

Группа *P3112*

Студент *Сенина Мария Михайловна*

Преподаватель *Сорокина Е К*

К работе допущен

Работа выполнена

Рабочий протокол и отчёт по лабораторной работе № 1.07V Маятник Максвелла

1 Цель работы

Изучение динамики плоского движения твердого тела на примере маятника Максвелла.

2 Задачи, решаемые при выполнении работы

1. Проверка выполнения закона сохранения энергии маятника с учетом потерь на отражение и трение.
2. Определение центрального осевого момента инерции маятника Максвелла.

3 Объект исследования

Маятник Максвелла.

4 Метод экспериментального исследования

Маятник Максвелла - это массивный диск радиуса R с тонким осевым валом радиусом r , который подвешен на двух нитях. Такой маятник совершает плоские колебания вверх и вниз.

Момент инерции маятника Максвелла можно найти двумя разными способами - через энергетический и через динамический подходы.

Динамический подход позволяет рассмотреть движение маятника, как вращательное движение в СО маятника и как поступательное движение в лабораторной системе отсчёта. Тогда второй закон Ньютона

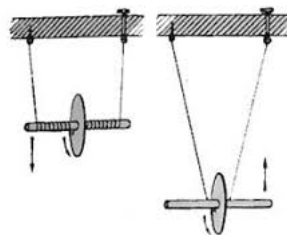


Рис. 1: Маятник Максвелла

для системы можно записать так:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T \\ I_c \varepsilon = 2Tr \end{cases} \quad (1)$$

Т.к. нить можно считать нерастяжимой скорость движения центра масс равна скорости вращения диска.

$$V_{u.m} = \omega r \quad (2)$$

Из формул 1 и 2 можно вывести:

$$I_c = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right)$$

Аналогичный результат мы получим пользуясь **энергетическим подходом**. В для маятника в нижней точке будет выполняться:

$$W_{ep} + W_{ном} + \Delta U = 0 \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} \quad (3)$$

Зная, что маятник опускается с постоянным ускорением можно понять, что за время t центр масс опустится на $h = \frac{at^2}{2}$, т.к. $v = \omega r$, а $v = at$, $h = \frac{vt}{2} = \frac{\omega r t}{2}$. Подставив это в 3 мы получим ту же формулу для момента инерции маятника

$$I_c = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right)$$

.

5 Рабочие формулы

- Среднее значение

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

- Момент инерции маятника

$$I_c = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) \quad (5)$$

- Погрешность момента инерции маятника

$$\Delta I_c = S_N \sqrt{(mr^2 \Delta)^2 + ((-1)r^2 \Delta m)^2 + (2(-1)mr \Delta r)^2} \quad (6)$$

- Теоретический момент инерции маятника

$$I_{теор} = mR^2 \quad (7)$$

- α коэффициент пропорциональности между I_c и Δh

$$\begin{cases} \frac{gt^2}{2} = \alpha \Delta h \\ \Delta \alpha = 2\sigma \\ \delta = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \end{cases} \quad (8)$$

- Коэффициент уравнения прямой $Y = aX$ через МНК

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (9)$$

- СКО коэффициента a уравнения прямой

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (10)$$

- Мгновенная скорость

$$v_i = \frac{2r}{t_i} \quad (11)$$

- Кинетическая энергия маятника (вращательного и поступательного движения)

$$E_k = \frac{mv_i^2}{2} \left(\frac{I_c}{mr^2} + 1 \right) \quad (12)$$

- Потенциальная энергия маятника, если считать за 0 низ его траектории

$$E_{пот} = mgh \quad (13)$$

- Полная энергия маятника

$$E_{полн} = E_{пот} + E_{кин} \quad (14)$$

- Погрешность измерений через коэффициент Стьюдента, где $t_{a_{доп}, N}$ - коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $a_{доп}$ и количества измерений N

$$\Delta x = t_{a_{доп}, N} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (15)$$

6 Измерительные приборы

Погрешности измерительных приборов

№	Наименование	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Секундомер	0.02с - 6.9с	0.0001 с

7 Схема установки

Параметры стенда

№	Наименование	Значение	Погрешность
1	Масса колеса m	0.47 кг	0.001 кг
2	Радиус оси колеса r	$2.5 \cdot 10^{-3}$ м	$0.1 \cdot 10^{-3}$ м
3	Радиус маховика R	0.65 мм	

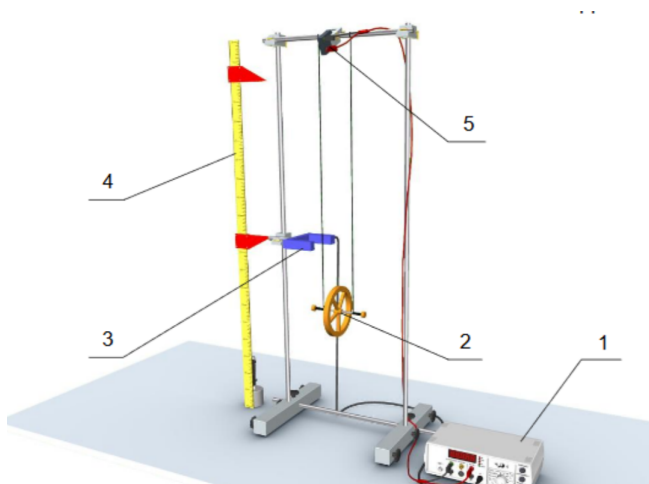


Рис. 2: Стенд:

1 - цифровой счётчик, 2 - колесо, 3 - рамка с фотоэлементами, 4 - Вертикальная линейка, 5 - Пусковой механизм

8 Результаты прямых измерений

Таблица 1

$h_0 = 0.1 м$	0.2 м	0.3, м	0.4, м	0.5, м	0.6, м	0.7, м	0.8, м
$t_1, с$	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800
$t_2, с$	2.614	3.713	4.563	5.265	5.896	6.463	6.978
$t_3, с$	2.615	3.720	4.561	5.270	5.894	6.460	6.984
$t_4, с$	2.614	3.720	4.562	5.270	5.898	6.463	6.972
$t_5, с$	2.613	3.715	4.557	5.264	5.893	6.454	6.982
$t_6, с$	2.614	3.719	4.561	5.265	5.896	6.456	6.973

Таблица 4

$h_0 = 0.1 м$	0.2 м	0.3, м	0.4, м	0.5, м	0.6, м	0.7, м	0.8, м
Δh	0.2	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800
0.053	0.037	0.031	0.027	0.024	0.022	0.020	0.081
0.044	0.034	0.028	0.025	0.023	0.021	0.081	0.044
0.034	0.029	0.025	0.023	0.021			

Измерения проведены в 18:39 4 декабря 2020 года.

9 Расчёт результатов косвенных измерений

Часть 1

Из данных таблицы 1 посчитаем расстояние $\Delta h = h_0 - h_i$, которое прошёл маятник, от начала движения до рамки с фотоэлементом и среднее время, за которое он это сделал. Зная среднее время движения маятника посчитаем $\frac{gt_{cp}^2}{2}$.

Таблица 2

$h_0 = 0.1м$	0.2м	0.3, м	0.4, м	0.5, м	0.6, м	0.7, м	0.8, м
$\Delta h, м$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
t_{cp}, c	2.61	3.72	4.56	5.27	5.90	6.46	6.98
$\frac{gt^2}{2}$	33.55	67.85	102.13	136.19	170.66	204.85	239.05

По формуле $\frac{gt^2}{2} = \alpha \Delta h$ зависимость $\frac{gt_{cp}^2}{2}(\Delta h)$ - линейна. Тогда построим её график см рис 3. Здесь α - коэффициент пропорциональности между $\frac{gt_{cp}^2}{2}$ и Δh , значит мы можем его вычислить с помощью метода наименьших квадратов (формулы $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ и $\Delta \alpha = \sigma_a * S_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}}$.

$$\alpha = \frac{477.61 \text{ м}^2}{1.40 \text{ м}^2} = 341.2$$

$$\Delta \alpha = \sigma_a S_t = 2 \cdot \sqrt{\frac{0.68 \text{ м}^2}{5 \cdot 1.40 \text{ м}^2}} = 0.7$$

Значит относительная погрешность $\delta \alpha = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 0.002 = 0.2\%$

Далее зная по формулам $I_c = mr^2(\alpha - 1)$ и $\Delta I_c = S_N \sqrt{(mr^2 \Delta)^2 + ((-1)r^2 \Delta m)^2 + (2(-1)mr \Delta r)^2}$ мы можем вычислить момент инерции маятника.

$$I_c = mr^2(\alpha - 1) = 0.47 \text{ кг} \cdot (0.003 \text{ м})^2 \cdot 341.2 = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\Delta I_c =$$

$$2.77 \sqrt{(0.47 \text{ кг} \cdot (3 \text{ мм})^2 0.7)^2 + ((341.2 - 1)(3 \text{ мм})^2 1 \text{ г})^2 + (2(341.2 - 1)0.47 \text{ кг} \cdot 30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)^2} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_c = (1.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Теоритически момент инерции должен равняться $I_{теор} = mR^2 = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (по формуле 7).

Часть 2

Используя данные из таблицы 3 вычислим мгновенную скорость маятника в каждый из моментов замеров по формуле $v_i = \frac{2r}{t_i}$ (см. таблицу 4). Зная мгновенную скорость вычислим кинетическую энергию маятника в моменты замеров $E_k = \frac{mv_i^2}{2} (\frac{I_c}{mr^2} + 1)$, а зная высоту, на которой закреплена рамка с фотоэлементом можно вычислить потенциальную энергию $E_{пот} = mgh$ и полную энергию маятника в этих точках $E_{полн} = E_{пот} + E_{кин}$.

Таблица 4

$h_0 = 0.1м$	0.2м	0.3, м	0.4, м	0.5, м	0.6, м	0.7, м	0.8, м
Δh	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
v_1	0.053	0.075	0.092	0.106	0.119	0.130	0.140
v_2	0.035	0.063	0.083	0.099	0.112	0.124	0.135
v_3	0.035	0.063	0.083	0.098	0.112	0.123	0.134
E_{k1}	0.224	0.452	0.671	0.895	1.129	1.347	1.571
E_{k2}	0.097	0.323	0.547	0.779	1.006	1.231	1.467
E_{k3}	0.096	0.320	0.550	0.763	1.006	1.220	1.439
$E_{пот}$	3.692	3.231	2.769	2.308	1.846	1.385	0.923
$E_{полн1}$	3.916	3.683	3.440	3.203	2.975	2.732	2.494
$E_{полн2}$	3.789	3.554	3.316	3.087	2.852	2.615	2.390
$E_{полн3}$	3.788	3.551	3.319	3.071	2.852	2.604	2.362

Построим графики зависимости энергии маятника от высоты (см рис 6).

10 Окончательные результаты

Экспериментальный момент инерции маятника

$$I_c = (1.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Относительная погрешность момента инерции маятника $\delta I_c = 0.22 = 22\%$
Теоритический момент инерции маятника

$$I_{теор} = mR^2 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Получается, что теоритическое значение в два раза больше экспериментального.

Графики зависимости кинетической и полной энергии маятника от высоты (см рис 6).

11 Выводы

В ходе эксперимента мы вычислили момент инерции маятника, с точностью 20%, но при этом с теоритическим значением результат расходится в два раза. Это скорее всего происходит потому, что в считая $I_{теор}$ мы считаем ось маятника, к которой крепятся нити полой, а она цельная, т.е. формула $I_{теор} = \frac{mR^2}{2}$. Т.е. результат должен получиться в два раза меньше и полностью совпасть с экспериментом.

Так же целью эксперимента было проверить выполнения закона сохранения энергии маятника с учетом потерь на отражение и трение. Полная энергия маятника не может сохраняться полностью, т.к. в верёвка, на которую подвешен, маятник не является нерастяжимой и невесомой, что будет приводить к небольшим потерям энергии, особенно в нижней точке. Из графика (рис 5) мы можем заметить, что именно так и происходит. Значения полной энергии в точке t_1 и точках t_2 и t_3 различаются примерно на 0.1 Дж, в то время, как различий в значении у точек t_2 и t_3 почти нет, как раз потому что маятник проходит нижнюю точку между моментами t_1 и t_2 .

Из графика (рис 5) видно, что полная энергия с увеличением высоты полностью не сохраняется, т.к. прямая-аппроксимация значений полной энергии не горизонтальная. К таким результатам могла привести неточность в измерении мгновенной скорости, или пренебрежение потерями энергии из-за растяжимости нити.

12 Графики

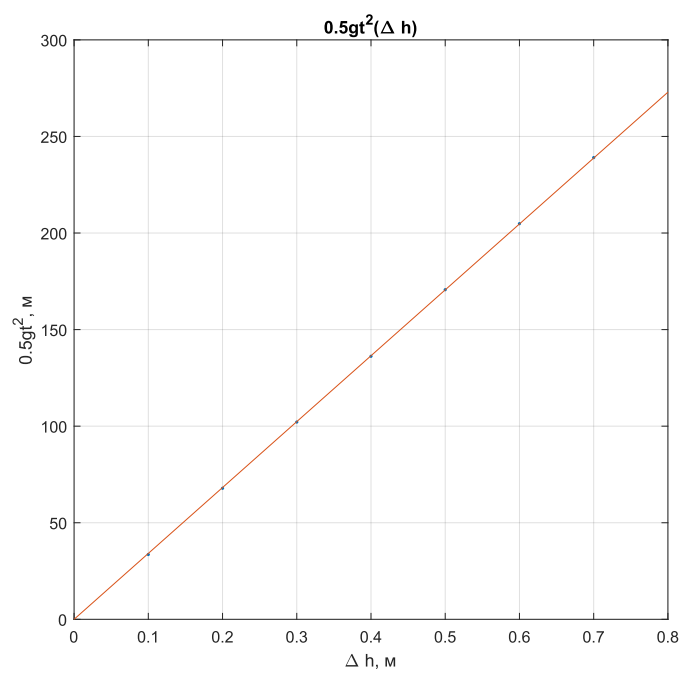


Рис. 3: Зависимость $\frac{gt^2}{2}(\Delta h)$

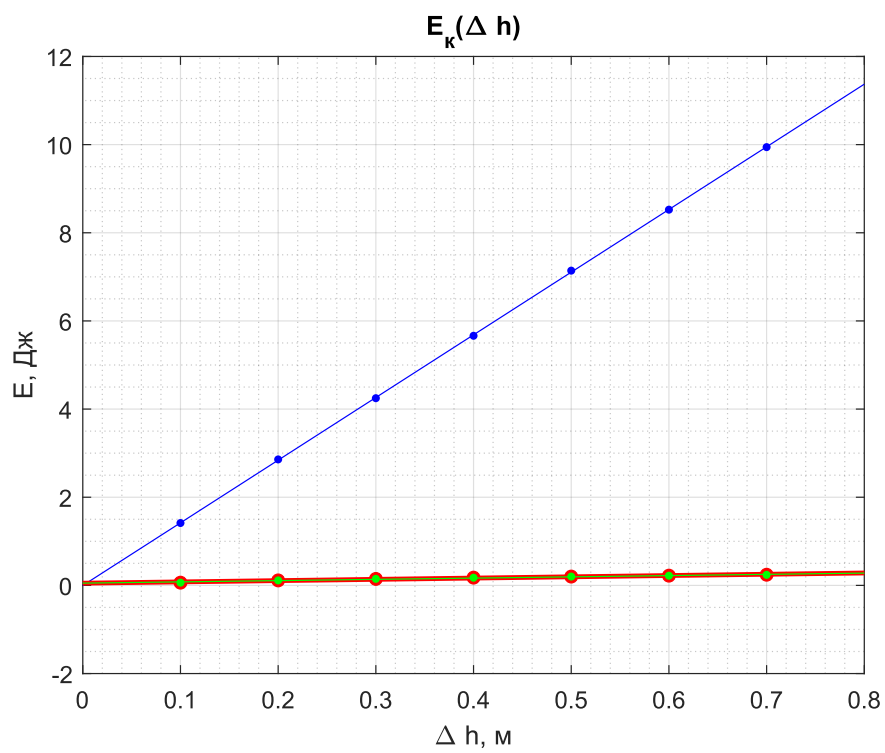


Рис. 4: Зависимость $E_{кин}$ от h для трёх первых моментов времени, когда маятник проходит мимо фотодатчика
 1) Синий - энергия первого момента 2) Красный - энергия второго момента
 3) Зелёный энергия второго момента

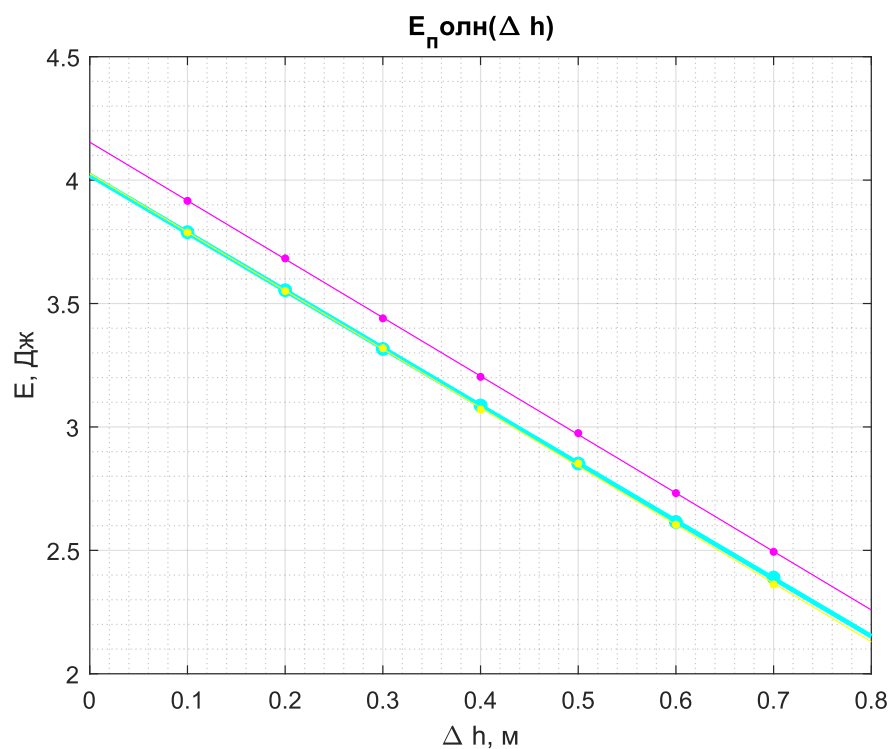


Рис. 5: Зависимость $E_{\text{полн}}$ от h для трёх первых моментов времени, когда маятник проходит мимо фотодатчика

1) Пурпурный - энергия первого момента 2) Светло голубой - энергия второго момента 3) Жёлтый энергия второго момента

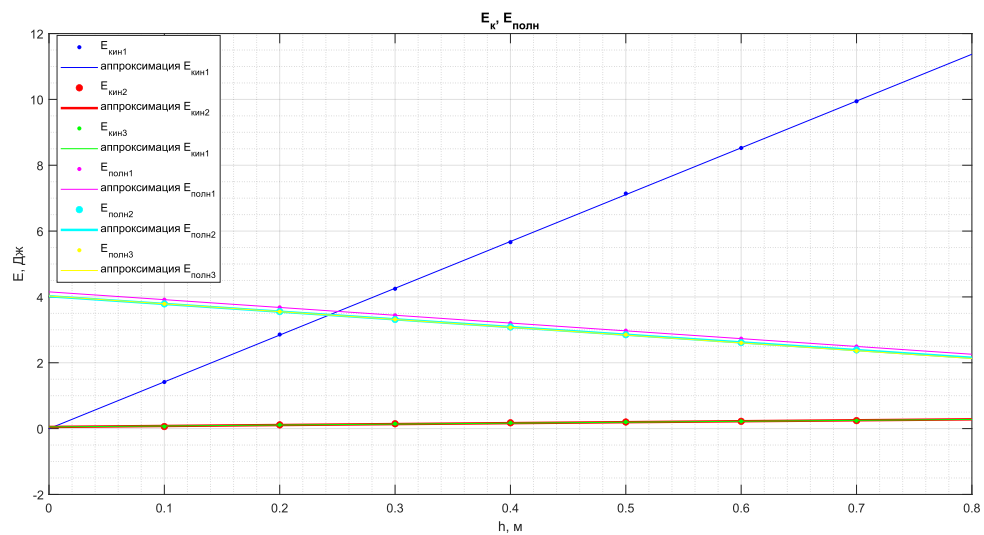


Рис. 6: Зависимость $E_{\text{кин}}$ и $E_{\text{полн}}$ от h . Общий график