# 1. Векторы. Свойства векторов.

Mariya Senina

January 2021

## 1 Как это всё вводили мы?

Мы сначала ввели Деркартову прямоугольную систему координат.

**Опредление.** *Деркартову прямоугольную систему координат.* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *- орты. Т.е. единичные векторы составляющие базис пространства. Так что для любой трёхмерный вектор а можно представить ввиде* $a = a_1 \cdot \vec{i}, a_2 \cdot \vec{j}, a_3 \cdot \vec{k}$*. Причём такое разложение единственное.*

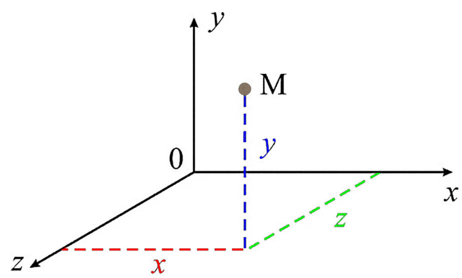



Рис. 1: Деркартову прямоугольную систему координат

А дальше, перечислили **свойства векторов**:

1. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ Ровны их координаты $(a_x = b_x; a_y = b_y; a_z = b_z)$
2. $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$
   $\vec{a} - \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$
3. $\alpha\vec{a} = (\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z)$
4. $\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \vec{a} = \alpha\vec{b}$ или $\vec{b} = \alpha\vec{a}$
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

6. Направляющие косинусы:
$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|a|}$
$\cos(\beta) = \frac{a_y}{|a|}$
$\cos(\gamma) = \frac{a_z}{|a|}$
Орт $\hat{a} = (\cos(\alpha); \cos(\beta); \cos(\gamma))$

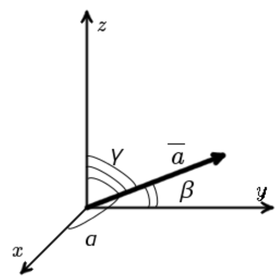
7. Скалярное произведение
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$, где $\alpha$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

8. Векторное произведение
$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} \iff$

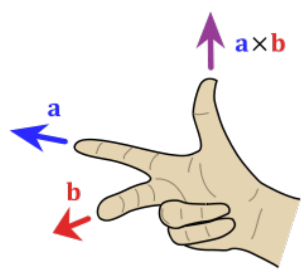
   (a) $\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\phi)$, где $\phi$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

   (b) $\vec{c} \perp \vec{a} \perp \vec{b}$

   (c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка




а) Углы направляющих косинусов




б) Проавая тройка

Тут должно быть истеричное АААААААААААААААААААААААААААААААААА которое заставить вас прочитать, как мы должны были это вводить, потому что то, что сделали мы - грусть печаль и страдание невинных котиков. Из этих определений ничего дальше не доказать и ни на один вопрос не ответить. (хотя бы потому что чтобы ввести орты нам нужно ввести векторы, а чтобы ввести векторы, нужно ввевсти ДКПС, чтобы ввести ДКПС нуужны орты...)

## 2 Как это правильно вводить?

Вообще, по-хорошему, чтобы вввводить понятие вектора нужно понимать, где мы его вводим. Т.е. сначала определять (линейное пространство), а потом определять векторы.
Векторное пространство задаётся относительно просто, но муторно.
*На парах нам этого не давали*, но преподавательно порядком ругалась, что мы этого не вывели, так что думаю, знать полезно.

Предствьте пространство $V$ - это такое множество элементы, которого называются скаляры. И поле $F$ - такое множество, где элементы называются векторами. На этой стадии мы ещё не знаем ни что такое вектор, ни что такое скаляр, это может быть что угодно. Важно понимать, что их задают свойства "среды в которой мы их вводим, и ими будет считаться любой объект который будет удовлетворять определению векторного пространства.

**Опредление.** ***Векторное пространство*** *- это не пустое пространство $V$ над полем $F$, где определено сложение векторов и умножение вектора на скаляр, а так же выполняется список свойств:*

1. $x + y = y + x$ *для любых* $x, y \in V$ *(коммутативность сложения)*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *для любых* $x, y, z \in V$ *(ассоциативность сложения)*
3. *существует такой элемент* $0 \in V$, *что* $x + 0 = 0 + x = x$ *для любого* $x \in V$ *(существование нейтрального элемента относительно сложения), называемый нулевым вектором, или просто нулём, пространства* $V$
4. *для любого* $x \in V$ *существует такой элемент* $-x \in V$, *что* $x + (-x) = 0$ *, называемый вектором, противоположным вектору* $x \in V$
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, *таких что* $\alpha, \beta \in F, x \in V$ *(ассоциативность умножения на скаляр)*
6. *существует элемент* $1 \in F$ *такой что* $1 \cdot x = x$ *(унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля $F$ сохраняет вектор)*
7. $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ *(дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров)*
8. $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ *(дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов).*

***Операция сложения векторов****: паре векторов $x, y \in V$ сопоставляется вектор $x + y = z \in V$, называймый их суммой.*
***Операция умножения вектора на скаляр****: вектору $x \in V$ и скаляру $\lambda \in F$ сопоставляется вектор $\lambda x = y \in V$, называемый их произведением.*

Тогда определение вектора такое определение

**Опредление.** ***Вектор - объект соответствующий по свойствам, объектам наполняющим линейное простнаство.***

Свойства векторов из этого определения вытекают из определения линйного пространства. А векторное и скалярное произведение выводится исходя из свойств пространства, а не просто задаются для векторов.