46. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Коши.

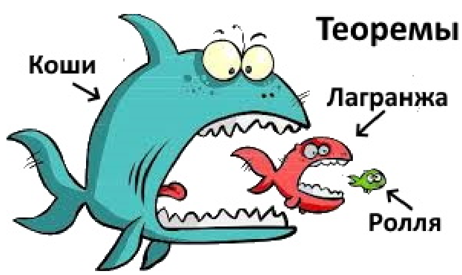
Mariya Senina

January 2021

1 Введение

У нас на Лекциях были только формулировки, но я приведу доказательства, т.к. мне кажется, что они не сложные, но дают лучшее понимание.

Тем более и теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Как и теорема Роля, которая является частным случаем теоремы Лагранжа. Таким образом, теорема Коши включает в себя в качестве частных случаев теорему Ролля и теорему Лагранжа. (очень советую их тоже прочитать)



2 Формулировка

Теорема. *$f(x)$, $g(x)$ - непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $\exists\ c \in (a;b)$ такая что $\frac{f(c)'}{g(c)'} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Другими словами - производные двух функций относятся так же как приращение функций на отрезке.

(Посмотрите в преждыдущих билетах важный момент про условия теоремы. И осознайте, почему неждостаточно непрерывности на интревале $(a;b)$ и зачем она вообще нужна.)

3 Доказательство

Заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$. В противном случае – согласно теореме Ролля – производная $g'(x)$ обратилась бы в ноль в некоторой точке $c \in (a;b)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1. Нерерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$.
2. $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a) - g(a)) = 0$,

   $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = 0$,

   т.е $F(a) = F(b)$

Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая что $F'(c) = 0$, т.е. $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$. Значит $\frac{f(c)'}{g(c)'} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, в которой что и требовалось доказать.

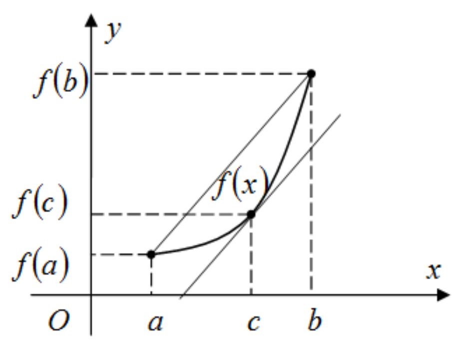


Рис. 1: Иллюстрация к теореме Лагранжа - случай теоремы Коши, когда $g(x) = x$

P.S. к теореме Коши нормально картинку не нарисовать