45. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Лагранжа.

Mariya Senina

January 2021

1 Введение

Формула конечных приращений или Теорема Лагранжа о среднем значении. Мне было проще её запомнить, как "повёрнутую теоремму Ролля".

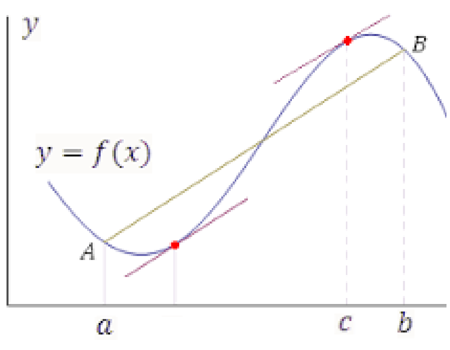
Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа - теоремы о дифференцируемых функциях, ещё можно услышать название Французские Теоремы.

У нас на Лекциях были только формулировки, но я приведу доказательства, т.к. мне кажется, что они не сложные, но дают лучшее понимание.

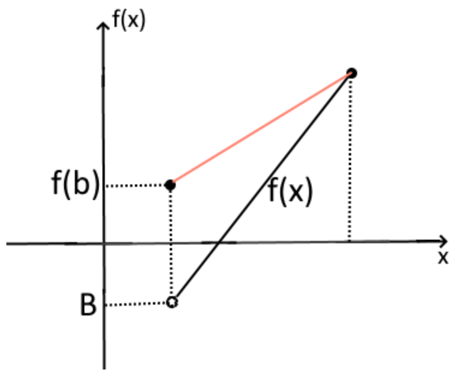
Бонус: Песня группы "Научно-технический реп" про Теорему Лагранжа https://youtu.be/GwDClnIBUIg Думаю к этому билету уже все оценили :)

2 Формулировка

Теорема. $f(x)$ - *непрерывна на* $[a;b]$ *и дифференцируема на* $(a;b) \Rightarrow\ \exists\, c \in (a;b)$ *такая что* $f(c)' = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$.



а)



б)

Проще теорему можно сформулировать так: На интервале существует точка, касательная к которой будет параллельна хорде, соединяющей концы отрезка. Как и в остальных Французских теоремах важно запомнить, условия теореммы - мы требуем, чтобы непрерывность была именно на отрезке $[a; b]$, а не на интервале, чтобы не было разрывов в крайней точке, см картинку б). Очевидно, что на картинке б) условие не выполняется - ведь $f(x)$ в конкретном примере - линейная функция, т.е. её производная ровна константе и ровна $\frac{B-f'(a)}{b-a}$, а цветная линяя, соединяющая концы отрезков ровна $\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. Они не равны и теорема не выполняется.

3 Доказательство

Определим функцию $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Несложно доказать, что для этой функции выполянется теорема Ролля:

Во-первых $g(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$.
Во-вторых она имеет производную на $(a; b)$: $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
В-третьих $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$, а $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$, т.е. $g(a) = f(a) = g(b)$.

Получается, что по теореме Ролля на $(a; b)$ существует точка c такая что $g'(c) = 0$. Но $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, значит $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Теорема доказана.