \frac{\text{мОм}}{\text{м}}$

$\varepsilon = 9$

$\frac{j_{пр}}{j_{см}} = ?$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_l H\,dl = \oint_S j\,dS + \frac{d}{dt}\oint_S D\,dS$$

Если выделить кусок волны у-е составляющей связаной с магнитным полем E:

$$E(t) = E_m \cos(\omega t - kx)$$

В то же время $j = E\sigma$ ← ток проводимости при напряженности E $\Rightarrow\ = E_m \sin(\omega t - kx)\sigma$

А $D(t) = E\varepsilon\varepsilon_0 = E_m\cos(\omega t - kx)\varepsilon\varepsilon_0$

$$\Rightarrow \oint_l H\,dl = j_{пр} + j_{см} = E\sigma + \frac{E_m\cos(\omega t - kx)\varepsilon\varepsilon_0}{dt} = E\sigma - E_m\sin(\omega t - kx)\varepsilon\varepsilon_0\omega$$

При этом т.к. это ЭМВ $\oint_l H\,dl = 0$

$$\Rightarrow j_{пр} = j_{см} \Rightarrow E_m\sin(\omega t - kx)\sigma = E_m\sin(\omega t - kx)\varepsilon\varepsilon_0\omega$$

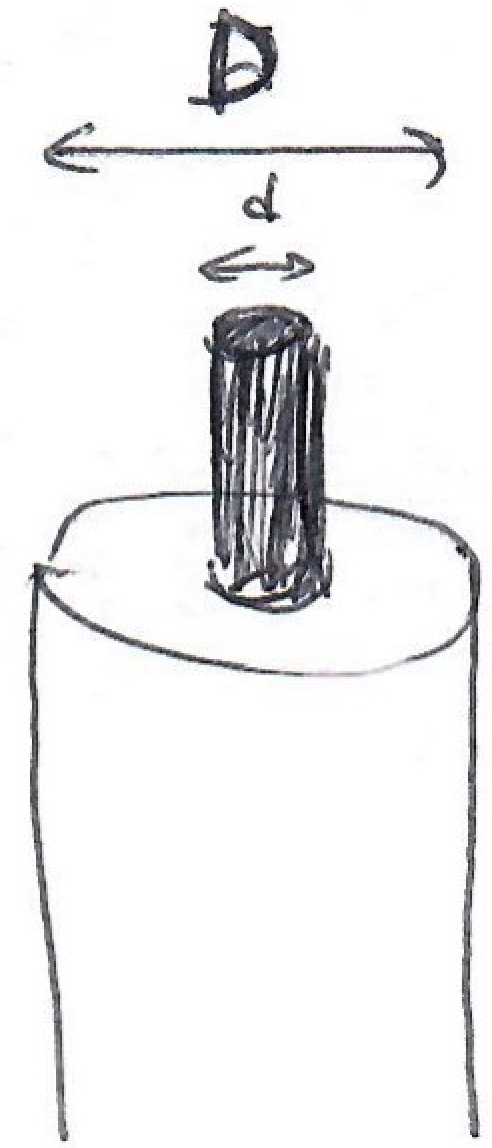
$$\Rightarrow \frac{j_{пр}}{j_{см}} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi\nu} = 0{,}002$$

⑥ $\Omega_k = 60\,\Omega$

$\varepsilon = 4 \quad \mu = 1$

$C_n, L_n = ?$

$\Omega_k = \sqrt{\frac{L_n}{C_n}}$ – волновое сопротивление коаксиального кабеля



$C_n = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$, где D - больший диаметр, а d - маленький

$L_n = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{D}{d}\right)$

$\Rightarrow$

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D}{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}}\ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{\Omega_k}{\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}}} \Rightarrow C_n = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}}}{\Omega_k} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}{\Omega_k} = 6{,}9\cdot10^{-10}\,\text{Ф}.$$

$$L_n = \frac{\mu_0\mu}{\sqrt{\mu_0\mu}\,2\pi}\cdot\Omega_k\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\mu}\,\Omega_k = 6{,}3\cdot10^{-8}\,\text{Гн}$$

⑦ б) $2a = d$

$2b = D$

д) $a \ll b$

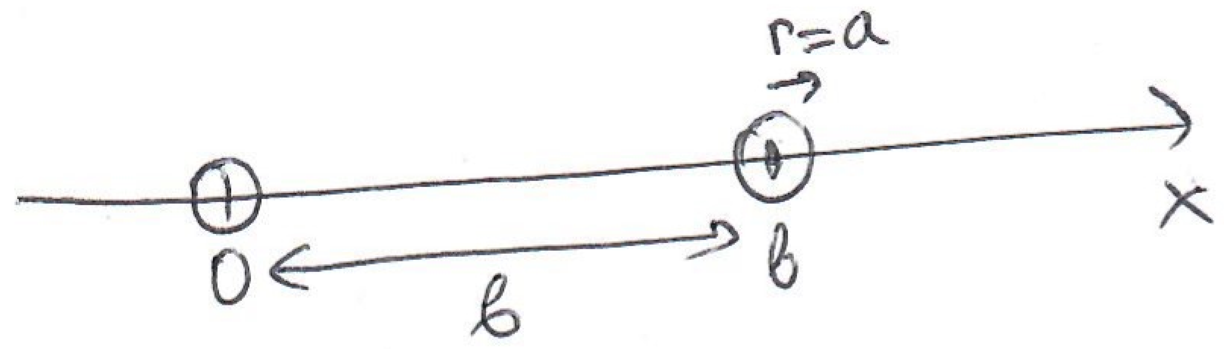
и ...

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{L_n}{C_n}} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D}{d}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}}\ln\left(\frac{2b}{2a}\right)$$ ← волновое сопротивление коаксиального кабеля. (см. пред задачу)

(7)

a)



$\Omega = \sqrt{\frac{L_x}{C_x}}$ найдём погонные L_x и C_x

$$C = \frac{q}{U} \;; \quad E_{пр}(x) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon x} \Rightarrow U = \varphi_1 - \varphi_2 =$$

$$\varphi_1 = \int_a^b E\,dx = \int_a^b \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon x}dx = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

, т.к. провода одинаковые $\Rightarrow \varphi_2 = -\varphi_1$

$$\Rightarrow U = 2\varphi_1 = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow C_x = \frac{\tau\,\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\tau\ln(b/a)} = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

L можно вычислить зная магнитную объёмную энергию:

$$W_м = \frac{LI^2}{2} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$$ тока смещения тут нет $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint_l H\,dl = I = 2\pi r H \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

$l \leftarrow$ контур охватывающий один из проводов.

кусок провода, который мы

$$\omega_м = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \Rightarrow W_м = \int_0^V \omega_м\,dV = \int_a^b \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}2\pi r l\,dr = \int_a^b \frac{\mu_0\mu I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi r l\,dr =$$

$$= \int_a^b \frac{\mu\mu_0 I^2 l}{4\pi r}dr = \frac{\mu\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = W_м = \frac{LI^2}{2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow L_x = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\pi\varepsilon_0/\ln(b/a)}} = \ln(b/a)\cdot\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{2\varepsilon\varepsilon_0}}$$

(8) Телеграфные уравнение; если пренебречь потерями тепла и токами утечки:

$$U(x,t) = U_m\cos(kx)\cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -L_x\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -C_x\frac{\partial U}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial U^2}{\partial x} = \delta L_x\delta C_x\frac{\partial U^2}{\partial t^2} \Rightarrow v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L_x C_x}}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{1}{L_x}\partial t = \partial I \Rightarrow I(t) = -\int\frac{1}{L_x}\frac{\partial U}{\partial x}dt = -\frac{1}{L_x}\int\frac{\partial U}{\partial x}dt =$$

$$= -\frac{1}{L_x}\int\left(\frac{\partial(U_m\cos(kx)\cos(\omega t))}{\partial x}\right)dt = +\frac{1}{L_x}\int(U_m k\sin(kx)\cos(\omega t))dt =$$

$$= \frac{U_m k\sin(kx)}{L_x}\sin(\omega t)\frac{1}{\omega} = \underbrace{\frac{U_m k}{\omega L_x}}_{I_m}\sin(kx)\sin(\omega t) = \frac{\overbrace{\sqrt{L_x C_x}}^{=\,\omega/k}}{L_x}U_m\sin(kx)\sin(\omega t) =$$

$$= \sqrt{\frac{C_x}{L_x}}U_m\sin(kx)\sin(\omega t) = \frac{U_m}{\Omega}\sin(kx)\sin(\omega t)$$