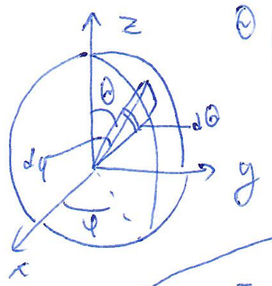
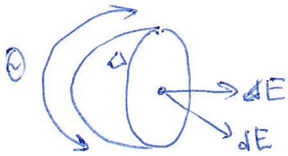
1





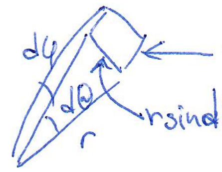
$$E = k\frac{dq}{r^2}\cos\theta$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma dS \cdot \sigma r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$E = k\frac{\sigma r^2}{r^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = k\sigma 2\pi\left(-\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\cos\theta\right) =$$

$$= k\sigma 2\pi \cdot \frac{1}{2}\cos^2\theta \Big|_0^{\pi/2} = k\sigma\pi$$

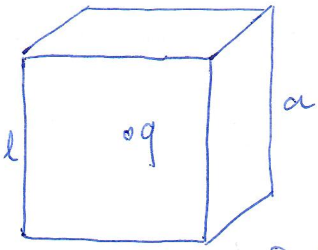
$\sin d\varphi = d\varphi$



$r\sin d\varphi \sin d\theta = r \sin d\theta\, d\varphi$

$r \sin d\theta$ $\Rightarrow dS = r\sin\theta\, d\varphi \cdot r\,d\theta \cdot r\,d\theta = r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$

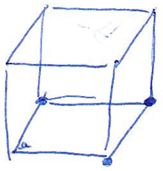
2



а) Поток создаваемый зарядом q равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$. Его же можно посчитать по $6\Phi_{грань}$, где Φ — поток через каждую грань.

$\vec{\Phi}_{грань} = \vec{E}_{цр}\Delta\vec{S}_{грань}$. В то же время сила действующая на грань равна $F_{грань} = \sigma\vec{E}_{цр}\Delta S_{грань}$, т.к. $\Phi = ES$, а $\sigma = \frac{Q}{S}$ $\Rightarrow F = \sigma\Phi = E\cancel{S}\frac{Q}{S} \Rightarrow F_\Sigma = \sigma\frac{\Phi}{6} = \frac{\sigma q}{6\varepsilon_0}$

б)



По теореме Гаусса:

$$\Phi = \Phi_{эт} + \Phi_{др} = \oint_S \vec{E}_{эт}\cdot\Delta\vec{S} + \oint \vec{E}_{др}\Delta\vec{S} \qquad \vec{F} = E\cdot q = E\sigma S$$

поток через одну грань; поток через грань от других граней; от этой грани

Поток создаваемый самой гранью $\Phi_{эт} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot l^2$, как и у бесконечно заряженной плоскости (только тут мы учитываем, что у неё площадь l^2)

Поток через одну грань также равен $\frac{1}{6}\Phi_{куба}$ в силу симметрии $\Rightarrow$

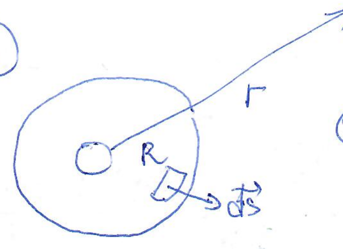
$$\frac{1}{6}\Phi_{куба} = \Phi = \Phi_{эт} + \Phi_{др} \Rightarrow \Phi_{др} = \frac{1}{6}\Phi_{куба} - \Phi_{эт}$$

$$\Phi_{куба} = 6\Phi_{граней} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot 6l^2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Phi_{др} = \frac{1}{6}\frac{\sigma 6 l^2}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}l^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma l^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_{др} = \oint_S \vec{E}_{др}\Delta\vec{S} = l^2\cdot E \Rightarrow E = \frac{\Phi_{др}}{l^2}$$

$$\Rightarrow F = E\sigma S = \frac{\Phi_{др}}{l^2}\cdot\sigma\cdot l^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 l^2}{\varepsilon_0}$$

(3)



$\vec{E} = \frac{\alpha \vec{r}}{r}$ По теореме Гаусса:

$$\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{S} = E \cdot S \cos\alpha = \frac{\alpha r}{r} \cdot S = \alpha \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k q$$

$\cos\alpha = 1$ т.к. поле и нормаль к поверхности параллельны. $\Rightarrow q = \alpha R / k$

(4) $\vec{E} = a r \vec{r}$ По теореме Гаусса:

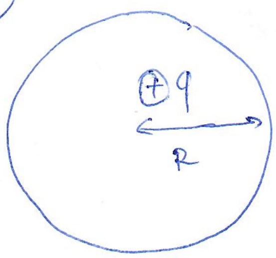
$$\Phi = ES\cos\alpha = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV = 4\pi r^2 dr \cdot \rho$$

$\cos\alpha = 1$ т.к. поле сонаправлено с $\vec{r}$.

$$ES = \underset{\alpha r^2}{\overset{\parallel}{E}} \cdot 4\pi r^2 = \int \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} = \alpha r^2 4\pi r^2$$

$$\rho = 3\alpha r \varepsilon_0$$

(5)



$\rho = \rho_0(1 - r/R)$ Поверхность для т. Гаусса – сфера с центром, как у нашего шара

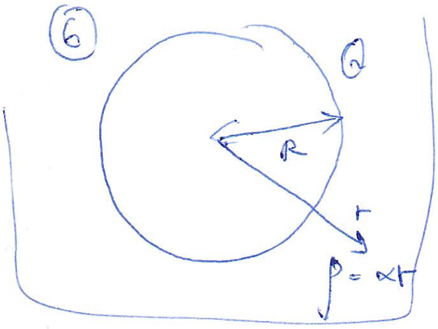
внутри: $\Phi = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{внутр}}{\varepsilon_0}$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$q = \int_0^R \rho dV = \int_0^R \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^4}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{внутри}{E_1} = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho_0 4\pi\left(r^3/3 - \frac{r^4}{R}\right)}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{R}\right)\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

(6)



$E_{общ} = E_{сфер} + E_{среды}$

По теореме Гаусса:

$$\Phi(E) = ES\underset{1}{\cos\alpha} = (E_{сфер} + E_{среды})\, S \underset{1}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{q_{ср}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} + \int_R^r \frac{\alpha S}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{\varepsilon_0} + \int_R^r \frac{\alpha 4\pi r^2}{\varepsilon_0 r} dr =$$

$q_{ср}$ – столько влезло в $r - R$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{\alpha 4\pi}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{4\alpha\pi(r^2 - R^2)}{2\varepsilon_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{Q - 2\pi\alpha R^2}{\varepsilon_0}}_{= 0} + \frac{2\pi\alpha r^2}{\varepsilon_0}$$

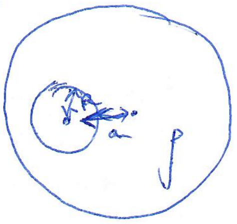
должно быть $\Rightarrow Q = 2\pi\alpha R^2$, а поле $E = \frac{2\alpha}{\varepsilon_0}$

странная задача ...

(7)

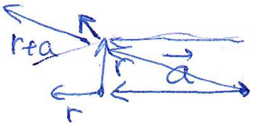
в этой полости

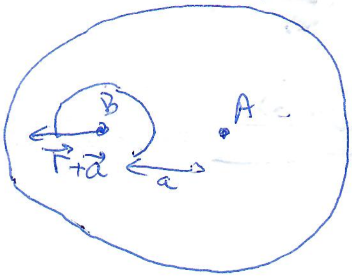
Напряженность поле в полости $E = E_{шара\ цел} - E_{полости} \Rightarrow$



$\vec E_{шара}(r) = \frac{1}{3}\frac{\rho \vec r_1}{\varepsilon_0}$ относит. центра A

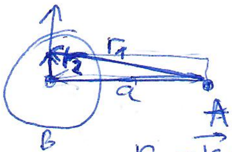
$\vec E_{полости} = \frac{1}{3}\rho\frac{\vec r_2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{3}\rho\frac{(\vec r_1+\vec a)}{\varepsilon_0}$ относительно центра B





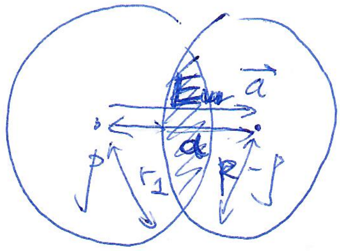
$$\Rightarrow \vec E(r) = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\vec r_1 - (\vec r_1+\vec a)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(-\vec a)$$



(8)

Напряженность поле в ш. области $= E_ш(r)$



$$\vec E_ш(r_1) = \frac{1}{3}\frac{\rho \vec r_1}{\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(-\vec a + \vec r_1) =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec r_1 + \vec a - \vec r_1) = \frac{\rho \vec a}{3\varepsilon_0}$$