**Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики**

**Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники**

# Расчётно-графическая работа 4

## По дисциплине:

## «Базовая математика»

Работу выполнили:

Студенты группы P3112

Сенина Мария Михайловна

Разживин Даниил Андреевич

Залевский Дмитрий Евгеньевич

Седымов Алексей Александрович

Преподаватель:

Беспалов Владимир Владимирович

Санкт-Петербург

2021

## Задание 1. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных в области

Используя формулу расстояния от точки до плоскости, узнаем, чему равна сумма квадратов расстояний до заданных плоскостей от искомой точки M

$d = \frac{|A\,M_x + B\,M_y + CM_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - Расстояние от точки до плоскости

$$d_1^2 + d_2^2 = \frac{(x\ +\ 3z\ -\ 6)^2\ +\ (y + 3z\ -\ 2)^2}{10}\ =\ f(x,y,z)$$

1. Для нахождения точки минимума, найдём частные производные функции от трех переменных и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{x + 3z - 6}{5}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{y + 3z - 2}{5}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{3x + 3y + 18z - 24}{5}$$

2. Все уравнения сведём к общей системе и учтём условие принадлежности плоскости $(xy - 2z\ =\ 0)$

$$\begin{cases} x + 3z - 6 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

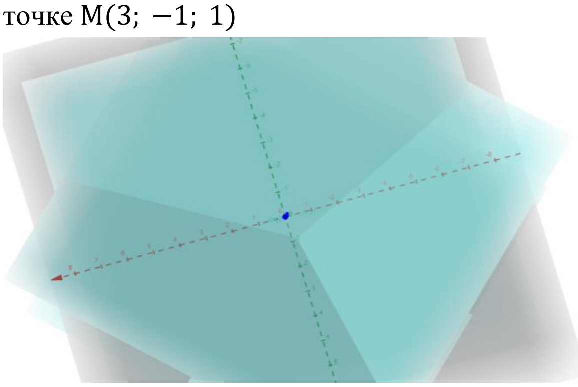
3. Решив систему уравнений, найдём координаты искомой точки M

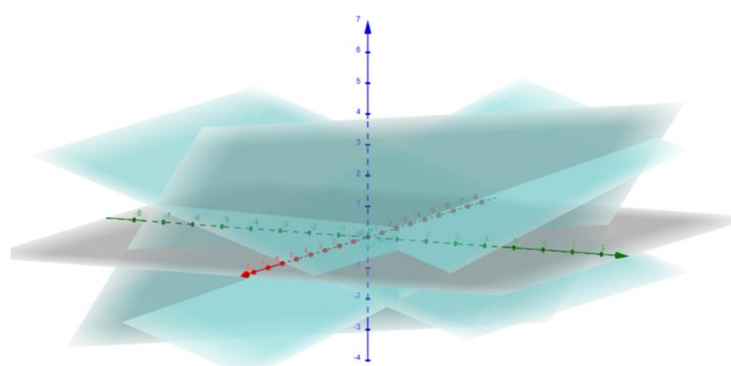
$x\ =\ 3, y\ =\ -1, z\ =\ 1 \Longrightarrow \mathrm{M}\ (3;\ -1;\ 1)$

4. Зная координаты точки M, найдём сумму квадратов расстояний от плоскостей до неё

$$d_1^2 + d_2^2 = \frac{(3 + 3 - 6)^2 + (3\ -\ 1\ - 2)^2}{10}\ =\ 0$$

Вывод: Все плоскости пересекаются в одной точке $\mathrm{M}(3;\ -1;\ 1)$





## Задание 2. Интегралы Пуассона и Френеля

1) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = I \quad I^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dy =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}dr^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$

2) $I^* = \int_0^\infty e^{-x^2 t}dx = \int_0^\infty e^{-y^2 t}dy \Rightarrow I^{*2} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)}dy =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2 t}dr^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2t} e^{-r^2 t}\Big|_0^\infty = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2t} = \frac{\pi}{4t}$

$\Rightarrow I^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2 t}dx$

$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \sin t\,dt \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2 t}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\,dt \int_0^\infty e^{-x^2 t}dx =$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-x^2 t}\cdot \sin t\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2 t}\sin t\,dt$

$J(a) = \int_0^\infty e^{-at}\underbrace{\sin t}_{\operatorname{Im}(e^{it})}dt = \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{-at+it}dt\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a-i}\right) = \frac{1}{a^2+1}$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{t^4+1}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

3) $\int_0^\infty \frac{\cos(3t+\pi/2)}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \frac{-\sin(3t)}{\sqrt{t}}dt \ominus$ $\boxed{J^*(a) = \int_0^\infty e^{-at}\sin(3t)dt = = \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{-at+3it}dt\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a-3i}\right) = \frac{3}{a^2+9}}$

$\ominus \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{3}{t^4+9}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$

5) $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty dx\, e^{-tx^2}\sin t$ ⊜

$$\boxed{J(a)^{**} = \int\limits_0^\infty e^{-at}\sin t\,dt = \operatorname{Im}\int\limits_0^\infty e^{-at+it}\,dt = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a-i}\right) = \frac{1}{a^2+1}}$$

⊜ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ $\qquad dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-1/2}\,dt$

$t = \frac{x^2\pi}{2} \Rightarrow dt = 2\frac{\pi}{2}x \qquad x = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \qquad dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t^{-1/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot dt$

6) $\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)dx = \int\limits_0^\infty \cancel{\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt}\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2t}{\pi}\right)}{\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}\,dt =$

$= -\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$

Также в задании нужно было построить следующие графики:
https://www.desmos.com/calculator/dgzeb4mmas - график $e^{-x^2}$
https://www.desmos.com/calculator/2vquxuhw2n - график $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$
https://www.desmos.com/calculator/6s4b3lvaku - график $\sin(x^2)$
https://www.desmos.com/calculator/mkgr2t9idl - график $sin(\frac{\pi x^2}{2})$

## Задание 3. Потенциал векторного поля

Вариант 5: Дано векторное пол $\vec{H} = \left(1;\ -\frac{1}{y^2}\right)$.

### Условие:

- Убедитесь, что поле потенциально.
- Найдите уравнения векторных линий.
- Изобразите векторные линии на рисунке.
- Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла.
- Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии). Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий.

Зафиксируйте точки $A$ и $B$ на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

### Решение**:**

1. Поле будет потенциальным, если $rot(\vec{H}) = 0$.

$\vec{H} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k} \implies P(x,y,z) = 1,\ Q(x,y,z) = -\frac{1}{y^2},\ R(x,y,z) = 0$

Посчитаем ротор для заданного поля: $rot(\vec{H}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(\frac{\partial\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{k} = 0 - 0 = 0$

2. Соответственно уравнение векторный линий тут будет такое: $\vec{H} = \vec{\imath} - \frac{1}{y^2}\vec{\jmath}$
3. Векторные линии двумерного поля находятся из уравнения $\mathrm{Q}(x,y)dx = P(x,y)dy$ значит:

$\left(-\frac{1}{y^2}\right)dx = dy$

$-dx = y^2 dy$

$-\int dx = \int y^3\, dy$

$-x + C_1 = \frac{y^3}{3} + C_2$

$\frac{y^3}{3} + x = C$

Теперь мы можем построить график семейства прямых задающихся параметром с: https://www.desmos.com/calculator/6jijud7jou

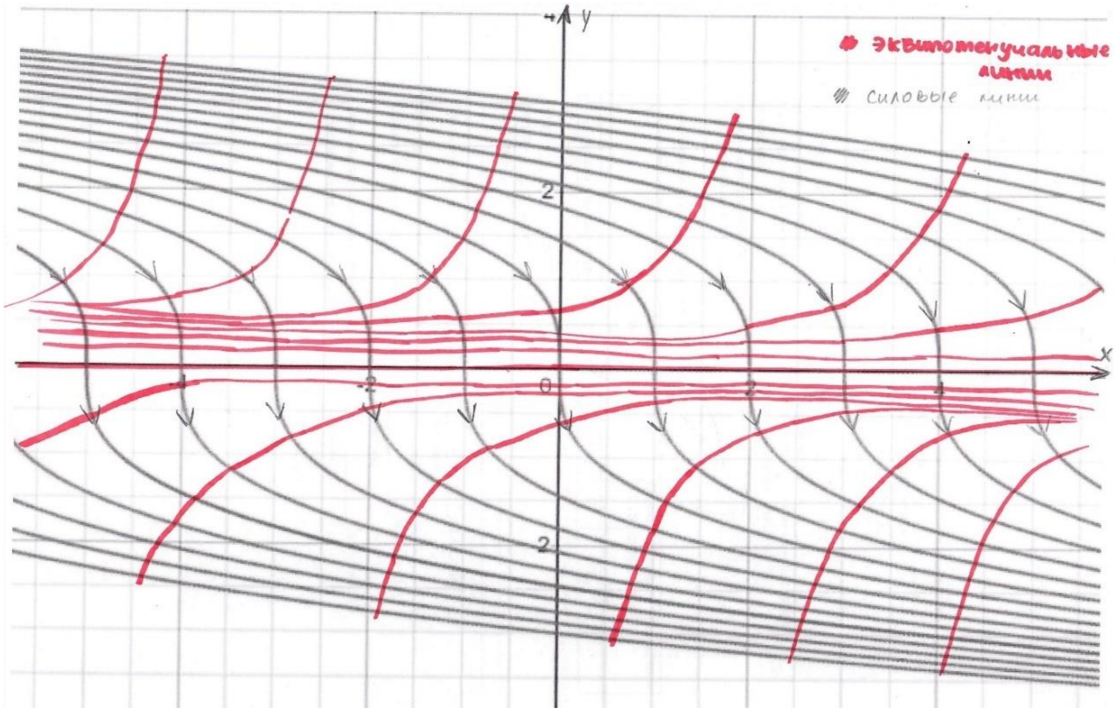
4. Изобразим разность потенциалов между двумя точками поля как криволинейный интеграл между этими точками:

$$\mathrm{W}_{AB} = \int_A^B P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = \int_A^B dx - \frac{1}{y^2}dy$$

5. Построим график эквипотенциальных линий (см рис)
6. Посчитаем работу между точками $A\left(0; \sqrt[3]{9}\right)$ и B $(3{,}0)$.

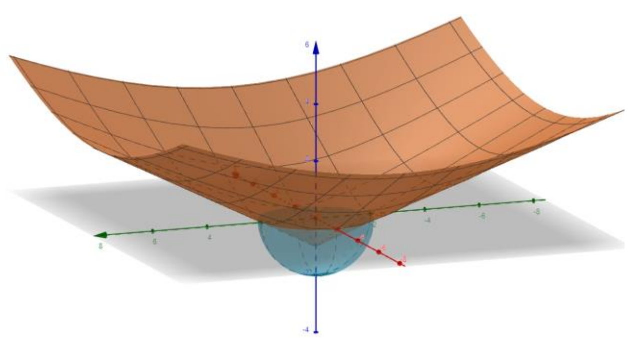
Работа перемещения по векторной линии ровна интегралу по кривой $\frac{y^3}{3} + x = 3$ AB:

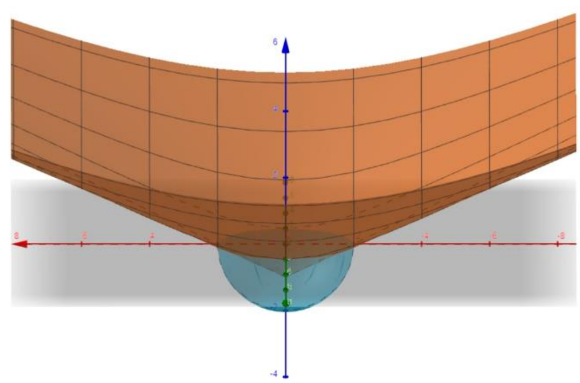
$$\int_A^B \vec{F}\overrightarrow{ds} = \int_A^B dx + \left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$
$$= \int_0^{\sqrt[3]{9}} \left(\left(3 - \frac{y^3}{3}\right) + \left(-\frac{1}{y^2}\right)(-y^2)\right)dy = \int_0^{\sqrt[3]{9}} \left(3 - \frac{y^3}{3}\right)dy = 3 * \sqrt[3]{9} - \frac{9}{3}$$
$$= 3 * \sqrt[3]{9} - 3 \approx 3.24$$




## Задание 4. Поток векторного поля

1.





2. Поток поля равен поверхностному интегралу второго рода:

$$W = \iint \sin(yz)\,dydz + \left(xe^{2x^2} + e^z\right)dxdz - zdxdy$$

$$W = \iint \sin(yz)\,dydz + \iint \left(xe^{2x^2} + e^z\right)dxdx - \iint zdxdy = E_1 + E_2 - E_3$$

$$E_1 = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} \sin(yz)\,dz$$

$$E_2 = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \left(xe^{2x^2} + e^z\right)dz$$

$$E_3 = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dy$$

Теперь найдём эти интегралы:

$$E_1 = \int_{-2}^{2} \frac{-dy}{y}\left(cos0 - \cos\left(y\sqrt{4-y^2}\right)\right) = \int_{-2}^{2} \frac{-dy}{y} + \frac{\cos\,(y\sqrt{4-y^2})}{y}dy = 0$$

В силу симметрии.

$E_2 = \int_{-2}^{2}\left(1 - e^{-\sqrt{4-x^2}} + xe^{2x^2}\sqrt{4-x^2}\right)dx = \int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} e^{-\sqrt{4-x^2}} * dx + \int_{-2}^{2} xe^{2x^2}\sqrt{4-x^2} * dx = 4 - 0.93 + 0 = 3.07$

Последний интеграл в сумме равен 0 в силу симметрии.

$E_3 = \int_{-2}^{2} dx * \left(-\frac{(x^2-4)\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right) - \sqrt{4-x^2}*y*\sqrt{\frac{y^2+x^2-4}{x^2-4}}}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^{2}\frac{dx}{-2} * \left((x^2-4)\arcsin(1) - (4-x^2)\sqrt{0} - \left((x^2-4)\arcsin(-1) + (4-x^2)\sqrt{0}\right)\right) = \int_{-2}^{2}\frac{dx}{-2} * \left((x^2-4)\frac{\pi}{2} + (x^2-4)\frac{\pi}{2}\right) = \left((x^2-4)\frac{\pi}{2} + (x^2-4)\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-2}^{2} -\frac{\pi(x^2-4)}{2}dx = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{16}{3} - 16\right) = \frac{16\pi}{3}$

$W = 0 + 3.07 - \frac{16\pi}{3} = 3.07 - \frac{16\pi}{3}$