44. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Ролля.

Mariya Senina

January 2021

1 Введение

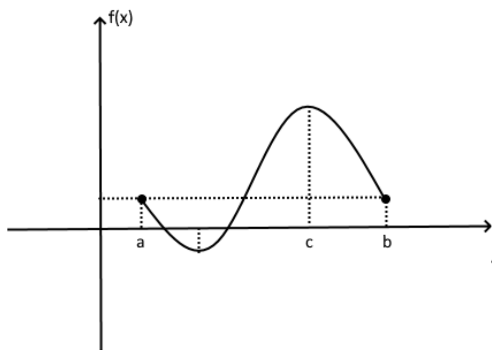
Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа - теоремы о дифференцируемых функциях, ещё можно услышать название Французские Теоремы.

У нас на Лекциях были только Формулировки, но я приведу доказательства, т.к. мне кажется, что они не сложные, но дают лучшее понимание.

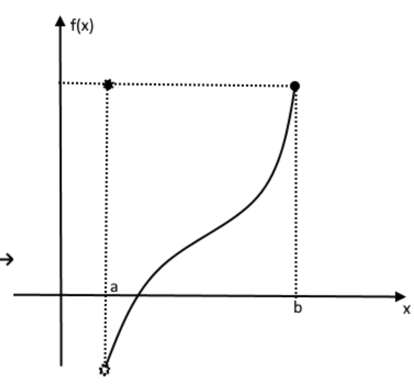
Бонус: Песня группы "Научно-технический реп"про Теорему Ролля: https://youtu.be/6H1Wx-EhhLs

2 Формулировка

Теорема. $f(x)$ - *непрерывна на* $[a;b]$ *и дифференцируема на* $(a;b)$ *и* $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ *точка* $c \in (a;b)$ *такая что* $f(x)' = 0$.



а)



б)

Чтобы было понятнее можно посмотреть на картинку а) - функция по краям отрезка принимает одинаковые значения, значит она достигает локального экстренума или ровна константе.

Мы требуем, чтобы непрерывность была именно на отрезке $[a; b]$, а не на интервале, чтобы не было разрывов в крайней точке, см картинку б), очевидно, что там следствие, что $\exists$ точка с $\in (a; b)$ такая что $f(x)' = 0$, не выполеняется.

3 Доказательство

Поскольку на отрезке $[a; b]$ функция непрерывна, по теореме Вейрштрасса, она достигает своих максимума и минимумма на этом отрезке. Т.е.$\exists$ такие точки $x_1 \in [a; b]$ и $x_2 \in [a; b]$, что $f(x_1) = m$ - минимум на $[a; b]$, а $f(x_2) = M$ - максимум на $[a; b]$.

Если обе эти точки лежат на концах отрезка $[a; b]$, то т.к. по условию теоремы значения f на концах ровны - то и максимум с минимумом равны, значит функция константна $\Rightarrow \forall x \in [a; b] f(x)' = 0$. Тогда рассмотрим случай когда хотя бы одна из этих двух точек лежит в интервале $(a; b)$, по теореме (лемме) Ферма в этой точке производная будет ровна 0. Т.к. по теоремме в точках экстренума производная функции обращается в ноль.

Вот мы и доказали существование точки с нулевой производной на интервале $(a; b)$.