Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Лабораторная работа 2: «Численное решение нелинейных уравнений и систем»

«Вычислительная математика»

вариант 21

Выполнила:
Сенина Мария Михайловна группа P3112
Преподователь:
Малышева Татьяна Алексеевна

ITMO UNIVERSITY

2022г.
г.Санкт-Петербург

1 Цель работы

Поиск корней нелинеых уравнений и систем нелинейных уравнений.

1.1 Порядок выполнения работы

1. № варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.
2. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (см. табл. 5)
3. Определить интервалы изоляции корней.
4. **Вычислительная реализация задачи (в отчет):** Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл.5) с точностью =10-2:
   - Вычисления оформить в виде таблиц (1-4), удержать 3 знака после запятой.
   - Представить в отчете заполненные таблицы (1-4). В таблице 6 указаны методы для каждого из 3-х корней многочлена.
   - Для метода половинного деления или метода хорд заполнить таблицу 1.
   - Для метода Ньютона или метода секущих заполнить таблицу 2.
   - Для метода секущих заполнить таблицу 3.
   - Для метода простой итерации заполнить таблицу 4.
5. **Программная реализация задачи:** Для нелинейных уравнений:
   - Все численные методы (см. табл. 6) должны быть реализованы в виде отдельных подпрограмм или классов.
   - Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3-5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа.
   - Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала/начальное приближение к корню и погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя.
   - Выполнить верификацию исходных данных. Для метода половинного деления (метода хорд) анализировать наличие корня на введенном интервале. Для метода Ньютона (метода секущих) – выбор начального приближения (a или b). Для метода простой итерации – достаточное условие сходимости метода. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные.
   - Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя.
   - Организовать вывод графика функции, график должен полностью отображать весь исследуемый интервал (с запасом).

   Для систем нелинейных уравнений:

   - Рассмотреть систему двух уравнений.
   - Организовать вывод графика функций.
   - Для метода простой итерации проверить достаточное условие сходимости.
   - Вывод вектора неизвестных: x_1, x_2
   - Вывод количества итераций, за которое было найдено решение.
   - Вывод вектора погрешностей: $|x_i^k - x_i^{k-1}|$

Оформить отчет, который должен содержать:

- Титульный лист.
- Цель лабораторной работы.
- Порядок выполнения работы.
- Рабочие формулы используемых методов.

- Заполненные таблицы (в зависимости от варианта: табл. 1 – табл. 4).
- Листинг программы.
- Результаты выполнения программы.
- Выводы

2 Описание метода, расчетные формулы

2.1 Программная часть

Метод Ньютона

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^* = xn$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

Перед началом поиска корней надо проверить, что метод вообще можно применять, т.е. проверить достаточное условие сходимости: - функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$; - $f(a)f(b) < 0$ (на концах отрезка $[a; b]$ функция имеет разные знаки); - производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a; b]$; - производная $f'(x)0$

В качестве начального приближения в данном методе разумно выбрать $x_0[a; b]$ так, чтобы выполнялось условие $f(x_0)f''(x_0) > 0$ т.е. по сути нужно взять тот конец интервала $[a; b]$, для которого первая и вторая производная одного знака.

Сам метод:
$x_1 = x_0\frac{f(x_0)}{tan(\alpha)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0)}$
$x_1 = x_0\frac{f(x_0)}{f(x_0)}$
Рабочая формула метода: $x_i = x_{i1}\frac{f(x_{i1})}{f'(x_{i1})}$
Критерий окончания итерационного процесса: $|x_n x_{n1}|$ или $|\frac{f(x_n)}{f(x_n)}|$ или $|f(x_n)|$
Приближенное значение корня: $x^{=x_n}$

Метод секущих *Идея мемтода* - упростим метод Ньютона заменив сложно вычисляемые производные разностным приближением:
$f(xi)\frac{f(x_i)f(x_{i1})}{x_i x_{i1}}$
Рабочая формула метода:
$x_{i+1} = x_i\frac{x_i x_{i1}}{f(x_i)f(x_{i1})}f(x_i)$
$i = 1, 2...$

Метод секущих является двухшаговым, т.е. новое приближение x_{i+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_i и x_{i1}. Выбор x_0 определяется как и в методе Ньютона, x_1 - выбирается рядом с начальным самостоятельно.

Критерий окончания итерационного процесса:
$|x_n\breve{\ }x_{n-1}|$ или $f(x_n)$
Приближенное значение корня: $x^{=x_n}$

Простой итерации Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = (x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0[a, b]$, найдем очередные приближения: $x_1 = (x_0)ßx_2 = (x_1)...$
Рабочая формула метода: $x_{i+1} = (x_i)$
Достаточное условие сходимости метода:
$(x)q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)
Критерий окончания итерационного процесса:
$|x_n x_{n1}|$ (при $0 < q0, 5$)
$|x_n x_{n1}| < \frac{1q}{q}$ (при $0, 5 < q < 1$)

3 Таблицы

3.1 Вычислительная часть:

Таблица итерационного процесса поиска левого корня уравнения $1,62x^3 - 8,15x^2 + 4,39x + 4,29 = 0$ методом хорд. Результат: $x = 4.246$

num	a	b	x	f(a)	f(b)	|b-a|
0	3.058	5	3.694	-12.173	24.99	1.942
1	3.694	5	4.041	-9.041	24.99	1.306
2	4.041	5	4.178	-4.151	24.99	0.959
3	4.178	5	4.224	-1.489	24.99	0.822
4	4.224	5	4.239	-0.487	24.99	0.776
5	4.239	5	4.244	-0.154	24.99	0.761
6	4.244	5	4.245	-0.048	24.99	0.756
7	4.245	5	4.245	-0.015	24.99	0.755
8	4.245	5	4.246	-0.005	24.99	0.755
9	4.246	5	4.246	-0.001	24.99	0.754

Таблица итерационного процесса поиска левого корня уравнения $1,62x^3 - 8,15x^2 + 4,39x + 4,29 = 0$ методом половинного деления. Результат: $x = -0.49$

num	a	b	x	f(a)	f(b)	|b-a|
0	-2	0.295	-0.852	-50.05	4.917	2.295
1	-0.852	0.295	-0.279	-6.376	4.917	1.148
2	-0.852	-0.279	-0.565	-6.376	2.4	0.574
3	-0.565	-0.279	-0.422	-1.091	2.4	0.287
4	-0.565	-0.422	-0.494	-1.091	0.865	0.143
5	-0.494	-0.422	-0.458	-0.059	0.865	0.072
6	-0.494	-0.458	-0.476	-0.059	0.416	0.036
7	-0.494	-0.476	-0.485	-0.059	0.182	0.018
8	-0.494	-0.485	-0.489	-0.059	0.062	0.009
9	-0.494	-0.489	-0.491	-0.059	0.002	0.004
10	-0.491	-0.489	-0.49	-0.028	0.002	0.002
11	-0.49	-0.489	-0.49	-0.013	0.002	0.001

Таблица итерационного процесса поиска левого корня уравнения $1,62x^3 - 8,15x^2 + 4,39x + 4,29 = 0$ методом простой итерации. Результат: $x = 1.274$

num	x_{i-1}	$f(x)$	x_i	$\phi(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
0	4	-12.173	3.057	3.057	0.943
1	3.057	3.933	0.698	0.698	2.358
2	0.698	-1.634	1.46	1.46	0.762
3	1.46	1.073	1.144	1.144	0.316
4	1.144	-0.666	1.352	1.352	0.208
5	1.352	0.435	1.223	1.223	0.129
6	1.223	-0.277	1.307	1.307	0.084
7	1.307	0.18	1.253	1.253	0.054
8	1.253	-0.115	1.288	1.288	0.035
9	1.288	0.074	1.266	1.266	0.022
10	1.266	-0.048	1.28	1.28	0.014
11	1.28	0.031	1.271	1.271	0.009
12	1.271	-0.02	1.277	1.277	0.006
13	1.277	0.013	1.273	1.273	0.004
14	1.273	-0.008	1.276	1.276	0.002
15	1.276	0.005	1.274	1.274	0.002
16	1.274	-0.003	1.275	1.275	0.001
17	1.275	0.002	1.274	1.274	0.001

4 Листинг программы

Ссылка репозиторий с кодом всей программы

Метод секущих

```
def find_root_scant(f, start, stop, epsilon):
    if not check_interval(f, start, stop): return None
    x0 = choose_x0(f, start, stop)
    x1 = x0  - f(x0) / derivative(f, x0, n=1)

    xi = x1
    xi_prev = x0
    while(abs(xi - xi_prev) > epsilon):
        tmp = xi
        xi = xi - f(xi) * (xi - xi_prev) / (f(xi) - f(xi_prev))
        xi_prev = tmp
    return xi
```

Метод Ньютона

```
def find_root_newton(equation, start, stop, epsilon):
    if not check_interval(equation, start, stop): return None
    x0 = choose_x0(equation, start, stop)
    x1 = x0  - equation(x0) / derivative(equation, x0, n=1)

    xi = x1
    xi_prev = x0
    while(abs(xi - xi_prev) > epsilon):
        xi_prev = xi
        xi = xi - equation(xi) / derivative(equation, xi, n=1)
    return xi
```

Проверка, что метод Ньютона и метод секщих применим на интервале:

```
def check_interval(equation, start, stop):
    if  not equation(start)*equation(stop) < 0: return False
    start_derivative_fst = derivative(equation, start, n=1)
    start_derivative_snd = derivative(equation, start, n=2)

    # points = [round(x * 0.01, 1) for x in range(start, stop)]
    for i in np.arange(start, stop, 0.01):
        if not ((start_derivative_fst*derivative(equation, i, n=1) > 0)
        and (start_derivative_snd*derivative(equation, i, n=2) >= 0)):
            return False
    return True
```

Метод простых итераций

```
def find_root_simple_iteration(f, start, stop, epsilon):
    l = find_lambda(f, start, stop)
    q = find_q(f, start, stop)

    phi = lambda x: x + f(x)*l

    if(q > 0.5): check = lambda epsilon, xi, xi_prev, q: abs(xi - xi_prev) > epsilon
    else: check = lambda epsilon, xi, xi_prev, q: abs(xi - xi_prev) >= (1-q/q)*epsilon

    x0 = start
    x1 = phi(x0)

    xi = x1
    xi_prev = x0
```

```
    while(check(epsilon, xi, xi_prev, q)):
        tmp = xi
        xi = phi(xi_prev)
        xi_prev = tmp

    return xi

    def find_lambda(f, start, stop):
    max_derivative = abs(derivative(f, start, n=1))
    for i in np.arange(start, stop, 0.01):
        if max_derivative < abs(derivative(f, i, n=1)):
            max_derivative = abs(derivative(f, i, n=1))
    return -1/max_derivative


def find_q(f, start, stop):
   max_derivative = derivative(f, start, n=1)
   for i in np.arange(start, stop, 0.01):
      if max_derivative < abs(derivative(f, i, n=1)):
         max_derivative = abs(derivative(f, i, n=1))
   return max_derivative
```

5 Примеры и результаты работы программы

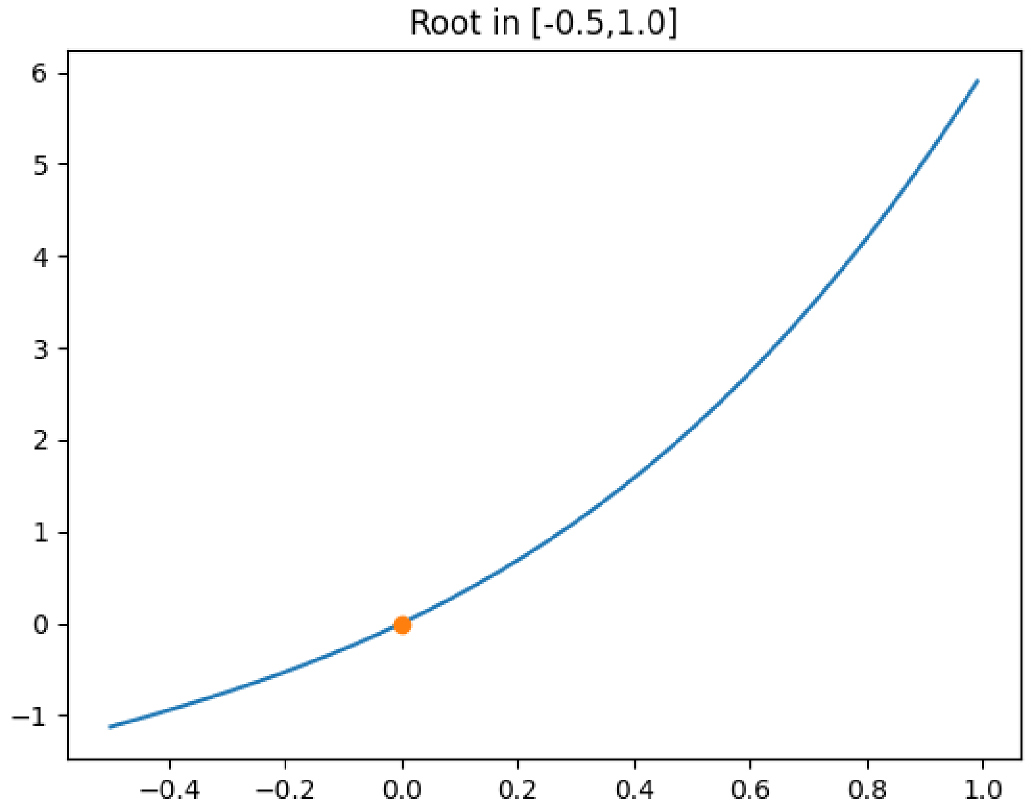
5.1 Пример 1

Ввод:

```
Choose one of five equations:
1 ---------- x^3 + 2*x^2 + 3*x (defalut)
2 ---------- -x^3 +  7*x^2 - 3*x - 2
3 ---------- x^3 - 2
4 ---------- x^2 - 1
5 ---------- -x^2 - 3*x + 3
1
Enter the interval start float value -0.5
Enter the interval stop float value (notice, it has to be greater then start)
1
Enter accuracy:
0.001
Choose method to calculate root:
1 ---------- Newton method
2 ---------- secant method
3 ---------- simple iteration method
1
```

Вывод:

```
root=0.0001991099568844979 in [-0.5, 1.0]
```



6 Выводы

В этой лабораторной работе я научилась решать нелинейные уравнения методами Секущих, Ньютона и простых итераций на языке Python.