

Эл/магнитная индукция. Индуктивность

1. П-образный проводник находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника и изменяющемся во времени со скоростью $0,1 \text{ Тл/с}$. Вдоль параллельных сторон этого проводника перемещают без начальной скорости проводник-перемычку с ускорением $a = 10 \text{ см/с}^2$. Длина перемычки $l = 20 \text{ см}$. Найти э. д. с. индукции в контуре через $t = 2 \text{ с}$ после начала перемещения, если в момент $t = 0$ площадь контура и индукция магнитного поля равны нулю. Индуктивностью контура пренебречь.

Ответ : $\varepsilon = 12 \text{ мВ}$

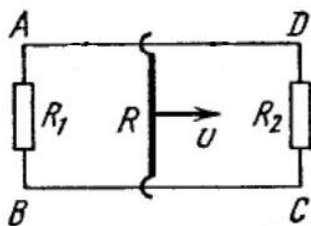
2. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени τ по закону $\Phi = \alpha t$ (τ - t). Найти количество тепла, выделенное в контуре за это время. Индуктивностью контура пренебречь.

Ответ: $\alpha^2 \tau^2 / 3R$

3. На длинный прямой соленоид, имеющий диаметр сечения $d = 5 \text{ см}$ и содержащий $N = 20$ витков на один сантиметр длины, плотно надет круговой виток из медного провода сечением $S = 1 \text{ мм}^2$. Найти ток в витке, если ток в обмотке соленоида увеличивают с постоянной скоростью 100 А/с . Индуктивностью витка пренебречь.

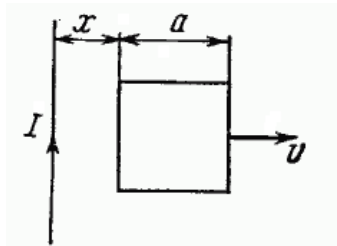
Ответ : $I = 0,196 \text{ А}$

4. Прямоугольный контур со скользящей перемычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура (см. рисунок). Индукция поля равна B . Перемычка имеет сопротивление R , стороны AB и CD — сопротивления R_1 и R_2 . Пренебрегая самоиндукцией контура, найти ток в перемычке при ее поступательном перемещении с постоянной скоростью v .



Ответ: $I = Blv / (R + R_{12})$

5. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости, как показано на рисунке. Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти э. д. с. индукции в рамке как функцию расстояния x .



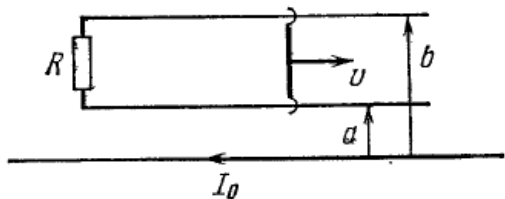
Ответ: $\varepsilon = \mu_0 I a^2 v / (2\pi x(x+a))$

6. В однородном магнитном поле находится небольшая катушка, ось которой совпадает с направлением магнитного поля. Площадь поперечного сечения катушки $S = 3 \text{ мм}^2$, число витков $N = 60$. При повороте катушки на 180° вокруг ее диаметра через подключенный к ней гальванометр протекает заряд $q = 4,5 \text{ мкКл}$. Определить напряженность внешнего поля H . Сопротивление катушки, гальванометра и соединительных проводов $R = 40 \text{ Ом}$.

Ответ: $H = 400 \text{ кА/м}$

7. На расстояниях a и b от длинного прямого проводника с током (I_0) расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R (рисунок). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью v стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти:

- значение и направление индукционного тока в стержне;
- силу, необходимую для поддержания постоянства скорости стержня.

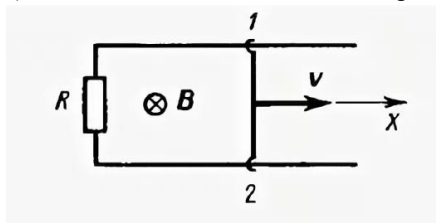


Ответ: $I = \mu_0 I_0 v \ln(b/a) / 2\pi R$

$$F = \frac{v}{R} I^2$$

8. Проводник 12 массы m скользит без трения по двум длинным проводящим рельсам, расположенным на расстоянии l друг от друга (рисунок). На левом конце рельсы замкнуты сопротивлением R . Система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура. В момент $t = 0$ проводнику 12 сообщили вправо начальную скорость v . Пренебрегая сопротивлением рельсов и проводника 12, а также самоиндукцией, найти:

- расстояние, пройденное стержнем до остановки;
- количество тепла, выделенное при этом на сопротивлении R .



Ответ: $S = V_0 m R / B^2 l^2$, $Q = m V_0^2 / 2$

9. Катушку индуктивности $L = 300$ мГн и сопротивления $R = 140$ мОм подключили к источнику постоянного напряжения. Через сколько времени ток через катушку достигнет $\eta = 50\%$ установившегося значения?

Ответ: $t = 1.5\tau$

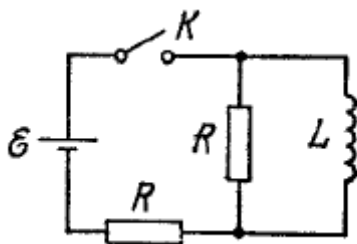
10. Сверхпроводящее круглое кольцо радиуса R , имеющее индуктивность L , находится в однородном магнитном поле с индукцией B . Плоскость кольца параллельна вектору B , и ток в кольце равен нулю. Затем плоскость кольца повернули на 90° в положение, перпендикулярное к полю. Найти:

а) ток в кольце после поворота; б) работу, совершенную при этом.

Ответ: $I = \pi R^2 B / L$

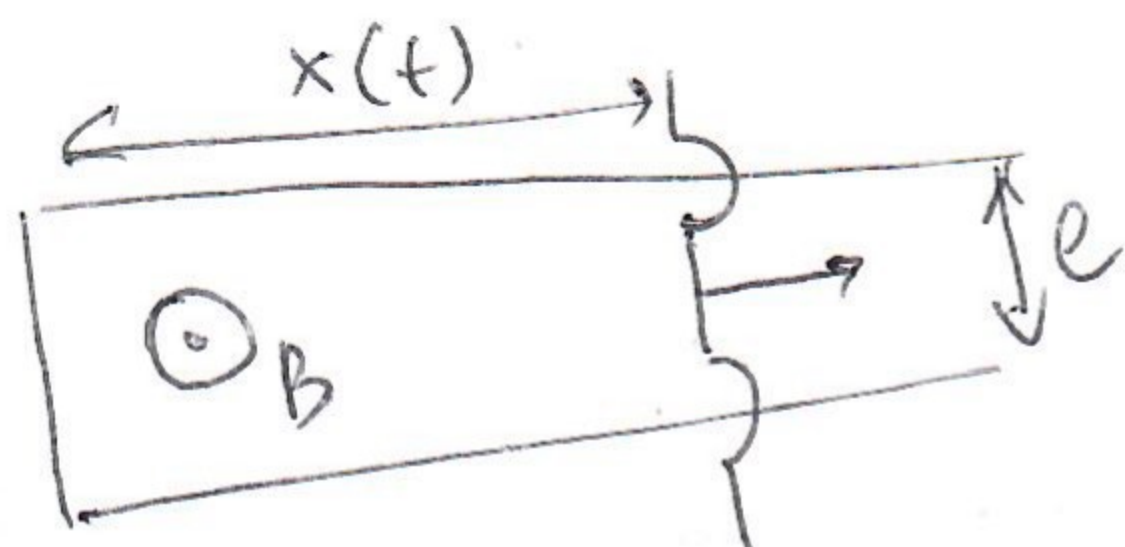
$$A = \pi^2 R^4 B^2 / 2L$$

11. Найти закон изменения во времени тока, текущего через индуктивность L в схеме (рисунок) после замыкания ключа K в момент $t=0$.



Ответ: $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/2L})$

1



$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{dB}{dt} = 0,1 \text{ T/s}$$

$$dB = 0,1 dt$$

$$B = 0,1 t$$

$$S(t) = l \cdot x(t) = l \cdot \frac{at^2}{2}$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}$$

$$v_0 = 0$$

$$a = 10 \text{ m/s}^2$$

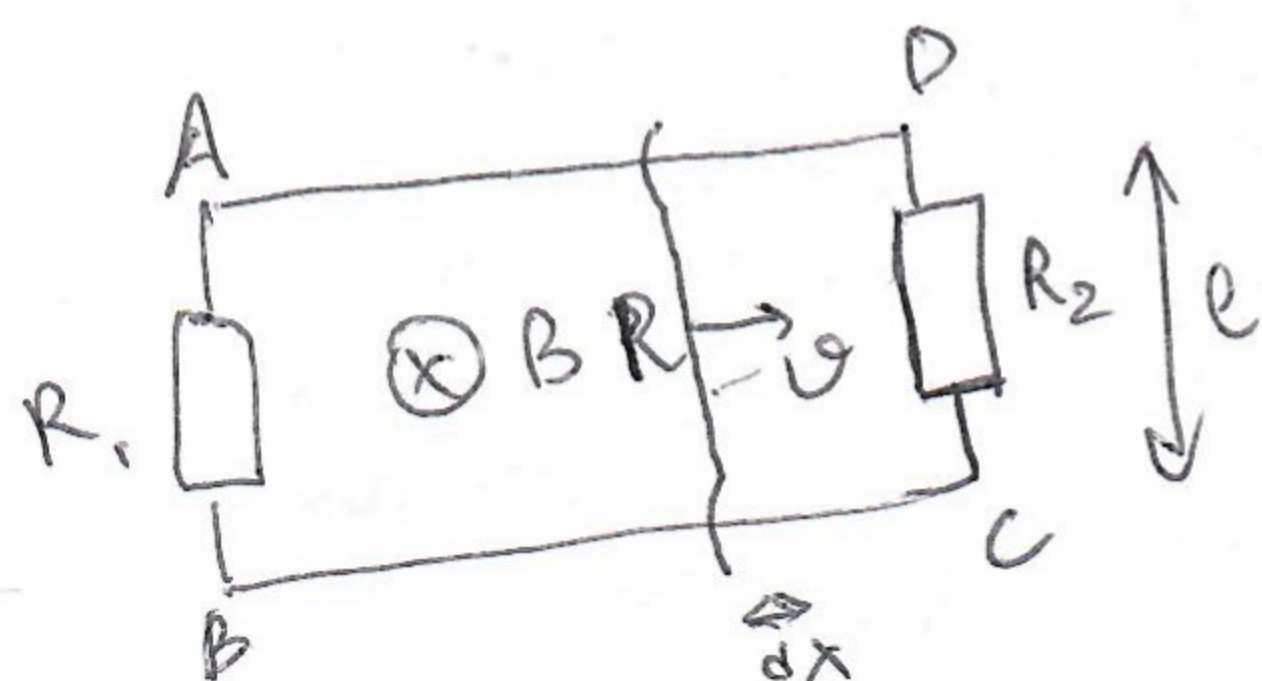
$$l = 0,2 \text{ m}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$\mathcal{E}_i = ?$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d(0,1 t \cdot l \cdot \frac{at^2}{2} \cdot \cos \alpha)}{dt} = -0,05 l a \frac{dt^3}{dt} = -0,15 l a t^2$$

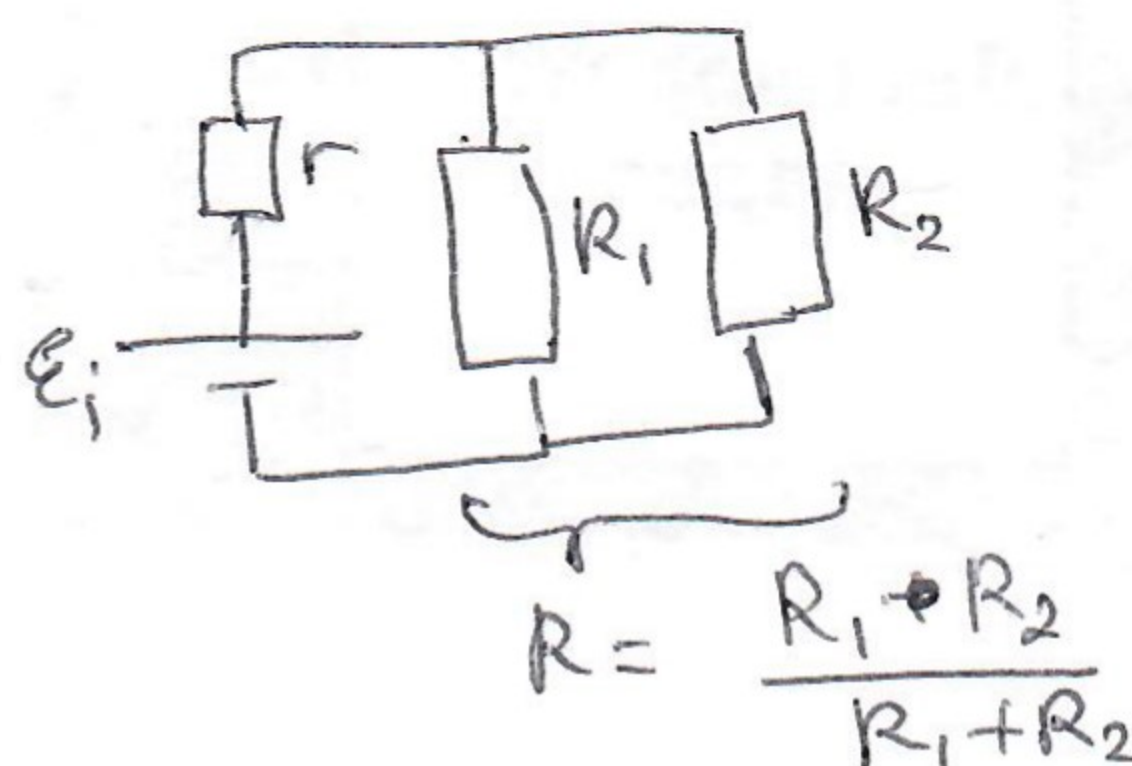
4



$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{BS}{dt} = - \frac{B l \frac{dx}{dt}}{dt} = - B l v$$

$$|\mathcal{E}_i| = B \cdot l \cdot v$$

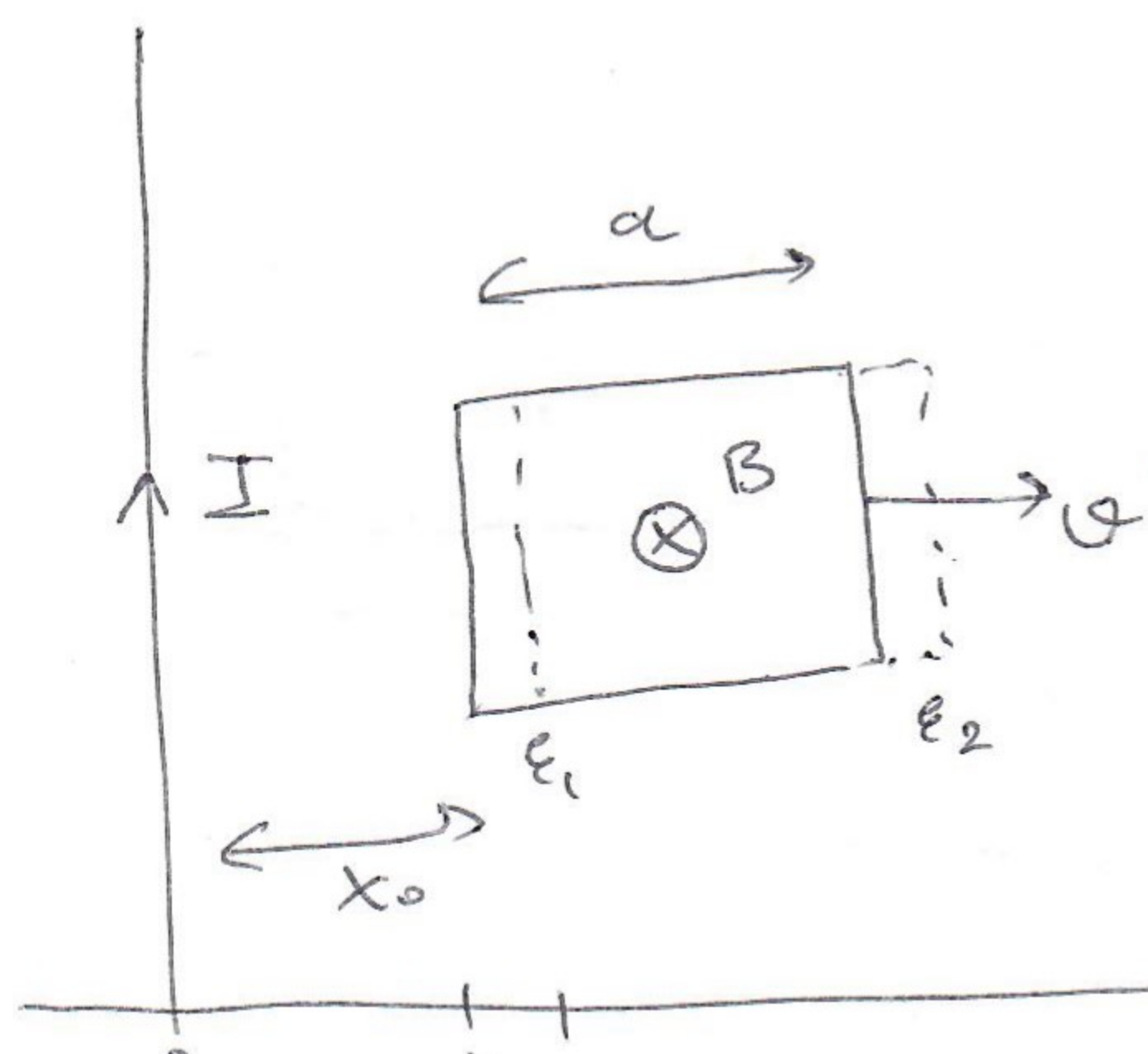
\Rightarrow схема менее вычислительная:



по закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{r + R_{\text{общ}}} = \frac{\mathcal{E}_i}{r + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

5



$$\mathcal{E}_i = \mu_0 \mu I$$

$$2\pi x = \mu \mu_0 I \Rightarrow B = \mu \mu_0 I \cdot \frac{1}{2\pi x}$$

$$\Rightarrow B = \mu \mu_0 I \cdot \frac{1}{2\pi x}$$

$$\mathcal{E}_1 = v B_1 a$$

$$\mathcal{E}_2 = v B_2 a$$

$$\mathcal{E}_1 = v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a$$

$$\mathcal{E}_2 = v \frac{\mu_0 I}{2\pi (x+a)} a$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x (x+a)}$$

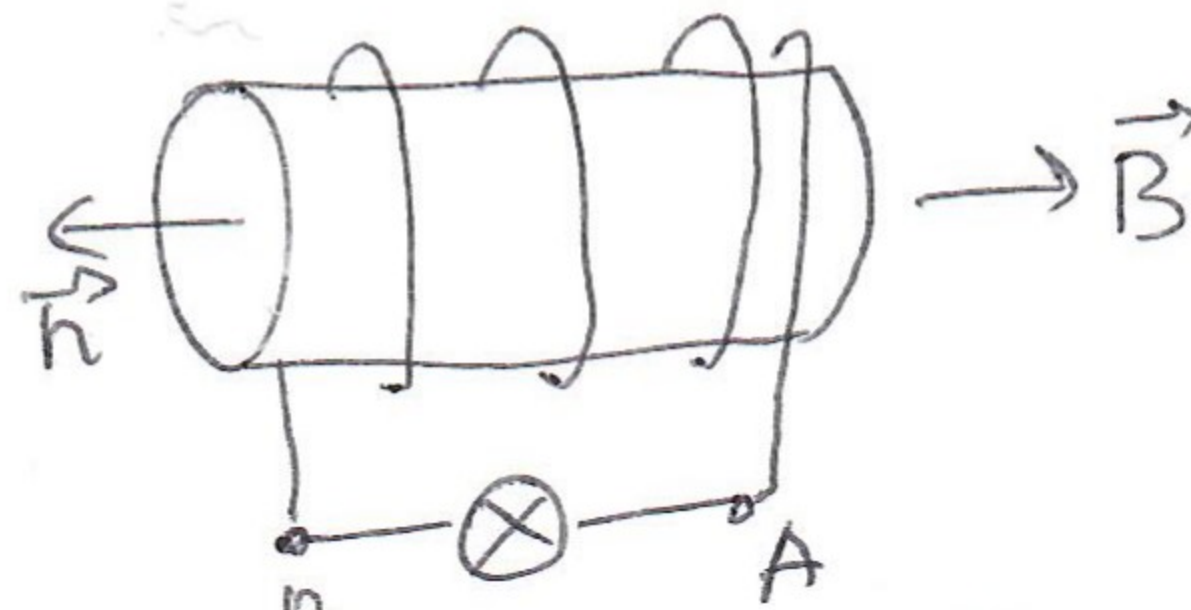
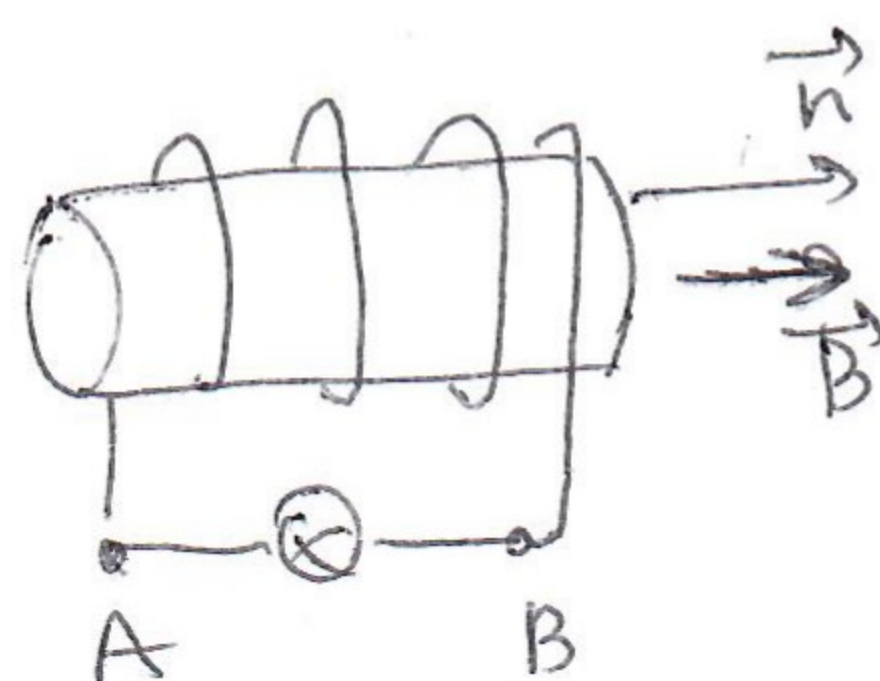
6 S, N

$$\varphi = 180^\circ$$

$$q = 4,5 \text{ mC}$$

$$R = 40 \Omega$$

$$H = ?$$



$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{N B S d(\cos(\alpha(t)))}{dt} = N B S \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

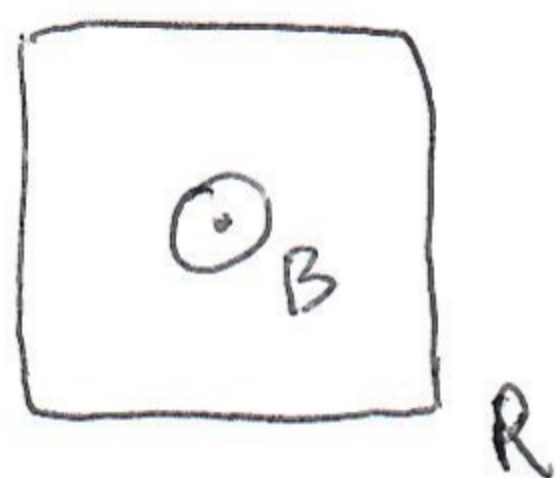
$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} ; I = \frac{dq}{dt}$$

$$\int_0^q \frac{dq}{dt} = \frac{N B S}{R} \int_0^\pi \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$q = \frac{N B S}{R} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{2 N B S}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{q R}{2 N S} \Rightarrow H = \frac{B}{\mu \mu_0} = \frac{q R}{2 N S \mu_0}$$

2



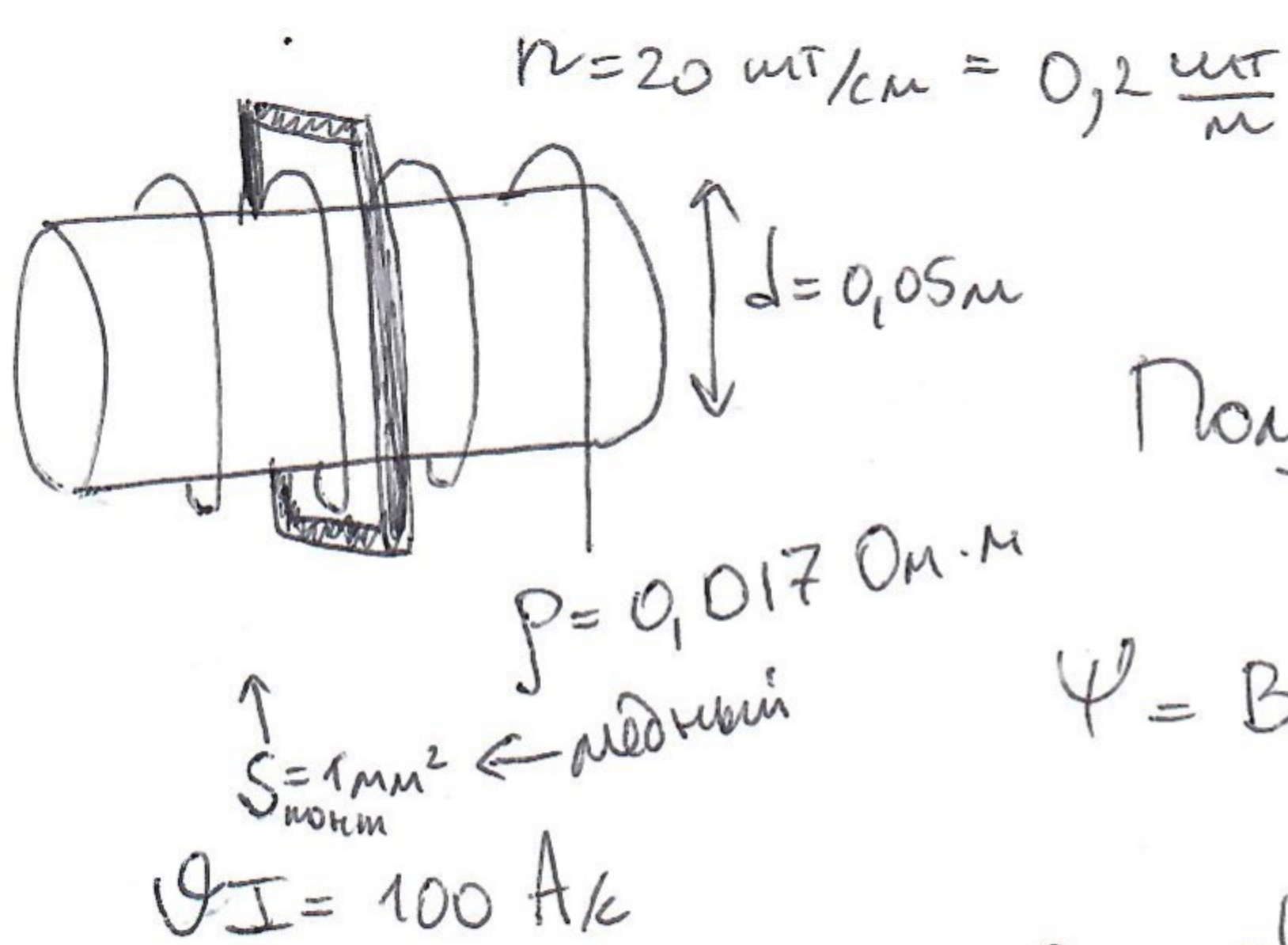
$\Phi(t) = \alpha t (\gamma - t)$ Прямая в поле $\alpha \dots \gamma$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - (\alpha t (\gamma - t))' = - (\alpha \gamma - \alpha t^2)' = 2\alpha t - \alpha \gamma$$

$$P = UI = I^2 R = U^2 / R$$

$$Q = \int_0^{\gamma} dt \cdot P = \int_0^{\gamma} \frac{(2\alpha t - \alpha \gamma)^2}{R} dt = \int_0^{\gamma} \frac{(4t^2 - 4t\gamma + \gamma^2)}{R} \alpha^2 dt = \frac{\alpha^2}{R} \left[\frac{4}{3} t^3 - 2\gamma t^2 + \gamma^2 t \right]_0^{\gamma} = \frac{\alpha^2 \gamma^3}{3R}$$

3



Получается, что поток через виток равен Ψ соленоида.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{d}$$

$$\Psi = B \cdot S \Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = \frac{dB \cdot S}{dt} = \frac{\mu_0 I \pi \frac{d^2}{4} n}{d \cdot dt} = \mu_0 \mathcal{E}_i \pi \frac{d^2}{4} n$$

$$\mathcal{E} = \frac{d\Psi}{dt} = \mu_0 \mathcal{E}_i \pi \frac{d^2}{4} n \quad ; \quad \mathcal{E} = I R_{\text{контур}}$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dI = \mathcal{E}_i dt$$

$$\mathcal{E}/R = I \quad ; \quad R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} \cdot S_{\text{контур}}}{\rho l} = \frac{\mu_0 \mathcal{E}_i \pi \frac{d^2}{4} n \cdot S_{\text{контур}}}{\rho \cdot \pi d}$$

$$n = \frac{N}{\pi d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = n \cdot \pi d =$$

$$= 0,2 \text{ вит/м} \cdot 0,05 \text{ м} \cdot \pi =$$

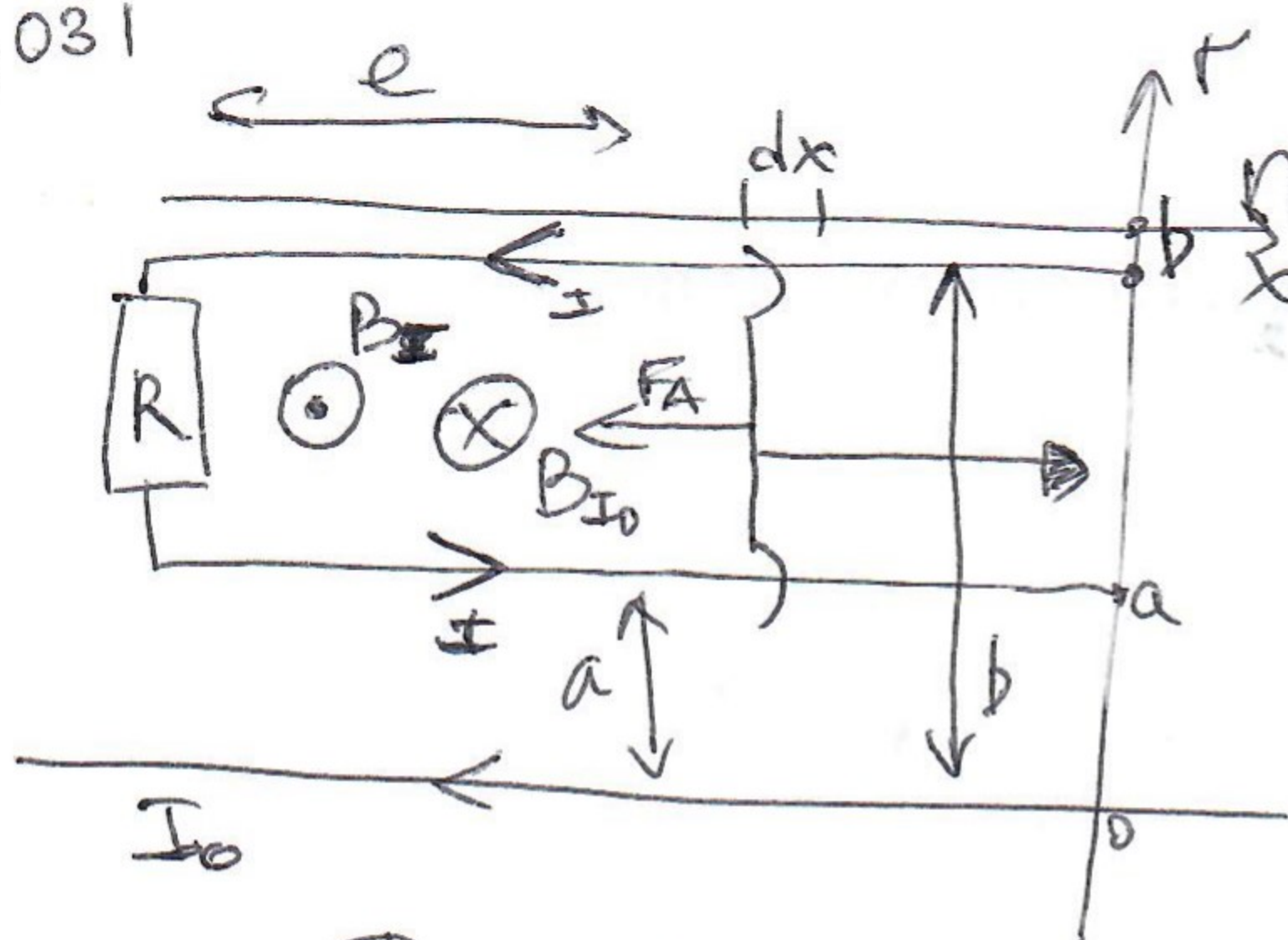
$$= 0,031$$

$$= \frac{\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 100 \text{ А/с} \cdot \frac{1}{4} \pi (0,05 \text{ м})^2 \cdot 0,031 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2}{0,017 \text{ Ом} \cdot \text{м}} =$$

$$= 0,196 \text{ А}$$

(это-то нум
ре сходится
привести 8м)

7



перемычка движется

$$\Phi = B \cdot S$$

$$\Delta \Phi = \int_a^b dB \cdot dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\mu_0 I_0 \ln(b/a)}{2\pi dt} = \frac{\mu_0 I_0 \ln(b/a)}{2\pi} \mathcal{E}$$

Ток в контуре будет индуцироваться увеличением потока через него \Rightarrow его поле будет направлено \otimes нам. \Rightarrow он выйдет против часовой стрелки

$$\mathcal{E} = IR \Rightarrow$$

$$I = \frac{\mu_0 I_0 \ln(b/a)}{2\pi R} \mathcal{E}$$

За счёт поля I

в контуре на перемычке будет действовать сила Ампера F_A

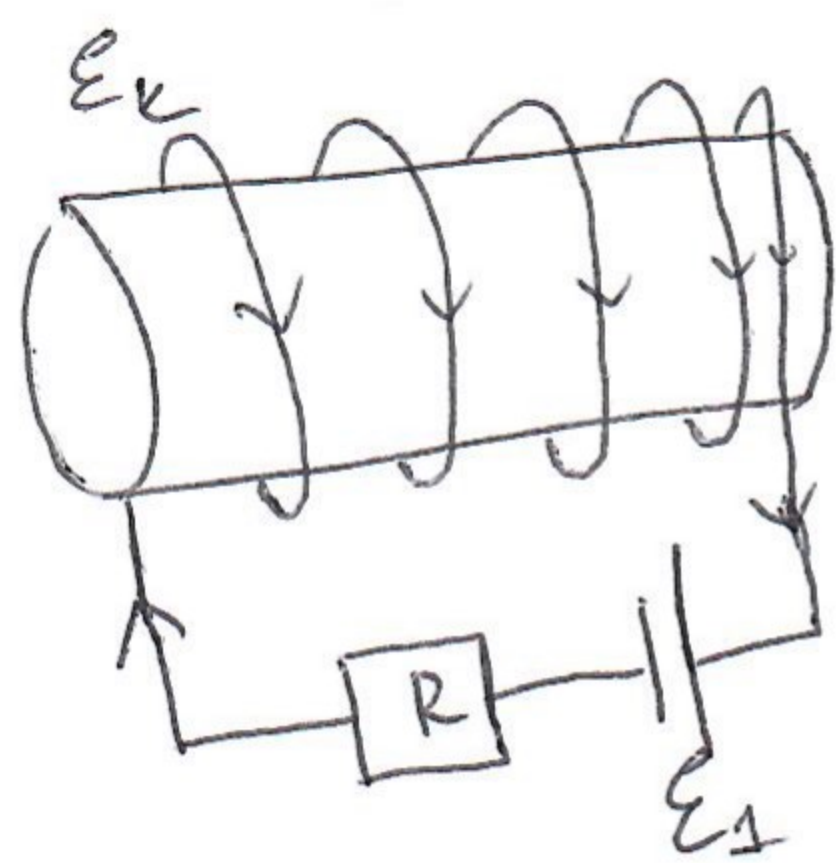
$$\vec{F}_A = I \vec{dl} \times \vec{B} \Rightarrow$$

она будет уменьшать контур $\Rightarrow F_A = F_{\text{рез}}$ - сила, с которой нужно потянуть

Но пропуск посчитаем энергетическим методом

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F_{\text{рез}} dl}{dt} = F_{\text{рез}} \mathcal{E} = I^2 R \Rightarrow F_{\text{рез}} = \frac{I^2 R}{\mathcal{E}} = \left(\frac{\mu_0 I_0 \ln(b/a)}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{R}$$

9

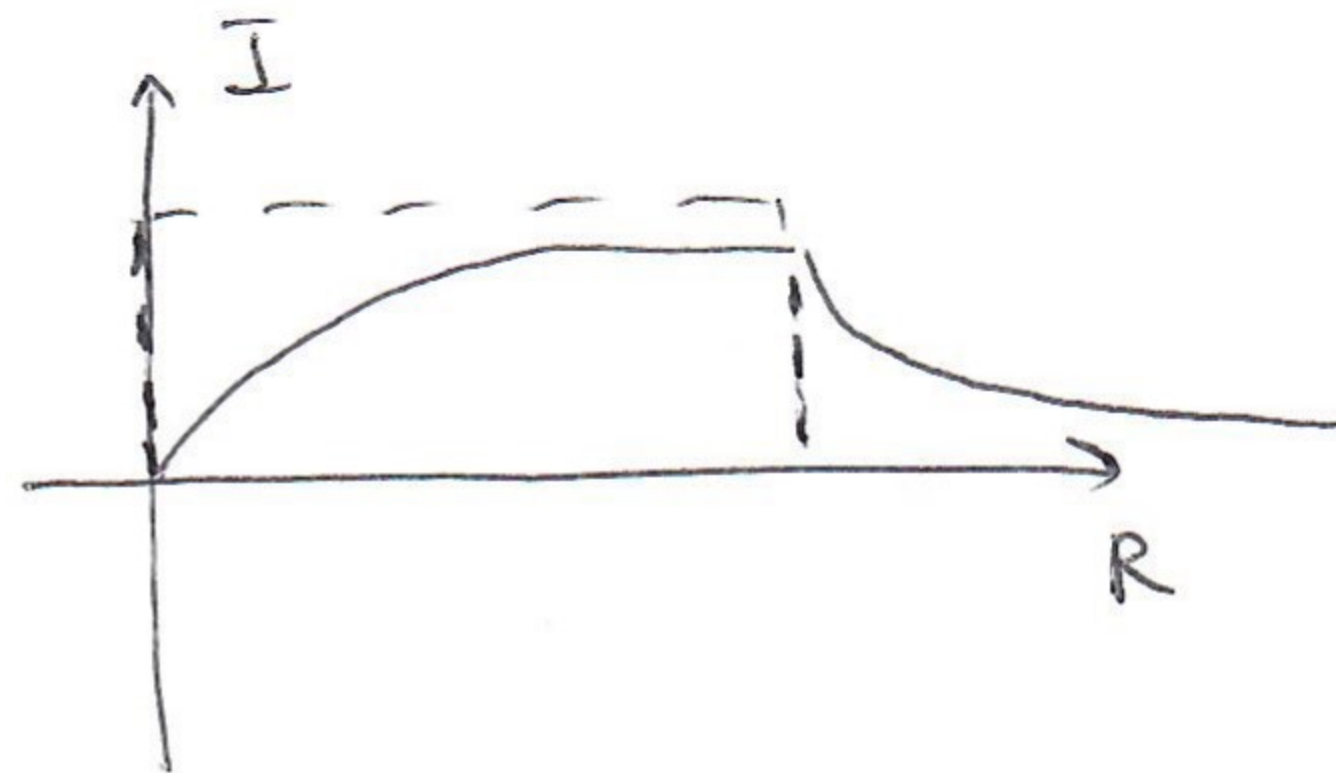


$$L = 300 \text{ мГн}$$

$$R = 140 \text{ Ом}$$

$$\gamma = 50\%$$

$$t = ?$$



$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{U}_L + \mathcal{U}_R$$

$$\mathcal{E}_2 = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E}_1 - |\mathcal{E}_2| = IR \Rightarrow \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - IR = \mathcal{U}_L$$

$$-dI = \frac{d\mathcal{U}_L}{R} \Rightarrow -L \frac{d\mathcal{U}}{R dt} = \mathcal{U}$$

$$\int_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}-IR} \frac{d\mathcal{U}}{\mathcal{U}} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt = -\frac{R}{L} t$$

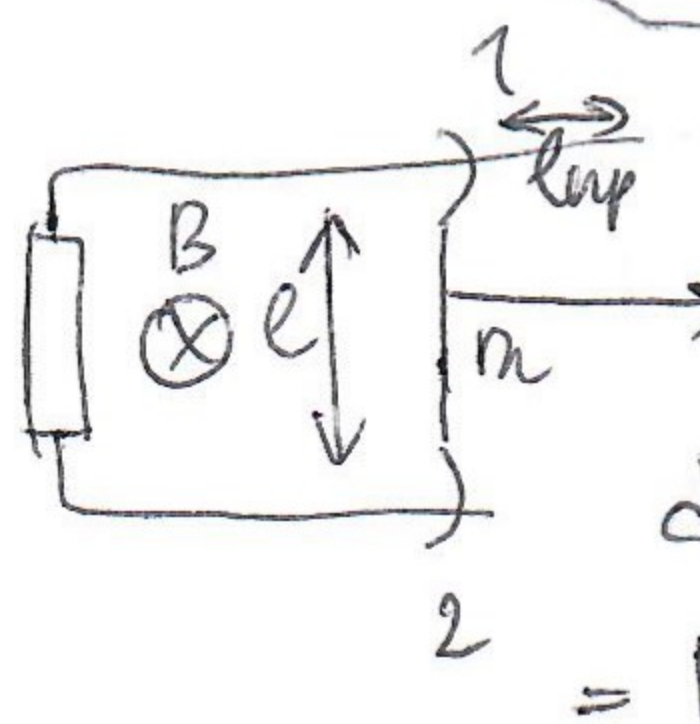
$$\Leftrightarrow \frac{d\mathcal{U}}{\mathcal{U}} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln(\mathcal{U}) \Big|_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}-IR} = \ln\left(\frac{\mathcal{E}-IR}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$\frac{\mathcal{E}-IR}{\mathcal{E}} = e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L} t}}{R} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$$

8



Изменение потока

Φ через контур

$$d\Phi = dS B =$$

$$= B \cdot d\mathcal{U} \cdot l$$

$$= I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{I(t)}{I_0} = 0,5 = \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \Rightarrow$$

~~Выводим закон изменения тока~~

~~из-за индукции~~ из-за индукции тока в контуре из-за изменения Φ.

$$F_A \quad \text{При этом } \vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F_A = I l B = ma$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B l v dt}{dt} = \mathcal{E} = IR \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B l v}{R}$$

$$a = \ddot{\varphi} = \ddot{x} \quad F_A = \frac{B^2 l^2 v}{R} = -m \frac{dv}{dt} = ma \Rightarrow$$

$$\int_{v_0}^{u(t)} \frac{dv}{v} = - \int_0^T \frac{B^2 l^2}{R m} dt \Rightarrow \ln\left(\frac{u(t)}{v_0}\right) = -\frac{B^2 l^2}{R m} T$$

$$\frac{u(t)}{v_0} = e^{-\frac{B^2 l^2}{R m T}} \Rightarrow u = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{R m T}}$$

$$L_{\text{мп}} = \int_0^\infty v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{R m T}} dt = \frac{v_0 m R}{B^2 l^2}$$

Q - энергия, которая была потрачена на тепло на резисторе. Но мн. энергия в системе сохраняется, она же равна кинетической энергии стержня м.е. $Q = \frac{mv^2}{2}$

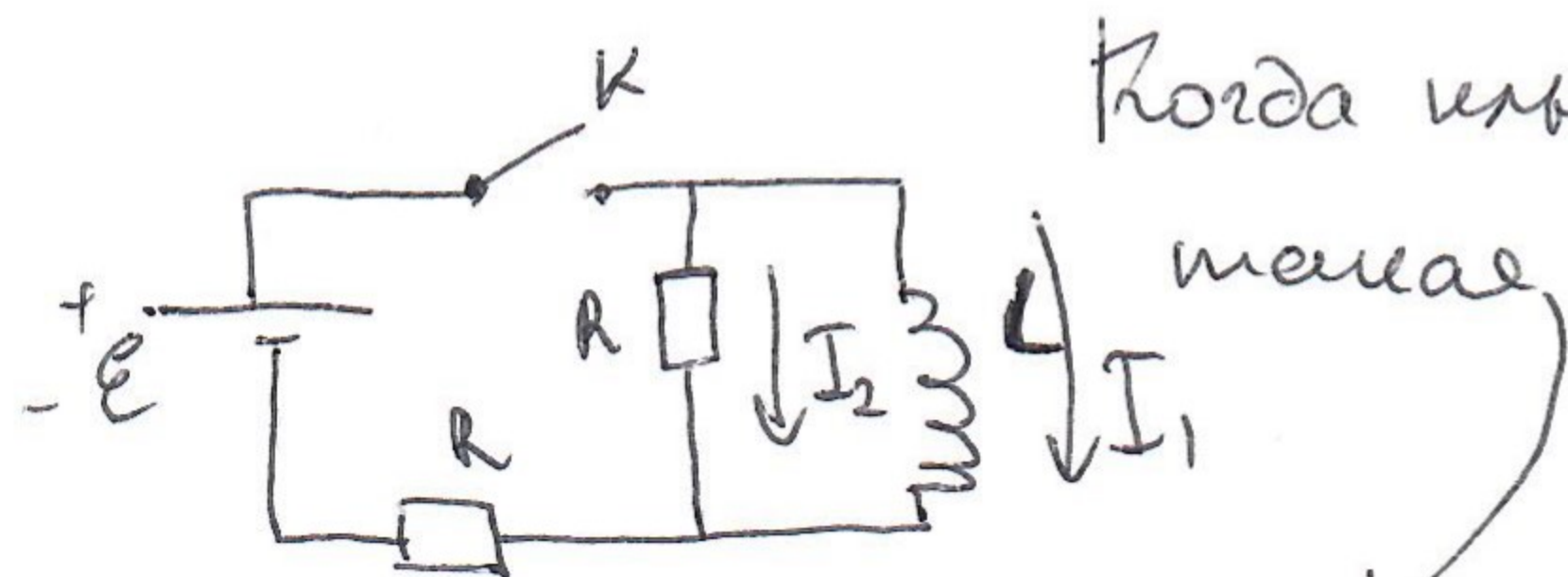
10) В начальный момент ток равен нулю, а т.к. контур сверхпроводящий он будет пытаться сохранить ток через контур тем же, т.е. ток который будет возникать в контуре будет создавать поле равное $B_{\text{внеш}}$, чтобы компенсировать его ток в 0.

т.е. $B' = B \cos \alpha$ $\Phi = BS \cos \alpha$ $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow d\Phi = -L dI$

поле созданное контуром $I = \int dI = -\frac{1}{L} \int d\Phi = \frac{B R^2 \pi}{L} \Rightarrow$

\Rightarrow Работа, которую мы передаем, чтобы повернуть контур: равна энергии которую он приобретёт. т.е. $Q = A = \frac{L I^2}{2}$ — энергия катушки с током I

11)



Когда ключ замкнут у нас останется

такая схема, в начальный момент $I = I_1 + I_2 = 0$

Тогда $\varepsilon = IR + U_{\text{инд}}$ — напряжение на катушке

$U_{\text{инд}} = -I_2 R \Rightarrow U_{\text{инд}} \neq 0$ т.к. катушка индуцирует $\varepsilon_{\text{инд}}$

и чтобы противодействовать изменению тока в $t=0$, ведь изначально $I=0$. \Rightarrow

$U_{\text{инд}} = \varepsilon_{\text{инд}} = L \frac{dI}{dt}$ $\varepsilon = IR + I_2 R = IR + L \frac{dI}{dt}$

$\Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon - IR}{R} \Rightarrow IR + \frac{\varepsilon - IR}{R} R = IR + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{\varepsilon - IR}{R} = L \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - I$

$(\varepsilon - IR) dt = L dI \Rightarrow \varepsilon dt - I R dt = L dI$

$\frac{(\varepsilon - IR)}{R L dI} = \frac{1}{dt} \Rightarrow dI = \frac{(\varepsilon - IR)}{L} dt$
 $\Rightarrow \int \frac{(\varepsilon - IR)}{L} dt = \int \frac{1}{dt} dI$

$\frac{\varepsilon - IR}{L dI} = \frac{1}{dt}$ $I(t)$
 $t = \int dt = \int \frac{L dI}{\varepsilon - IR} = -L \ln \left(\frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \right) \Big|_0^t =$

$t = -\frac{2L}{R} \ln \left(\varepsilon - \frac{I(t)R}{\varepsilon} \right)$

$\Rightarrow e^{-t \frac{R}{2L}} = \varepsilon - \frac{I(t)R}{\varepsilon}$

$\Rightarrow I(t) = \left(\varepsilon - e^{-t \frac{R}{2L}} \right) \frac{\varepsilon}{R}$