四川轻化工大学试卷（2021 至 2022 学年第一学期）

课程名称： 高等数学 A1(A 卷)

命题教师： 张海燕

适用班级： 21 级理工科本科

考试(考查)： 考试　　　　　　　2022 年　　月　　日　　共　6　页

题号	一	二	三	四	总分	评阅(统分)教师
得分						

注意事项：

1、 满分 100 分。要求卷面整洁、字迹工整、无错别字。

2、 考生必须将姓名、班级、学号完整、准确、清楚地填写在试卷规定的地方，否则视为废卷。

3、 考生必须在签到单上签到，若出现遗漏，后果自负。

4、 如有答题纸，答案请全部写在答题纸上，否则不给分；考完请将试卷和答题卷分别一同交回，否则不给分。

试　　题

得分	评阅教师

一、单选题（请将正确的答案填在对应括号内，每题 3 分，共 18 分）

1. 下列极限计算正确的是（　　　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{3x}=1$　　（B）$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x+3)}{x+3}=1$

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x^2}=1$　　（D）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=1$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{3x}-1}{x} & ,x<0\\ 1 & ,x=0\\ \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x} & ,x>0\end{cases}$，则 $x=0$ 是函数$f(x)$的（　　　　）.

（A）可去间断点　（B）跳跃间断点　（C）无穷间断点　（D）连续点

3. 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小（　　　　）.

（A）x^2　（B）$1-cosx$　（C）$\sin x-tanx$　（D）$\ln(1+2x)$

学院______ 专业______ 级______ 班______ 学号______ 姓名______

密　封　线　内　不　要　答　题

4. 若 $f(x)$的导数为$cosx$,则$f(x)$的一个原函数为（　　　）.

（A） $2+sinx$　　（B）$2-sinx$　　（C）$2+cosx$　　（D）$2-cosx$

5. 下列广义积分中收敛的是（　　　）.

(A) $\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x(lnx)^2}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$　　(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$

6. 曲线$y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$的渐近线为（　　　）.

（A）没有渐近线；　　（B）仅有水平渐近线；

（C）仅有铅直渐近线；　　（D）既有水平渐近线又有铅直渐近线.

得分	评阅教师

二、填空题（请将正确的结果填在横线上. 每题 3 分，共 24 分）

1．$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x=$__________.

2．若$f'(1)=3$，则$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h+h^2)-f(1)}{h}=$____________.

3．曲线$\begin{cases}x=1-t^2\\ y=\mathrm{t}+t^3\end{cases}$在$t=1$对应点的切线方程为________________.

4．若函数$y=f(e^{2x})$可导，则$dy=$ ________________.

5．曲线$y=tan\,x$在点$x=\frac{\pi}{4}$处的曲率$K=$ ____________.

6．$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=$____________.

7．用定积分表示曲线$x=f(y)$ 上相应于$1\le y\le 2$的一段弧的弧长$s=$__________.

8．已知$\int_0^x[2f(t)-1]dt=f(x)-1$, 则 $f'(0)=$____________.

学院________ 专业________ 级________ 班________ 学号________ 姓名________

密 封 线

密 封 线 内 不 要 答 题

得分	评阅教师

三、 解答计算题（每题 6 分，共 36 分）

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{x-sinx}$.

2. 设方程$x-y+\frac{1}{2}sin\,y=0$确定 y 为 x 的函数, 求 $y'(0)$， $y''(0)$.

3. 计算$\int\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$.

4. 已知$f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}\,dt$,求$\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5. 已知$f(x)=3x^2-2x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$,求 $f(x)$.

6. 求微分方程$4y''+4y'+y=0$ 在条件$y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$ 下的特解.

得分	评阅教师

四、　综合应用题（三个小题，共 22 分）

1. 求$y = x^4 - 2x^3 + 1$的单调区间、极值与凹凸区间及拐点.

（本题 8 分, 要求列表解答）

2. 曲线$y = x^2$、$4y = x^2$及直线$y = 1$所围图形为 D，

(1)求 D 的面积；

(2)求 D 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所产生的旋转体体积.

（本题 8 分，要求作图）

学院　　专业　　级　　班　　学号　　姓名

密　封　线　内　不　要　答　题

密　封　线

3. 设$f(x) \in C[0,1]$, 在$(0,1)$上可导，且$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$ ，

证明：存在一点$\xi \in (0,1)$使$f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{-\xi}$　　　　　　　　　　（本题 6 分）

2021级理工科本科高等数学A1（A卷）

2021至2022学年第一学期期末参考答案及评分标准

一、 单选题（请将正确的答案填在对应括号内，每题3分，共18分）

1. D　　2.B　　3. C　　4.D　　5.A　　6.D

二、填空题（请将正确的结果填在横线上.每题3分，共24分）

1. e^{-2}　　2. 6　　3. $y=-2x+2$　　4. $2e^{2x}f'(e^{2x})dx$

5. $\frac{4\sqrt{5}}{25}$　　6. 2　　7. $\int_1^2\sqrt{1+f'^2(y)}dy$　　8. 1

三、解答计算题（6个小题，每题6分，共36分）

1、**解**：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3}e^{t^2}dt}{x-sinx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2e^{x^6}}{1-cosx}$　　4分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2e^{x^6}}{\frac{1}{2}x^2}=6$　　6分

2、**解**：方程两边同时对x求导得：

$1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$　　①　　3分

将$x=0$代入原方程得$y=0$,再代入①得：$y'(0)=2$

方程①两边同时对x求导得：

$-y''-\frac{1}{2}sin\,y\cdot y'\cdot y'+\frac{1}{2}cos\,y\cdot y''=0$　　②

将$x=0$, $y=0, y'(0)=2$ 代入②得：　$y''(0)=0$　　6分

3、**解**：$\int\frac{cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int cos\sqrt{t}\,d(\sqrt{t})$　　4分

$=2\,sin\sqrt{t}+C$　　6分

4、**解**：由已知可知：$f'(x)=\left(\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right)'=2xe^{-x^4}$，$f(1)=0$　　3分

$\therefore\int_0^1xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1f(x)dx^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1x^2f'(x)d\,x$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1x^22xe^{-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1e^{-x^4}d\,(-x^4)=\frac{1}{4}(e^{-1}-1).$　　6分

5、**解**：设$\int_0^2 f(x)dx=a$，$\int_0^1 f(x)dx=b$，则$f(x)=3x^2-2ax+2b$ 2 分

把 $f(x)$ 分别代人两式得：

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(3x^2-2ax+2b)dx=8-4a+4b=a$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2-2ax+2b)dx=1-a+2b=b$$ 4 分

解得：$5a-4b=8$ ，$a-b=1\Rightarrow a=4,b=3.$

$\therefore f(x)=3x^2-8x+6.$ 6 分

6、**解**：微分方程的特征方程为：$4r^2+4r+1=0$， 即 $(2r+1)^2=0$，

其根为：$r_1=r_2=-\frac{1}{2}$， 2 分

$\therefore$微分方程的通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x)$ （C_1,C_2为任意常数）. 4 分

由 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$，得：$\begin{cases}C_1=2\\ -\frac{1}{2}C_1+C_2=0\end{cases}$， 解之得：$C_1=2, C_2=1$，

$\therefore$所求特解为： $y=e^{-\frac{1}{2}x}(2+x)$. 6 分

四、综合应用题（三个小题，1-2 小题各 8 分，3 小题 6 分，共 22 分）

1、解：1）$y=x^4-2x^3+1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

2）$y'=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$， $y''=12x^2-12x=12x(x-1)$ 3 分

令$y'=0$， $y''=0$，得$x_1=0$， $x_2=\frac{3}{2}$ ，$x_3=1$， 无y'， y''不存在的点.

3）列表讨论其单调性和极值，凹凸性和拐点：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘ ∪	1 无极值 拐点	↘ ∩	0 拐点	↘ ∪	$-\frac{11}{16}$ 极小值	↗ ∪

7 分

4）结论：

该函数的单减区间：$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$，单增区间：$[\frac{3}{2},+\infty)$ ； 极小值为：$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{16}$

该函数的凹区间：$(-\infty,0],[1,+\infty]$，凸区间：$[0,1]$ ；

拐点为：$(0,1),(1,0)$ 8 分

说明：判断单调性，凹凸性也可以分开列表.

2、**解**：作图（略） 1 分

(1) $S=2\int_0^1(2\sqrt{y}-\sqrt{y})dy=2\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy=2\times\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$ 4 分

(2)绕 x 轴旋转产生的立体体积：

$$V_x=2\left[\int_0^1\pi(x^2)^2dx+\int_1^2\pi.1^2dx-\int_0^2\pi\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx\right]$$

$$=2\pi\left[\int_0^1 x^4dx+1-\frac{1}{16}\int_0^2 x^4dx\right]=2\pi\left(\frac{1}{5}+1-\frac{2}{5}\right)=\frac{8\pi}{5}$$

绕 y 轴旋转产生的立体体积：

$V_y=\int_0^1\pi.4ydy-\int_0^1\pi ydy=3\pi\int_0^1 ydy=\frac{3\pi}{2}$ 8 分（其中计算定积分 1 分）

3、证明：设$\varphi(x)=x^2f(x)$, 2 分

$\because\ f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$可导,由积分中值定理:

$\exists c\in[0,1]$， 使$\boldsymbol{f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx=c^2f(c)}=\varphi(c)$,

$\therefore\varphi(c)=f(1)=\varphi(1)$ 4 分

$\therefore\varphi(x)$在$[c,1]$上满足 Rolle 定理:

$\exists\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使$\varphi'(\xi)=0$

即： $2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0$

$\because\ \xi\neq0\quad\therefore f'(\xi)=-\frac{2f'(\xi)}{\xi}$ 6 分

注：评分标准，中间段得分由每页阅卷老师统一；解题思路正确，酌情给分。