2. Линейная зависимость векторов. Базис

Mariya Senina

January 2021

1 Линейная (не)зависимость векторов

Опредление. *Вектора $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ ... $\vec{a_n}$ **линейно независмы**, если существует $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n \in R$ выражение $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_n\vec{a_n} = 0$ равно нулю только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$.*

Опредление. *Вектора $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ ... $\vec{a_n}$ **линейно зависмы**, если существует $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n \in R$ выражение $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_n\vec{a_n} = 0$ равно нулю.*
или
Если хотя бы один из векторов можно выразить ввиде линейной комбинации других: $\vec{a_k} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_n\vec{a_n}$.

Определить это легко - у **линейно зависимой** системы векторов **опеределитель равен нулю**. Например:
$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} = 0$, т.к. $\vec{a_3} = 2 \cdot \vec{a_1} + \vec{a_2}$

2 Базисы на плоскости и в пространстве

Опредление. ***Базис плоскости*** *- совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих данной плоскости. Т.е. если $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, то для люблого вектора $\vec{x}$ лежащего в этой плоскости можно найти такие числа λ_1, λ_2, что $\vec{x} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2}$. Тогда числа λ_1, λ_2 - координаты ветора $\vec{x}$ на данном базисе.*

Вектора лежащие в на одной прямой называются **коллиниарными**, они не могут быть базисом для плоскости.

Опредление. ***Базис трёхмерного пространства*** *- совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих данному пространству. Т.е. если $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ то для люблого вектора $\vec{x}$ лежащего в этому пространству можно найти такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что $\vec{x} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3}$. Тогда числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - координаты ветора $\vec{x}$ на данном базисе.*

Вектора лежащие в одной плоскости называются **компланарными**. Если три вектора компланарны или коллиниарны они не могут задвать трёхмерное пространство.

3 Определения для n мерных пространств

Опредление. ***Базис пространства L*** *- система из n линейно независимых векторов* $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ ... $\vec{a_n}$, *таких что всякий вектор* $\vec{x} \in L$ *можно представить в виде ли- нейной комбинации векторов* $\vec{x} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_n\vec{a_n}$.

Такое представление вектора x называется разложением его по данному базису. Числа $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$, которые являются коэффициентами в раз- ложении вектора по данному базису, называются координатами вектора в этом базисе и записываются так: $x = (\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n)$ или так $x = [\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n]$, или в виде матрицы-столбца:

$$\text{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема. *Координаты вектора* $\vec{x} \in L$ *относительно некоторого базиса* $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ ... $\vec{a_n} \in L$ *этого линейного пространства определяются единственным образом.*

Опредление. *Линейное пространство имеет размерность равную n, если n – число базисных векторов; пространство при этом обозначают* L^n.