



دانشکده‌گان علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

بهبود روش واریسی مدل با استفاده از تعبیر مجرد

نگارنده: پویا پرتو

استاد راهنمای اول: دکتر مجید علی‌زاده
استاد راهنمای دوم: دکتر مجتبی مجتهدی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته علوم کامپیوتر

تاریخ دفاع

چکیده

روش واری مدل یک روش قابل اعتماد برای بررسی صحت عملکرد برنامه‌های کامپیوتری است. بیان‌های مختلف این روش از منطق موجهات بهره می‌برند که چندان برای برنامه نویسان شناخته شده نیستند. در این رساله سعی شده است که یک بیان جدید از روش واری مدل مورد شرح و بررسی قرار گیرد که در ادبیات نظریه تعبیر مجرد بیان شده است و در آن به جای منطق موجهات از عبارات منظم استفاده شده است.

پس از ارائه‌ی مفاهیم اولیه، به سه صورت متفاوت به بیانی جدید از روش واری مدل پرداخته‌ایم. صورت اول ساختار خاصی ندارد و صرفاً در ادبیات نو بیان شده است، صورت دوم ساختار عبارات منظم را به صورت‌بندی‌اش اضافه کرده است و در صورت سوم، با اضافه شدن ساختار برنامه به صورت‌بندی، روش به پیاده سازی نزدیک‌تر شده است. معادل بودن این سه صورت نیز مطالعه و بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: واری مدل، نظریه تعبیر مجرد، معناشناسی دلالتی، درستی‌یابی صوری، تحلیل ایستا، درستی‌یابی برنامه‌های کامپیوتری

تقدیم

این پایان نامه را تقدیم می‌کنم خدمت استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر امیر عباس ورشوی، به پاس تاثیر عمیقی که بر زندگی من در چند سال گذشته داشته‌اند.

سپاسگزاری

ابتدا، از خانواده‌ی عزیزم سپاسگزاری می‌کنم، بابت اینکه هر چه که توانسته‌اند را در پشتیبانی معنوی و مادی از من دریغ نکرده‌اند.

پس از آن، از دو استاد ارجمندم جناب آقایان دکتر مجید علی‌زاده و دکتر مجتبی مجتهدی بابت زحمات و حمایت‌هایشان سپاسگزاری می‌کنم. بسیار مفتخرم که در این مدت دانشجوی ایشان بوده‌ام.

در نهایت از دوستان عزیزم در داخل و بیرون از دانشگاه سپاسگزاری می‌کنم که طی این مدت در کنار من بودند. به طور ویژه، از جناب آقای علیرضا محمودیان بابت حضور ارزشمند و کمک‌هایشان سپاسگزاری می‌کنم.

پیشگفتار

با توجه به پیشرفت روز افزون علوم کامپیوتر و ورود کاربردهای آن به زندگی روزمره، پیشرفت در روش‌های ساخت و نگهداری برنامه‌ها نیازی آشکار به نظر می‌رسد. یکی از مسائل مهم در این زمینه بررسی صحت کارکرد برنامه‌های نوشته‌شده است. عدم صحت کارکرد برنامه‌های نوشته‌شده بسته به حساسیت یک برنامه می‌تواند تبعات زیان‌بار جبران ناپذیری به همراه داشته‌باشد. پرتاب ناموفق آریان ۵ [۱۷]، از مدار خارج شدن مدارگرد مریخ [۲] و تصادف هلیکوپتر چینوک [۱] چند نمونه از تبعات بزرگ این قضیه در گذشته بوده‌اند، همین‌طور به‌سادگی می‌توان فجایع دیگری از این دست را در زندگی روزمره‌ی انسان‌ها متصور شد.

برای تعیین صحت کارکرد برنامه‌های کامپیوتری روش‌های متفاوتی ابداع شده‌اند که در ادامه به‌طور مختصر از آن‌ها یاد می‌کنیم، اما پیش از آن به یک خاصیت مشترک همه‌ی این روش‌ها، یعنی ”ناکامل بودن“، می‌پردازیم. منظور از ناکامل بودن این است که با استفاده از هیچ یک از روش‌هایی که داریم، نمی‌توانیم هر خاصیتی را برای هر برنامه‌ای بررسی کنیم. به عبارت دیگر، استفاده از هر روشی محدودیت‌هایی دارد. البته قضیه رایس [۲۱] به ما این تضمین را داده که روش کاملی اصلاً وجود ندارد. قضیه رایس (به‌طور غیر رسمی) بیان می‌کند که مسئله‌ی بررسی هر خاصیت غیر بدیهی، برای همه‌ی برنامه‌ها، تصمیم ناپذیر است. این دلیلی بر این شده که روش‌های مختلفی برای این کار معرفی شوند که هر کدام می‌توانند حالت‌های خاصی از مسئله را حل کنند. یک دسته‌بندی برای این روش‌ها تقسیم آن‌ها به دو دسته‌ی پویا و ایستا است. روش‌های پویا روش‌هایی هستند که در آن‌ها تست برنامه همزمان با اجرای برنامه است، درحالی‌که روش‌های ایستا بدون اجرای برنامه آن‌ها را تست می‌کنند.

روش‌های پویا معمولاً با اجرای حالات محدودی از برنامه تصمیم می‌گیرند که برنامه‌ای که نوشته شده است، انتظارات را برآورده می‌کند یا خیر. اگر این روش بتواند تشخیص دهد که برنامه‌ای درست کار نمی‌کند، می‌توانیم با اطمینان نتیجه بگیریم که آن برنامه غلط نوشته‌شده است، اما اگر

برنامه‌ای از تست‌های ساخته‌شده با این روش‌ها با موفقیت عبور کند، نمی‌توان اطمینان حاصل کرد که برنامه درست کار می‌کند، زیرا ممکن است، حالتی مشکل‌زا از اجرای برنامه وجود داشته باشد که در تست‌ها نیامده باشد. برای اطلاعات بیشتر به [۱۹] مراجعه کنید.

روش‌های ایستا معمولاً روش‌هایی هستند که از نظریه‌های مختلف در منطق ریاضی به عنوان ابزار بهره می‌برند تا بدون اجرای خود برنامه‌ها در مورد صحت اجرای آن‌ها نتیجه‌گیری کنند. به همین دلیل به بخشی مهم و بزرگی از این دستورات که از منطق استفاده می‌کنند روش‌های صوری هم گفته می‌شود. معروف‌ترین روش‌های ایستا؛ روش واریسی مدل، روش‌های استنتاجی و استفاده از نظریه تعبیر مجرد است.

در روش واریسی مدل، یک مدل صوری متناهی از برنامه‌ی موردبررسی می‌سازیم که همه‌ی حالات اجرای برنامه با آن قابل‌توصیف است، سپس با استفاده از یک زبان صوری که بتواند در مورد مدل هایمان صحبت کند، ویژگی‌های مورد بررسی را بیان می‌کنیم و در نهایت صحت ویژگی‌های بیان‌شده را بررسی می‌کنیم. مقاله [۴] شروع این روش‌ها بوده که این کار را با استفاده از نوعی مدل کرپسکی [۱۶] و نوعی منطق زمانی به نام منطق زمانی خطی [۴] انجام داده که روشی است با دقت و البته هزینه‌ی محاسباتی بسیار بالا. [۱۲] یک منبع بسیار مقدماتی و کتاب [۵] یک مرجع سنتی در این زمینه است.

در روش‌های استنتاجی که شاید بتوان یکی از ابتدایی‌ترین آن‌ها را استفاده از منطق هور [۱۱] دانست، درستی کارکرد برنامه‌هایمان را با ارائه‌ی یک درخت اثبات در یک دستگاه استنتاجی، متناسب با زبان برنامه‌هایمان، نشان می‌دهیم. در این روش هم اگر بتوانیم درستی یک برنامه را اثبات کنیم، دیگر به طور نظری، خیالی آسوده از درستی برنامه خواهیم داشت، اما ساختن درخت اثبات در یک نظریه برهان می‌تواند چالش برانگیز باشد. در [۱۲] به منطق هور به طور مقدماتی پرداخته شده است. همین طور کتاب [۲۰] نیز به پیاده‌سازی منطق هور در زبان coq پرداخته است، که در آن coq یک اثبات‌یار است که بر اساس نظریه نوع وابسته کار می‌کند. برای اطلاعات بیشتر در مورد چگونگی طرز کار این اثبات‌یار و نظریه‌ی بنیادین آن به کتاب [۳] مراجعه کنید. نظریه‌ی مورد شرح در [۱۰] نیز می‌تواند در این مسیر به کار گرفته شود.

نظریه تعبیر مجرد [۸] نیز یک نظریه ریاضیاتی است که به‌نوعی سعی می‌کند از روی معناشناسی یک برنامه‌ی کامپیوتری [۲۳] یک تقریب بسازد. منظور از تقریب یک دستگاه کوچک‌تر از معناشناسی اصلی است که رفتارش زیرمجموعه‌ی رفتارهای دستگاه اصلی است. سعی بر این است که دستگاه جدیدی که می‌سازیم به لحاظ محاسباتی ساده‌تر از معناشناسی اصلی کار کند تا بتوان خواص آن را راحت‌تر بررسی کرد. در این صورت هر نتیجه‌ای در مورد خواص جدید، را می‌توان

برای خود برنامه هم بیان کرد، اما توجه شود که در این صورت ممکن است به همه‌ی حقایق دست پیدا نکنیم. برای اطلاعات بیشتر به [۷] و [۱۳] مراجعه شود.

در این پایان نامه، تمرکز ما روی بهبود روش اول یعنی روش واریسی مدل به کمک روش سوم یعنی نظریه‌ی تعبیر مجرد خواهد بود.

فهرست مطالب

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۱	۱.۱ روش واریسی مدل	۱
۲	۱.۱.۱ زبان LTL	۲
۳	۲.۱.۱ معنانشناسی LTL	۳
۴	۲.۱ نحو زبان مورد بررسی	۴
۶	۳.۱ معنانشناسی زبان مورد بررسی	۶
۶	۱.۳.۱ برچسب‌ها	۶
۸	۲.۳.۱ رد پیشوندی	۸
۱۰	۳.۳.۱ معنانشناسی رد پیشوندی	۱۰
۱۵	۲ صوری‌سازی جدید برای روش واریسی مدل	۱۵
۱۵	۱.۲ ویژگی‌های برنامه‌ها	۱۵
۱۶	۱.۱.۲ ویژگی‌ها	۱۶
۱۶	۲.۱.۲ عبارات منظم	۱۶
۱۶	۳.۱.۲ نحو عبارات منظم	۱۶
۱۸	۴.۱.۲ معنانشناسی عبارات منظم	۱۸
۲۲	۵.۱.۲ گونه‌های مختلف نحو عبارات منظم	۲۲
۲۳	۲.۲ صورت جدید مسئله‌ی واریسی مدل	۲۳
۲۵	۳.۲ در مورد توقف پذیری	۲۵

۳۱	۳ واری مدل منظم
۳۱	۱.۳ برخی مفاهیم
۳۱	۱.۱.۳ هم‌ارزی عبارت‌های منظم
۳۲	۲.۱.۳ فرم نرمال فصلی
۳۹	۳.۱.۳ سر و دم عبارات منظم
۴۴	۲.۳ واری مدل منظم
۴۵	۱.۲.۳ صورت واری مدل منظم
۴۸	۲.۲.۳ درستی و تمامیت
۵۳	۴ واری مدل ساختارمند
۶۴	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

در این فصل به عنوان مقدمه، روش واریسی مدل به طور مختصر معرفی شده است. در فصل‌های بعدی، با هدف بهبود این روش، صورت‌های جدیدی از آن ارائه شده و مورد بررسی قرار گرفته است، بنابراین، لازم است که ابتدا، به معرفی این روش به شکل سنتی پرداخته شود. پس از معرفی واریسی مدل، بحث اصلی این پایان نامه شروع می‌شود. محوریت کار ما [۶] است که در آن روش جدید واریسی مدل ارائه شده است. بحث با ارائه‌ی نحو یک زبان برنامه نویسی شروع می‌شود، سپس معناشناسی این زبان، یعنی معناشناسی رد پیشوندی^۱ ارائه می‌شود و فصل تمام می‌شود. مفاهیم معرفی شده در این فصل دارای ریزه‌کاری‌های زیادی هستند و به عقیده‌ی نگارنده، در [۶] در ارائه‌ی بعضی از جزئیات سهل انگاری اتفاق افتاده است. سعی کرده‌ایم که اگر ایرادی در تعاریف موجود در [۶] وجود دارد را حین بیان دوباره‌ی این مفاهیم در این پایان نامه رفع کنیم، تا یک بیان خوش ساخت و روان از این نظریه ارائه کرده باشیم.

۱.۱ روش واریسی مدل

روش واریسی مدل یک روش صوری است که برای درستی‌یابی سیستم‌های مختلف استفاده می‌شود. در این روش معمولاً ابتدا یک ماشین حالات متناهی از روی سیستم مورد بررسی ساخته می‌شود، سپس بررسی‌هایی که قرار است روی سیستم اصلی انجام شوند، روی این مدل انجام می‌شود. از این روش در بررسی صحت کارکرد برنامه‌های کامپیوتری استفاده می‌شود، اما این تنها مورد

¹Prefix Trace Semantics

استفاده‌ی این روش نیست. هر سیستمی که قابلیت بیان شدن به طور صوری را داشته باشد، با این روش قابل بررسی است. مثلاً می‌توان از این روش برای بررسی صحت عملکرد یک برنامه برای قطارهای شهری استفاده کرد. در یک برنامه برای قطارهای شهری، نباید امکان حضور دو قطار روی یک ریل در یک زمان وجود داشته باشد (که معنی تصادف بین دو قطار را می‌دهد) و می‌توان از روش واریسی مدل برای اطمینان از عدم وجود چنین ویژگی نامطلوبی استفاده کرد. مثال‌های دیگر استفاده‌ی این روش در علوم کامپیوتر بررسی صحت عملکرد معماری یک پردازنده یا الگوریتم زمانبندی یک سیستم عامل است. این مثال‌ها هیچ کدام یک برنامه‌ی کامپیوتری نیستند (هر چند که ممکن است مجبور باشیم از یک برنامه‌ی کامپیوتری برای پیاده‌سازی آن‌ها کمک بگیریم که در آن صورت بررسی صحت عملکرد آن برنامه‌ی کامپیوتری داستانی دیگر خواهد داشت)، اما قابل بیان به صورت صوری به جای زبان طبیعی هستند.

روش واریسی مدل برای بیان ویژگی‌های مورد بررسی از منطق‌های زمانی مختلف استفاده می‌کند. منطق زمانی یک نوع منطق موجهات است. منطق‌های موجهات از گسترش زبان منطق کلاسیک، با اضافه کردن ادوات وجهی گوناگون، ساخته می‌شوند. این ادوات غالباً در زبان طبیعی نقش قید را دارند. منطق‌های زمانی دسته‌ای از منطق‌های موجهات هستند که به صورتی‌سازی مفهوم زمان را اضافه می‌کنند، یعنی قیدهایی مانند فعلاً، بعداً، و قبلاً. منطقی که در اینجا بیان می‌کنیم منطق زمانی خطی^۲ یا LTL نام دارد که یکی از منطق‌های زمانی است که برای روش واریسی مدل استفاده می‌شود. البته در مورد قیدهایی مذکور، اشاره به این نکته ضروری است که در بیانی که در اینجا از این منطق ارائه داده‌ایم، ادوات جدید به طور مستقیم بیانگر این قیدها نیستند، هر چند که به کمک ادوات جدید می‌توان ادواتی برای هر یک از این قیدها ساخت. این تعاریف از [۱۸] آورده شده‌اند. ابتدا نحو این منطق را بیان می‌کنیم و تلاش می‌کنیم، به طور غیر دقیق، در مورد معنای فرمول‌های این زبان به خواننده یک درک شهودی بدهیم، سپس به سراغ معناشناسی صوری این منطق می‌رویم.

۱.۱.۱ زبان LTL

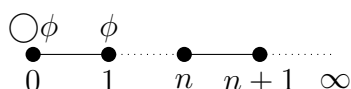
تعریف ۱.۱. فرض کنید Π یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی از گزاره‌های اتمی باشد. آنگاه مجموعه‌ی فرمول‌ها در زبان LTL (که با Φ نمایش داده می‌شود) توسط گرامر زیر ساخته می‌شود.

$$\phi \in \Phi \Leftrightarrow \phi ::= \pi \mid \phi \vee \phi \mid \neg \phi \mid \bigcirc \phi \mid \phi \mathcal{U} \phi \quad (\pi \in \Pi)$$

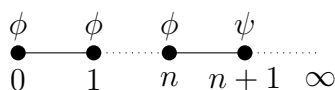
^۲Linear Temporal Logic

در این منطق، زمان را با اعداد طبیعی نشان می‌دهیم. یعنی برای یک فرمول، زمان از عدد ۰ شروع شده و تا ابد ادامه خواهد داشت و حین گذر زمان ممکن است ارزش فرمول‌ها تغییر کند. مسلماً پس از بررسی معناشناسی صوری بهتر می‌شود این مفهوم را به طور شهودی حس کرد، اما به هر حال به خواننده پیشنهاد می‌شود، پیش از رسیدن به آن بخش به ادامه‌ی این بخش که در تلاش است یک درک شهودی از معنای فرمول‌ها بدهد، توجه کند.

در این زبان ادوات کلاسیک \neg, \vee به همان معنای منطق گزاره‌ای کلاسیک بکار می‌روند. در ادوات جدید، $\bigcirc \phi$ به معنای برقرار بودن ϕ در لحظه‌ی بعدی است، مثلاً در شکل زیر با در نظر گرفتن اینکه در زمان ۰ هستیم، ϕ در لحظه‌ی ۱ برقرار است.



$\phi \mathcal{U} \psi$ به این معنی است که ϕ حداقل تا قبل از اینکه ψ برقرار شود، برقرار است. (مثلاً اگر بگوییم "تا وقتی که باران نباریده زمین خشک است" در این صورت "زمین خشک است" به جای ϕ و "باران باریده است" ψ است).



این زبان را می‌توان با ادوات بیشتری از آنچه آورده‌ایم بیان کرد و البته بیان‌های دیگری هم بسته به بحث متداول هستند، اما در اینجا یک شکل ساده از این زبان را آورده‌ایم که به غیر از ادوات منطق گزاره‌ای کلاسیک دو ادوات دیگر را نیز دارد. دلیل وجود ادوات متفاوت، می‌تواند راحت‌تر کردن بیان ویژگی‌ها باشد. همان طور که استفاده نکردن از فصل و شرطی در منطق گزاره‌ای کلاسیک می‌تواند، به سخت کردن بیان جملات در چارچوب این منطق منجر شود، حذف این ادوات وجهی هم بیان ویژگی‌ها را در این منطق مشکل می‌سازد. حال که به درکی شهودی از معنای فرمول‌های این زبان رسیده‌ایم، به بیان صوری این مفاهیم می‌پردازیم.

۲.۱.۱ معناشناسی LTL

مدل‌های این منطق را به صورت توابع $M : \mathbb{N}_0 \rightarrow P(\Pi)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، هر مدل یک تابع است که هر عدد طبیعی را به یک مجموعه از فرمول‌های اتمی می‌برد. این در واقع به

این معنی است که یک مدل مشخص می‌کند که در هر لحظه کدام یک از فرمول‌های اتمی درست هستند. مثلاً، در مدلی به نام M در واقع $M(5)$ مجموعه‌ی اتم‌هایی است که در لحظه‌ی ۵ طبق این مدل درست هستند و اگر اتمی در این مجموعه حاضر نباشد، در لحظه‌ی ۵، ارزش غلط دارد. درستی یک فرمول در یک مدل را با M, i نشان می‌دهیم. $M, i \models \phi$ به این معنی است که فرمول ϕ ، در لحظه‌ی i در مدل M درست است. این مفهوم را، به صورت بازگشتی، به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} M, i \models \pi & \text{ iff } \pi \in M(i), \\ M, i \models \neg \phi & \text{ iff } M, i \not\models \phi, \\ M, i \models \phi \vee \psi & \text{ iff } M, i \models \phi \text{ or } M, i \models \psi, \\ M, i \models \bigcirc \phi & \text{ iff } M, i+1 \models \phi, \\ M, i \models \phi \mathcal{U} \psi & \text{ iff } \exists k \geq i \in \mathbb{N}_0 : \forall i \leq j < k : M, j \models \phi \text{ and } M, k \models \psi. \end{aligned}$$

یک فرمول را ارضا پذیر می‌گوییم اگر و تنها اگر مدلی وجود داشته باشد که فرمول در آن درست باشد. اگر یک فرمول در هر مدلی درست باشد، آن فرمول را معتبر می‌گوییم.

۲.۱ نحو زبان مورد بررسی

یا فرض اینکه \mathbb{X} مجموعه‌ی همه‌ی متغیرهای این زبان باشد، نحو زبان بیان برنامه‌ها زیرمجموعه‌ای از نحو زبان C است، به شکل زیر:

$$x, y, \dots \in \mathbb{X}$$

$$A \in \mathbb{A} ::= 1 \mid x \mid A_1 - A_2$$

$$B \in \mathbb{B} ::= A_1 < A_2 \mid B_1 \text{ nand } B_2$$

$$E \in \mathbb{E} ::= A \mid B$$

$$S \in \mathbb{S} ::=$$

$$x \doteq A;$$

$$\begin{aligned}
& | \ ; \\
& | \text{ if } (B) \ S \mid \text{ if } (B) \ S \text{ else } S \\
& | \text{ while } (B) \ S \mid \text{ break}; \\
& | \{S\}
\end{aligned}$$

$$SI \in \mathbb{SL} ::= SI \ S \mid \epsilon$$

$$P \in \mathbb{P} ::= SI$$

به اعضای مجموعه‌های A ، B ، S و \mathbb{P} به ترتیب عبارت حسابی^۳، عبارت بولی^۴، عبارت دستوری^۵، لیست عبارت‌های دستوری^۶ و برنامه^۷ می‌گوییم.

قابل مشاهده است که این زبان، نسبت به کل زبان C ، تا حد ممکن ساده‌سازی شده است. علت این کار را بعداً عمیق‌تر حس خواهیم کرد. علت ساده‌تر شدن کار برای ارائه‌ی معناشناسی و صورت‌های جدید روش واریسی مدل است. در اینجا، راحتی برنامه نوشتن در این زبان مطرح نبوده است، چون اصلاً این زبان برای این کار ساخته نشده است. هدف از ارائه‌ی این زبان صرفاً ارائه‌ی روش جدید است. یعنی می‌توان به این زبان به چشم یک مدل محاسبه، مانند ماشین تورینگ^۸ و ماشین رجیستر^۹ نگاه کرد. روشی که سعی در ارائه‌ی آن داریم، برای زبان‌های برنامه نویسی دستوری است، مانند پایتون^{۱۰}، جاوا^{۱۱} و C . بنابراین، انتخاب یک مدل محاسبه که رفتاری شبیه‌تر به این زبان‌ها داشته باشد، کار معقولی است.

اندکی در مورد قدرت بیان این زبان صحبت می‌کنیم. می‌توانیم باقی اعداد را از روی عدد ۱ و عملگر منها بسازیم. مثلاً ابتدا ۰ را به کمک ۱ - ۱ می‌سازیم و سپس، با استفاده از ۰ می‌توانیم یکی یکی اعداد صحیح منفی را بسازیم. پس از آن، به سراغ اعداد صحیح مثبت می‌رویم که با کمک ۰

³Arithmetic Expression

⁴Boolean Expression

⁵Statement

⁶Statement List

⁷Program

⁸Turing Machine

⁹Register Machine

¹⁰Python

¹¹Java

و هر عدد صحیح منفی‌ای که ساخته‌ایم، ساخته می‌شوند. باقی اعداد و حتی عملگرها (یعنی به غیر از اعداد طبیعی) از روی اعداد و عملگرهایی که داریم قابل ساختن هستند. در عبارت‌های بولی نیز با داشتن دسته‌ای محدود اما کافی از عملگرها، باقی عملگرهای رایج قابل بیان هستند. یعنی اینجا صرفاً ادات شفر^{۱۲} تعریف شده است و باقی عملگرهای بولی^{۱۳} را می‌توان با استفاده از همین عملگر ساخت. باقی دستورات نیز دستورات شرط و حلقه هستند و مطابق رفتاری که از آن‌ها در زبان C انتظار داریم، کار می‌کنند. در مورد دستور break ذکر این نکته ضروری است که اجرای این دستور، اجرای برنامه را از دستوری بعد از داخلی‌ترین حلقه‌ای که break داخلش قرار دارد، ادامه می‌دهد. در پایان می‌توان ثابت کرد که این زبان هم‌ارز با ماشین تورینگ [۹] است.

هرآنچه بالاتر در مورد معنای دستورات این زبان گفتیم، به هیچ وجه صوری نبود. صرفاً یک درک شهودی که از معنای اجرای هریک از دستورات می‌توان داشت را بیان کرده‌ایم. بیان صوری معنای برنامه‌ها را که قابل انتقال به کامپیوتر است (خلاف درک شهودیمان)، در ادامه بیان خواهیم کرد. بدیهی است که یک بیان صوری از روی یک درک شهودی ساخته می‌شود، اما این دو استفاده‌های متفاوتی دارند.

۳.۱ معناشناسی زبان مورد بررسی

معناشناسی زبانی را که در بخش پیش آورده‌ایم، با کمک مفاهیمی به نام‌های برچسب^{۱۴} و رد پیشوندی^{۱۵} و عملگری به نام چسباندن^{۱۶} تعریف می‌کنیم. نام این معناشناسی، معناشناسی رد پیشوندی است.

۱.۳.۱ برچسب‌ها

با وجود اینکه در نحو زبان C برچسب‌ها وجود دارند، اما در نحو زبانی که معرفی کرده‌ایم، برچسب‌ها حضور ندارند. با این وجود، در تعریف معناشناسی صوری برای برنامه‌ها، به این مفهوم نیاز داریم.

¹²Sheffer Operator

¹³Boolean Operator

¹⁴Label

¹⁵Prefix Trace

¹⁶Concatenation

در این بخش، به طور غیر دقیق معنای برچسب‌ها را آورده‌ایم. همین تعاریف غیر دقیق برای کار ما کافی است. تعاریف صوری دقیق‌تر برچسب‌ها در پیوست [۶] آورده شده‌اند. از آوردن مستقیم این تعاریف در اینجا خودداری کرده‌ایم. البته در مورد تعریف صوری برچسب‌ها، قابل ذکر است که طبق [۷]، تعریف صوری برچسب‌ها غیر قطعی است (به عبارتی منفی نگرانه خوش تعریف نیست). به عبارت دیگر، تعریف‌های صوری مشخص‌تر متفاوتی را می‌توان متصور شد که در تعریف صوری برچسب‌ها در [۷] می‌گنجند.

در نحو زبانمان، S ها بخشی از عبارت‌های موجود در نحو زبان هستند که به آن‌ها عبارت دستوری می‌گوییم. برچسب‌ها را برای S ها تعریف می‌کنیم. برچسب‌ها با کمک توابع `labs`, `in`, `brks-of`, `brk-to`, `esc`, `aft`, `at` تعریف می‌شوند. در واقع، هر S ، به ازای هر یک از این توابع، ممکن است یک برچسب متفاوت داشته باشد. بعضی دیگر از این توابع به ازای هر S ممکن است یک مجموعه از برچسب‌ها را برگردانند. یکی از آن‌ها هم با گرفتن S یک مقدار بولی^{۱۷} را برمی‌گرداند.

$at[S]$: برچسب شروع S .

$aft[S]$: برچسب پایان S ، اگر پایانی داشته باشد.

$esc[S]$: یک مقدار بولی را باز می‌گرداند که بسته به اینکه در S عبارت دستوری `break` وجود دارد یا خیر، مقدار درست یا غلط را برمی‌گرداند.

$brk-to[S]$: برچسبی است که اگر حین اجرای S عبارت دستوری `break` اجرا شود، برنامه از آن برچسب ادامه پیدا می‌کند.

$brks-of[S]$: مجموعه‌ای از برچسب‌های عبارت‌های دستوری `break` که داخل S هستند را برمی‌گرداند.

$in[S]$: مجموعه‌ای از تمام برچسب‌های درون S را برمی‌گرداند.

$labs[S]$: مجموعه‌ای از تمام برچسب‌هایی که با اجرای S قابل دسترسی هستند را برمی‌گرداند.

مجموعه‌ی همه‌ی برچسب‌ها را با \perp نشان می‌دهیم.

¹⁷Boolean Value

۲.۳.۱ رد پیشوندی

حال که تعریف برجسبها را داریم، به سراغ تعریف رد پیشوندی می‌رویم. البته پیش از آن، باید وضعیت^{۱۸} و محیط^{۱۹} را تعریف کنیم.

تعریف ۲.۰.۱. (محیط): به ازای مجموعه مقادیر^{۲۰} \mathbb{V} و مجموعه متغیرها^{۲۱} \mathbb{X} تابع $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{X} : \rho$ را یک محیط می‌گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی محیط‌ها را با $\mathbb{E}\mathbb{V}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۰.۱. (وضعیت): به هر زوج مرتب متشکل از یک برجسب l و یک محیط ρ یک وضعیت $\langle l, \rho \rangle$ می‌گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی وضعیت‌ها را با \mathbb{G} نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۰.۱. (رد پیشوندی): به یک دنباله از وضعیت‌ها (با امکان تهی بودن) یک رد پیشوندی می‌گوییم.

هر رد پیشوندی یک دنباله است که قرار است توصیفی از گردش کار^{۲۲} اجرای یک برنامه باشد. منظور از گردش کار این است که در هر لحظه، حافظه چه وضعیتی دارد و اینکه برنامه در حال اجرای چه دستوری است. وضعیت‌ها موقعیت لحظه‌ای حافظه‌ای که در دسترس برنامه است را توصیف می‌کنند. l برجسب قسمتی از برنامه است که در حال اجرا است و ρ مقدار متغیرها را در آن لحظه از اجرای برنامه نشان می‌دهد. ردهای پیشوندی می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند. مجموعه‌ی ردهای پیشوندی متناهی را با \mathbb{G}^+ و مجموعه‌ی ردهای پیشوندی نامتناهی را با \mathbb{G}^∞ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی همه‌ی ردهای پیشوندی را هم با $\mathbb{G}^{+\infty}$ نمایش می‌دهیم. با توجه به آنچه گفتیم، یک عملگر چسباندن \bowtie را روی ردهای پیشوندی تعریف می‌کنیم.

پیش از ارائه‌ی تعریف، به دو نکته‌ی مهم در مورد نمادگذاری‌های این پایان نامه اشاره می‌کنیم. اولین نکته این است که حین ارائه‌ی تعریف‌ها، مانند تعریف عملگر چسباندن که در ادامه آمده است، اگر تعریف را روی یک ساختار یا با در نظر گرفتن پیش‌فرض‌های مختلف ارائه داده باشیم، هر فرض را با علامت \blacktriangleleft نشان داده‌ایم. در اثبات‌ها، برای هر حالت از \blacktriangleright استفاده کرده‌ایم. اگر حین ارائه‌ی یک تعریف یا اثبات، پس از ارائه‌ی یک پیش‌فرض، احتیاج به پیش‌فرض بیشتری داشته باشیم، پیش‌فرض دومی را با $\blacktriangleleft\blacktriangleleft$ یا $\blacktriangleright\blacktriangleright$ نشان داده‌ایم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم یک تابع

¹⁸State

¹⁹Environment

²⁰Value

²¹Variable

²²Workflow

به اسم f روی اعداد صحیح تعریف کنیم، که به ازای ورودی‌های زوج، همان ورودی را برمی‌گرداند و اگر ورودی فرد باشد، اگر عدد بر ۳ بخش پذیر باشد، حاصل تقسیم آن را بر ۳ برمی‌گرداند و اگر نباشد، باقی مانده‌ی آن را در تقسیم بر ۳ برمی‌گرداند. تعریف این تابع با نمادگذاری‌ای که گفتیم، با فرض اینکه n ورودی تابع k و k' دو عدد صحیح باشند، به این شکل می‌شود:

$$\blacktriangleleft n = 2k + 1 :$$

$$\blacktriangleleft\blacktriangleleft n = 3k' :$$

$$f(n) = k'$$

$$\blacktriangleleft\blacktriangleleft n = 3k' + 1 :$$

$$f(n) = 1$$

$$\blacktriangleleft\blacktriangleleft n = 3k' + 2 :$$

$$f(n) = 2$$

$$\blacktriangleleft n = 2k :$$

$$f(n) = n$$

یا اگر اعضای یک مجموعه‌ی دلخواه K با ساختار $a|b$ با $k \in K ::= a|b$ تعریف شود، تابع همانی f را روی K در این نمادگذاری به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\blacktriangleleft f(a) = a$$

$$\blacktriangleleft f(b) = b$$

نکته‌ی دوم در مورد نشان دادن ردهای پیشوندی است. اگر π_1, π_2 رد پیشوندی باشند و σ یک وضعیت باشد، $\pi_1\sigma$ به یک رد پیشوندی لزوماً متناهی اشاره می‌کند که با وضعیت σ به پایان رسیده است، $\sigma\pi_1$ به یک رد پیشوندی اشاره می‌کند که با وضعیت σ شروع شده است و $\pi_1\pi_2$ به یک رد پیشوندی اشاره می‌کند که با π_1 شروع شده است و با π_2 ادامه پیدا می‌کند (π_1 باید متناهی باشد). توجه شود که $\pi_1\pi_2$ با چسباندن π_1 و π_2 ($\pi_1 \bowtie \pi_2$) به همدیگر متفاوت است. هنگامی که می‌گوییم رد پیشوندی π (یا موقعیت σ) به رد پیشوندی π' اضافه شده است، به رد پیشوندی $\pi'\pi$ (یا $\pi'\sigma$) اشاره می‌کنیم.

تعریف ۵.۰.۱. (عملگر چسباندن): برای $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{S}^{+\infty}$ و $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}$ داریم:

$$\blacktriangleleft \pi_1 \in \mathfrak{S}^{\infty} :$$

$$\pi_1 \bowtie \pi_2 = \pi_1$$

$$\blacktriangleleft \pi_1 \in \mathfrak{S}^+ :$$

$$\blacktriangleleft\blacktriangleleft \sigma_1 = \sigma_2 :$$

$$\pi_1 \sigma_1 \bowtie \sigma_2 \pi_2 = \pi_1 \sigma_1 \pi_2$$

$$\blacktriangleleft\blacktriangleleft \sigma_1 \neq \sigma_2 :$$

در این حالت $\pi_1 \bowtie \pi_2$ تعریف نمی‌شود.

همین طور، ϵ یک رد پیشوندی است که حاوی هیچ وضعیتی نیست. به عبارت دیگر، یک دنباله‌ی تهی است.

۳.۳.۱ معناسازی رد پیشوندی

در این بخش، دو تابع A و B را به ترتیب روی عبارت‌های حسابی و عبارت‌های بولی، یعنی A ها و B ها تعریف می‌کنیم، سپس با کمک آنها تابع \mathcal{S}^* را روی مجموعه‌ای از اجتماع معنای S ها و SI ها تعریف می‌کنیم. به هر SI لیست عبارت‌های دستوری می‌گوییم. در نهایت، تعریف \mathcal{S}^* را می‌آوریم.

تعریف ۶.۰.۱. (معنای عبارت‌های حسابی - تابع \mathcal{A}): تابع $(\mathbb{E}V \rightarrow \mathbb{V})$ $\mathcal{A} : \mathbb{A} \rightarrow$ را به صورت بازگشتی روی ساختار $A \in \mathbb{A}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\blacktriangleleft \mathcal{A}[[1]]\rho = 1$$

$$\blacktriangleleft \mathcal{A}[[x]]\rho = \rho(x)$$

$$\blacktriangleleft \mathcal{A}[[A_1 - A_2]]\rho = \mathcal{A}[[A_1]]\rho - \mathcal{A}[[A_2]]\rho$$

تعریف ۷.۰.۱. (معنای عبارت‌های بولی - تابع \mathcal{B}): تابع $(\mathbb{E}V \rightarrow \mathbb{B}OOL)$ $\mathcal{B} : \mathbb{B} \rightarrow$ را به صورت بازگشتی روی ساختار $B \in \mathbb{B}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\blacktriangleleft \mathcal{B}[[A_1 < A_2]]\rho = True \quad \text{اگر } \mathcal{A}[[A_1]]\rho \text{ کوچکتر از } \mathcal{A}[[A_2]]\rho \text{ باشد} \\
&\blacktriangleleft \mathcal{B}[[A_1 < A_2]]\rho = False \quad \text{اگر } \mathcal{A}[[A_1]]\rho \text{ بزرگتر از } \mathcal{A}[[A_2]]\rho \text{ باشد} \\
&\blacktriangleleft \mathcal{B}[[B_1 \text{ nand } B_2]]\rho = \neg(\mathcal{B}[[B_1]]\rho \wedge \mathcal{B}[[B_2]]\rho)
\end{aligned}$$

طبیعتاً \neg و \wedge در فرازبان هستند. منظور این است که این دو، ادوات درون یک زبان صوری نیستند، بلکه عطف و فصل در زبانی هستند که در آن در حال ارائه‌ی همه‌ی این تعاریف هستیم.

در ادامه، به تعریف \mathcal{S}^* می‌پردازیم. این کار را با تعریف \mathcal{S}^* روی هر ساختار عبارت دستوری \mathcal{S} ، لیست عبارت دستوری \mathcal{S} و برنامه‌ی P انجام می‌دهیم. یعنی دامنه‌ی \mathcal{S}^* مجموعه‌ی \mathbb{PUSIUS} است. پیش از ادامه‌ی بحث، باید این نکته را در مورد علامت‌گذاری‌هایمان ذکر کنیم که منظور از $S ::= l \text{ break};$ این است که تاکید کرده‌ایم که S با برچسب l شروع شده‌است، هرچند که همین طور که پیش‌تر گفته‌شد، l جزو زبان نیست.

تعریف ۸.۰.۱. (معنای برنامه‌ها - تابع \mathcal{S}^*):

$$\blacktriangleleft S = \text{break}; :$$

$$\mathcal{S}^*[[S]] = \{\langle at[[S]], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\} \cup \{\langle at[[S]], \rho \rangle \langle brk - to[[S]], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\}$$

$$\blacktriangleleft S = x \doteq A; :$$

$$\mathcal{S}^*[[S]] = \{\langle at[[S]], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\} \cup \{\langle at[[S]], \rho \rangle \langle aft[[S]], \rho[x \leftarrow \mathcal{A}[[A]]\rho] \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\}$$

$$\blacktriangleleft S = \text{if}(B)S_t :$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^*[[S]] &= \{\langle at[[S]], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\} \cup \{\langle at[[S]], \rho \rangle \langle aft[[S]], \rho \rangle \mid \mathcal{B}[[B]]\rho = False\} \\
&\cup \{\langle at[[S]], \rho \rangle \langle at[[S_t]], \rho \rangle \mid \mathcal{B}[[B]]\rho = True \wedge \langle at[[S_t]], \rho \rangle \in \mathcal{S}[[S_t]]\}
\end{aligned}$$

$$\blacktriangleleft S = \text{if}(B) S_t \text{ else } S_f :$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^*[[S]] &= \{\langle at[[S]], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\} \\
&\cup \{\langle at[[S]], \rho \rangle \langle at[[S_f]], \rho \rangle \mid \mathcal{B}[[B]]\rho = False \wedge \langle at[[S_f]], \rho \rangle \in \mathcal{S}[[S_f]]\}
\end{aligned}$$

$$\cup \{ \langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_t], \rho \rangle \pi | \mathcal{B}[B] \rho = True \wedge \langle at[S_t], \rho \rangle \pi \in \mathcal{S}[S_t] \}$$

◀ $SI = \exists$:

$$\mathcal{S}^*[SI] = \{ \langle at[SI], \rho \rangle | \rho \in \mathbb{EV} \}$$

◀ $SI = SI' \ S$:

$$\mathcal{S}^*[SI] = \mathcal{S}^*[SI'] \cup (\mathcal{S}^*[SI'] \bowtie \mathcal{S}^*[S])$$

که در آن اگر فرض کنیم $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ دو مجموعه شامل ردهای پیشوندی هستند، آنگاه عملگر چسباندن (\bowtie) روی آن‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{S} \bowtie \mathcal{S}' = \{ \pi \bowtie \pi' | \pi \in \mathcal{S} \wedge \pi' \in \mathcal{S}' \wedge (\pi \bowtie \pi' \text{ is well-defined}) \}$$

◀ $S = \text{while } (B) S_b$:

در این حالت، ماجر نسبت به حالات قبل اندکی پیچیده‌تر می‌شود. تابعی به اسم \mathcal{F} را تعریف خواهیم کرد که دو ورودی دارد. ورودی اول آن یک عبارت دستوری حلقه است و ورودی دوم آن یک مجموعه است. به عبارتی دیگر، به ازای هر حلقه یک تابع \mathcal{F} جداگانه تعریف می‌شود که مجموعه‌ای از ردهای پیشوندی را می‌گیرد و مجموعه‌ای دیگر از همین موجودات را باز می‌گرداند. کاری که این تابع انجام می‌دهد، این است که یک دور عبارت‌های دستوری داخل حلقه را اجرا می‌کند و دنباله‌های جدید را از دنباله‌های قبلی می‌سازد. معنای یک حلقه را کوچکترین نقطه ثابت^{۲۳} این تابع در نظر می‌گیریم. در ادامه، تعریف \mathcal{F} آمده است. با دیدن تعریف، می‌توان به دلیل این کار پی برد. ورودی‌ای که دیگر \mathcal{F} روی آن اثر

²³Least Fixpoint

نکند، در دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد. اولی این است که شرط حلقه برقرار نباشد. طبق تعریف \mathcal{F} ، می‌توانیم ببینیم که \mathcal{F} در این حالت چیزی به ردهای پیشوندی اضافه نمی‌کند. حالت دوم این است که اجرای برنامه داخل حلقه به عبارت دستوری break برخورد کرده باشد که در این صورت وضعیتی به ته ردهای پیشوندی اضافه می‌شود که برجسبش خارج از مجموعه برجسب عبارت‌های دستوری حلقه است و همین اضافه کردن هر چیزی را به ته ردهای پیشوندی موجود، توسط \mathcal{F} غیرممکن می‌کند.

بنابراین، نقطه ثابت^{۲۴} مفهوم مناسبی برای این است که از آن در تعریف صوری معنای حلقه استفاده شود. علت اینکه کوچکترین نقطه ثابت را به عنوان معنای حلقه در نظر می‌گیریم، این است که مطمئن هستیم، هر رد پیشوندی‌ای در نقطه ثابت موجود باشد، به گردش کار برنامه مرتبط است و ردهای پیشوندی اضافی و بی‌ربط به معنای برنامه، به آن وارد نمی‌شوند. برای درک بهتر این نکته می‌توان به این توجه کرد که با اضافه کردن وضعیت‌هایی کاملاً بی‌ربط به گردش کار برنامه به ته ردهای پیشوندی، که صرفاً برجسب متفاوتی با آخرین وضعیت هر رد پیشوندی دارند، نقطه ثابت جدیدی ساخته‌ایم. پس اگر خودمان را محدود به انتخاب کوچکترین نقطه ثابت نکنیم، به توصیفات صوری خوبی از برنامه‌ها دست پیدا نخواهیم کرد.

در مورد نقطه ثابت این نکته باقی می‌ماند که چه طور می‌توانیم مطمئن باشیم که چنین نقطه ثابتی وجود دارد. در این رابطه، باید گفت که مجموعه‌هایی که از ردهای پیشوندی تشکیل شده‌اند، با رابطه‌ی زیرمجموعه بودن یک شبکه‌ی کامل را تشکیل می‌دهند. چون تابع \mathcal{S}^* یکنوا است، بنا به قضیه‌ی نستِر-تارسکی^{۲۵} [۲۲] برای تابع \mathcal{S}^* کوچکترین نقطه ثابت وجود دارد. یک تابع به نام lfp^\subseteq نیز داریم، که یک تابع از نوع $P(\mathcal{S}^*) \rightarrow P(\mathcal{S}^*)$ را به عنوان ورود می‌گیرد، سپس کوچکترین نقطه ثابت این تابع را باز می‌گرداند. باقی تعاریف نیز به این شکل هستند:

$$\mathcal{S}^*[\mathcal{S}] = \text{lfp}^\subseteq \mathcal{F}[\mathcal{S}],$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{S}]X = \{\langle \text{at}[\mathcal{S}], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{E}\mathbb{V}\} \cup$$

$$\{\pi_2 \langle l, \rho \rangle \langle \text{aft}[\mathcal{S}], \rho \rangle \mid \pi_2 \langle l, \rho \rangle \in X \wedge \mathcal{B}[\mathcal{B}]\rho = \text{False} \wedge l = \text{at}[\mathcal{S}]\} \cup$$

$$\{\pi_2 \langle l, \rho \rangle \langle \text{at}[\mathcal{S}_b], \rho \rangle \mid \pi_3 \pi_2 \langle l, \rho \rangle \in X \wedge \mathcal{B}[\mathcal{B}]\rho = \text{True} \wedge$$

$$\langle \text{at}[\mathcal{S}_b], \rho \rangle \pi_3 \in \mathcal{S}[\mathcal{S}_b] \wedge l = \text{at}[\mathcal{S}]\}$$

²⁴Fixpoint

²⁵Knaster-Tarski Theorem

◀ $S = ;$:

$$\mathcal{S}^*[S] = \{\langle at[S], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\} \cup \{\langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\}$$

◀ $S = \{SI\}$:

$$\mathcal{S}^*[S] = \mathcal{S}^*[SI]$$

در اینجا، تعریف معنای برنامه‌ها به پایان می‌رسد.

فصل ۲

صوری سازی جدید برای روش واریسی مدل

در این فصل، صورت جدیدی برای روش واریسی مدل ارائه می شود. در این صورت، برای بیان ویژگی های مورد بررسی به جای منطق زمانی از عبارات منظم استفاده می شود. با صحبت در مورد ویژگی های برنامه ها شروع می کنیم، سپس به معرفی نحو و معناشناسی عبارات منظم، به عنوان یک منطق برای بیان ویژگی ها، می پردازیم و پس از آن، صورت جدید روش واریسی مدل را ارائه می کنیم. در انتها، به بحث در مورد تصمیم پذیری این روش می پردازیم.

۱.۲ ویژگی های برنامه ها

تا به اینجای کار، نحو و معناشناسی یک زبان برنامه نویسی را تعریف کرده ایم. در این بخش، در مورد ویژگی های برنامه هایی که در این زبان نوشته می شوند، با توجه به معناشناسی رد پیشوندی که در فصل پیش تعریف کردیم، صحبت می کنیم. برای برنامه هایی که در یک زبان برنامه نویسی نوشته می شوند، می توان به اشکال مختلفی ویژگی تعریف کرد. مثلا ویژگی های کاملاً نحوی، مثل اینکه طول برنامه چند خط است یا هر کاراکتر چند بار به کار رفته است، یا ویژگی های محاسباتی، مثل بررسی سرعت برنامه یا میزان استفاده ی آن از حافظه که عموماً در نظریه الگوریتم و نظریه پیچیدگی محاسبه بررسی می شود. در اینجا، منظور ما از تعریف ویژگی، متناسب است با گردش کار برنامه ها. به کمک عبارات منظم که در این فصل تعریف خواهد شد؛ ویژگی های مورد نظر قابل بیان هستند.

۱.۱.۲ ویژگی‌ها

همان‌طور که در فصل قبل دیدیم، معنای هر برنامه‌ی P با یک مجموعه‌ی $S^*[P]$ مشخص می‌شود. درواقع، S^* تابعی از \mathbb{P} (مجموعه‌ی تمام برنامه‌ها) به $P(S^*)$ است. بنابراین، یک برنامه را در ورودی می‌گیرد و یک مجموعه از ردهای پیشوندی را باز می‌گرداند. پس هر ویژگی زیر مجموعه‌ای از $P(S^*)$ است، به عبارت دیگر عضوی از $P(P(S^*))$. تعریف ویژگی‌ها به کمک رابطه‌ی زیرمجموعه بودن از سنت‌های نظریه‌ی تعبیر مجرد [۸] است.

۲.۱.۲ عبارات منظم

برای بیان ویژگی‌های برنامه‌ها به یک چارچوب نیاز داریم. در صورت سنتی روش واریسی مدل از منطق‌های زمانی برای بیان ویژگی‌ها به صورت صوری استفاده می‌کرد و این احتیاج به یک منطق را برای ارائه‌ی یک صوری‌سازی کامل که رسیدن به صورت جدید واریسی مدل است، به ما نشان می‌دهد. طبق [۶] یک دلیل برای استفاده از عبارات منظم، که متداول‌تر بودن آن بین جامعه‌ی برنامه نویسان است. منظور این است که برنامه نویسان از شاخه‌های مختلف این تخصص همگی با عبارات منظم آشنا هستند، درحالی‌که برنامه نویسانی که با منطق‌های زمانی آشنایی داشته باشند، بسیار کم هستند و جایگزینی اولی با دومی می‌تواند به رواج استفاده از روش واریسی مدل برای درستی‌یابی برنامه‌های کامپیوتری کمک کند. ابتدا، نحو این منطق را تعریف می‌کنیم، سپس به سراغ معناشناسی آن می‌رویم. عبارات منظمی که در اینجا تعریف می‌کنیم، با عبارات منظم سنتی که در علوم کامپیوتر رایج هستند، در جزئیات متفاوت هستند.

۳.۱.۲ نحو عبارات منظم

فرق عمده‌ای که نحو عبارات منظم ما با عبارات منظم سنتی دارد، در اتم^۱هاست. اتم‌ها در عبارات منظم سنتی بدون ساختار بودند، اما در اینجا، ساختار دارند. در اینجا، هر اتم یک زوج مرتب است، متشکل از مجموعه‌ی L شامل برچسب‌ها و عبارت بولی B . این زوج مرتب را به شکل $L : B$ نمایش می‌دهیم.

با یادآوری اینکه $\mathbb{X}, \mathbb{B}, \mathbb{R}$ به ترتیب مجموعه‌های عبارت‌های منظم، عبارت‌های بولی و متغیرها هستند، نحو عبارات منظم به شکل زیر است:

¹Atom

تعریف ۱.۰۲. (نحو عبارات منظم): اگر فرض کنیم

$$L \in P(\mathbb{L}),$$

$$x, y, \dots \in \mathbb{X},$$

$$\underline{x}, \underline{y}, \dots \in \underline{\mathbb{X}},$$

$$B \in \mathbb{B},$$

$$R \in \mathbb{R},$$

\mathbb{R} توسط گرامر زیر تولید می‌شود.

$$\begin{aligned} R ::= & \varepsilon \\ & | L : B \\ & | R_1 R_2 \text{ (or } R_1 \bullet R_2) \\ & | R_1 \mid R_2 \text{ (or } R_1 + R_2) \\ & | R_1^* \\ & | R_1^+ \\ & | (R_1) \end{aligned}$$

همان طور که قابل مشاهده است، در اینجا، عملگرهای دوتایی چسباندن (\bullet) و انتخاب^۲ (\mid) را به همراه عملگرهای یگانی * و $^+$ داریم. در ادامه، با توجه به تعریف معنانشناسی عبارات منظم^۳، خواهیم دید که معنای عملگر یگانی $^+$ به وسیله عملگر یگانی * قابل بیان است. توجه شود که پرانتزها هم جزئی از نحو قرار داده شده‌اند.

نمادگذاری: منظور از عبارت منظم B : ؟ همان عبارت منظم $\mathbb{L} : B$ است. عبارت منظم $l : B$ به جای عبارت منظم B : $\{l\}$ به کار می‌رود و منظور از عبارت منظم $\neg l : B$ نیز عبارت منظم B : $\mathbb{L} \setminus \{l\}$ است.

همچنین یک نکته‌ی قابل توجه، با توجه به تعاریف فصل قبل، وجود یک مجموعه به نام $\underline{\mathbb{X}}$ در کنار \mathbb{X} که از قبل داشتیم، است. به ازای هر $x \in \mathbb{X}$ یک $\underline{x} \in \underline{\mathbb{X}}$ داریم، به عبارت دیگر $\underline{\mathbb{X}} = \{\underline{x} \mid x \in \mathbb{X}\}$. \underline{x} متغیر x در ابتدای هر برنامه است. همان طور که تعریف می‌کنیم:

^۲Choice

^۳Regular Expressions Semantics

تعریف ۲.۲. (محیط اولیه^۴): به هر تابع $\rho : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$ یک محیط اولیه می‌گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی محیط‌های اولیه را با \mathbb{EV} نمایش می‌دهیم.

۴.۱.۲ معناسازی عبارات منظم

معنای هر عبارت منظم را با استفاده از تابع S^r به نام معناسازی عبارات منظم^۵ تعریف می‌کنیم. این تابع در ورودی‌اش یک عبارت منظم R را می‌گیرد و یک مجموعه از زوج مرتب‌های $\langle \rho, \pi \rangle$ را که $\rho \in \mathbb{EV}$ و $\pi \in \mathbb{G}^*$ باز می‌گرداند. بنابراین این تابع از نوع $\mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{EV} \times \mathbb{G}^*)$ است. منظور از \mathbb{G}^* نیز $\mathbb{G}^+ \cup \{\epsilon\}$ است. تعریف استقرایی تابع S^r را در ادامه آورده‌ایم.

تعریف ۳.۲. (معناسازی عبارات منظم): تابع $S^r : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{EV} \times \mathbb{G}^*)$ به صورت استقرایی روی نحو عبارات منظم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^r[\epsilon] = \{\langle \rho, \epsilon \rangle \mid \rho \in \mathbb{EV}\}.$$

معنای عبارت منظم ϵ مجموعه‌ای شامل زوج مرتب‌هایی از محیط‌های اولیه‌ی مختلف در کنار رد پیشوندی تهی است.

$$S^r[L : B] = \{\langle \rho, \langle l, \rho \rangle \rangle \mid l \in L \wedge B[B]\rho, \rho\}.$$

معنای عبارت منظم $L : B$ مجموعه‌ای است شامل زوج مرتب‌هایی که عضو اول آن‌ها محیط‌های اولیه‌ی مختلف و عضو دوم آن‌ها ردهای پیشوندی تک‌عضوی $\langle l, \rho \rangle$ هستند. در این ردهای پیشوندی، برچسب l باید در L که مجموعه‌ای از برچسب‌هاست حضور داشته باشد. همین‌طور باید عبارت بولی B درباره‌ی محیط اولیه ρ و محیط ρ برقرار باشد. با توجه به حضور محیط‌های اولیه، در اینجا B به جای اینکه از نوع $\mathbb{EV} \rightarrow \mathbb{BOOL}$ باشد، از نوع $\mathbb{EV} \rightarrow \mathbb{EV} \rightarrow \mathbb{BOOL}$ است (منظور از \mathbb{BOOL} همان مجموعه‌ی $\{T, F\}$ است). بعد از تمام شدن تعریف معناسازی عبارات منظم، دوباره A و B را با در نظر گرفتن محیط اولیه تعریف خواهیم کرد.

$$S^r[R_1 R_2] = S^r[R_1] \bowtie S^r[R_2].$$

⁴Initial Environment

⁵Semantics of Regular Expressions

به طوریکه، با فرض اینکه دو مجموعه‌ی S و S' هر یک معنای یک عبارت منظم باشند:

$$S \bowtie S' = \{ \langle \underline{\rho}, \pi \pi' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in S \wedge \langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in S' \}.$$

اگر یک عبارت منظم داشته باشیم که از چسباندن دو عبارت منظم R_1 و R_2 به هم ساخته شده باشد، آنگاه معنای این عبارت منظم از زوج مرتب‌هایی تشکیل شده است که عضو اول آن‌ها محیط‌های اولیه هستند و عضو دوم آن‌ها از چسباندن ردهای پیشوندی موجود در عضو دوم اعضای مجموعه‌ی معنای این دو عبارت منظم تشکیل شده است. این عملگر چسباندن که در اینجا برای معنای عبارت‌های منظم تعریف شده است، با عملگر چسباندن برای معنای برنامه‌ها که در فصل پیش ارائه شد، متفاوت است. مورد دوم هم با نماد \bowtie روی ردهای پیشوندی تعریف شد، اما در تعریفی که در این فصل از چسباندن ارائه داده‌ایم، این عملگر روی ردهای پیشوندی تعریف نشده است، بلکه روی زوج‌های مرتبی که در معنای هر عبارت منظمی حضور دارند، تعریف می‌شود.

تا این قسمت از تعریف معناشناسی عبارات منظم که رسیده‌ایم، تا حدی به درکی شهودی از اینکه به چه شکلی عبارات منظم راهی برای توصیف ویژگی در مورد برنامه‌ها هستند، دست پیدا کرده‌ایم. همان‌طور که در حالت قبل دیدیم، سازگاری هر زوج مرتب $L : B$ با یک وضعیت داخل یک رد پیشوندی بررسی می‌شود. این زوج مرتب‌ها موازی با وضعیت‌ها در ردهای پیشوندی معنای برنامه پیش می‌روند و سازگاری آن‌ها با یکدیگر بررسی می‌شود تا واریسی مدل انجام شود.

$$S^r[R_1 \mid R_2] = S^r[R_1] \cup S^r[R_2].$$

این حالت، معنای اعمال عملگر انتخاب روی دو عبارت منظم را توصیف می‌کند. معنای اعمال این عملگر به صورت اجتماع معنای هر دو عبارت منظم تعریف شده است.

$$S^r[R]^0 = S^r[\varepsilon],$$

$$S^r[R]^{n+1} = S^r[R]^n \bowtie S^r[R].$$

دو عبارت اخیر، برای تعریف معنای عملگرهای * و $^+$ تعریف شده‌اند. عملگر \bowtie و معنای $S^r[\varepsilon]$ را هم که قبلاً تعریف کرده بودیم و 0 و n هم اعداد طبیعی‌اند.

$$S^r[R^*] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^r[R]^n,$$

$$S^r[R^+] = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} S^r[R]^n.$$

این دو عبارت تعریف معنای دو عملگر * و $^+$ هستند. منظور از \mathbb{N} مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. همان‌طور که قبل‌تر هم اشاره شد، معنای عملگر $^+$ با عملگر * قابل بیان است. اضافه می‌کنیم که معنای عملگر * را در فرازبان (و نه در منطق تعریف شده در اینجا) می‌توان با عملگر انتخاب تعریف کرد.

$$S^r[[R]] = S^r[[R]].$$

این قسمت از تعریف هم صرفاً بیان می‌کند که پرانتزها تاثیری در معنای عبارات منظم ندارند که کاملاً قابل انتظار است، چرا که وجود پرانتز قرار است صرفاً در خواص نحو منطق نقش داشته باشد.

تعریف ۴.۲. (ارضا پذیری): می‌گوییم، در محیط اولیه‌ی ρ رد پیشوندی π عبارت منظم R را ارضا می‌کند، اگر و تنها اگر $\langle \rho, \pi \rangle \in S^r[[R]]$.

تعریف معناشناسی عبارات منظم در اینجا تمام می‌شود، اما همان‌گونه که در لابه‌لای تعاریف گفته شد، احتیاج داریم که A و B را از نو تعریف کنیم:

تعریف ۵.۲. توابع $\mathcal{A} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{EV} \rightarrow (\mathbb{EV} \rightarrow \mathbb{V})$ و $\mathcal{B} : \mathbb{B} \rightarrow (\mathbb{EV} \rightarrow (\mathbb{EV} \rightarrow \mathbb{BOOL}))$ به شکل استقرایی به ترتیب روی ساختار عبارت‌های حسابی $A \in \mathbb{A}$ و عبارت‌های بولی $B \in \mathbb{B}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{A}[[1]]_{\rho}, \rho = 1,$$

$$\mathcal{A}[[x]]_{\rho}, \rho = \rho(x),$$

$$\mathcal{A}[[x]]_{\rho}, \rho = \rho(x),$$

$$\mathcal{A}[[A_1 - A_2]]_{\rho}, \rho = \mathcal{A}[[A_1]]_{\rho}, \rho - \mathcal{A}[[A_2]]_{\rho}, \rho,$$

$$\mathcal{B}[[A_1 < A_2]]_{\rho}, \rho = \mathcal{A}[[A_1]]_{\rho}, \rho < \mathcal{A}[[A_2]]_{\rho}, \rho,$$

$$\mathcal{B}[[B_1 \text{ and } B_2]]_{\rho}, \rho = \mathcal{B}[[B_1]]_{\rho}, \rho \uparrow \mathcal{B}[[B_2]]_{\rho}, \rho.$$

قابل مشاهده است که تعاریف جدید تا حد خوبی به تعاریف قبلی شبیه هستند و فرق عمده صرفاً وارد شدن ρ است.

حال که معناشناسی عبارات منظم را داریم، به طور مختصر به مقایسه‌ی عبارات منظمی که در این بحث تعریف کرده‌ایم و عبارات منظم کلاسیک در باقی نوشته‌ها و موضوعات می‌پردازیم. جبر کلین^۶ یک ساختار جبری است که تعمیمی است از عبارات منظم معرفی شده در [۱۴]. سرو کله‌ی عبارات منظم با تعاریف غیر هم‌ارز در قسمت‌های مختلفی از علوم کامپیوتر پیدا می‌شود. هدف از ارائه‌ی جبر کلین ارائه‌ی یک تعریف عام به منظور در بر داشتن تعاریف غیر هم‌ارز بوده است. البته، برای جبر کلین هم تعاریف مختلف غیر هم‌ارز معرفی شده اند که در [۱۵] این تعاریف و ارتباطشان با یکدیگر بررسی شده است. همین طور، این مقاله خود با یک تعریف از جبر کلین شروع کرده است که به شکل زیر است.

تعریف ۶.۲. (جبر کلین): به مجموعه‌ی \mathbb{K} به همراه دو عملگرهای دوتایی \bullet و $+$ و عملگر یگانی $*$ و ثابت‌های 0 و 1 یک جبر کلین می‌گویند، اگر و تنها اگر $(\mathbb{K}, +, \bullet, 0, 1)$ یک نیم‌حلقه‌ی خودتوان باشد، به طوریکه عملگر $+$ شرکت پذیر، جابجایی و خودتوان با عضو یکه‌ی 0 باشد؛ عملگر \bullet شرکت پذیر با عنصر یکه‌ی 1 باشد؛ \bullet روی $+$ از هر دو طرف پخش پذیر باشد و 0 برای \bullet قانون جذب داشته باشد.

طبق این تعریف، اگر عبارات منظمی که در اینجا تعریف کرده‌ایم، یک جبر کلین می‌بود، می‌بایستی که برای هر عبارت منظم R می‌داشتیم $S^r[\llbracket \varepsilon R \rrbracket] = S^r[\llbracket \varepsilon \rrbracket]$ ، چون ε نقش صفر عملگر چسباندن (که عملگر ضرب جبر کلین است) را دارد و یک جبر کلین برای صفر قانون جذب را به عنوان یک اصل دارد. اما در مورد عبارات منظمی که در اینجا تعریف کرده‌ایم، داریم $S^r[\llbracket \varepsilon R \rrbracket] = S^r[\llbracket R \rrbracket]$. پس می‌توانیم همینجا نتیجه بگیریم که عبارات منظمی که داریم، با یک تعریف استاندارد و فراگیر از عبارات منظم ناسازگار است. پس باید در نظر داشته باشیم که ممکن است بسیاری از خواص مورد مطالعه قرار گرفته در مورد عبارات منظم کلاسیک، در مورد عبارات منظمی که در اینجا تعریف کرده‌ایم برقرار نباشد. بیشتر از این به این بحث نمی‌پردازیم که بحث دامنه‌دار و منحرف کننده‌ایست. یک قضیه را در مورد عبارات منظم ارائه می‌دهیم که پخش پذیری عملگر انتخاب به عملگر چسباندن است و بعد به ادامه‌ی راه اصلیمان می‌پردازیم.

قضیه ۷.۲. برای عبارات منظم R, R_1, R_2 داریم:

$$S^r[\llbracket R \bullet (R_1 + R_2) \rrbracket] = S^r[\llbracket (R \bullet R_1) + (R \bullet R_2) \rrbracket].$$

⁶Kleene Algebra

اثبات.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^r[R \bullet (R_1 + R_2)] &= \mathcal{S}^r[R] \bowtie \mathcal{S}^r[(R_1 + R_2)] \\
&= \mathcal{S}^r[R] \bowtie \mathcal{S}^r[R_1 + R_2] = \mathcal{S}^r[R] \bowtie (\mathcal{S}^r[R_1] \cup \mathcal{S}^r[R_2]) \\
&= \{ \langle \underline{\rho}, \pi \pi' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R] \wedge (\langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1] \vee \langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in \mathcal{S}^r[R_2]) \} \\
&= \{ \langle \underline{\rho}, \pi \pi' \rangle \mid (\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1]) \vee (\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in \mathcal{S}^r[R_2]) \} \\
&= \{ \langle \underline{\rho}, \pi \pi' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1] \} \cup \{ \langle \underline{\rho}, \pi \pi' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi' \rangle \in \mathcal{S}^r[R_2] \} \\
&= (\mathcal{S}^r[R] \bowtie \mathcal{S}^r[R_1]) \cup (\mathcal{S}^r[R] \bowtie \mathcal{S}^r[R_2]) = \mathcal{S}^r[R \bullet R_1] \cup \mathcal{S}^r[R \bullet R_2] \\
&= \mathcal{S}^r[(R \bullet R_1) + (R \bullet R_2)]
\end{aligned}$$

□

تا اینجا کار، بیشتر مفاهیمی که برای بیان صورت جدید روش واری مدل احتیاج داریم را بیان کرده‌ایم، هرچند که هنوز برخی از تعاریف باقی مانده‌اند.

۵.۱.۲ گونه‌های مختلف نحو عبارات منظم

به عنوان قسمت آخر این بخش، گونه‌های مختلفی از نحو عبارات منظم را بیان می‌کنیم که هر کدام در واقع زیرمجموعه‌ای از منطقی که توصیف کرده‌ایم را تشکیل می‌دهند. بعضی از آن‌ها را در همین فصل و برخی دیگر را در فصل بعدی استفاده می‌کنیم.

می‌توانیم به هر یک از این عبارات منظم به چشم یک منطق متفاوت نگاه کنیم. هرچند که معناشناسی عبارات منظم به عنوان معناشناسی هر یک از این منطق‌ها باقی می‌ماند. با توجه به اینکه هر یک از این منطق‌ها زیرمجموعه‌ی عبارات منظم هستند، می‌توان گفت معناشناسی هر یک از آن‌ها همان تابع \mathcal{S}^r با دامنه‌ی محدود شده است.

اولین گونه‌ای که می‌خواهیم بیان کنیم، گونه‌ای است که در اعضای آن اصلاً اتم حضور ندارد و کل عبارت‌های منظم عضو این منطق از ε ‌ها تشکیل شده‌اند.

تعریف ۸.۲. (عبارات منظم تهی^۷ - \mathbb{R}_ε) : \mathbb{R}_ε توسط گرامر زیر تولید می‌شود.

$$R ::= \varepsilon \mid R_1 R_2 \mid R_1 + R_2 \mid R_1^* \mid R_1^+(R_1).$$

^۷Empty Regular Expressions

با توجه به آنچه گفتیم، معنای همه‌ی این عبارت‌های منظم عضو این منطق برابر $\{\langle \rho, \epsilon \rangle\}$ خواهد بود.
گونه‌ی بعدی عبارات منظم ناتهی^۸ است.

تعریف ۹.۰.۲. (عبارات منظم ناتهی - \mathbb{R}^+): توسط گرامر زیر تولید می‌شود.

$$R ::= L : B \mid \epsilon R_2 \mid R_1 \epsilon \mid R_1 R_2 \mid R_1 + R_2 \mid R_1^+ \mid (R_1).$$

دلیل وجود ϵR_2 و $R_1 \epsilon$ در تعریف این است که ممکن است معنای عبارت منظمی در این منطق با $\langle \rho, \epsilon \rangle$ برابر نباشد، اما در آن عبارات منظم، ϵ حضور داشته باشد. با این تفصیل، می‌توان دید که دو مجموعه‌ی \mathbb{R}_ϵ و \mathbb{R}^+ یک افراز برای مجموعه‌ی \mathbb{R} هستند، چونکه معنای هر عبارت منظم در \mathbb{R} یا با $\langle \rho, \epsilon \rangle$ برابر هست یا نیست. بنابراین شاید به نظر برسد که تعریف یکی از این نحوها کافی باشد. اما این طور نیست، چون ممکن است که درجایی احتیاج داشته باشیم که تعریفی استقرایی روی هر یک از این دو ساختار ارائه دهیم، یا اینکه در اثبات حکمی بخواهیم از استقرا روی یکی از این دو ساختار استفاده کنیم.

گونه‌ی آخر عبارات منظم ما نیز عبارات منظم بدون انتخاب^۹ است.

تعریف ۱۰.۰.۲. (عبارات منظم بدون انتخاب - \mathbb{R}^\dagger): توسط گرامر زیر تولید می‌شود.

$$R ::= \epsilon \mid L : B \mid R_1 R_2 \mid R_1^* \mid R_1^+ \mid (R_1).$$

۲.۲ صورت جدید مسئله‌ی واریسی مدل

بالاخره، به هدف نهایی این فصل رسیدیم. می‌خواهیم صورت جدیدی از مسئله‌ی واریسی مدل را بیان کنیم.
پیش از ارائه‌ی تعریف واریسی مدل، نیاز داریم که عملگر بستر پیشوندی^{۱۰} را برای یک مجموعه از ردهای پیشوندی معرفی کنیم.

^۸Non-empty Regular Expressions

^۹Choice-free Regular Expressions

^{۱۰}Prefix Closure

تعریف ۱۱.۲. (بستار پیشوندی): اگر $\Pi \in P(\mathbb{EV} \times \mathfrak{S}^+)$ ، آنگاه بستار پیشوندی Π را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{prefix}(\Pi) = \{ \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \mid \pi \in \mathfrak{S}^+ \wedge \exists \pi' \in \mathfrak{S}^* : \langle \underline{\rho}, \pi \pi' \rangle \in \Pi \}.$$

برای درک بهتر مفهوم بستار پیشوندی به مثال زیر توجه شود.

مثال ۱۲.۲. اگر $\Pi = \{ \langle \underline{\rho}, \langle l_1, \rho_1 \rangle \langle l_2 \rho_2 \rangle \rangle \langle l_3, \rho_3 \rangle \rangle, \langle \underline{\rho}, \langle l_1', \rho_1' \rangle \langle l_2' \rho_2' \rangle \rangle \}$ باشد (Π شامل دو عضو است)، آنگاه:

$$\begin{aligned} \text{prefix}(\Pi) = \{ & \langle \underline{\rho}, \langle l_1, \rho_1 \rangle \rangle, \langle \underline{\rho}, \langle l_1, \rho_1 \rangle \langle l_2 \rho_2 \rangle \rangle, \langle \underline{\rho}, \langle l_1, \rho_1 \rangle \langle l_2 \rho_2 \rangle \langle l_3, \rho_3 \rangle \rangle, \\ & \langle \underline{\rho}, \langle l_1', \rho_1' \rangle \rangle, \langle \underline{\rho}, \langle l_1', \rho_1' \rangle \langle l_2' \rho_2' \rangle \rangle \}. \end{aligned}$$

حال به ارائه‌ی صورت جدید روش واریسی مدل می‌رسیم.

تعریف ۱۳.۲. (واریسی مدل): اگر $P \in \mathbb{P}, R \in \mathbb{R}^+, \underline{\rho} \in \mathbb{EV}$ آنگاه:

$$P, \underline{\rho} \models R \Leftrightarrow (\{ \underline{\rho} \} \times \mathcal{S}^*[\![P]\!]) \subseteq \text{prefix}(\mathcal{S}^r[\![R \bullet (? : T)^*\!]\!]).$$

این تعریف بیان می‌کند که اگر برنامه‌ی P با محیط اولیه‌ی $\underline{\rho}$ اجرا شود، این برنامه در صورتی ویژگی‌ای که با یک عبارت منظم R بیان شده است را دارد که معنای آن زیرمجموعه‌ی بستار پیشوندی معنای عبارت منظم $R \bullet (? : T)^*$ باشد. توجه شود که محیط اولیه‌ای که برای برنامه‌ی تحت بررسی در نظر گرفته‌ایم، صرفاً به این منظور در تعریف قرار داده شده است که بتوانیم معنای برنامه‌ها را با معنای عبارت‌های منظم قابل قیاس کنیم. دلیل حضور محیط اولیه در معنای عبارت‌های منظم نیز در صورت سوم روش واریسی مدل مشخص می‌شود، یعنی جایی که واریسی مدل روی ساختار برنامه‌ها تعریف شده است و ردهای پیشوندی موجود در معنای هر عبارت دستوری یا لیست عبارت‌های دستوری با محیط متفاوتی شروع می‌شوند و اطلاعات محیط اولیه‌ی برنامه در این ردها حضور ندارد (با اینکه ممکن است به آن نیاز داشته باشیم). در این صورت از روش واریسی مدل و صورت بعدی، محیط‌های اولیه صرفاً حضور دارند و در عمل نقش مهمی ندارند.

در مورد نقش عبارت منظم $(? : T)^*$ و عملگر prefix نیز می‌توان گفت، بنا به تصمیم مبدا این روش، اگر یک رد پیشوندی، با عبارت منظم ناسازگاری نداشته باشد و از آن کوتاه‌تر باشد، این رد پیشوندی با ویژگی بیان شده را دارد. این نکته صرفاً در مورد حضور prefix است. حضور $(? : T)^*$ نیز باعث می‌شود اگر طول عبارت منظم مورد بررسی کمتر از رد پیشوندی باشد و ناسازگاری‌ای مشاهده نشده باشد، رد پیشوندی دارای ویژگی R در نظر گرفته شود. در اینجا، بیان صورت جدید واریسی مدل به اتمام می‌رسد.

۳.۲ در مورد توقف پذیری

در این بخش نکته‌ای در مورد کار که به نظر نگارنده رسیده، مطرح شده است. اگر صحبت ما در اینجا درست باشد، این به این معنی خواهد بود که روشی که در حال توصیفش هستیم، تصمیم ناپذیر است، به عبارت دیگر قابلیت پیاده‌سازی را ندارد!

بحث ما در اینجا در مورد توقف پذیری است. در [۶] در مورد تعریف توقف یک برنامه صحبتی به میان نیامده است. یک تعریف صوری که خودمان می‌توانیم برای این مفهوم، بیاوریم این است:

تعریف ۱۴.۲. (توقف پذیری): برنامه‌ی P را به همراه محیط اولیه ρ توقف پذیر^{۱۱} می‌گوییم، اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\pi \in S^*[P]$ ، که $(\rho$ محیط متناظر با محیط اولیه‌ی ρ است):

$$\pi = \langle at[P], \rho \rangle \pi'$$

و اینکه $\langle aft[P], \rho' \rangle$ در π حضور داشته باشد. در این صورت می‌نویسیم $P, \rho \downarrow$. همین تعریف را برای لیست عبارت‌های دستوری SI یا عبارت دستوری S صرفاً با جایگذاری به جای برنامه‌ی P نیز داریم.

در این تعریف، توقف پذیری صرفاً برای یک محیط اولیه تعریف شده است. در اینجا، توقف پذیری به متناهی بودن ردهای پیشوندی موجود در برنامه ارتباطی ندارد. با توجه به معنانشناسی رد پیشوندی، تعریف کردن توقف پذیری به معنای وجود رد پیشوندی متناهی در معنای برنامه به هیچ عنوان مناسب نیست، چون معنانشناسی خاصیت پیشوندی بودن را دارد و مطمئن هستیم، در معنای هر برنامه‌ای حتماً یک رد پیشوندی متناهی با محیط اولیه‌ی مورد بررسی وجود دارد.

اگر هم بخواهیم، تعریف توقف پذیری را عدم حضور ردهای پیشوندی نامتناهی در معنای برنامه در نظر بگیریم، به تعریف قوی‌تری نسبت به آنچه ارائه دادیم، رسیده‌ایم. در اینجا، ما سعی می‌کنیم، ضعیف‌ترین تعریف معقول را ارائه دهیم. در این صورت، از اثباتی که بر اساس تعریف ارائه شده، برای تصمیم ناپذیری می‌آوریم، مطمئن‌تر خواهیم شد. با این حال، در قضیه‌ی بعدی می‌بینیم که تعریفی که ارائه کرده‌ایم با اینکه بگوییم، در معنای برنامه رد پیشوندی نامتناهی وجود ندارد معادل است.

¹¹Terminable

قضیه ۱۵.۲. برای برنامه‌ی P و محیط اولیه‌ی ρ داریم $P, \rho \downarrow$ ، اگر و تنها اگر ρ محیط متناظر با محیط اولیه‌ی ρ باشد و

$$\forall \pi \in \mathfrak{S}^+ : \langle at[P], \rho \rangle \pi \in S^*[P] \rightarrow \langle at[P], \rho \rangle \pi \in \mathbb{R}^+.$$

اثبات. (\Rightarrow) برای این حالت، باید ثابت کنیم که در معنای هر برنامه‌ای رد پیشوندی‌ای وجود دارد که با $\langle at[P], \rho \rangle$ شروع شده است و به ازای یک محیط ρ' به $\langle aft[P], \rho' \rangle$ ختم شده است. در این اثبات، از تعریف برچسب‌ها که در ضمیمه‌ی [۶] آمده است، استفاده کرده‌ایم. داریم: $P = SI$ و $aft[P] = aft[SI]$. حکم را با استقرا روی ساختار SI ثابت می‌کنیم.

$$\blacktriangleright SI = \exists :$$

داریم:

$$S^*[\exists] = \{ \langle at[\exists], \dot{\rho} \rangle \mid \dot{\rho} \in \mathbb{EV} \}.$$

همین طور طبق تعریف برچسب‌ها داریم:

$$at[\exists] = aft[\exists]$$

پس حکم برقرار است.

$$\blacktriangleright SI = SI' S :$$

اینکه در معنای SI ، رد پیشوندی‌ای شامل $\langle aft[SI], \rho' \rangle$ وجود داشته باشد، با توجه به تعاریفی که داریم، به این وابسته است که در معنای S ، دنباله‌ای شامل $\langle aft[S], \rho' \rangle$ وجود داشته باشد. برای اینکه این گزاره را ثابت کنیم، باید آن را روی ساختار S ثابت کنیم که در واقع بخش اصلی اثبات این سمت قضیه است.

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = x \doteq A ; :$$

در این حالت، با توجه به تعریف معنای S ، دنباله‌ی

$$\langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho[x \leftarrow \mathcal{A}[A]\rho] \rangle$$

در معنای عبارت دستوری به ازای هر ρ وجود دارد. پس دنباله‌ای به شکل بالا با محیطی متناظر با ρ هم در معنای عبارت دستوری حضور دارد.

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = ; :$$

با توجه به معنای این عبارت دستوری، دنباله‌ی زیر در معنای این عبارت دستوری وجود دارد.

$$\langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho \rangle$$

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = \text{if } (B) S_t :$$

در صورتی که $B[B]\rho = T$ برقرار باشد، دنباله‌ی

$$\langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_t], \rho \rangle \pi$$

در مجموعه‌ی معنای این عبارت دستوری حضور دارد، در حالیکه، $\langle at[S_t], \rho \rangle \pi$ داخل معنای S_t نیز هست. طبق فرض استقرا می‌دانیم که برچسب آخرین وضعیت π برابر است با $aft[S_t]$ که طبق تعاریف مربوط به برچسب‌ها داریم $aft[S_t] = aft[S]$. در صورتی که معنای عبارت بولی غلط باشد نیز، طبق تعریف، دنباله‌ی زیر در معنای عبارت دستوری موجود است.

$$\langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho \rangle$$

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = \text{if } (B) S_t \text{ else } S_f :$$

مانند حالت قبل است، منتها با این تفاوت که در صورتی که معنای عبارت بولی غلط باشد، دنباله‌ی زیر در معنای عبارت دستوری حضور دارد:

$$\langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_f], \rho \rangle \pi$$

همین طور، تساوی $aft[S_t] = aft[S] = aft[S_f]$ هم طبق تعریف برچسب‌ها برقرار است.

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = \text{while } (B) S_t :$$

در اثبات این سمت قضیه، این حالت پیچیده‌ترین حالت است و در واقع تنها حالتی است که در اثبات آن به فرض قضیه احتیاج داریم! همان طور که پیش‌تر گفتیم، معنای عبارت دستوری حلقه به کمک یک تابع تعریف می‌شود. معنای حلقه کوچکترین نقطه ثابت این تابع است، در حالیکه، این تابع وقتی روی یک مجموعه از ردهای پیشوندی اعمال شود، تاثیرات یک بار اجرای عبارت(های) دستوری درون حلقه را روی ردهای پیشوندی درون مجموعه اعمال می‌کند.

طبق تعریف \mathcal{F} ، مطمئن هستیم که رد پیشوندی‌ای که با محیط ρ شروع شود، در مجموعه‌ی معنای S وجود دارد، چون به ازای هر محیط ρ (نقطه به این خاطر است که با ρ خاص موجود در فرض اشتباه گرفته نشود) حالت $\langle at[S], \rho \rangle$ در هر اعمال تابع \mathcal{F} روی هر مجموعه‌ی دلخواه وجود دارد. چون معنای S را به عنوان کوچک‌ترین نقطه ثابت \mathcal{F} در نظر گرفته‌ایم، مطمئن هستیم که مجموعه‌ای که کوچک‌ترین نقطه ثابت تابع \mathcal{F} است، شامل رد پیشوندی $\langle at[S], \rho \rangle$ می‌شود. این رد پیشوندی، با اجرای \mathcal{F} تحت تاثیر قرار می‌گیرد. اگر معنای B در یکی از اعمال های \mathcal{F} غلط باشد، رد پیشوندی $\langle aft[S], \rho' \rangle \pi \langle at[S], \rho \rangle$ در معنای برنامه قرار خواهد گرفت. بنابراین، اجرای عبارت دستوری با این محیط اولیه توقف پذیر است. می‌دانیم که طبق تعریف تابع، چیزی به انتهای این رد پیشوندی اضافه نمی‌شود. از طرف دیگر، با این محیط اولیه، با توجه به تعریف، رد پیشوندی دیگری وجود ندارد که طولانی‌تر از رد پیشوندی مورد اشاره باشد.

در حالت دیگر، اگر فرض کنیم هیچ گاه به حالتی نمی‌رسیم که در آن معنای B غلط باشد هم با فرض مسئله به تناقض می‌خوریم، چون در آن صورت تابع \mathcal{F} مدام به دنباله‌هایی که با محیط ρ شروع می‌شوند، می‌افزاید و این یک دنباله‌ی نامتناهی را خواهد ساخت. در صورتی که معنای B هیچ گاه صحیح نباشد، حداقل حالت $\langle at[S_t], \rho'' \rangle$ به آخر دنباله‌های پیشین اضافه خواهد شد و از این جهت مطمئن هستیم که دنباله‌ی نامتناهی گفته شده در معنای عبارت دستوری حضور خواهد داشت. پس با این تفصیل، این حالت هم ثابت می‌شود.

►► $S = \text{break};$:

مهم‌ترین چیزی که در مورد برچسب‌ها در این عبارت دستوری^{۱۲} باید برقرار باشد، این است که اگر این عبارت دستوری بخشی از S_t در حلقه‌ی زیر باشد،

$$S' = \text{while } (B) S_t$$

در این صورت، تساوی $aft[S'] = brk-to[S_t]$ را طبق تعریف خواهیم داشت. انتظار می‌رود که $aft[\text{break};] = aft[S']$ باشد. اینکه اجرای برنامه پس از اجرای $\text{break};$ بعد از عبارت دستوری S' پی گرفته شود، انتظار معقولی است از صوری‌سازی‌ای که در حال توصیف گردش کار کامپیوتری

^{۱۲} در تعریف تابع aft روی برچسب‌ها در [۶] تعریف برای این عبارت دستوری مشخص نیست! در [۷] هم در مورد این برچسب‌ها بحث شده است. در آنجا، گفته شده است که در مورد بخش‌هایی از تعریف این توابع، که تعریف مشخصی ارائه نشده است، برداشت آزاد است! ما در اینجا سعی داریم، معقول‌ترین برداشتی که نسبت به درکمان از این کار می‌توانیم داشته باشیم را بیان کنیم.

است. البته در نظر گرفته شود که فرض کرده‌ایم که S' داخلی ترین حلقه‌ای است که $break$; درون آن جای دارد.

از پس این فرض‌های ما $aft[[break;]] = break - to[[S_t]]$ نتیجه می‌شود و طبق معنای عبارت دستوری $break$;، رد پیشوندی زیر در معنای این عبارت دستوری وجود دارد،

$$\langle at[[break;]], \rho \rangle \langle aft[[break;]], \rho \rangle$$

که نشانه‌ی توقف است.

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = \{S''\} :$$

در این صورت، توقف پذیری S'' را از فرض استقرای، استقرای قبلی (روی لیست عبارت‌های دستوری) داریم، پس $\{S''\}$ هم توقف پذیر است.
در اینجا، اثبات این طرف قضیه به پایان می‌رسد.

(\Leftarrow) دوباره باید از استقرا روی ساختار برنامه‌ها استفاده کنیم و دوباره چون هر برنامه‌ای مساوی با یک لیست از عبارت‌های دستوری است، ابتدا از استقرا روی ساختار لیست عبارت‌های و در دل آن روی ساختار خود عبارت‌های دستوری استفاده کنیم.
در این اثبات به غیر از یک حالت ساختار یک عبارت دستوری، که عبارت دستوری حلقه است، هر آنچه در مورد اثبات طرف راست قضیه گفتیم، به ما حکم را بدون نیاز به فرض نشان می‌دهد. بنابراین، فقط در مورد اثبات این یک حالت بحث می‌کنیم:

$$\blacktriangleright\blacktriangleright S = \text{while } (B) S_t :$$

اگر فرض کنیم این عبارت دستوری به ازای محیط ρ در حالت اول متوقف شده است، در واقع فرض کرده‌ایم که در معنای این عبارت دستوری رد پیشوندی $\langle at[[S]], \rho \rangle \pi \langle aft[[S]], \rho' \rangle \pi'$ وجود دارد. باید ثابت کنیم، به ازای π' دلخواه، اگر رد پیشوندی $\langle at[[S]], \rho \rangle \pi \langle aft[[S]], \rho' \rangle \pi'$ داخل $S^*[[S]]$ وجود داشته باشد، آنگاه $\pi' = \epsilon$ برقرار است.

اگر برچسب $aft[[S]]$ در یک وضعیت از رد پیشوندی‌ای که گفتیم، حضور داشته باشد، یعنی در یک دور از اجرای حلقه، عبارت بولی لزوماً معنای غلط داشته است. این باعث شده است که یک وضعیت شامل برچسب aft به یک رد پیشوندی چسبانده بشود و در نتیجه، این رد پیشوندی ساخته شده است. از طرفی دیگر هم می‌دانیم که وقتی معنای عبارت بولی حاضر در ساختار حلقه

غلط شده باشد، دیگر به ردهای پیشوندی داخل معنای حلقه چیزی اضافه نمی‌شود. بنابراین حالت ممکن $\pi' = \epsilon$ باقی نمی‌ماند. \square

پس با توجه به آنچه گفتیم، می‌توانیم با خیال راحت توقف پذیری یک برنامه با یک محیط اولیه را معادل متناهی بودن همه‌ی ردهای پیشوندی‌ای بدانیم که با محیط متناظر با آن محیط اولیه شروع شده‌اند. اگر در صورت ارائه شده از واریسی مدل عبارت منظم R را با عبارت منظم ϵ جایگزین کنیم، داریم:

$$P, \rho \models R \Leftrightarrow (\{\rho\} \times \mathcal{S}^*[\![P]\!]) \subseteq \text{prefix}(\mathcal{S}^*[\![\epsilon \bullet (? : T)^*\!]\!]) = \text{prefix}(\mathcal{S}^*[\![(? : T)^*\!]\!]).$$

طبق تعریف معنای عبارات منظم، هر رد پیشوندی متناهی‌ای داخل مجموعه‌ی سمت راستی رابطه‌ی زیرمجموعه بودن قرار می‌گیرد. این یعنی اگر الگوریتمی برای بررسی $P, \rho \models R$ داشته باشیم، این الگوریتم می‌تواند تشخیص دهد که آیا برنامه‌ی P با محیط اولیه‌ی ρ متوقف می‌شود یا خیر که الگوریتمی است برای مسئله‌ی توقف پذیری، مسئله‌ای که تصمیم ناپذیر است. بنابراین، چنین الگوریتمی نباید وجود داشته باشد که یعنی پیاده سازی‌ای برای روشی که در حال بیانش هستیم وجود ندارد. ادامه‌ی کار روی همین تعریف پیش می‌رود و دو صورت دیگر هم که قرار است ساختارمندتر باشند، در نهایت با این صورت معادل‌اند و در نتیجه تصمیم ناپذیرند.

فصل ۳

وارسی مدل منظم

در این فصل، به صورتی ساختارمندتر برای روش واریسی مدل می‌رسیم. ساختاری که در این فصل به صورت روش واریسی مدل اضافه می‌شود، ساختار عبارات منظم است و نام این صورت هم واریسی مدل منظم^۱ است. از این رو، پیش از اینکه به بیان واریسی مدل منظم بپردازیم، نیاز داریم که ابتدا، به بررسی و تعریف برخی خواص عبارات منظم بپردازیم که در ادامه، برای صورت واریسی مدل منظم مورد نیاز هستند.

۱.۳ برخی مفاهیم

در این بخش، ابتدا مفهوم هم‌ارز بودن را برای عبارات منظم تعریف می‌کنیم، سپس به سراغ تعریف دو تابع dnf و $fstnxt$ می‌رویم.

۱.۱.۳ هم‌ارزی عبارات منظم

هم‌ارزی^۲ بین دو عبارت منظم را با برابر بودن معنای آن دو تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۰ (هم‌ارزی عبارات منظم): دو عبارت منظم R_1 و R_2 را هم‌ارز می‌گوییم، اگر و تنها

^۱Regular Model Checking

^۲Equivalence

اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{S}^r[R_1] = \mathcal{S}^r[R_2]$$

و آن را با $R_1 \approx R_2$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۳. هم‌ارزی \approx تعریف شده روی مجموعه‌ی عبارت‌های منظم یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

اثبات. برای هر عبارت منظم R داریم:

$$\mathcal{S}^r[R] = \mathcal{S}^r[R] \Rightarrow R \approx R$$

پس \approx بازتابی است.

اگر $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ آنگاه داریم:

$$\mathcal{S}^r[R_1] = \mathcal{S}^r[R_2] \rightarrow \mathcal{S}^r[R_2] = \mathcal{S}^r[R_1] \Rightarrow R_1 \approx R_2 \rightarrow R_2 \approx R_1$$

پس \approx تقارنی است.

اگر $R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\mathcal{S}^r[R_1] = \mathcal{S}^r[R_2] \wedge \mathcal{S}^r[R_2] = \mathcal{S}^r[R_3] \rightarrow \mathcal{S}^r[R_1] = \mathcal{S}^r[R_3]$$

$$\Rightarrow R_1 \approx R_2 \wedge R_2 \approx R_3 \rightarrow R_1 \approx R_3$$

پس \approx متعدی است.

□

پس \approx یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲.۱.۳ فرم نرمال فصلی

در این فصل، برای معرفی صورت جدید واری مدلی نیاز به مفهوم فرم نرمال فصلی^۳ که در تعریف زیر آمده است.

تعریف ۳.۳. (فرم نرمال فصلی): عبارت منظم $R \in \mathbb{R}$ را یک فرم نرمال فصلی می‌گوییم، اگر و تنها اگر عبارت‌های منظم بدون انتخاب $R_1, R_2, \dots, R_n \in \mathbb{R}^{\dagger}$ چنان وجود داشته باشند که $R = R_1 + R_2 + \dots R_n$.

³Disjunctive Normal Form

در تعریف بالا، $=$ با \approx فرق می‌کند که منظور از آن همان تساوی نحوی است. در ادامه می‌خواهیم، یک تابع به اسم dnf تعریف کنیم که یک عبارت منظم R را می‌گیرد و عبارت منظم هم‌ارز به فرم نرمال فصلی تحویل می‌دهد.

تعریف ۴.۳. $(\text{تابع } \text{dnf})$: تابع dnf روی عبارات منظم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\blacktriangleleft \text{dnf}(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$\blacktriangleleft \text{dnf}(L : B) = L : B$$

$$\blacktriangleleft \text{dnf}(R_1 R_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_1^i R_2^j$$

where $R_1^1 + R_1^2 + \dots + R_1^{n_1} = \text{dnf}(R_1)$ and $R_2^1 + R_2^2 + \dots + R_2^{n_2} = \text{dnf}(R_2)$

$$\blacktriangleleft \text{dnf}(R_1 + R_2) = \text{dnf}(R_1) + \text{dnf}(R_2)$$

$$\blacktriangleleft \text{dnf}(R^*) = ((R_1)^*(R_2)^* \dots (R_n)^*)^*$$

where $\text{dnf}(R) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

$$\blacktriangleleft \text{dnf}(R^+) = \text{dnf}(RR^*)$$

$$\blacktriangleleft \text{dnf}((R)) = (\text{dnf}(R))$$

قضیه ۵.۳. اگر $R \in \mathbb{R}$ آنگاه $\text{dnf}(R)$ یک ترکیب نرمال فصلی است.

اثبات. از استقرا روی ساختار R استفاده می‌کنیم.

$$\blacktriangleright R = \varepsilon :$$

$$\text{dnf}(\varepsilon) = \varepsilon,$$

که یک فرم نرمال فصلی است.

$$\blacktriangleright R = L : B :$$

$$\text{dnf}(L : B) = L : B$$

که یک فرم نرمال فصلی است.

► $R = R_1 R_2$:

فرض استقرا این است که $\text{dnf}(R_1) = R_1^1 + R_1^2 + \dots + R_1^n$ و $\text{dnf}(R_2) = R_2^1 + R_2^2 + \dots + R_2^n$ درحالیکه، $\text{dnf}(R_1)$ و $\text{dnf}(R_2)$ ترکیب نرمال فصلی هستند، یعنی هر R_1^i و هر R_2^j عضو \mathbb{R}^+ است. طبق تعریف، داریم:

$$\text{dnf}(R_1 R_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_1^i R_2^j$$

که طرف راست گزاره‌ی بالا یک ترکیب نرمال فصلی است، چون هر $R_1^i R_2^j$ یک عضو از \mathbb{R}^+ است.

► $R = R_1 + R_2$:

فرض استقرا این است که $\text{dnf}(R_1)$ و $\text{dnf}(R_2)$ ترکیب نرمال فصلی هستند. طبق تعریف، $\text{dnf}(R_1 + R_2)$ برابر با $\text{dnf}(R_1) + \text{dnf}(R_2)$ است. بنابراین، این عبارت منظم یک ترکیب نرمال فصلی است.

► $R = R_1^*$:

طبق فرض استقرا، داریم که $\text{dnf}(R_1)$ یک ترکیب نرمال فصلی است. همین طور طبق تعریف dnf داریم:

$$\text{dnf}(R_1^*) = ((R_1^1)^* (R_1^2)^* \dots (R_1^n)^*)$$

که:

$$\text{dnf}(R_1) = R_1^1 + R_1^2 + \dots + R_1^n$$

واضح است که $((R_1^1)^* (R_1^2)^* \dots (R_1^n)^*)$ یک فرم نرمال فصلی است، چون می‌دانیم که در هیچ کدام از R_1^i ها عملگر + وجود ندارد و عملگر * و عملگر چسباندن هم تغییری در این وضع ایجاد نمی‌کنند.

► $R = R_1^+$:

طبق تعریف، داریم:

$$\text{dnf}(R_1^+) = \text{dnf}(R_1 R_1^*)$$

$$\text{dnf}(R_1^*) = ((R_1^1)^* (R_1^2)^* \dots (R_1^n)^*)$$

توجه شود $R' = \text{dnf}(R_1^*)$ عضو \mathbb{R}^f است. بعلاوه، از فرض استقرا داریم:

$$R_1 = R_1^1 + \dots + R_1^n$$

پس با توجه به تعریف dnf برای عملگر چسباندن و پخش پذیری چسباندن نسبت به انتخاب، خواهیم داشت:

$$\text{dnf}(R_1^+) = \sum_{i=1}^n R_1^i R'$$

$$\blacktriangleright R = (R_1) :$$

طبق تعریف، داریم:

$$\text{dnf}((R_1)) = (\text{dnf}(R_1))$$

طبق فرض استقرا $\text{dnf}(R_1)$ یک ترکیب نرمال فصلی است، بنابراین $R' \in \mathbb{R}^f$ هم $(\text{dnf}(R_1)) = R' \in \mathbb{R}^f$ یک ترکیب نرمال فصلی خواهد بود.

□

گزاره‌ی دیگری که برای اثبات مانده است، برقرار بودن $R \approx \text{dnf}(R)$ است. برای اثبات آن باید ابتدا قضیه‌ی زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۶.۳. برای هر دو عبارت منظم $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(R_1 + R_2)^* \approx (R_1^* R_2^*)^*.$$

اثبات. ثابت می‌کنیم:

$$1. \mathcal{S}^r \llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket \subseteq \mathcal{S}^r \llbracket (R_1^* R_2^*)^* \rrbracket,$$

$$2. \mathcal{S}^r \llbracket (R_1^* R_2^*)^* \rrbracket \subseteq \mathcal{S}^r \llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket.$$

اثبات 1:

$$\mathcal{S}^r \llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^r \llbracket (R_1 + R_2)^n \rrbracket$$

$$\Rightarrow \exists m (\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m \wedge \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \rho, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket R_1 + R_2 \rrbracket))$$

$$\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \rho, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket R_1 \rrbracket \cup \mathcal{S}^r \llbracket R_2 \rrbracket)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket R_1 \rrbracket] \vee \langle \underline{\rho}, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket R_2 \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket R_1^* R_2^* \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1^* R_2^*)^m \rrbracket] \subseteq \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1^* R_2^*)^* \rrbracket].
\end{aligned}$$

اثبات 2:

$$\begin{aligned}
&\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1^* R_2^*)^* \rrbracket] \Rightarrow \exists m (\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1^* R_2^*)^m \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m \wedge \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket R_1^* R_2^* \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \pi_i = \pi_i^1 \pi_i^2 \wedge \langle \underline{\rho}, \pi_i^1 \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket R_1^* \rrbracket] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi_i^2 \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket R_2^* \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \pi_i = \pi_i^1 \pi_i^2 \wedge \langle \underline{\rho}, \pi_i^1 \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi_i^2 \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1 + R_2)^* \bullet (R_1 + R_2)^* \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq m \rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi_i \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket]) \\
&\Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket ((R_1 + R_2)^*)^n \rrbracket] \Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1 + R_2)^* \rrbracket].
\end{aligned}$$

□

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی بالا، می‌توانیم با استفاده از یک برهان ساده به کمک استقرا روی اعداد طبیعی، حکم بالا را به جای ۲ برای تعداد دلخواه متناهی‌ای از عبارات منظم اثبات کنیم. در ادامه در واقع از این حکم در اثبات استفاده شده است.

قضیه ۷.۳. برای هر $R \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\text{dnf}(R) \approx R$$

اثبات. این اثبات با استقرا روی ساختار R انجام می‌شود. توجه شود که در هر حالت از استقرا اگر عبارات منظم R_1 و R_2 در ساختار R حضور داشته باشند، در مورد آن‌ها فرض گرفته‌ایم که $\text{dnf}(R_2) = R_2^1 + R_2^2 + \dots + R_2^m$ و $\text{dnf}(R_1) = R_1^1 + R_1^2 + \dots + R_1^n$.

$$\blacktriangleright R = \varepsilon :$$

$$\text{dnf}(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow \mathcal{S}^r[\llbracket \text{dnf}(\varepsilon) \rrbracket] = \mathcal{S}^r[\llbracket \varepsilon \rrbracket].$$

► $R = L : B$:

$$\text{dnf}(L : B) = L : B \Rightarrow \mathcal{S}^r[\text{dnf}(L : B)] = \mathcal{S}^r[L : B].$$

► $R = R_1 R_2$:

برای اثبات این حالت، باید دو گزاره‌ی زیر را ثابت کنیم:

$$1. \mathcal{S}^r[R_1 R_2] \subseteq \mathcal{S}^r[\text{dnf}(R_1 R_2)],$$

$$2. \mathcal{S}^r[R_1 R_2] \supseteq \mathcal{S}^r[\text{dnf}(R_1 R_2)].$$

اثبات 1:

فرض می‌کنیم که $\langle \underline{\rho}, \pi \rangle$ یک عضو دلخواه از $\mathcal{S}^r[\text{dnf}(R_1 R_2)]$ باشد. چون $\text{dnf}(R_1 R_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_1^i R_2^j$ ، پس داریم:

$$\exists k_1, k_2 (\pi \in \mathcal{S}^r[R_1^{k_1} R_2^{k_2}])$$

$$\Rightarrow \exists \pi_1, \pi_2 (\pi = \pi_1 \pi_2, \langle \underline{\rho}, \pi_1 \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1^{k_1}], \langle \underline{\rho}, \pi_2 \rangle \in \mathcal{S}^r[R_2^{k_2}])$$

در این صورت، داریم:

$$\mathcal{S}^r[R_1^{k_1}] \subseteq \mathcal{S}^r[R_1], \quad \mathcal{S}^r[R_2^{k_2}] \subseteq \mathcal{S}^r[R_2]$$

بنابراین:

$$\langle \underline{\rho}, \pi_1 \pi_2 \rangle = \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1 R_2].$$

اثبات 2: فرض کنید

$$\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1 R_2]$$

آنگاه

$$\exists \pi_1, \pi_2 (\pi = \pi_1 \pi_2 \text{ s.t. } \langle \underline{\rho}, \pi_1 \rangle \in \mathcal{S}^r[R_1], \langle \underline{\rho}, \pi_2 \rangle \in \mathcal{S}^r[R_2]).$$

طبق فرض استقرا، داریم:

$$\mathcal{S}^r[R_1] = \mathcal{S}^r[\text{dnf}(R_1)], \quad \mathcal{S}^r[R_2] = \mathcal{S}^r[\text{dnf}(R_2)]$$

$$\Rightarrow \exists k_1, k_2 (\langle \underline{\rho}, \pi_1 \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket R_1^{k_1} \rrbracket, \langle \underline{\rho}, \pi_2 \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket R_2^{k_2} \rrbracket)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket R_1^{k_1} R_2^{k_2} \rrbracket \subseteq \mathcal{S}^r \llbracket \text{dnf}(R_1 R_2) \rrbracket.$$

ادامه‌ی اثبات اصلی:

$$\blacktriangleright R = R_1 + R_2 :$$

$$\mathcal{S}^r \llbracket \text{dnf}(R_1 + R_2) \rrbracket = \mathcal{S}^r \llbracket \text{dnf}(R_1) + \text{dnf}(R_2) \rrbracket$$

$$= \mathcal{S}^r \llbracket \text{dnf}(R_1) \rrbracket \cup \mathcal{S}^r \llbracket \text{dnf}(R_2) \rrbracket.$$

طبق فرض استقرا عبارت بالایی با $\mathcal{S}^r \llbracket R_1 \rrbracket \cup \mathcal{S}^r \llbracket R_2 \rrbracket$ برابر است، پس داریم:

$$\mathcal{S}^r \llbracket R_1 \rrbracket \cup \mathcal{S}^r \llbracket R_2 \rrbracket$$

$$= \mathcal{S}^r \llbracket R_1 + R_2 \rrbracket.$$

$$\blacktriangleright R = R_1^* :$$

$$\mathcal{S}^r \llbracket \text{dfn}(R_1^*) \rrbracket = \mathcal{S}^r \llbracket ((R_1^1)^* (R_1^2)^* \dots (R_1^n)^*)^* \rrbracket$$

(طبق نتیجه‌ای که از قضیه‌ی قبل گرفتیم)

$$= \mathcal{S}^r \llbracket (R_1^1 + R_1^2 + \dots + R_1^n)^* \rrbracket = \mathcal{S}^r \llbracket (R_1)^* \rrbracket$$

$$= \mathcal{S}^r \llbracket R_1^* \rrbracket.$$

$$\blacktriangleright R = R_1^+ :$$

$$\mathcal{S}^r \llbracket \text{dfn}(R_1^+) \rrbracket = \mathcal{S}^r \llbracket \text{dfn}(R_1 R_1^*) \rrbracket.$$

در اینجا، عملگر چسباندن را داریم. در حالت‌های قبلی، این را نشان دادیم که چه طور در حضور عملگر چسباندن، حکم برقرار می‌شود. همان اثبات را در مورد همین گزاره هم می‌توانیم، بگوییم و پس از آن، به این شکل ادامه دهیم:

$$\mathcal{S}^r \llbracket \text{dfn}(R_1 R_1^*) \rrbracket = \mathcal{S}^r \llbracket R_1 R_1^* \rrbracket = \mathcal{S}^r \llbracket R_1^+ \rrbracket$$

► $R = (R_1)$:

$$\mathcal{S}^r[\llbracket \text{dnf}((R_1)) \rrbracket] = \mathcal{S}^r[\llbracket \text{dnf}(R_1) \rrbracket] = \mathcal{S}^r[\llbracket R_1 \rrbracket] = \mathcal{S}^r[\llbracket (R_1) \rrbracket].$$

□

۳.۱.۳ سر و دم عبارات منظم

در این بخش، تابعی را روی عبارات‌های منظم تعریف می‌کنیم که یک عبارت منظم را می‌گیرد و یک زوج مرتب از عبارات‌های منظم را تحویل می‌دهد، سپس به بیان یک قضیه در مورد این تابع می‌پردازیم. این تابع را با fstnxt نشان می‌دهیم و نام آن سر و دم^۴ است. قرار است این تابع یک عبارت منظم را بگیرد و آن را به این شکل تجزیه کند که اولین اتم موجود در عبارت منظم که انگار سر عبارت منظم است، از باقی آن که دم آن عبارت منظم می‌شود، جدا شود. تابع روی عبارات منظم تهی و عبارات منظمی که عملگر + را دارند تعریف نمی‌شود.

تعریف ۸.۳. (تابع سر و دم): تابع سر و دم $\text{fstnxt} : (\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

- ◀ $\text{fstnxt}(L : B) = \langle L : B, \varepsilon \rangle$
- ◀ $\text{fstnxt}(R_1 R_2) = \text{fstnxt}(R_2)$ where $R_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon$
- ◀ $\text{fstnxt}(R_1 R_2) = \langle R_1^n \in \mathbb{R}_\varepsilon ? \langle R_1^f, R_2 \rangle : \langle R_1^f, R_1^n \bullet R_2 \rangle \rangle$
where $R_1 \notin \mathbb{R}_\varepsilon$ and $\text{fstnxt}(R_1) = \langle R_1^f, R_1^n \rangle$
- ◀ $\text{fstnxt}(R^+) = \langle R^n \in \mathbb{R}_\varepsilon ? \langle R^f, R^* \rangle : \langle R^f, R^n \bullet R^* \rangle \rangle$ where $\text{fstnxt}(R) = \langle R^f, R^n \rangle$
- ◀ $\text{fstnxt}((R)) = \text{fstnxt}(R)$

از این تعریف در صورتی از واریسی مدل که در این فصل ارائه می‌شود، استفاده می‌شود. یک قضیه در آخر این بخش آمده است که مهم‌ترین نتیجه در مورد تابع سر و دم است. برای اثبات آن قضیه ابتدا یک نحو^۵ برای $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger$ می‌آوریم.

^۴First Next

^۵ ساختاری که تابع سر و دم روی آن تعریف شده است، با ساختاری که در صورت قضیه‌ی بعدی برای مجموعه‌ی $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger$ آورده‌ایم، ریخت متفاوتی دارد و البته لزومی هم ندارد که یکی باشند. ساختاری که در صورت قضیه‌ی بعدی ارائه کرده‌ایم، در [۶] نیامده است و خودمان با هدف اثبات قضیه‌ی ۱۰.۳، این ساختار را در اینجا ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۹.۳. $\mathbb{R}' = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$ توسط گرامر زیر تولید می شود.

$$R ::= L : B \mid \varepsilon R_2 \mid R_1 \varepsilon \mid R_1 R_2 \mid R_1^+ \mid (R_1)$$

اثبات. برای $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$ از استقرا روی ساختار بالا استفاده می کنیم:

► $R = L : B$:

طبق ساختار \mathbb{R}^+ و \mathbb{R}^{\dagger} داریم $L : B \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$.

► $R = \varepsilon R_2$:

که در آن $R_2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$. طبق ساختار \mathbb{R}^+ ، $\varepsilon R_2 \in \mathbb{R}^+$ و طبق ساختار \mathbb{R}^{\dagger} داریم چون $R_2 \in \mathbb{R}^{\dagger}$ و $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\dagger}$ ، پس $\varepsilon R_2 \in \mathbb{R}^{\dagger}$. پس $\varepsilon R_2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$.

► $R = R_1 \varepsilon$:

مشابه حالت قبل ثابت می شود.

► $R = R_1 R_2$:

طبق فرض استقرا، داریم $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$ و در هر دو ساختار عملگر چسباندن را داریم. پس این حالت هم اثبات می شود.

► $R = R_1^+$:

مثل حالت قبل، چون عملگر $^+$ در هر دو ساختار موجود است، به کمک فرض استقرا اثبات می شود.

► $R = (R_1)$:

مثل حالت قبل اثبات می شود.

در اینجا، اثبات $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$ کامل می شود. حال به سراغ اثبات $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger} \subseteq \mathbb{R}'$ می رویم. برای اثبات این بخش، با فرض اینکه $R \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^{\dagger}$ ، از استقرا روی ساختار اعضای \mathbb{R}^{\dagger} استفاده می کنیم (این اثبات می تواند با استقرا روی ساختار اعضای \mathbb{R}^+ هم انجام شود).

► $R = \varepsilon$:

چون $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger \notin \varepsilon$ ، پس این حالت باطل است و در مورد آن نیازی به ارائه‌ی اثبات نیست.

$$\blacktriangleright R = L : B :$$

در این صورت، طبق ساختار \mathbb{R}' داریم $R \in \mathbb{R}'$.

$$\blacktriangleright R = R_1 R_2 :$$

اینجا هم با توجه به اینکه طبق فرض استقرا $R_1, R_2 \in \mathbb{R}'$ ، مثل حالت قبل چون $+$ در ساختار \mathbb{R}' حضور دارد، حکم ثابت می‌شود.

$$\blacktriangleright R = R_1^* :$$

چون به ازای هیچ عبارت منظم R_1 ای R_1^* داخل \mathbb{R}^+ نمی‌افتد، پس بررسی این حالت هم نیاز نیست.

$$\blacktriangleright R = R_1^+ :$$

مثل عملگر $+$ ، با توجه به فرض استقرا و اینکه $+$ در ساختار \mathbb{R}' حضور دارد، این حالت هم اثبات می‌شود.

$$\blacktriangleright R = (R_1) :$$

شبه به حالت قبلی است.

□

قضیه ۱۰.۳. برای هر عبارت منظم $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger$ ، اگر $\langle L : B, R' \rangle = \text{fstnxt}(R)$ و $R' \in \mathbb{R}^\dagger$ و $R \approx L : B \bullet R'$.

اثبات. قضیه را به استقرا روی ساختار اعضای $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger$ اثبات می‌کنیم.

$$\blacktriangleright R = L : B :$$

در این حالت، طبق تعریف تابع سر و دم، داریم $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, \varepsilon \rangle$. از طرف دیگر $\mathcal{S}^r[[L : B \bullet \varepsilon]] = \mathcal{S}^r[[L : B]]$ و ε عضو \mathbb{R}^\dagger است.

► $R = \varepsilon R_2$:

طبق تعریف تابع سر و دم، داریم $\text{fstnxt}(\varepsilon R_2) = \text{fstnxt}(R_2)$. فرض استقرا این است که اگر $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R'_2 \rangle$ پس $L : B \bullet R'_2 \approx R_2$ و $R'_2 \in \mathbb{R}^\dagger$ آنگاه $\text{fstnxt}(R_2) = \langle L : B, R'_2 \rangle$. طبق فرض استقرا، $R'_2 \in \mathbb{R}^\dagger$ و از طرفی داریم:

$$R = \varepsilon R_2 \approx R_2 \approx L : B \bullet R'_2$$

► $R = R_1 \varepsilon$:

در این حالت امکان ندارد $R_1 = \varepsilon$ باشد، چون در آن صورت خواهیم داشت، $R = \varepsilon \varepsilon \in \mathbb{R}_\varepsilon$ که تناقض است، چون $\varepsilon \varepsilon$ در دامنه‌ی تابع سر و دم نیست. طبق تعریف سر و دم اگر داشته باشیم $\text{fstnxt}(R_1) = \langle L : B, R'_1 \rangle$ در این صورت، بنا به اینکه $R'_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon$ برقرار باشد یا نباشد، دو حالت را داریم:

►► $R'_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon$:

در این صورت، $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, \varepsilon \rangle$ برقرار است. داریم $R \in (\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger)$ پس چون R_2 زیر رشته‌ی R است، پس $R_2 \in \mathbb{R}^\dagger$ برقرار است. در این صورت، $R = L : B \varepsilon$ نیز برقرار خواهد بود. بنابراین، $L : B \varepsilon \approx L : B \bullet \varepsilon$ هم بدیهی خواهد بود.

►► $R'_1 \notin \mathbb{R}_\varepsilon$:

در این صورت، گزاره‌ی $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R'_1 \bullet \varepsilon \rangle$ طبق تعریف سر و دم برقرار است. چون $R \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^\dagger$ ، پس زیر رشته‌های آن نیز عملگر $+$ را نخواهند داشت، پس $R \in \mathbb{R}^\dagger$. در این صورت نیز، واضح است که:

$$L : B \bullet R'_1 \bullet \varepsilon \approx R_1 \varepsilon = R$$

► $R = R_1 R_2$:

اگر یکی از R_1 و R_2 مساوی ε باشند، حالاتی که بررسی کرده‌ایم اتفاق می‌افتند. اگر هر دو عبارت منظم برابر با ε باشند نیز به تناقض می‌خوریم، چون در این صورت دیگر در \mathbb{R}^+ این عبارت منظم

را نداریم. پس تنها یک حالت می ماند و آن این است که هیچ یک از این دو عبارت منظم تهی نباشند. در این صورت، اگر فرض کنیم $\text{fstnxt}(R_1) = \langle L : B, R'_1 \rangle$ ، مسئله بنا به اینکه $R'_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon$ برقرار هست یا خیر، به دو حالت افراز می شود.

$$\blacktriangleright\blacktriangleright R'_1 \notin \mathbb{R}_\varepsilon :$$

در این صورت $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R'_1 \bullet R_2 \rangle$. مانند استدلالی که در حالت قبلی آوردیم، خواهیم داشت $R'_1 \bullet R_2 \in \mathbb{R}^\dagger$. علاوه بر این، طبق فرض استقرا داریم $R_1 \approx L : B \bullet R'_1$ ، پس:

$$L : B \bullet R'_1 \bullet R_2 \approx R_1 \bullet R_2 = R$$

(عملگر چسباندن شرکت پذیر است). پس این حالت اثبات می شود.

$$\blacktriangleright\blacktriangleright R'_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon :$$

در این صورت، $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R_2 \rangle$. مثل حالت های قبل ثابت می شود که $R_2 \in \mathbb{R}^\dagger$ و داریم:

$$R = L : B \bullet R_2 \Rightarrow L : B \bullet R_2 \approx R$$

$$\blacktriangleright R = R_1^+ :$$

با فرض اینکه $\text{fstnxt}(R_1) = \langle L : B, R'_1 \rangle$ ، بنا به اینکه $R'_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon$ برقرار باشد یا نباشد، دو حالت خواهیم داشت:

$$\blacktriangleright\blacktriangleright R'_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon :$$

در این صورت طبق تعریف تابع سر و دم، $\text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R_1^* \rangle$ را داریم. چون داخل R'_1 و $L : B$ عملگر + وجود ندارد R_1^* عضو \mathbb{R}^\dagger خواهد بود. جای دیگری از این عبارت منظم وجود ندارد که در آن بتوان وجود این عملگر را متصور شد. همین طور، داریم:

$$\text{fstnxt}(R_1) = \langle L : B, R'_1 \rangle \rightarrow R'_1 \in \mathbb{R}^\dagger \wedge L : B \bullet R'_1 \approx R_1$$

(گزاره ی بالا فرض استقراست).

$$R_1^* \approx (L : B \bullet R'_1)^* \approx (L : B \bullet \varepsilon)^* \approx (L : B)^*$$

(هم‌ارزی وسطی به خاطر این است که R'_1 عضو \mathbb{R}^+ است. اگر یکی از دو هم‌ارزی دیگر هم برقرار نباشند کلاً عملگر * خوش تعریف نخواهد بود، پس این دو هم‌ارزی باید برقرار باشند.)

$$\Rightarrow L : B \bullet R_1^* \approx L : B \bullet (L : B)^* \approx (L : B)^+$$

$$\blacktriangleright\blacktriangleright R'_1 \notin \mathbb{R}_\varepsilon :$$

با توجه به تعریف تابع سر و دم و فرض استقرا، در این حالت داریم $\langle L : B, R'_1 \bullet R_1^* \rangle = \text{fstnxt}(R)$.
به همان دلیل حالت قبلی، می‌دانیم که R_1^* عضو \mathbb{R}^+ است و طبق فرض استقرا داریم $R'_1 \in \mathbb{R}^+$.
بنابراین داریم $R'_1 \bullet R_1^* \in \mathbb{R}^+$.
با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$L : B \bullet R'_1 \approx R_1$$

$$\Rightarrow L : B \bullet R'_1 \bullet R_1^* \approx R_1 R_1^* \approx R_1^+$$

$$\blacktriangleright R = (R_1) :$$

□

از فرض استقرا نتیجه می‌شود.

این بخش، در این قسمت به پایان می‌رسد. حال ابزارهای کافی برای بیان صورت واری مدل منظم را در اختیار داریم.

۲.۳ واری مدل منظم

همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، می‌خواهیم در این فصل یک صورت معادل با صورتی که در فصل پیش برای روش واری مدل آورده شده بود، ارائه کنیم. تا اینجا این فصل، صرفاً به معرفی چند مفهوم که برای بیان صورت جدید به آن‌ها احتیاج داریم، پرداخته‌ایم. در این بخش ابتدا این صورت جدید را بیان می‌کنیم و سپس اثبات می‌کنیم که صورت جدید با صورت قبلی معادل است. همان‌طور که پیش‌تر هم اشاره شد، تفاوت این دو صورت در این است که در این صورت ساختار عبارات منظم اثر دارد، در حالیکه، صورت قبلی ساختاری نداشت.

۱.۲.۳ صورت واری مدل منظم

در نهایت، برای تعریف صورت واری مدل منظم به یک تابع به نام M خواهیم رسید که در ورودی‌اش، یک زوج متشکل از یک محیط اولیه و یک عبارت منظم را در کنار یک برنامه می‌گیرد و در خروجی، همه‌ی ردهای پیشوندی موجود در معنای برنامه که عبارت منظم را ارضا می‌کنند، داخل یک مجموعه بر می‌گرداند. اما در این بین، مفهوم سازگاری یک رد پیشوندی با یک عبارت منظم چگونه مشخص می‌شود؟ این نکته‌ای است که تا به حال در مورد آن بحث نکرده‌ایم و حالا می‌خواهیم، تعریف تابع M^t را با این هدف به بحث وارد کنیم. البته، این تابع یک ویژگی بیشتر هم دارد. ویژگی دیگر این است که اگر عبارت منظم با رد پیشوندی سازگار نباشد، تابع به ما می‌گوید که کجای عبارت منظم ناسازگاری وجود داشته است. همین طور اگر رد پیشوندی با عبارت منظم سازگار باشد، این تابع به ما نشان می‌دهد که عبارت منظم تا کجا بررسی شده است. فهمیدن این موضوع با نگاه به تعریف ساده‌تر است و البته، نباید فراموش کرد که سازگاری‌ای که داریم، هماهنگ با صورت قبلی با داشتن عملگر prefix و الحاق عبارت منظم $(T : ?)$ است.

تعریف ۱۱.۳. (واری گر رد پیشوندی): تابع واری گر رد پیشوندی $M^t : (\mathbb{E} \times \mathbb{R}^t) \rightarrow \mathbb{G}^{+\infty} \rightarrow (\mathbb{B} \times \mathbb{R}^t)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\blacktriangleleft M^t \langle \underline{\rho}, \varepsilon \rangle \pi = \langle T, \varepsilon \rangle$$

(برای هر عضو دیگر \mathbb{R}_ε هم حالت بالایی برقرار است. دو حالت پایینی برای عبارت‌های منظم عضو $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^t$ هستند.)

$$\blacktriangleleft M^t \langle \underline{\rho}, R \rangle \varepsilon = \langle T, R \rangle$$

$$\blacktriangleleft M^t \langle \underline{\rho}, R \rangle \pi = \langle \langle \underline{\rho}, \langle l_1, \rho_1 \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L : B \rrbracket ? M^t \langle \underline{\rho}, R' \rangle \pi' : \langle F, R \rangle \rangle$$

$$\text{where } \pi = \langle l_1, \rho_1 \rangle \pi' \text{ and } \langle L : B, R' \rangle = \text{fstnxt}(R)$$

در مسیر رسیدن به تعریف M ، به معرفی یک تابع دیگر هم می‌پردازیم. این تابع را با M^\dagger نشان می‌دهیم. در واقع، همان کاری را که M قرار است به ازای همه‌ی عبارت‌های منظم انجام دهد، این تابع روی عبارت‌های منظمی که + ندارند انجام می‌دهد.

تعریف ۱۲.۳. (واری مدل منظم محدود به \mathbb{R}^\dagger): تابع واری مدل منظم محدود به \mathbb{R}^\dagger $M^\dagger : (\mathbb{E} \times \mathbb{R}^\dagger) \rightarrow P(\mathbb{G}^{+\infty}) \rightarrow P(\mathbb{G}^{+\infty} \times \mathbb{R}^\dagger)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$M^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \Pi = \{ \langle \pi, R' \rangle | \pi \in \Pi \wedge M^t \langle \underline{\rho}, R \rangle \pi = \langle T, R' \rangle \}$$

حالا خود M را تعریف می‌کنیم. تعریف این تابع چیزی نیست جز اجتماع گرفتن از خروجی تابع M^\dagger ، به ازای عبارتهای منظمی که در فرم نرمال فصلی عبارت منظم ورودی تابع حضور دارند. البته، بخشی از اطلاعاتمان از هر رد پیشوندی در هر زوجی که در خروجی M^\dagger وجود دارد، حذف می‌شود. به عبارت دیگر، صرفاً ردهای پیشوندی را در مجموعه‌ای که خروجی M است، داریم. اطلاعات برای هر رد پیشوندی یک عبارت منظم است که بخشی از R است که سازگاری‌اش با رد پیشوندی بررسی نشده است. برای ردهای پیشوندی‌ای که در خروجی M حضور دارند و طولشان بیشتر یا مساوی عبارت منظم مورد بررسی است، این عبارت منظم برابر با تهی است.

تعریف ۱۳.۳. (وارسی مدل منظم):

تابع واریسی مدل منظم $M : (\mathbb{E}\mathbb{V} \times \mathbb{R}) \rightarrow P(\mathcal{G}^{+\infty}) \rightarrow (\mathbb{E}\mathbb{V} \times P(\mathcal{G}^{+\infty}))$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$M\langle \underline{\rho}, R \rangle \Pi = \bigcup_{i=1}^n \{ \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \mid \exists R' \in \mathbb{R} : \langle \pi, R' \rangle \in M^\dagger \langle \underline{\rho}, R_i \rangle \Pi \}$$

$$\text{where } \text{dnf}(R) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

در این صورت، اگر ویژگی $R \in \mathbb{R}$ در محیط اولیه‌ی $\underline{\rho}$ برای برنامه‌ی P برقرار باشد، می‌نویسیم

$$P, \underline{\rho} \models_r R$$

و برقرار بودن این رابطه با شرط زیر تعریف می‌شود:

$$P, \underline{\rho} \models_r R \iff \{ \underline{\rho} \} \times \mathcal{S}^*[P] \subseteq M\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P]$$

با این تعریف، در واقع زمانی می‌توانیم بگوییم، برنامه‌ی P ویژگی R را دارد که $M\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P] = \{ \underline{\rho} \} \times \mathcal{S}^*[P]$. در واقع، انگار تابع $M\langle \underline{\rho}, R \rangle$ مثل یک صافی روی مجموعه‌ی $\mathcal{S}^*[P]$ عمل می‌کند، پس خروجی این مجموعه زیر مجموعه‌ی $\{ \underline{\rho} \} \times \mathcal{S}^*[P]$ است.

قضیه ۱۴.۳. برای هر برنامه‌ی P ، محیط اولیه‌ی $\underline{\rho}$ و عبارت منظم R داریم:

$$M\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P] \subseteq \{ \underline{\rho} \} \times \mathcal{S}^*[P].$$

اثبات. اگر زوج $\langle \underline{\rho}, \pi \rangle$ عضو $M\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P]$ باشد، با فرض $\text{dnf}(R) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ طبق تعریف M ، وجود دارند $R' \in \mathbb{R}$ و عدد i بین ۱ و n که:

$$\langle \pi, R' \rangle \in M^\dagger \langle \underline{\rho}, R_i \rangle \mathcal{S}^*[P]$$

که طبق تعریف \mathcal{M}^\dagger یعنی:

$$\pi \in \mathcal{S}^*[P] \wedge \mathcal{M}^\dagger(\underline{\rho}, R_i)\pi = \langle T, R' \rangle$$

که از $\pi \in \mathcal{S}^*[P]$ می‌توان نتیجه گرفت $\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \{\underline{\rho}\} \times \mathcal{S}^*[P]$.

□

مجموعه‌ی معنای یک برنامه را می‌توان به مجموعه‌ای از دسته‌ها افراز کرد که در هر یک از این دسته‌ها ردهای پیشوندی‌ای حضور دارند که وضعیت اول آن‌ها یکسان است. قاعدتا، در هر یک از این دسته‌ها باید وضعیت‌های بعدی هم، در صورت وجود، به طور موازی با یکدیگر یکسان باشند، یعنی مثلاً در یک مجموعه از افراز توصیف شده، همه‌ی ردهای پیشوندی‌ای که عضو دوم دارند، عضو دومشان با هم برابر است. این گزاره در مورد عضو سوم و چهارم و غیره هم برقرار است. در هر دسته از این افراز، یک رد پیشوندی ماکسیمال⁶ وجود خواهد داشت که توصیف تمام و کمال برنامه در اجرا با وضعیت اول مختص آن دسته است. اگر ردهای پیشوندی با محیط اولیه‌ی یکسان به اشکال مختلفی ادامه پیدا کنند، باید زبان برنامه نویسی مورد بررسی غیرقطعی باشد. در صورتیکه، در زبان و معنانشاسی این زبانی که در فصل اول تعریف کردیم، مولفه‌ای از غیرقطعی بودن حضور ندارد.

حال برای هر برنامه‌ی P که ویژگی R در مورد آن در حال بررسی است، می‌توانیم همین افراز را روی مجموعه‌ی $\mathcal{M}(\underline{\rho}, R)\mathcal{S}^*[P]$ در نظر بگیریم. می‌توانیم هر دسته از این افراز را متناظر با دسته‌ای در افرازی که روی $\mathcal{S}^*[P]$ توصیف کردیم بدانیم، دقیقاً موقعی که وضعیت اولیه در ردهای پیشوندی موجود در دو دسته یکسان باشند.

اگر در هر دسته از این افراز روی $\mathcal{S}^*[P]$ ، رد پیشوندی ماکسیمال این دسته در دسته‌ی متناظر در $\mathcal{M}(\underline{\rho}, R)\mathcal{S}^*[P]$ وجود داشته باشد، در این صورت، $\mathcal{M}(\underline{\rho}, R)\mathcal{S}^*[P] = \{\underline{\rho}\} \times \mathcal{S}^*[P]$. اگر دسته‌ای از افراز روی $\mathcal{M}(\underline{\rho}, R)\mathcal{S}^*[P]$ دارای عضو ماکسیمال متفاوتی نسبت به همان دسته روی $\mathcal{S}^*[P]$ باشد، این عضو ماکسیمال کوتاه‌تر از عضو ماکسیمال همان دسته در $\mathcal{S}^*[P]$ است و این یعنی ناسازگاری‌ای با عبارت منظم مورد بررسی وجود داشته است. محل وقوع ناسازگاری را تابع \mathcal{M}^\dagger می‌تواند به ما بگوید. محل ناسازگاری عبارت منظمی است که زوج عضو ماکسیمال دسته‌ی مورد نظر در خروجی یکی از اعمال‌های \mathcal{M}^\dagger روی بخش‌های مختلف $\text{dnf}(R)$ است.

⁶Maximal

۲.۲.۳ درستی و تمامیت

حال به اثبات معادل بودن صورت جدید با صورت قبلی می‌پردازیم. در [۶] این اثبات^۷ که یک قضیه‌ی دوطرفه است، تحت دو قضیه به نام‌های درستی^۸ و تمامیت^۹ آمده است. درستی به این معناست که اگر یک بررسی در صورت جدید انجام شود، نتیجه‌ای یکسان با انجام بررسی برای همان برنامه و همان عبارت منظم در صورت قبلی دارد. تمامیت نیز یعنی هر بررسی‌ای که با صورت قبلی انجام شده، نتیجه‌ی یکسانی با انجام همان بررسی در صورت جدید دارد.

قضیه ۱۵.۳. (قضیه درستی): اگر P یک برنامه، R یک عبارت منظم و ρ یک محیط اولیه باشند، آنگاه داریم:

$$P, \rho \models_r R \Rightarrow P, \rho \models R$$

اثبات. طبق تعریف دو صورت، باید با فرض اینکه داریم:

$$\{\rho\} \times \mathcal{S}^*[P] \subseteq \mathcal{M}(\rho, R) \mathcal{S}^*[P]$$

ثابت کنیم:

$$\{\rho\} \times \mathcal{S}^*[P] \subseteq \text{prefix}(\mathcal{S}^r[R \bullet (? : T)^*])$$

در این راستا، می‌توانیم گزاره‌ی زیر را ثابت کنیم که از گزاره‌ی قبلی قوی‌تر است و آن را نتیجه می‌دهد:

$$\mathcal{M}(\rho, R) \mathcal{S}^*[P] \subseteq \text{prefix}(\mathcal{S}^r[R \bullet (? : T)^*])$$

در مورد عبارت منظم R ، فرض می‌کنیم $\text{dnf}(R) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ که هر R_i ذکر شده عضو \mathcal{R}^t است. فرض می‌کنیم $\langle \rho, \pi \rangle \in \mathcal{M}(\rho, R) \mathcal{S}^*[P]$ آنگاه وجود دارد k و R' که $\langle \pi, R' \rangle \in \mathcal{M}^t(\rho, R_k) \mathcal{S}^*[P]$ که طبق تعریف \mathcal{M}^t خواهیم داشت:

$$\pi \in \mathcal{S}^*[P] \wedge \mathcal{M}^t(\rho, R_k) \pi = \langle T, R' \rangle$$

^۷نگارنده‌ی این پایان نامه، به درستی دو اثبات موجود در [۶] بسیار بد بین است! در اثبات تمامیت، برهان به شکل عجیبی بی‌ربط است و در اثبات قضیه درستی، ایرادات فنی ریزی در جزئیات وجود دارد که با تعاریف در تناقض است. از این رو برهان‌هایی که در اینجا آورده‌ایم، جدید هستند.

^۸Soundness

^۹Completeness

طرف چپ گزاره‌ی عطفی بالا در فرض بود. در ادامه‌ی کار با طرف راست این گزاره پیش می‌رویم:

$$\mathcal{M}^t(\underline{\rho}, R_k)\pi = \langle T, R' \rangle$$

در مورد R_k دو حالت داریم، یا $R_k \approx \varepsilon$ برقرار است، یا اینگونه نیست ($R_k \not\approx \varepsilon$).

$$\blacktriangleright R_k \approx \varepsilon :$$

در این صورت می‌توانیم، ثابت کنیم:

$$\text{prefix}(\mathcal{S}^r[R \bullet (? : T)^*]) = \{\underline{\rho}\} \times \mathfrak{G}^+$$

با توجه به پخش پذیری عملگر چسباندن روی عملگر انتخاب، که پیش‌تر ثابت کردیم، داریم:

$$R \bullet (? : T)^* \approx (R_1 + R_2 + \dots + R_m) \bullet (? : T)^*$$

$$\approx R_1 \bullet (? : T)^* + R_2 \bullet (? : T)^* + \dots + R_n \bullet (? : T)^*$$

چون $R_k \approx \varepsilon$ ، داریم:

$$R_1 \bullet (? : T)^* + R_2 \bullet (? : T)^* + \dots + R_k \bullet (? : T)^* + \dots + R_n \bullet (? : T)^*$$

$$\approx R_1 \bullet (? : T)^* + R_2 \bullet (? : T)^* + \dots + \varepsilon \bullet (? : T)^* + \dots + R_n \bullet (? : T)^*$$

و از طرف دیگر داریم:

$$\varepsilon \bullet (? : T)^* \approx (? : T)^* = (\{\underline{\rho}\} \times \mathfrak{G}^+)$$

پس $\text{prefix}(\mathcal{S}^r[R \bullet (? : T)^*])$ مجموعه‌ی $\{\underline{\rho}\} \times \mathfrak{G}^+$ را به عنوان زیرمجموعه در درون خود دارد و عضوی بیش از این هم طبق تعریفش نمی‌تواند داشته باشد، پس:

$$\text{prefix}(\mathcal{S}^r[R \bullet (? : T)^*]) = \{\underline{\rho}\} \times \mathfrak{G}^+$$

که این گزاره نتیجه می‌دهد:

$$\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \text{prefix}(\mathcal{S}^r[R \bullet (? : T)^*])$$

► $R_k \not\approx \varepsilon$:

همان طور که پیشتر اشاره شد، این فرض یعنی $R_k \in R^+ \cap R^+$. پس مجاز هستیم از تابع سر و دم استفاده کنیم. فرض می‌کنیم $\text{fstnxt}(R_k) = \langle L_k^1 : B_k^1, R_k^1 \rangle$. همین طور فرض می‌کنیم:

$$\pi = \langle l_0, \rho_0 \rangle \langle l_1, \rho_1 \rangle \langle l_2, \rho_2 \rangle \dots \langle l_l, \rho_l \rangle$$

قرار دهید:

$$\pi(i) = \langle l_i, \rho_i \rangle \langle l_{i+1}, \rho_{i+1} \rangle, \dots, \langle l_l, \rho_l \rangle$$

داریم:

$$\mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k \rangle \pi = \langle T, R' \rangle \Rightarrow \forall R'' \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k \rangle \pi \neq \langle F, R'' \rangle$$

پس لاجرم تساوی زیر برقرار است (با توجه به سر و دم R_k):

$$\mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k \rangle \pi = \mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k^1 \rangle \pi(1)$$

بدون کاستن از کلیت (چون ممکن است $R_k^1 \approx \varepsilon$)، فرض می‌کنیم کاری که انجام دادیم را می‌توانیم روی دم خروجی عبارت منظم R_k (یعنی R_k^1) تکرار کنیم:

$$\mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k^1 \rangle \pi(1) = \mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k^2 \rangle \pi(2) \quad \text{where } \text{fstnxt}(R_k^1) = \langle L_k^2 : B_k^2, R_k^2 \rangle$$

باز هم بدون کاستن از کلیت، می‌توانیم فرض کنیم که این رویه را تا h مرحله ادامه دادیم، یعنی:

$$\mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k^{h-1} \rangle \pi(h-1) = \mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k^h \rangle \pi(h) \quad \text{where } \text{fstnxt}(R_k^{h-1}) = \langle L_k^h : B_k^h, R_k^h \rangle$$

در حالیکه، $R_k^h \approx \varepsilon$. اگر گزاره‌ی $R_k^h \approx \varepsilon$ هیچ زمانی برقرار نشود، یعنی بتوانیم این سلسله را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، مطمئن خواهیم بود که در معنای R_k حتما ردهای پیشوندی نامتناهی حضور دارند. چنین چیزی با تعریف معنای عبارات منظم در تناقض است، چون در معنای عبارات منظم رد پیشوندی نامتناهی حضور ندارد. تا اینجا، می‌توانیم بگوییم:

$$R_k \approx L_k^1 : B_k^1 \bullet L_k^2 : B_k^2 \bullet \dots \bullet L_k^h : B_k^h$$

حال بسته به اینکه $h < l$ برقرار باشد یا نباشد، می‌توانیم مسئله را به دو حالت افراز کنیم:

►► $h < l$:

در این صورت، داریم:

$$\mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k^h \rangle \pi(h+1) = \langle T, \varepsilon \rangle$$

که این یعنی داریم:

$$\forall j (1 \leq j \leq h \rightarrow \langle \underline{\rho}, \langle l_j, \rho_j \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L_j : B_j \rrbracket)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket R_k \bullet (? : T)^* \rrbracket \Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \text{prefix}(\mathcal{S}^r \llbracket R \bullet (? : T)^* \rrbracket).$$

►► $h \geq l$:

در این صورت داریم:

$$\mathcal{M}^t \langle \underline{\rho}, R_k \rangle \pi = \langle T, R_k^l \rangle$$

که یعنی:

$$\forall j (1 \leq j \leq l \rightarrow \langle \underline{\rho}, \langle l_j, \rho_j \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L_j : B_j \rrbracket)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \text{prefix}(\mathcal{S}^r \llbracket R_k \rrbracket) \Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \text{prefix}(\mathcal{S}^r \llbracket R \bullet (? : T)^* \rrbracket).$$

پس در کل می‌توانیم، بگوییم

$$\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \text{prefix}(\mathcal{S}^r \llbracket R \bullet (? : T)^* \rrbracket)$$

□

و اثبات قضیه تمام می‌شود.

حال به اثبات تمامیت می‌پردازیم.

قضیه ۱۶.۳. (قضیه تمامیت): اگر P یک برنامه، R یک عبارت منظم و $\underline{\rho}$ یک محیط اولیه باشند، آنگاه داریم:

$$P, \underline{\rho} \models R \Rightarrow P, \underline{\rho} \models_r R$$

اثبات. با برهان خلف این قضیه را ثابت می‌کنیم. شکل اثبات تا حدی شبیه به اثبات درستی است.

$$\{\underline{\rho}\} \times \mathcal{S}^*[\![P]\!] \not\subseteq \mathcal{M}(\underline{\rho}, R) \mathcal{S}^*[\![P]\!] \Rightarrow \exists \pi (\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \in \{\underline{\rho}\} \times \mathcal{S}^*[\![P]\!] \wedge \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \notin \mathcal{M}(\underline{\rho}, R) \mathcal{S}^*[\![P]\!])$$

اگر فرض کنیم $\text{dnf}(R) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ و علاوه بر این، با توجه به آنچه در اثبات درستی گفتیم، فرض کنیم:

$$R_i \approx L_i^1 : B_i^1 \bullet L_i^2 : B_i^2 \bullet \dots \bullet L_i^n : B_i^n$$

و

$$\pi = \langle l_1, \rho_1 \rangle \langle l_2, \rho_2 \rangle \dots \langle l_l, \rho_l \rangle$$

داریم:

$$\forall i (1 \leq i \leq n \rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \notin \mathcal{M}^t(\underline{\rho}, R_i) \mathcal{S}^*[\![P]\!])$$

$$\Rightarrow \forall i (1 \leq i \leq n \rightarrow \exists R'_i (\mathcal{M}^t(\underline{\rho}, R_i) \pi = \langle F, R'_i \rangle)).$$

بنابراین:

$$\exists j (\langle \underline{\rho}, \langle l_j, \rho_j \rangle \rangle \notin \mathcal{S}^r[\![L_i^j : B_i^j]\!] \Rightarrow \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \notin \mathcal{S}^r[\![R_i \bullet (? : T)^*\!]\!]).$$

از نتیجه‌ی آخر می‌توانیم ثابت کنیم $\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \notin \text{prefix}(\mathcal{S}^r[\![R_i \bullet (? : T)^*\!]\!])$. چون اگر غیر از این باشد، یعنی اگر فرض کنیم $\langle \underline{\rho}, \pi' \rangle$ عضو $\text{prefix}(\mathcal{S}^r[\![R_i \bullet (? : T)^*\!]\!])$ هست، اما عضو $\mathcal{S}^r[\![R_i \bullet (? : T)^*\!]\!]$ نیست، در آن صورت، اگر طول π' بزرگتر یا مساوی j باشد، به خاطر وجود $\langle l_j, \rho_j \rangle$ در π ، خواهیم داشت $\pi \neq \pi'$ و اگر طول π' کمتر از j باشد، چون طول π قطعاً بزرگتر یا مساوی j است (نتیجه از گزاره‌ی بالایی که دارای سور وجودی است)، پس باز هم $\pi \neq \pi'$. توجه شود که $\langle \underline{\rho}, \pi \rangle \notin \text{prefix}(\mathcal{S}^r[\![R_i \bullet (? : T)^*\!]\!])$ با توجه به آنچه گفتیم، با فرض در تناقض است و حکم ثابت می‌شود. \square

فصل ۴

وارسی مدل ساختارمند

در این فصل، به ادامه‌ی ساختارمندتر کردن کار می‌پردازیم. در فصل گذشته، ساختار عبارات منظم را به تعریف واریسی مدل اضافه کردیم و حالا می‌خواهیم، ساختار زبانمان را به کار اضافه کنیم. این آخرین تلاش [۶] برای گسترش کار بوده است. یعنی واریسی مدل در صورت جدید تعریف شده است و معادل بودن آن با صورت قبلی واریسی مدل ثابت شده است و پس از آن کار پایان می‌پذیرد. چون تعریف صورت جدید روی ساختار زبان انجام گرفته است، جزئیات بسیار طولانی‌ای دارد. همین موضوع باعث شده است، تا اثبات برابری این صورت با صورت قبلی هم بسیار مفصل و حجیم باشد. این اثبات در [۶] به طور کامل حین معرفی هر حالت تعریف بیان شده است. بنابراین، از ارائه‌ی دوباره‌ی این جزئیات خودداری کرده‌ایم.

تعریف ۱۰.۴. تابع $\hat{\mathcal{M}} : (\mathbb{EV} \times \mathbb{R}) \rightarrow P(\mathcal{G}^{+\infty}) \rightarrow (\mathbb{EV} \times P(\mathcal{G}^{+\infty}))$ را واریسی مدل ساختارمند^۱ می‌نامیم (ضابطه‌ی تابع در ادامه‌ی متن آمده است).

در ادامه، ممکن است به جای $\hat{\mathcal{M}}(\underline{\rho}, R)S^*[P]$ از $\hat{\mathcal{M}}(\underline{\rho}, R)[P]$ استفاده کرده باشیم، یعنی در اشاره به تابع S^* به براکت‌ها $[[\]]$ قناعت کرده باشیم. تعریف روی ساختار مجموعه‌ی $P \cup S \cup S$ انجام شده است. تقریباً کاری شبیه به اثبات لمی که در بحث تصمیم ناپذیری در فصل سوم داشتیم. در ادامه، قسمت‌های مختلف تعریف $\hat{\mathcal{M}}$ را به ازای برنامه‌ی P ، محیط اولیه‌ی $\underline{\rho}$ و عبارت منظم R تعریف می‌کنیم. $\hat{\mathcal{M}}(\underline{\rho}, R)S^*[P]$ روی

¹Structural Model Checking

ساختار برنامه‌ها یعنی P به صورت زیر است:

$$\blacktriangleleft P = SI :$$

$$\hat{\mathcal{M}}\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P] = \bigcup_{i=1}^n \{ \langle \underline{\rho}, \pi \rangle \mid \exists R' \in \mathbb{R}, \langle \pi, R' \rangle \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R_i \rangle \mathcal{S}^*[SI] \}$$

$$\text{where } \text{dnf}(R) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

اثبات برابری این قسمت از تابع با صورت فصل قبل در [۶] آمده است. استدلال این است که برابری $\hat{\mathcal{M}}\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI] = \mathcal{M}\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI]$ در فرض استقرا آمده است. کلیت اثبات هم این است که از باز کردن تعریف $\mathcal{M}\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P]$ با استفاده‌ی مستقیم تعاریف و بدون تکنیک خاصی به $\hat{\mathcal{M}}\langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[P]$ رسیده است.

در ادامه با توجه به تعریف قبل، به بیان تعریف $\hat{\mathcal{M}}^\dagger$ می‌پردازیم. این تنها بخش تابع $\hat{\mathcal{M}}$ است که معرفی نشده است و با مشخص شدن آن معنای $\hat{\mathcal{M}}$ به ازای برنامه‌های مختلف مشخص می‌شود. این نکته را در نظر داریم که $\hat{\mathcal{M}}^\dagger$ در عمل روی مجموعه‌ی معنای برنامه‌ها تعریف می‌شود. مثلاً، به ازای $\Pi \subseteq \mathbb{G}^{+\infty}$ دلخواه که مساوی معنای یک برنامه نباشد، اینکه این تابع با یک محیط اولیه و یک عبارت منظم چه خروجی‌ای دارد، برای ما اهمیتی ندارد. در واقع، تعریف تابع اصلاً به ازای چنین ورودی‌ای خروجی ندارد. به عبارت دیگر، تابع جزئی است. مشابه \mathcal{M}^\dagger خروجی $\hat{\mathcal{M}}^\dagger$ هم یک زوج مرتب شامل π ای است که R را ارضا کرده است، به همراه یک عبارت منظم بدون + که بخشی از R را نشان می‌دهد که با π تطابق داده نشده است.

$$\blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, \varepsilon \rangle \mathcal{S} = \{ \langle \pi, \varepsilon \rangle \mid \pi \in \mathcal{S}^*[S] \}$$

برای $SI = SL' S$ و $R \in \mathbb{R}^\dagger \cap \mathbb{R}^+$ داریم:

$$\blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI] = \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI'] \cup$$

$$\{ \langle \pi \langle \text{at}[S], \rho \rangle \pi', R'' \rangle \mid \langle \pi \langle \text{at}[S], \rho \rangle, R' \rangle \in \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI'] \wedge$$

$$\langle \langle \text{at}[S], \rho \rangle \pi', R'' \rangle \in \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R' \rangle \mathcal{S}^*[S] \}.$$

از اینجا به بعد، با تعاریف طولی‌تری از آنچه تا حالا داشتیم، روبرو هستیم. هرچند که مفهوم چندان پیچیده‌ای پشت این تعاریف نیست. به طور خلاصه، تعریف بالا می‌گوید، تعریف $\hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI]$ وابسته به تعریف $\hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[SI']$ و $\hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[S]$ است. ردهای پیشوندی‌ای که داخل این دو

مجموعه هستند، به یکدیگر چسبانده می‌شوند، به طوریکه اول ردهای داخل $\hat{\mathcal{M}}^\dagger(\underline{\rho}, R)[[SI']]$ قرار می‌گیرند و بعد ردهای داخل $\hat{\mathcal{M}}^\dagger(\underline{\rho}, R)[[S]]$. ردهای داخل $\hat{\mathcal{M}}^\dagger(\underline{\rho}, R)[[SI']]$ به تنهایی نیز داخل $\hat{\mathcal{M}}^\dagger(\underline{\rho}, R)[[SI]]$ قرار می‌گیرند. این تعریف بر اساس تعریف $\mathcal{S}^*[[SI]]$ ارائه شده است. اساس گرفتن تعریف تابع \mathcal{S}^* در کنار توجه به تعریف تابع \mathcal{M} که در فصل پیش ارائه شد، در ادامه‌ی تعریف $\hat{\mathcal{M}}^\dagger$ نیز حضور دارد.

برای ϵ و $R \in \mathbb{R}^\dagger \cap \mathbb{R}^+$ داریم:

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger(\underline{\rho}, R)[[SI]] = \\ \{ \langle \langle at[[SI]], \rho \rangle, R' \rangle | \langle \underline{\rho}, \langle at[[SI]], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L : B] \}, \\ \text{where } \text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R' \rangle. \end{aligned}$$

یعنی خروجی تابع به ازای این ورودی مجموعه‌ای است، شامل همه‌ی ردهای پیشوندی تک عضوی‌ای که محیط آن‌ها اولین سر عبارت منظم $(L : B)$ را ارضا می‌کند. به عبارت دیگر، هر محیطی که این اتم را ارضا کند، برچسب این لیست عبارت‌های دستوری را در این مجموعه می‌آورد (به همراه ادامه‌ی عبارت منظم).

برای $S = x \doteq A$ و $R \in \mathbb{R}^\dagger \cap \mathbb{R}^+$ داریم:

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger(\underline{\rho}, R)[[S]] = \\ \{ \langle \langle at[[S]], \rho \rangle, R' \rangle | \langle \underline{\rho}, \langle at[[S]], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L : B] \} \\ \cup \{ \langle \langle at[[S]], \rho \rangle \langle aft[[S]], \rho[x \leftarrow \mathcal{A}[[A]]\rho] \rangle, \epsilon \rangle | R' \in \mathbb{R}_\epsilon \wedge \\ \langle \underline{\rho}, \langle at[[S]], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L : B] \} \\ \cup \{ \langle \langle at[[S]], \rho \rangle \langle aft[[S]], \rho[x \leftarrow [[A]]\rho] \rangle, R'' \rangle | R' \notin \mathbb{R}_\epsilon \wedge \\ \langle \underline{\rho}, \langle at[[S]], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L : B] \wedge \langle L' : B', R'' \rangle = \text{fstnxt}(R') \wedge \\ \langle \underline{\rho}, \langle aft[[S]], \rho[x \leftarrow \mathcal{A}[[A]]\rho] \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L' : B'] \}, \\ \text{where } \text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R' \rangle. \end{aligned}$$

این تابع عبارت دستوری را به همراه زوج مرتبی شامل محیط اولیه و عبارت منظم می‌گیرد، همان خروجی‌ای که در حالت قبلی برمی‌گرداند را برمی‌گرداند، سپس نسبت به اینکه پس از تغییر

در محیط‌ها (در اثر اجرای عبارت دستوری مقدار دهی) یک رد پیشوندی با ادامه‌ی عبارت منظم سازگار باشد یا نباشد، زوج‌هایی را متشکل از رد پیشوندی و عبارت منظم به خروجی اضافه می‌کند. از این ۴ حالت تنها اثبات حالت آخر در [۶] آورده شده است. اثبات دیگر حالات را هم می‌توان در همین اثبات که مفصل‌تر است، دید. اثبات سر راست است و در آن از جایگذاری تساوی‌های واضح استفاده شده است و جزئیات کافی دارد.

برای عبارت منظم $R \in \mathbb{R}^{\dagger} \cup \mathbb{R}^+$ و S_t و $S = \text{if } (B) S_t$ داریم:

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^{\dagger}(\underline{\rho}, R) \llbracket S \rrbracket = & \\ \{ \langle \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle, R' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L' : B' \rrbracket \} & \\ \cup \{ \langle \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \langle at \llbracket S_t \rrbracket, \rho \rangle \pi, R'' \mid \mathcal{B} \llbracket B \rrbracket \rho = T \wedge & \\ \langle \underline{\rho}, \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L' : B' \rrbracket \wedge & \\ \langle \langle at \llbracket S_t \rrbracket, \rho \rangle \pi, R'' \rangle \in \hat{\mathcal{M}}^{\dagger}(\underline{\rho}, R') \llbracket S_t \rrbracket \} & \\ \cup \{ \langle \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \langle aft \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle, \varepsilon \rangle \mid \mathcal{B} \llbracket B \rrbracket \rho = F \wedge R' \in \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge & \\ \langle \underline{\rho}, \langle \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L' : B' \rrbracket \} & \\ \cup \{ \langle \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \langle aft \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle, R'' \rangle \mid \mathcal{B} \llbracket B \rrbracket \rho = F \wedge R' \notin \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge & \\ \langle \underline{\rho}, \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L' : B' \rrbracket \wedge \langle L'' : B'', R'' \rangle = \text{fstnxt}(R') \wedge & \\ \langle \underline{\rho}, \langle aft \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L'' : B'' \rrbracket \}, & \\ \text{where } \text{fstnxt}(R) = \langle L' : B', R' \rangle. & \end{aligned}$$

برای عبارت منظم $R \in \mathbb{R}^{\dagger} \cup \mathbb{R}^+$ و S_t و $S = \text{if } (B) S_t \text{ else } S_f$ داریم:

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^{\dagger}(\underline{\rho}, R) \llbracket S \rrbracket = & \\ \{ \langle \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle, R' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L' : B' \rrbracket \} & \\ \cup \{ \langle \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \langle at \llbracket S_t \rrbracket, \rho \rangle \pi, R'' \mid \mathcal{B} \llbracket B \rrbracket \rho = T \wedge & \\ \langle \underline{\rho}, \langle at \llbracket S \rrbracket, \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r \llbracket L' : B' \rrbracket \wedge & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \langle at[S_t], \rho \rangle \pi, R'' \rangle \in \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R' \rangle [S_t] \} \\
& \cup \{ \langle \langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_f], \rho \rangle \pi, R'' | \mathcal{B}[B] \rho = F \wedge \\
& \quad \langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r [L' : B'] \wedge \\
& \quad \langle \langle at[S_f], \rho \rangle \pi, R'' \rangle \in \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R' \rangle [S_f] \}, \\
& \text{where } \text{fstnxt}(R) = \langle L' : B', R' \rangle.
\end{aligned}$$

دو قسمت بالا در مورد عبارت‌های دستوری شرطی هستند. در مورد نوع اولی شرطی، یک رد پیشوندی را در معنای S در نظر بگیرید. بسته به اینکه طبق محیط حاضر در اولین وضعیت این رد پیشوندی، عبارت بولی مقدار صحیح یا غلط داشته باشد، حضور این رد پیشوندی (در یک زوج، به همراه یک عبارت منظم) داخل $\hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle [S]$ تعیین می‌شود. اگر عبارت بولی در محیط مذکور مقدار صحیح داشته باشد، در معنای نوع اول عبارت دستوری شرطی، پس از تطبیق سر عبارت منظم با اولین وضعیت هر رد پیشوندی، بر اساس اینکه در دومین وضعیت رد پیشوندی، عبارت بولی برقرار باشد یا نباشد، وابسته به این می‌شود که آیا اگر از وضعیت دوم به بعد این رد پیشوندی (که خود یک رد پیشوندی است) در $\hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R' \rangle [S_t]$ (که R' نیز دم R است) حضور دارد یا خیر. اگر عبارت بولی در محیط مذکور ارزش غلط داشته باشد، حضور رد پیشوندی در $\hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle [S]$ وابسته به سازگاری وضعیت دوم رد پیشوندی با سر R' خواهد بود.

در نوع دوم عبارت دستوری شرطی نیز، تعریف شبیه به نوع اول است، با این تفاوت که اگر عبارت بولی در محیط اولین وضعیت رد پیشوندی ارزش غلط داشته باشد، اتفاقی شبیه به حالت درست می‌افتد.

برای عبارت منظم $R \in \mathbb{R}^\dagger \cup \mathbb{R}^+$ و $S = \text{break}$ داریم:

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle [S] = \\
& \{ \langle \langle at[S], \rho \rangle, R' \rangle | \langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r [L : B] \} \\
& \cup \{ \langle \langle at[S], \rho \rangle \langle brk - to[S], \rho \rangle, \varepsilon \rangle | R' \in \mathbb{R}_\varepsilon \wedge \\
& \quad \langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r [L : B] \} \\
& \cup \{ \langle \langle at[S], \rho \rangle \langle brk - to[S], \rho \rangle, R'' \rangle | R' \notin \mathbb{R}_\varepsilon \wedge \\
& \quad \langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r [L : B] \wedge \langle L' : B', R'' \rangle = \text{fstnxt}(R') \wedge
\end{aligned}$$

$$\langle \underline{\rho}, \langle brk - to[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L' : B']\},$$

$$\text{where } fstnxt(R) = \langle L' : B', R' \rangle.$$

با توجه به موارد قبلی، اینکه این قسمت از تعریف چه معنایی دارد و به چه علت به این شکل است، قابل درک است.

برای عبارت منظم $R \in \mathbb{R}^{\dagger} \cup \mathbb{R}^+$ و $S = \text{while } (B) S_b$ داریم:

$$\blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^{\dagger}(\underline{\rho}, R)[S] = lfp^{\subseteq}(\hat{\mathcal{F}}^{\dagger}(\underline{\rho}, R)[S]),$$

$$\text{where } \hat{\mathcal{F}}^{\dagger}(\underline{\rho}, R)X = \{ \langle \langle at[S], \rho \rangle, R' \rangle \mid \rho \in \mathbb{E}V \wedge \langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L' : B'] \}$$

$$\cup \{ \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho \rangle, \varepsilon \rangle \mid \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle, \varepsilon \rangle \in X \wedge$$

$$\mathcal{B}[B]\rho = F \}$$

$$\cup \{ \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho \rangle, \varepsilon \rangle \mid \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle, R'' \rangle \in X \wedge$$

$$\mathcal{B}[B]\rho = F \wedge R'' \notin \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge \langle L' : B', R' \rangle = fstnxt(R'') \wedge R' \in \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge$$

$$\langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L' : B'] \}$$

$$\cup \{ \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle \langle aft[S], \rho \rangle, R' \rangle \mid \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle, R'' \rangle \in X \wedge$$

$$\mathcal{B}[B]\rho = F \wedge R'' \notin \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge \langle L' : B', R' \rangle = fstnxt(R'') \wedge R''' \notin \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge$$

$$\langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L' : B'] \wedge \langle L'' : B'', R' \rangle = fstnxt(R''') \wedge$$

$$\langle \underline{\rho}, \langle aft[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L'' : B''] \}$$

$$\cup \{ \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_b], \rho \rangle \pi_3, \varepsilon \rangle \mid \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle, \varepsilon \rangle \in X \wedge$$

$$\mathcal{B}[B]\rho = T \wedge \langle at[S_b], \rho \rangle \pi_3 \in \mathcal{S}^*[S_b] \}$$

$$\cup \{ \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_b], \rho \rangle \pi_3, \varepsilon \rangle \mid \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle, R'' \rangle \in X \wedge$$

$$\mathcal{B}[B]\rho = T \wedge R'' \notin \mathbb{R}_{\varepsilon} \wedge \langle L : B, \varepsilon \rangle = fstnxt(R'') \wedge$$

$$\langle \underline{\rho}, \langle at[S], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[L : B] \wedge \langle at[S_b], \rho \rangle \pi_3 \in \mathcal{S}^*[S_b] \}$$

$$\cup \{ \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle \langle at[S_b], \rho \rangle \pi_3, R' \rangle \mid \langle \pi_2 \langle at[S], \rho \rangle, R'' \rangle \in X \wedge$$

$$\mathcal{B}[\![B]\!] \rho = T \wedge R'' \notin \mathbb{R}_\varepsilon \wedge \langle L : B, R''' \rangle = \text{fstnxt}(R'') \wedge$$

$$\langle \underline{\rho}, \langle at[\![S]\!], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[\![L : B]\!] \wedge R''' \notin \mathbb{R}_\varepsilon \wedge$$

$$\langle L' : B', R''' \rangle = \text{fstnxt}(R''') \wedge \langle \underline{\rho}, \langle at[\![S_b]\!], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[\![L' : B']]\! \wedge$$

$$\langle \langle at[\![S_b]\!], \rho \rangle \pi_3, R' \rangle \in \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R''' \rangle [\![S_b]\!],$$

$$\text{where } \langle L' : B', R' \rangle = \text{fstnxt}(R).$$

تفاوت تعریف $\hat{\mathcal{M}}^\dagger$ برای عبارت دستوری حلقه با سایر عبارت‌های دستوری، حضور یک تابع به نام $\hat{\mathcal{F}}^\dagger$ در تعریف معنای آن است. در واقع، واریسی مدل به صورت کوچک‌ترین نقطه ثابت این تابع تعریف می‌شود. این همان کاری است که در تعریف معنای اجزای زبان هم انجام شد و چون می‌خواهیم ساختار زبان را به صورت واریسی مدل اضافه کنیم، انتظار داریم که عملگر نقطه ثابت هم در تعریف حضور پیدا کند. تابع $\hat{\mathcal{F}}^\dagger$ مثل یک دور اجرای حلقه عمل می‌کند، منتها در همین حین، سازگاری ردهای پیشوندی را با عبارت منظم بررسی می‌کند و ردهای پیشوندی‌ای را که با عبارت منظم ناسازگار هستند، مجموعه‌ی خروجی‌اش حذف می‌کند.

برای عبارت منظم $R \in \mathbb{R}^\dagger \cup \mathbb{R}^+$ و $S = ;$ داریم:

$$\blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle [\![S]\!] = \{ \langle \langle at[\![S]\!], \rho \rangle, R' \rangle \mid \langle \underline{\rho}, \langle at[\![S]\!], \rho \rangle \rangle \in \mathcal{S}^r[\![L : B]\!] \},$$

$$\text{where } \text{fstnxt}(R) = \langle L : B, R' \rangle.$$

برای عبارت منظم $R \in \mathbb{R}^\dagger \cup \mathbb{R}^+$ و $S = \{SI\}$ داریم:

$$\blacktriangleleft \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle [\![\{SI\}]\!] = \hat{\mathcal{M}}^\dagger \langle \underline{\rho}, R \rangle [\![SI]\!].$$

همین طور، درست بودن یک ویژگی $R \in \mathbb{R}$ را برای برنامه‌ی P و محیط اولیه‌ی $\underline{\rho}$ با

$$P, \underline{\rho} \models_s R$$

نشان می‌دهیم و برقرار بودن این شرط به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P, \underline{\rho} \models_s R \iff \{ \underline{\rho} \} \times \mathcal{S}^*[\![P]\!] \subseteq \hat{\mathcal{M}} \langle \underline{\rho}, R \rangle \mathcal{S}^*[\![P]\!].$$

در اینجا تعریف توابع مربوط به واریسی مدل ساختارمند به پایان می‌رسد.

نتیجه گیری

دیدیم که صوری سازی روش واریسی مدل در ادبیات نظریه‌ی تعبیر مجرد به چه شکل است و در همین حال تلاش کردیم این صوری سازی را شفاف‌تر و واضح‌تر از [۶] بیان کنیم. همین طور دیدیم که می‌توان به جای منطق‌های زمانی از عبارات منظم در روش واریسی مدل استفاده کرد. همان طور که در [۶] آمده است و در فصل دوم به‌طور واضح‌تری نشان دادیم، این روش قابل پیاده‌سازی نیست. در [۶] نزدیک کردن کار به پیاده‌سازی را از طریق متناهی کردن مجموعه‌ی وضعیت‌ها ممکن می‌داند. به هر حال، در واقعیت هم مجموعه‌ی وضعیت‌ها متناهی است، چون حافظه‌ها متناهی هستند و این فرض می‌تواند صوری سازی را یک قدم به واقعیت نزدیک‌تر کند. ایده‌ای که ما برای نزدیک کردن این کار به پیاده‌سازی داریم این است که عبارات منظم محدودتر شود. اگر علاوه‌بر متناهی کردن مجموعه‌ی وضعیت‌ها، دو عملگر $*$ و $+$ را از عبارات منظم حذف کنیم، صوری سازی احتمالا قابل پیاده‌سازی خواهد شد. درست است که حذف این دو عملگر از قدرت بیان ویژگی‌ها کم می‌کند، اما شاید در عمل، همان قدرت بیان باقی مانده برای بیان بسیاری از ویژگی‌ها کافی باشد.

Bibliography

- [1] Committee to review chinook zd 576 crash. report from the select committee on chinook zd 576., Feb 2002.
- [2] A. S. E. Al. Mars climate orbiter mishap investigation boord phase i report., November 1999.
- [3] A. Chlipala. *Certified Programming with Dependent Types: A Pragmatic Introduction to Coq Proof Assistant*. MIT Press, 2022.
- [4] E. M. Clarke and E. A. Emerson. Design and synthesis of synchronization skeletons using branching-time temporal logic. In D. Kozen, editor, *Logic of Programs*, volume 131 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–71. Springer, 1981.
- [5] E. M. Clarke, O. Grumberg, and D. A. Peled. *Model checking*. MIT Press, London, Cambridge, 1999.
- [6] P. Cousot. Calculational design of a regular model checker by abstract interpretation. In R. M. Hierons and M. Mosbah, editors, *ICTAC*, volume 11884 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–21. Springer, 2019.
- [7] P. Cousot. *Principals of Abstract Interpretation*. MIT Press, 2021.

- [8] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. In *POPL '77: Proceedings of the 4th ACM SIGACT-SIGPLAN symposium on Principles of programming languages*, pages 238–252. ACM Press, 1977.
- [9] M. Davis and E. Weyuker. *Computability, Complexity, and Languages*. Academic Press, New York, 1983.
- [10] D. Harel, D. Kozen, and J. Tiuryn. Dynamic logic. In *Handbook of philosophical logic*, pages 99–217. Springer, 2001.
- [11] C. A. R. Hoare. An axiomatic basis for computer programming. *Communications of the ACM*, 12(10):576–580, 1969.
- [12] M. Huth and M. Ryan. *Logic in computer science : modelling and reasoning about systems*. Cambridge University Press, Cambridge [U.K.]; New York, 2004.
- [13] X. R. K. Yi. *Introduction to Static Analysis: An Abstract Interpretation Perspective*. MIT Press, 2020.
- [14] S. Kleene. Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata. In C. Shannon and J. McCarthy, editors, *Automata Studies*, pages 3–41. Princeton University Press, 1956.
- [15] D. Koze. On kleene algebras and closed semirings. *Springer Berlin Heidelberg*, 1990.
- [16] S. A. Kripke. A completeness theorem in modal logic¹. *The journal of symbolic logic*, 24(1):1–14, 1959.
- [17] J. Lions. Ariane 5 Flight 501 Failure: Report of the Inquiry Board, July 1996.

- [18] M. Mukund. Linear-time temporal logic and buchi automata. *Tutorial talk, Winter School on Logic and Computer Science, Indian Statistical Institute, Calcutta*, 1997.
- [19] G. J. Myers, C. Sandler, and T. Badgett. *The art of software testing*. John Wiley & Sons, Hoboken and N.J, 3rd ed edition, 2012.
- [20] B. C. Pierce, A. Azevedo de Amorim and Chris Casinghino, M. Gaboardi, M. Greenberg, C. Hrițcu, V. Sjöberg, A. Tolmach, and B. Yorgey. *Programming Language Foundations*. Software Foundations series, volume 2. Electronic textbook, May 2018.
- [21] H. G. Rice. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 74(2):358–366, 1953.
- [22] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific journal of Mathematics*, 5(2):285–309, 1955.
- [23] G. Winskel. *The formal semantics of programming languages - an introduction*. Foundation of computing series. MIT Press, 1993.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱

Atom	اتم
Union	اجتماع
Execution	اجرا
Sheffer Operator	ادات شفر
Classical Connective	ادات کلاسیک
Modal Connective	ادات وجهی
Satisfy	ارضا پذیری
Satisfiable	ارضا پذیر
Induction	استقرا
Inductive	استقرایی
Law	اصل
Apply	اعمال
Partition	افراز
Algorithm	الگوریتم
Scheduling Algorithm	الگوریتم زمانبندی
Choice	انتخاب

ب

Reflexive	بازتابی
Recursive	بازگشتی
Label	برچسب
Program	برنامه
Computer Program	برنامه کامپیوتری
Prefix Closure	بستار پیشوندی

پ

Python	پایتون
Distributivity	پخش پذیری
Processor	پردازنده
Implementation	پیاده سازی

ت

Function	تابع
Partial Function	تابع جزئی
Decidability	تصمیم پذیری
Undecidable	تصمیم ناپذیر
Abstract Interpretation	تعبیر مجرد
Symmetric	تقارنی
Completeness	تمامیت
Halt	توقف
Terminable	توقف پذیر
Halting	توقف پذیری
Empty	تهی

ج

Commutative	جابجایی
Java	جاوا
Kleene Algebra	جبر کلین

چ

Concatenation	چسباندن
---------------------	---------

ح

Memory	حافظه
Case	حالت
Loop	حلقه

خ

Idempotent	خودتوان
Well-defined	خوش تعریف

د

Domain	دامنه
True	درست
Truth	درستی
Verification	درستی‌یابی
Class	دسته
Sequence	دنباله

ر

Relation	رابطه
Prefix Trace	رد پیشوندی
Formal Method	روش صوری

ز

Imperative Programming Langugae	زبان برنامه نویسی دستوری
Natural Language	زبان طبیعی
Pair	زوج مرتب
Subset	زیرمجموعه

س

Structure	ساختار
Algebraic Structure	ساختار جبری
Consistency	سازگاری
First Next	سر و دم

ش

Conditional	شرط
Arrow	شرطی
Associative	شرکت پذیر
Countably Infinite	شمارای نامتناهی

ص

Form	صورت
Formal	صوری
Formalization	صوری سازی

ع

Regular Expressions	عبارات منظم
Choice-free Regular Expressions	عبارات منظم بدون انتخاب
Empty Regular Expressions	عبارات منظم تهی
Non-empty Regular Expressions	عبارات منظم ناتهی
Expression	عبارت
Boolean Expression	عبارت بولی
Arithmetic Expression	عبارت حسابی
Statement	عبارت دستوری
Positive Integers	عدد صحیح مثبت
Negative Integer	عدد صحیح منفی
Natural Number	عدد طبیعی
Identity	عضو یکه
Operator	عملگر
Boolean Operator	عملگر بولی
Binary Operator	عملگر دوتایی
Multiplication Operator	عملگر ضرب
Unary Operator	عملگر یگانی

غ

False	غلط
-------------	-----

Non-deterministic غیر قطعی
 Unequivalent غیر هم‌ارز

ف

Metalanguage فرازبان
 Induction Hypothesis فرض استقرا
 Disjunctive Normal Form فرم نرمال فصلی
 Formula فرمول
 Disjunction فصل

ق

Expressible قابل بیان
 Absorption Law قانون جذب
 Expressivity قدرت بیان
 Knaster-Tarski Theorem قضیه‌ی نستِر-تارسکی

ک

Least Fixpoint کوچکترین نقطه ثابت

گ

Grammar گرامر
 Workflow گردش کار
 Proposition گزاره

ل

Statement List لیست عبارت‌های دستوری

م

Turing Machine ماشین تورینگ
 Finite State Machine ماشین حالات متناهی
 Register Machine ماشین رجیستر
 Maximal ماکسیمال
 Transitive متعدی
 Variable متغیر
 Finite متناهی
 Set مجموعه
 Environment محیط
 Initial Environment محیط اولیه
 Model مدل
 Model of Computation مدل محاسبه
 Complete Lattice شبکه‌ی کامل
 Valid معتبر
 Architecture معماری
 Semantics معناسازی
 Prefix Trace Semantics معناسازی رد پیشوندی
 Formal Semantics معناسازی صوری
 Regular Expressions Semantics معناسازی عبارات منظم
 Value مقدار
 Boolean Value مقدار بولی
 Logic منطق
 Temporal Logic منطق زمانی

Linear Temporal Logic	منطق زمانی خطی
Classical Logic	منطق کلاسیک
Classical Propositional Logic	منطق گزاره‌ای کلاسیک
Modal Logic	منطق موجهات
Subtraction	منها

ن

Infinite	نامتناهی
Syntax	نحو
Algorithm Theory	نظریه الگوریتم
Computational Complexity Theory	نظریه پیچیدگی محاسبه
Fixpoint	نقطه ثابت
Type	نوع
Semiring	نیم حلقه

و

Model Checking	وارسی مدل
Structural Model Checking	وارسی مدل ساختارمند
Regular Model Checking	وارسی مدل منظم
State	وضعیت
Property	ویژگی

ه

Equivalent	هم‌ارز
Equivalence	هم‌ارزی

ی

Monotonic یکنوا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Absorption Law	قانون جذب
Abstract Interpretation	تعبیر مجرد
Algebraic Structure	ساختار جبری
Algorithm	الگوریتم
Algorithm Theory	نظریه الگوریتم
Apply	اعمال
Architecture	معماری
Arithmetic Expression	عبارت حسابی
Arrow	شرطی
Associative	شرکت پذیر
Atom	اتم

B

Binary Operator	عملگر دوتایی
Boolean Expression	عبارت بولی
Boolean Operator	عملگر بولی
Boolean Value	مقدار بولی

C

Case	حالت
Choice	انتخاب
Choice-free Regular Expressions	عبارات منظم بدون انتخاب
Class	دسته
Classical Connective	ادات کلاسیک
Classical Logic	منطق کلاسیک
Classical Propositional Logic	منطق گزاره‌ای کلاسیک
Commutative	جابجایی
Complete Lattice	مشبکه‌ی کامل
Completeness	تمامیت
Computational Complexity Theory	نظریه پیچیدگی محاسبه
Computer Program	برنامه کامپیوتری
Concatenation	چسباندن
Conditional	شرط
Consistency	سازگاری
Countably Infinite	شمارای نامتناهی

D

Decidability	تصمیم پذیری
Disjunction	فصل
Disjunctive Normal Form	فرم نرمال فصلی
Distributivity	پخش پذیری
Domain	دامنه

E

Empty	تهی
Empty Regular Expressions	عبارات منظم تهی
Environment	محیط
Equivalence	هم‌ارزی
Equivalent	هم‌ارز
Execution	اجرا
Expressible	قابل بیان
Expression	عبارت
Expressivity	قدرت بیان

F

False	غلط
Finite	متناهی
Finite State Machine	ماشین حالات متناهی
First Next	سر و دم
Fixpoint	نقطه ثابت
Form	صورت
Formal	صوری
Formal Method	روش صوری
Formal Semantics	معناشناسی صوری
Formalization	صوری سازی
Formula	فرمول
Function	تابع

G

Grammar گرامر

H

Halt توقف

Halting توقف پذیری

I

Idempotent خودتوان

Identity عضو یکه

Imperative Programming Langugae زبان برنامه نویسی دستوری

Implementation پیاده سازی

Induction استقرا

Induction Hyposesis فرض استقرا

Inductive استقرایی

Infinite نامتناهی

Initial Environment محیط اولیه

J

Java جاوا

K

Kleene Algebra جبر کلین

Knaster-Tarski Theorem قضیه ی نستر-تارسکی

L

Label	برچسب
Law	اصل
Least Fixpoint	کوچکترین نقطه ثابت
Linear Temporal Logic	منطق زمانی خطی
Logic	منطق
Loop	حلقه

M

Maximal	ماکسیمال
Memory	حافظه
Metalanguage	فرازبان
Modal Connective	ادوات وجهی
Modal Logic	منطق موجهات
Model	مدل
Model Checking	وارسی مدل
Model of Computation	مدل محاسبه
Monotonic	یکنوا
Multiplication Operator	عملگر ضرب

N

Natural Language	زبان طبیعی
Natural Number	عدد طبیعی
Negative Integer	عدد صحیح منفی
Non-deterministic	غیر قطعی
Non-empty Regular Expressions	عبارات منظم ناتهی

O

Operator عملگر

P

Pair زوج مرتب

Partial Function تابع جزئی

Partition افراز

Positive Integers عدد صحیح مثبت

Prefix Closure بستار پیشوندی

Prefix Trace رد پیشوندی

Prefix Trace Semantics معنانشناسی رد پیشوندی

Processor پردازنده

Program برنامه

Property ویژگی

Proposition گزاره

Python پایتون

R

Recursive بازگشتی

Reflexive بازتابی

Register Machine ماشین رجیستر

Regular Expressions عبارات منظم

Regular Expressions Semantics معنانشناسی عبارات منظم

Regular Model Checking واریسی مدل منظم

Relation رابطه

S

Satisfiable	ارضای پذیر
Satisfy	ارضا پذیری
Scheduling Algorithm	الگوریتم زمانبندی
Semantics	معناشناسی
Semantics of Regular Expressions	معناشناسی عبارات منظم
Semiring	نیم حلقه
Sequence	دنباله
Set	مجموعه
Sheffer Operator	ادوات شفر
Soundness	درستی
State	وضعیت
Statement	عبارت دستوری
Statement List	لیست عبارت های دستوری
Structural Model Checking	وارسی مدل ساختارمند
Structure	ساختار
Subset	زیر مجموعه
Subtraction	منها
Symmetric	تقارنی
Syntax	نحو

T

Temporal Logic	منطق زمانی
Terminable	توقف پذیر
Transitive	متعدی
True	درست
Truth	درستی

Turing Machine ماشین تورینگ
Type نوع

U

Unary Operator عملگر یگانی
Undecidable تصمیم ناپذیر
Unequivalent غیر هم‌ارز
Union اجتماع

V

Valid معتبر
Value مقدار
Variable متغیر
Verification درستی‌یابی

W

Well-defined خوش تعریف
Workflow گردش کار

Abstract

Model checking is a reliable method for program verification. Different forms of this method use temporal logic to express properties, which is not commonly accepted by programmers. In this thesis, it has been tried to represent a new form of model checking that has been stated in the literature of abstract interpretation theory and uses regular expressions for expressing program properties instead of modal logic.

After representing basic notions, three novel forms of model checking have been introduced. The first form has no structure and is merely expressed in a new literature; the second form has added the structure of regular expressions to itself; and the third form has the structure of programs in it to get closer to implementation. The equivalence of the three forms has been studied and discussed as well.

Kew Words: Model Checking, Abstract Interpretation, Denotational Semantics, Formal Verification, Static Analysis, Formal Verification of Computer Programs



College of Science
School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Improving Model Checking with Abstract Interpretation

Pouya Partow

Supervisor: Majid Alizadeh
Co-Supervisor: Mojtaba Mojtahedi

A thesis submitted to Graduate Studies Office
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science in
Computer Science

2023