Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

# Лабораторная работа 3: «Численное интегрирование»
## «Вычислительная математика»
вариант 21

Выполнила:
Сенина Мария Михайловна группа P3112
Преподователь:
Малышева Татьяна Алексеевна

ITMO UNIVERSITY

2022г.
г.Санкт-Петербург

# 1 Цель работы

Вычисление интегралов численными методами.

# 2 Порядок выполнения работы

## 2.1 Обязательное задание на 80 баллов

### 2.1.1 Исходные данные:

- Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
- Пределы интегрирования задаются пользователем.
- Точность вычисления задается пользователем.
- Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
- Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

### 2.1.2 Программная реализация задачи:

Реализовать в программе методы по выбору пользователя, исходя из варианта:

- Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

1. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
2. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
4. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

### 2.1.3 Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n=6.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=6 .
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

## 2.2 Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

# 3 Описание метода, расчетные формулы

## 3.1 Программная часть

### 3.1.1 Метод Пямоугольников

Идея этого метода в том, чтобы считать интеграл через вычисление площади под интегральной кривой. Её мы разбиваем на прямоугольники ширины $h$ и высоты равной либо $f(x_i)$, где $x_i$ пренадлежит отрезку (основанию) нашего прямоугольника.

В данной лабораторной работе я для сравнения беру значения $x_i$ в начале, середине и конце каждого отрезочка, на котором мы строим прямоугольник.

Площади всех прямоугольников мы суммируем и получаем приближенное значение интеграла, чем больше будет отрезков (а соответственно и прямоугольников), тем точнее будет результат.

Рабочая формула метода: $\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$

### 3.1.2 Метод Трапеций

Метод трапеции работает аналогичным образом – мы приближаем значение интеграла через площадь под интегралом, но на этот раз трапециями с основаниями параллельными оси y. Получаются прямоугольные трапеции с боковой стороной соединяющией точки $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$ – значения функции в начале и конце отрезка.

Рабочая формула метода: $\int_a^b f(x)\,dx = h(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2})$

### 3.1.3 Метод Симпсона

Метод Симпсона приближает подинтегральную площадь парабалами, проведёнными через три соседние точки – на которые мы разбиваем наш интервал от  до $b$. Такую парабалу можно построить пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, проходящий через точки $(x_{i-1}, y_{i-1})$, $(x_i y_i$, $(x_{i+1}, y_{i+1})$. Получается что это самый точный из трёх приведённых методов.

Рабочая формула метода: $\int_a^b f(x)\,dx = h/3[(y_0 + 4*(y_1 + y_3 + +y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + +y_{n-2}) + y_n)]$

## 3.2 Вычислительная часть задачи

По варианту мне нужно вычислить методом Ньютона–Котеса интеграл: $\int_0^2 2x^3 - 5x^2 - 3x + 21\,dx$.

### 3.2.1 Точное решение этого интеграла:

$\int_0^2 2x^3 - 5x^2 - 3x + 21\,dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 21x|_0^2 = \frac{2}{4}(2)^4 - \frac{5}{3}2)^3 - \frac{3}{2}2^2 + 21*2 = \frac{92}{3}$

### 3.2.2 Методом Ньютона-Котекса:

При округлении значений функции до тысячных:

$$\int_0^2 2x^3 - 5x^2 - 3x + 21\,dx = c_6^0 f(0) + c_6^1 f(0.33) + c_6^2 f(0.66) + c_6^3 f(1) + c_6^4 f(1.33) + c_6^5 f(2) =$$

$$= \frac{41(2-0)}{840}f(0) + \frac{9(2-0)}{35}f(0.33) + \frac{9(2-0)}{280}f(0.66) + \frac{34(2-0)}{105}f(1) + \frac{9(2-0)}{280}f(1.33) + \frac{9(2-0)}{35}f(1.66)+$$

$$+\frac{41(2-0)}{840}f(2) = \frac{412}{840}0.21 + \frac{92}{35}19.52 + \frac{92}{280}17.375 + \frac{342}{105}15 + \frac{92}{280}12.854 + \frac{92}{35}11.372 + \frac{412}{840}11 = 28.639$$

Значит погрешность: $\Delta S = |\frac{92}{3} - 28.639| = 2.027$

### 3.2.3 Методом Прямоугольников

Для точности $= 0.01$

- для точек с начала интервала: 30.643

  Погрешность: $\Delta S = |\frac{92}{3} - 30.643| = 0.0236$, Относительная погрешность: $\delta S = \frac{\Delta S}{S} = 0.0008$

- для точек с середины интервала: 30.664

  Погрешность: $\Delta S = |\frac{92}{3} - 30.664| = 0.0026$, Относительная погрешность: $\delta S = \frac{\Delta S}{S} = 0.00008$

- для точек с конца интервала: 30.651
  Погрешность: $\Delta S = |\frac{92}{3} - 30.651| = 0.0156$, Относительная погрешность: $\delta S = \frac{\Delta S}{S} = 0.0005$

#### 3.2.4 Методом Трапеции:

Для точности = 0.01 Значение: 30.671
Погрешность: $\Delta S = |\frac{92}{3} - 30.671| = 0.0043$, Относительная погрешность: $\delta S = \frac{\Delta S}{S} = 0.00014$

#### 3.2.5 Методом Симпсона:

Для точности = 0.01 Значение: 30.666
Погрешность: $\Delta S = |\frac{92}{3} - 30.666| = 0.0006$, Относительная погрешность: $\delta S = \frac{\Delta S}{S} = 0.00002$

## 4 Листинг программы

Ссылка репозиторий с кодом всей программы

### 4.1 Абстрактрый способ вычисления интеграла с погрешностью по критерию Рунге

```
def count_abstract_integral_rune_check(result_formula, a, b, e):
    num_of_intervals = 4
    h = interval_width(a, b, num_of_intervals)

    result = result_formula(h)
    prev_result = float('inf')
    while(abs(result - prev_result) > e):
        num_of_intervals *= 2
        h = interval_width(a, b, num_of_intervals)
        prev_result = result
        result = result_formula(h)
    return result, num_of_intervals


def interval_width(a, b, num_of_intervals):
    return abs(b - a) / num_of_intervals
```

### 4.2 Метод Прямоугольников

```
def count_integral_start(f, a, b, e):
    result_start = lambda h : sum([f(i) for i in np.arange(a, b - h, h)]) * h
    return count_abstract_integral_rune_check(result_start, a, b, e * 3)

def count_integral_middle(f, a, b, e):
    result_start = lambda h : sum([f(i) for i in np.arange(a + h/2, b, h)]) * h
    return count_abstract_integral_rune_check(result_start, a, b, e * 3)

def count_integral_stop(f, a, b, e):
    result_start = lambda h : sum([f(i) for i in np.arange(a + h, b, h)]) * h
    return count_abstract_integral_rune_check(result_start, a, b, e * 3)
```

## 4.3 Метод Трапеций

```
def calculate_integral_trapeze_method(f, a, b, e):
    result_formula = lambda h : (sum([f(i) for i in np.arange(a + h, b, h)]) + (f(a) + f(b)) / 2)* h
    integral, num_of_intervals = count_abstract_integral_rune_check(result_formula, a, b, e * 3)
    print(f"trapeze integral={integral}, where num of inerval was={num_of_intervals}")
```

## 4.4 Метод Симпсона

```
def calculate_integral_simpson_method(f, a, b, e):
    result_formula = lambda h: simpson_formula(h, a, b, f)
    result, num_of_intervals =  count_abstract_integral_rune_check(result_formula, a, b, e * 15)
    print(f"simpson integral={result}, while the number of intervals was={num_of_intervals}")


def simpson_formula(h, a, b, f):
    result = f(a) + f(b)
    n = int((b — a) / h)
    x = a + h
    for i in range(n — 1):
        if i % 2 == 0:
            result += 4 * f(x)
        else:
            result += 2 * f(x)
        x += h
    result *= h / 3
    return result
```

# 5 Примеры и результаты работы программы

## 5.1 Пример

Ввод:

```
Choose one of five equations:
1————————— sin(x) (defalut)
2——————————x^3 +  7*x^2 — 3*x — 2
3————————— x^3 — 2
3
Enter the interval start float value
—1
Enter the interval stop float value (notice, it has to be greater then start)
1
Enter accuracy:
0.01
Choose method to calculate root:
1————————— trapeze method
2————————— rectangles method
3————————— simpson method
1
```

Вывод:

```
trapeze integral=—4.0, where num of inerval was=8
```

# 6 Выводы

В этой лабораторной работе я научилась численно находить значение собственного интеграла методами Прямоугольников, Трапеции и Симпсона.