

# 四川轻化工大学试卷（2022 至 2023 学年第一学期）

课程名称：高等数学 A1（A 卷）

命题教师： 张海燕

适用班级：22 级理工科本科

考试(考查)： 考试 2023 年 月 日 共 6 页

题号	一	二	三	四	总分	评阅(统分) 教师
得分						

## 注意事项：

- 1、 满分 100 分。要求卷面整洁、字迹工整、无错别字。
- 2、 考生必须将姓名、班级、学号完整、准确、清楚地填写在试卷规定的地方，否则视为废卷。
- 3、 考生必须在签到单上签到，若出现遗漏，后果自负。
- 4、 如有答题纸，答案请全部写在答题纸上，否则不给分；考完请将试卷和答题卷分别一同交回，否则不给分。

## 试 题

得分	评阅教师

一、单选题（请将正确答案的编号填在对应表格内，每小题 3 分，共 21 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7
选项							

1. 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x < 0 \\ 1 + e^x & x \geq 0 \end{cases}$ ，则  $x = 0$  是函数  $f(x)$  的（ ）。

- (A) 连续点； (B) 无穷间断点； (C) 可去间断点； (D) 跳跃间断点。

2. 下列说法**错误**的是（ ）。

- (A) 两个无穷大量的和一定是无穷大量；  
 (B) 若  $f(x)$  在  $x = a$  可微，则  $f(x)$  在该点一定连续；  
 (C) 若  $f'(a)$  存在且  $f(x)$  在  $x = a$  取得极值，则  $f'(a) = 0$ ；  
 (D) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，则  $f(x)$  在该区间上一定存在原函数。

3. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x^3)$  是比  $x^n$  高阶无穷小, 而  $x^n$  是比  $e^x - 1$  高阶无穷小, 则正整数  $n =$  ( ).

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4.  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x) = (x-b) \int_a^x \varphi(t) dt$ , 则由罗尔定理, 必有  $\xi \in (a, b)$ ,

使  $f'(\xi) =$  ( ).

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D)  $\varphi(\xi)$

5. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 图 1 是  $f''(x)$  的图形, 根据图 1, 下列说法错误的是

( ).

(A) 曲线  $f(x)$  在  $(1, 2)$  上的图形是向上凸的;

(B)  $(1, f(1))$  是曲线  $f(x)$  的拐点;

(C) 函数  $f'(x)$  在  $(1, 2)$  内单增;

(D)  $f'(0) > f(1) - f(0) > f'(1)$ .

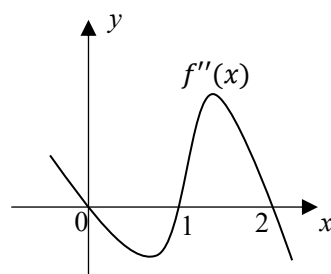


图 1

6. 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $\cos x$ , 则  $f(x)$  的导函数为 ( ).

- (A)  $-\sin x$  (B)  $-\sin x + C$  (C)  $-\cos x$  (D)  $\cos x$

7. 记  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ , 则 ( ).

- (A)  $I_1 > I_2$  ; (B)  $I_1 < I_2$  ; (C)  $I_1 = I_2$  ; (D) 不能比较大小

得分	评阅教师

二、填空题（请将正确的结果填在横线上.每空 3 分，共 24 分）

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设  $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-2022)$ ，则  $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知  $y = xe^x$ ，则  $f^{(6)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 + t^4 \end{cases}$  在  $t = 0$  对应点的曲率  $K = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 定积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x + \sin^2 x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设一质点距原点  $x$  米时，受  $F(x) = 3x^2 + 2x$  牛顿力的作用，问质点在  $F$  作用下，从  $x = 1$  移动到  $x = 2$  所做的功  $W = \underline{\hspace{2cm}}$  焦耳 .
- 微分方程  $y'' - y' - 2y = 0$  的通解为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

得分	评阅教师

三、计算题（每题 8 分，共 32 分）

- 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{2x(\cos x - 1)}.$

2. 设方程  $x - y + e^{xy} = 0$  确定  $y$  为  $x$  的函数, 求  $dy$  与  $y'(0)$ .

3. 计算不定积分  $\int \frac{1}{x(x^5+6)} dx$ .

4. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} - y \tan x = x$ , 在条件  $y|_{x=0} = 0$  下的特解.

得分	评阅教师

四、综合应用题（三个小题，共 23 分）

1. 求函数 $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - x - 4$ 的凹凸区间及拐点.（本题 8 分，要求列表解答）

2. 曲线 $y = e^x$ 与该曲线过原点的切线以及 $y$ 轴所围图形为 $D$ ，

- (1) 求 $D$ 的面积；
- (2) 求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所产生的旋转体体积.

（本题 10 分，要求作图）

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且严格单调增加, 证明:

$$(a+b) \int_a^b f(x) dx < 2 \int_a^b xf(x) dx \quad . \quad (\text{本题 } 5 \text{ 分})$$

# 2022 级理工科本科高等数学 A1 (A 卷)

## 2022 至 2023 学年第一学期期末参考答案及评分标准

### 一、单选题 (请将正确的答案填在对应括号内, 每题 3 分, 共 21 分)

1. D    2. A    3. B    4. C    5. A    6. C    7. B

### 二、填空题 (请将正确的结果填在横线上. 每题 3 分, 共 24 分)

1.  $e^{-2}$     2.  $2022!$     3. 6    4. 2    5.  $\frac{\pi}{2}$

6. 1    7. 10    8.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

### 三、解答计算题 (4 个小题, 每题 8 分, 共 32 分)

1、解: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{-x^3}$  3 分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctan x)'}{(-x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{-3x^2}$$
 7 分

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$$
 8 分

2、解: 方程两边同时对  $x$  求导得:  $1 - y' + e^{xy}(y + xy') = 0$  4 分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + ye^{xy}}{1 - xe^{xy}} \quad (1) \quad \therefore dy = \frac{1 + ye^{xy}}{1 - xe^{xy}} \cdot dx$$
 6 分

将  $x=0$  代入原方程得  $y=1$ , 再代入①得:  $y'(0) = 2$  8 分

3、解: 令  $x = \frac{1}{t}$ , 即  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , 则有  $\int \frac{1}{x(x^5+6)} dx = -\int \frac{t^4}{(6t^5+1)} dt$  4 分

$$= -\frac{1}{30} \int \frac{1}{6t^5+1} d(6t^5+1) = -\frac{1}{30} \ln|6t^5+1| + C$$
 7 分

$$= -\frac{1}{30} \ln|6+x^5| + \frac{1}{6} \ln|x| + C$$
 8 分

4、解: 方程为一阶非齐次线性微分方程:  $P(x) = -\tan x$ ,  $Q(x) = x$  2 分

由通解公式得:  $y = e^{\int \tan x dx} (\int x \cdot e^{-\int \tan x dx} dx + C)$  5 分

$$= \frac{1}{\cos x} (\int x \cos x dx + C) = \frac{1}{\cos x} (\int x d \sin x + C)$$

$$= \frac{1}{\cos x} (x \sin x - \int \sin x dx + C) = \frac{1}{\cos x} (x \sin x + \cos x + C)$$
 7 分

由  $y|_{x=0} = 0$ , 得  $C = -1$ , 故所求特解为:  $y = x \tan x + 1 - \sec x$  8 分

#### 四、综合应用题（三个小题，1 小题各 8 分，2 小题 10 分，3 小题 5 分，共 23 分）

1、解：1)  $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - x - 4$  定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ;

$$2) \quad y' = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 1, \quad y'' = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_1 = 1, x_2 = 2 \quad \text{4 分}$$

3) 列表讨论凹凸性和拐点:

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	2	$\cap$	10	$\cup$

7 分

4) 结论: 该函数的凸区间:  $[1, 2]$ , 凹区间:  $(-\infty, 1), [2, +\infty]$ ;

拐点为:  $(1, 2), (2, 10)$  . 8 分

2、解: 作图 (略) 1 分

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$ ,  $\therefore$  在任一点  $x = x_0$  处的切线方程为  $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$

而过  $(0, 0)$  的切线方程就为:  $y - e = e(x - 1)$ , 即  $y = ex$  4 分

$$(1) \quad S_D = \int_0^1 (e^x - ex) dx = e^x \Big|_0^1 - \frac{e}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \quad \text{7 分}$$

$$(2) \quad V_x = \int_0^1 \pi e^{2x} dx - \int_0^1 \pi (ex)^2 dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \pi \frac{e^2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (e^2 - 3) \quad \text{10 分}$$

3、证明: 作辅助函数  $F(x) = (a+x) \int_a^x f(t) dt - 2 \int_a^x t f(t) dt$  2 分

$$\text{则 } F'(x) = \int_a^x f(t) dt + (a+x)f(x) - 2xf(x) = \int_a^x f(t) dt + (a-x)f(x)$$

$$= \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f(x) dt = \int_a^x [f(t) - f(x)] dt$$

$f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调增加且连续,

$$t < x, \Rightarrow f(t) < f(x) \Rightarrow F'(x) = \int_a^x [f(t) - f(x)] dt < 0$$

所以  $F(x)$  是严格减少, 且  $F(a) = 0, F(b) < F(a) = 0$ .

$$\text{即 } (a+b) \int_a^b f(x) dx < 2 \int_a^b x f(x) dx \quad \text{5 分}$$

**注: 评分标准, 中间段得分由每页阅卷老师统一; 解题思路正确, 酌情给分。**