Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Расчётно-графическая работа
По дисциплине:
«Базовая математика»

Работу выполнили:
Студенты группы Р3112
Сенина Мария Михайловна
Разживин Даниил Андреевич
Залевский Дмитрий Евгеньевич
Седымов Алексей Александрович
Преподаватель:
Беспалов Владимир Владимирович

Санкт-Петербург
2020

Задание 1. Пределы

Дана последовательность a_n и функция $f(x)$. Исследуйте поведение предложенных величин:

1)	Вычислите предел последовательности при $n \to \infty$, исследуйте её на монотонность и ограниченность.	Вычислите предел функции при $x \to \infty$, исследуйте её на монотонность и ограниченность.
2)	Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.	Постройте график функции в зависимости от x.
3)	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость), ограниченность и монотонность последовательности:	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) ограниченность и монотонность функции на бесконечности:
а)	вспомните определение сходимости (расходимости), ограниченность и монотонность последовательности;	вспомните определение сходимости (расходимости), ограниченность и монотонность функции в на бесконечности;
б)	выберите три различных положительных числа ε_1, ε_2 и ε_3;	
в)	для каждого такого числа изобразите на графике ε-окрестность («ε-трубу»)	
г)	и найдите на графике номер N, начиная с которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность или установите, что такого номера нет.	и найдите на графике δ-окрестность, в которой все значения функции попадают в ε-окрестность или установите, что такой окрестности нет.

Наши последовательность и функция:

$$a_n = \frac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5 \cdot 8^n + (-7)^n} \quad f(x) = \left(\frac{1 - x^2}{2 - 7x^2}\right)^{x-13}$$

Решение:

Предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5 * 8^n + (-7)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n * (64 + \frac{(-7)^{n-1}}{8^n})}{8^n * (5 + \frac{(-7)^n}{8^n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8^n * \left(64 + \frac{(-7)^{n-1}}{8^n}\right)}{8^n * \left(5 + \frac{(-7)^n}{8^n}\right)} = \frac{64}{5}$$

Последовательность немонотонна, ограничена M = 16

Построим график последовательности. Возьмём ε_1 = 2, ε_2 = 1 и ε_3 = 0.5 и изобразим на графике e-окрестности. Найдём номера элементов (N), начиная с которых все члены последовательности попадают в e-окрестность. Для ε_1 N = 4, для ε_2 N = 8, для ε_3 N = 13.

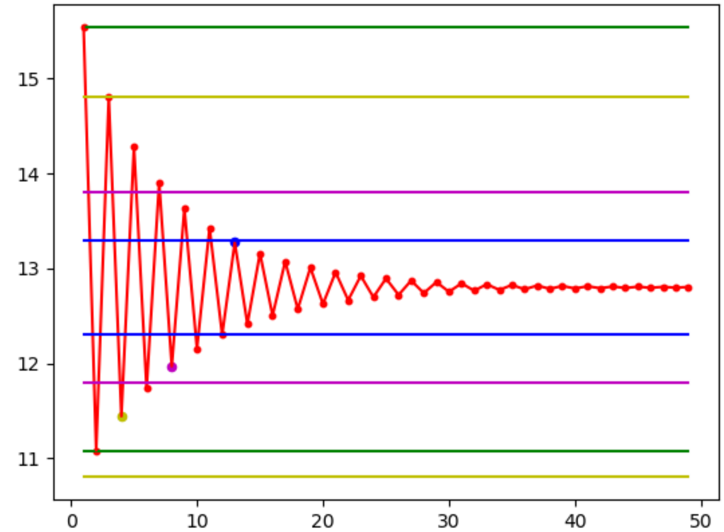


Рисунок 1 График последовательности для первых 50 членов

Предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{2}{x^2}-7}\right)^{x-13} = 0$$

Вычислим график функции. Функция немонотонна, ограничена асимптотой y=0, изображённой на графике.

Построим график функции. Возьмём ε_1 = 0.5, ε_2 = 1 и ε_2 = 2 и изобразим на графике e-окрестности. Найдём дельта окрестности, в которых все значения функции попадают в e-окрестность. Для ε_1 δ_1 = 13.36, для ε_2 δ_2 =13.0, для ε_3 δ_3 = 12.64

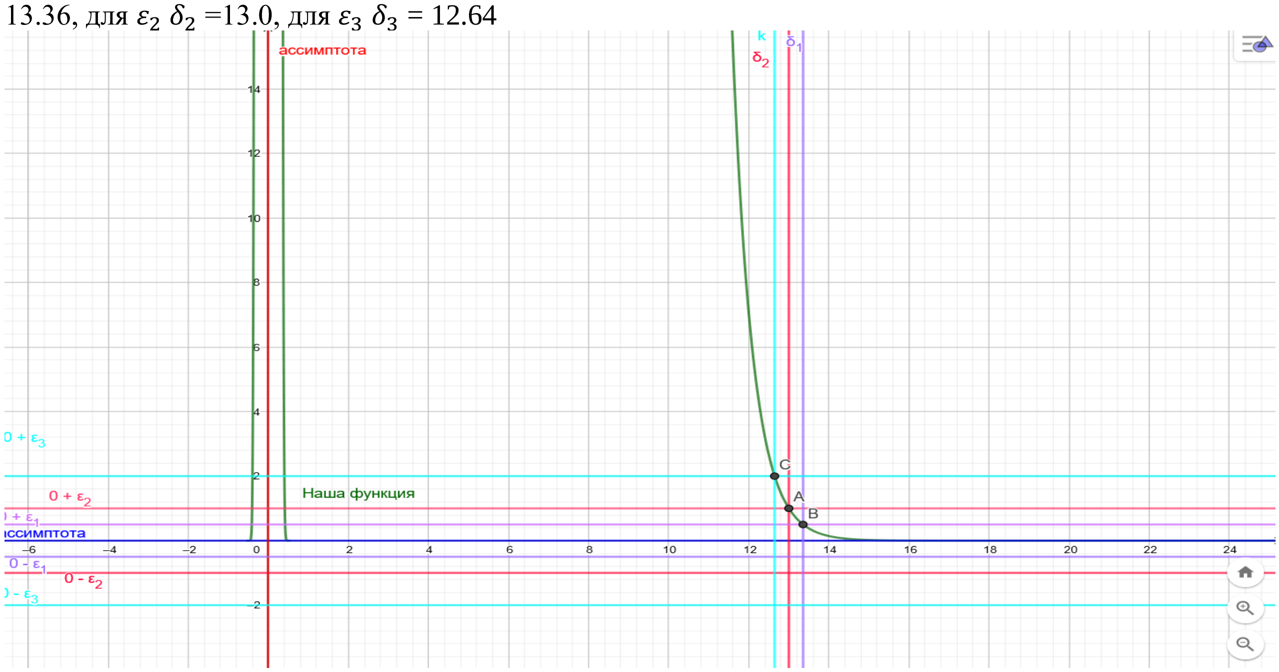


Рисунок 2 График функции

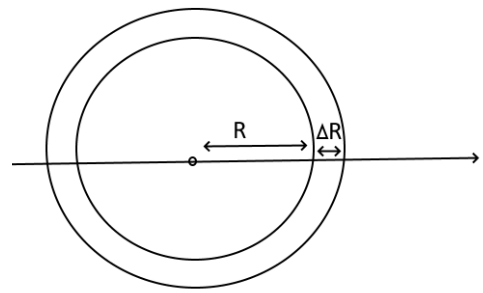
Задание 2. Дифференциал

Дана задача. Проведите исследование:

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2) Решите задачу аналитически.
3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
4) Запишите ответ.

Наша задача:
Вычислите приближённо площадь кругового кольца при изменении радиуса R на величину ΔR.

Решение:



Площадь круга радиуса R ровна $S = \pi R^2$.
Значит $S_{R+\Delta R} = \pi(R + \Delta R)^2$. Значит разность этих площадей ровна площади кольца $\Delta S = S_{R+\Delta R} - S = \pi(R^2 + 2R\Delta R + \Delta R^2 - R^2) = \pi(2R\Delta R + \Delta R^2)$.

$$\boldsymbol{\Delta S = \pi(2R\Delta R + \Delta R^2)}$$

Если считать ΔR пренебрежимо малым, то уравнение примет такой вид: $\Delta S = 2\pi R\Delta R$.
Такой же результат мы получим если считать, что кольцо, образованное разностью радиусов можно «развернуть в полоску», т.е. считать его площадь площади прямоугольника. У такого прямоугольника длинна будет равной длине окружности $l = 2\pi R$, а ширина ΔR. Т.е. итоговую формулу мы получим такую же $\Delta S = 2\pi R\Delta R$.

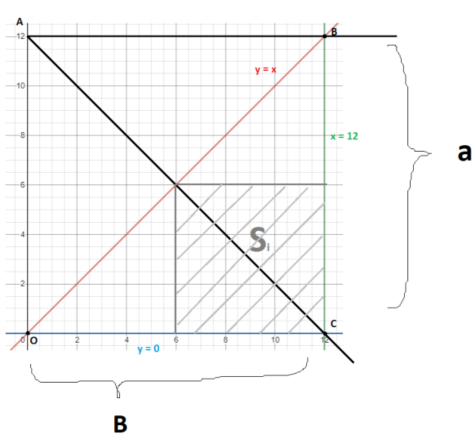
Задание 3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Дана задача. Проведите исследование:

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2) Решите задачу аналитически.
3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
4) Запишите ответ.

2.	Из куска металла, ограниченного линиями $y = x$, $x = 12$, $y = 0$ требуется выпилить деталь прямоугольной формы с наибольшей площадью.

Решение:



1. На графике видно, что ΔOBC -прямоугольный и равнобедренный является куском металла.

Обозначим за $S_и$ - площадь искомой детали.

2. Запишем систему уравнений, соответствующую условию.

$\begin{cases} S_и = a * b \\ a + b \leq 12 \end{cases}$ Т.к. $S_и$ должна быть максимальной, то система принимает вид: $\begin{cases} S_и = a * b \\ a + b = 12 \end{cases}$

Найдём зависимость величины площади от значения одной из сторон.

$\begin{cases} S_и = a * b \\ a = 12 - b \end{cases} \Rightarrow S_и = (12 - b)b \Rightarrow S_и = -b^2 + 12b$, график зависимости – парабола с ветвями вниз.

Чтобы найти максимальное значение функции найдём её экстремум.

$$\begin{cases} S_и = -2b + 12 \\ -2b + 12 = 0 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow S_{и_{макс}} = -(6)^2 + 12 * 6 = 36$$

Искомое значение - $S_{и_{макс}} = 36$

Задание 4. Исследование функции

Даны функции $f(x)$ и $g(x)$. Проведите поочерёдно их полные исследования:

1) Найдите область определения функции.
2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.
3) Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.
4) Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.
5) Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
6) Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
7) Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.
8) Постройте график. Отметьте на нём все результаты исследования.

Наша задача:

$f(x) = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$, $g(x) = 2x - sin(\frac{x}{2})$

Решение

Область определения

[-∞;0.5]∪[0.5; +∞]

E(f): [-∞; +∞], то есть R

Область значений

$f(-x) = -\frac{4x^3}{(2x-1)^2}$

Функция общего вида, непериодическая

Нулевые значения

$f(x) = 0$

$0 = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$ x=0 $f(0) = 0$

При x $[-\infty; 0)$ f(x)<0

При x $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $f(x) > 0$

Производная

$$f' = \frac{{4x^3}' * (1-2x)^2 - {(1-2x)^2}' * 4x^3}{(1-2x)^4} = \frac{12x^2(4x^2-4x+1) - 4x^3(8x-4)}{(1-2x)^4} = \frac{16x^4 - 32x^3 + 12x^2}{(1-2x)^4} = \frac{4x^2(2x-3)}{(2x-1)^3}$$

f'=0 следовательно x=0; x=1.5
при этом x≠0.5
Минимальное значение функция принимает в точке (0; 0) и оно равно 3.375 это точка минимума
Функция возрастает на: $(-\infty; 0.5) \cup [1.5;\ +\infty)$
Функция убывает на: $(0.5; 1.5)$

Исследование функции с помощью производной

$f'' = \frac{4x^2(2x-3)' * (2x-1)^3 - 4x^2(2x-3) * (2x-1)^{3'}}{(2x-1)^6} = \frac{24x}{(2x-1)^4}$

f''=0 следовательно x=0
при этом x≠0.5
Функция выпуклая вверх на: (-∞; 0]
Функция выпуклая вниз на: $[0; 0.5) \cup (0.5;\ +\infty)$

Асимптоты

Точка разрыва функции при x=0.5

$$\lim_{x\to 0.5-0} \frac{4x^3}{(1-2x)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0.5+0} \frac{4x^3}{(1-2x)^2} = +\infty$$

Следовательно, x=0.5 – вертикальная асимптота
Найдём наклонную
Она принимает вид $y = kx + b$
Где:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{1-4x-4x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k * x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 4x^3 + 4x^2 - x}{4x^2 - 4x + 1} = 1$$

Следовательно, y=x+1 – наклонная асимптота

Пересечения

Ox: $y = 0$

$0 = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$ x=0 $f(0) = 0$

Oy: $x = 0$
$y = 0$
Следовательно, только одна точка пересечения с осями: (0; 0)

График

https://www.desmos.com/calculator/8uriqjt7db

Вторая функция $g(x) = 2x - sin(\frac{x}{2})$

Область определения

$D(g(x)) = \mathbb{R}$

Область значений

$2x \in (-\infty; +\infty);\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow$
$E(g(x)) = (-\infty; +\infty)$

Из графиков видно, что $g(x)$ – нечётная. Так же это можно показать и аналитически, $2x - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\left(2(-x) - \sin\left(\frac{(-x)}{2}\right)\right)$. Так же она периодическая, благодаря $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Нулевые значения

$g(x) = 0$

$0 = 2x - sin\frac{x}{2}$ $\quad\quad x = 0 \quad\quad\quad\quad g(x) = 0$
При x $[-\infty; 0)$ $g(x) < 0$
При x [0; +∞] $g(x) \geq 0$
Функция пересекает 0 только в точке (0; 0), так как монотонна и возрастает

Производная

$g' = 2 - \frac{cos\frac{x}{2}}{2}$
g'=0 следовательно $4 = cos\frac{x}{2}$
Нулей нет, значит функция монотонна, она возрастает на R.

Исследование функции с помощью производной

$g'' = \frac{sin\frac{x}{2}}{4}$
g''=0 следовательно $sin\frac{x}{2} = 0$
Следовательно, x=2π*k, где k принадлежит Z
Функция выпуклая вверх на: [-2π+4πk; 4πk]
Функция выпуклая вниз на: $[4\pi k; 2\pi + 4\pi k]$

Асимптоты

Точек разрыва функции нет, значит нет вертикальных асимптот
Найдём наклонную
Она принимает вид y=k*x+b
Где:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{sin\frac{x}{2}}{x}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - k * x) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{sin\frac{x}{2}}{x}\right) = 0$$

Следовательно, нет ни наклонных асимптот, ни горизонтальных

Пересечения

Ox: y=0
$0 = 2x - sin\frac{x}{2}$ x=0 g(0)=0
Oy: x=0
y=0
Следовательно, только одна точка пересечения с осями: (0; 0)

График

https://www.desmos.com/calculator/8uriqjt7db