Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Расчётно-графическая работа 3

По дисциплине:

«Базовая математика»

Работу выполнили:

Студенты группы P3112

Сенина Мария Михайловна

Разживин Даниил Андреевич

Залевский Дмитрий Евгеньевич

Седымов Алексей Александрович

Преподаватель:

Беспалов Владимир Владимирович

Санкт-Петербург

2021

Задание 1. Интегральная сумма

План:

Интегральная сумма

1. Составьте и изобразите интегральную сумму функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на заданном отрезке $[-1; 0{,}5]$ в виде ступенчатой фигуры:
   - Изобразите график функции.
   - Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции, вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, и осью Ox.
   - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков, точками отметьте их концы на рисунке.
   - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметьте их на рисунке.
   - Вычислите значения функции в выбранных точках, отметьте их на рисунке.
   - Изобразите ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точек внутри элементарных отрезков.
2. Исследуйте ступенчатую фигуру. Для этого выберите количество ступеней n_1 (от 3 до 5) и посмотрите, как изменяется фигура при смещении точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения точек: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор). Затем выберите другое количество ступеней n_2 (от 6 до 10), а затем n_3 (от 11 и больше) и повторите процедуру.
3. Сделайте заключение.

Последовательность интегральных сумм

1. Постройте интегральную сумму функции на заданном отрезке:
   - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков.
   - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка.
   - Запишите интегральную сумму.
   - Исследуйте её значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
2. Вычислите интеграл от данной функции по отрезку <u>аналитически</u> и сравните значения интегральных сумм с его величиной.
3. Постройте последовательность интегральных сумм, изобразите её на графике. Изобразите точное значение интеграла горизонтальной прямой. Продемонстрируйте сходимость построенной последовательности к точному значению интеграла с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
4. Сделайте заключение.

Решение:

В начале мы построили график нашей функции в Desmos: https://www.desmos.com/calculator/vs2cyjeyl1

Далее мы построили ступенчатую фигуру разбиения для нашей функции в зависимости от её пределов, количества отрезков на которые весь интервал разбивается и положения точки, задающей высоту столбца для каждого отрезка разбиения.

На полученном графике мы приблизительно посчитали значение площади для разного количества отрезков в разбиении и разных положений точки, задающей его.

n	*Крайнее левое c*	*Среднее c*	*Крайнее правое c*
4	-0.7443	-0.5289	-0.0717
8	-0,6366	-0,4226	-0,3003
20	-0,5244	-0,4435	-0,3899

По графику видно, что чем больше отрезков в разбиении – тем точнее столбчатая фигура описывает площадь графика под нашей функцией. При этом поскольку наша функция на отрезке возрастает – чем правее точка, определяющая высоту столбцов тем меньше получается площадь фигуры, которая меньше 0. И уменьшается площадь графика, которая больше нуля.

Далее мы построили интегральную сумму нашей функции $(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1; 0{,}5]$:

https://www.desmos.com/calculator/rzzy0fm9eb

И вычислили интеграл аналитически:

$$\int_{-1}^{0.5} \sqrt[3]{x}\,dx = \int_{-1}^{0.5} x^{1/3}\,dx = \frac{3}{4}(0.5^{\frac{3}{4}} - (-1)^{\frac{3}{4}}) = \frac{3}{16}\left(-4 + 2^{\frac{2}{3}}\right) \approx -0.452362$$

Значить получившиеся суммы больше похожи на наш интеграл, если выбирать среднюю точку, как значение на отрезке, а также куда точнее получается если брать большие значения для n.

Таблица показывающая сходимость:

Значение n	*Значение интегральной суммы*			*Аналитическое значение*
	Крайнее левое	*Середина*	*Крайнее правое*	
5	-0,2131	-0,3970	-0,7512	-0,45236
8	-0,3003	-0,4226	-0,6366	-0,45236
20	-0,3899	-0,4435	-0,5244	-0,45236
100	-0,4383	-0,4533	-0,4536	-0,45236

Задание 2. Площадь фигуры

Вариант 4:

Найдите площадь фигуры, ограниченной верзиерой $x = t,\ y = \frac{8}{4+t^2}$ и осью абсцисс.

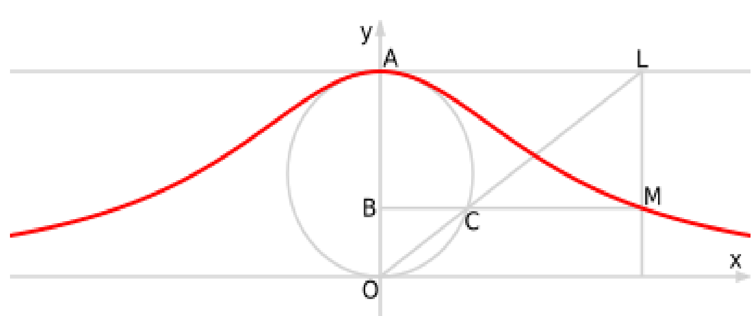
План:

- Изобразите на графике кривую и область, которую она ограничивает.
- Запишите формулу для нахождения площади при помощи определённого интеграла.
- Вычислите интеграл и запишите ответ.
- Оцените правдоподобность полученного ответа.

Решение:

https://www.desmos.com/calculator/icyu7kuhib

Верзиера Аньези — плоская кривая, геометрическое место точек M, для которых выполняется соотношение $\frac{BM}{BC} = \frac{OA}{OB}$, где OA — диаметр окружности, BC — полухорда этой окружности, перпендикулярная OA. Своё название верзьера Аньези получила в честь итальянского математика Марии Гаэтаны Аньези, исследовавшей эту кривую.



$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

$$y = \frac{8}{4 + x^2} = \frac{2^3}{2^2 + x^2}$$

$$f(x) \in R$$

Функция непрерывна на всей области определения

$y(-1) = y(1)$ => Функция чётная

Вычислим площадь фигуры ограниченной $y = \frac{8}{4+x^2}$ *и* $y = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4 + x^2} dx = 8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 + x^2} dx = 16 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4 + x^2} dx =$$

$$4 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} dx = \left[t = \frac{x}{2} \quad dt = \frac{1}{2} dx \right] =$$

$$= 8 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = 8arctg(+\infty) - 8arctg(0) = 4\pi$$

Ответ правдоподобен, в чём можно убедиться, посмотрев на график

Задание 3. Несобственный интеграл

Вариант 4: $f(x) = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^a \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

План:

1. Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?
2. Постройте графики подынтегральной функции при нескольких значениях параметра.
3. Есть ли значение параметра, при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и сделайте вывод о сходимости интеграла.
4. Сформулируйте признаки сравнения для определения сходимости несобственных интегралов.
5. Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию (логарифм или арктангенс) для сравнения исходного интеграла с интегралом вида $\int_a^b \frac{1}{x^\beta} dx$. Установите, при каких значениях параметра это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости интеграла.

6. Вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра a, при котором легко находится первообразная. Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при другом параметре a.
7. Запишите ответ.

Решение:

1. Особая точка $f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^a \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ это $\{0\}$.

Есть ещё особая точка $\{1\}$, но она не входит в пределы нашего интеграла.

Несобственный интеграл II рода (функция с разрывом II рода в точке 0).

Функция на промежутке интегрирования неотрицательна.

2. https://www.desmos.com/calculator/hraakaipfw?lang=ru

3. При a=0 легко интегрируется.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\ln(1/x)} = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln(x)} = -\int_0^{1/2} \frac{dx}{\ln(x)} = -li\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-li(0)\right) = -li(1/2)$$

4.

Признак сравнения: пусть две ***неотрицательные*** функции $f(x), g(x)$ **непрерывны** на полуинтервале $[a;b)$ и для всех x этого промежутка выполнено неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходиться будет и интеграл $\int_a^b f(x)dx$;

2) если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$.

5. При a=0:

https://www.desmos.com/calculator/3cfitnojqe

Значение b1=0.9634741 найдено подбором, если $b > b1$, то интеграл расходится, если меньше, то сходится.

=> Можно взять значение b=0.9634741. Тогда $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^b}$ сходится, при этом

$\frac{1}{x^b} > \frac{1}{\ln(1/x)}$ => наш интеграл сходится.

Не понятно, как оценивать логарифм или арктангенс, потому что обе эти функции меньше, чем наша на участке интегрирования. При этом интегралы этих функций сходятся, а значит про нашу функцию ничего не известно из 4 пункта.

6. Если a принадлежит (-∞; 1.0179219], то интеграл сходится.

Если a принадлежит (1.0179219; +∞), то интеграл расходится.

Это значение было найдено подбором по графику и интегралу (если a больше этого значения, интеграл не определён).

Тогда интеграл равен:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^a * \ln(1/x)} = -Ei\left((1-a)\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) + Ei(1-a)$$

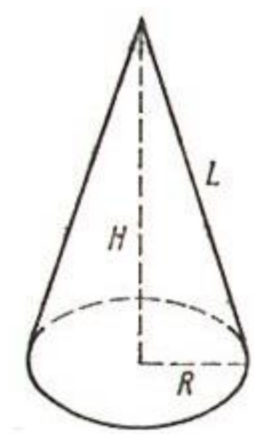
Если а $= 0$, то интеграл равен $-\mathrm{li}(1/2)$.

Не понятно, можем ли мы использовать интегральную показательную функцию и интегральный логарифм и как с ними работать. (Оставить в таком виде? Тогда как нам получить конкретное значение а через них, чтобы оценить сходимость. И нужно ли что-то ещё про них пояснить?)

Задание 4. Приложения определенного интеграла

Вариант 4:

Задача: Прямой круглый конус с радиусом основания и высотой 1 м вертикально погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Найти работу, необходимую для извлечения цилиндра из воды, если его удельный вес равен 3. (*Указание: сила, совершающая работу по подъёму тела, равна разности веса тела и веса воды, вытесняемой подводной частью тела*).



План:

- Приближённо вычислите малое приращение искомой величины Q на элементарном участке dx (приращение заменяется дифференциалом по известной формуле: $\Delta Q(x) \approx dQ$)
- Искомую величину вычислите определенным интегралом:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} dQ$$

Решение:

Так как нам нужно вычислить полную работу будем вычислять её как:

$A = \int dA$, где $dA = Fdl$. Соответственно в нашем случае – $F = F_{тяж} - F_{а} = mg - \rho g V_{погр}$

Поскольку в каждый момент времени объём погруженной части меняется, то будет меняться и сила, с которой нужно тащить конус, чтобы вытянуть его на dl наверх. Направим ось l вертикально вверх, сказав, что уровень воды является точкой 0.

Тогда если на расстояние l конус уже выглядывает из воды – объём его погруженной части будет равен: $V(l) = \frac{1}{3}\pi(R^3 - l^3)$. А так как удельный вес равен 3 $\implies \frac{mg}{V} = 3\rho g$

Итого:

$$A = \int_0^R \left(mg - \rho g \frac{1}{3}\pi(R^3 - l^3)\right)dl = mgl - \rho g \frac{1}{3}\pi R^4 + \rho g \frac{1}{12}\pi R^4 = 3\rho g V - \rho g \frac{1}{4}\pi R^4$$
$$= 3\rho g \frac{1}{4}\pi R^4 - \rho g \frac{1}{4}\pi R^4 = \rho g \frac{1}{2}\pi R^4$$