

5. Лабораторная работа №5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ

5.1. Интерполяция таблично заданных функций

5.1.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, что $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ известны значения функции $y = f(x)$, то есть на отрезке $[a; b]$ задана табличная (сеточная) функция:

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей (интерполяционной) для $f(x)$ на $[a; b]$, если ее значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в заданных точках x_0, x_1, \dots, x_n , называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, то есть с y_0, y_1, \dots, y_n соответственно.

Будем строить многочлен n -степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) f(x_i), \quad (5.1)$$

где базисные многочлены имеют вид

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)},$$

обладающий свойством: $L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$, (5.2)

если известны значения функции $f(x)$ в точках $x_i, i = \overline{0, n}$.

Теорема. Полином n -й степени, обладающий свойством (5.2), единственный.

5.1.2. Полином Ньютона

Пусть интерполируемая функция $y = f(x)$ задана таблично значениями y_0, y_1, \dots, y_n на системе равностоящих узлов x_0, x_1, \dots, x_n : $\forall x_k$ можно представить в виде $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$, $h > 0$, $f_k = f(x_k)$, h — шаг сетки.

Определение. Конечной разностью 1-го порядка называется

$$\Delta^1 f_k = f_{k+1} - f_k \quad (\Delta^0 f_k = f_k).$$

Конечная разность n -порядка:

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k.$$

Свойства:

1. $\Delta^n P_n(x) = \text{const}$ (конечная разность n -го порядка от полинома n -й степени равно константе).

$\Delta^{(n+1)} P_n(x) = 0$ (конечная разность $(n+1)$ -го порядка от полинома n -го порядка равна нулю).

2. Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда $\Delta^n f_k \approx f^{(n)}(x_k) h^n$.

Непосредственно через значения функции конечные разности можно представить рекуррентной формулой $\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i (C_n^i) f_{n+k-i}$.

Пусть $f(x)$ задана таблично и $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$, $f_k = f(x_k)$.

Определение. Разделенной разностью $f(x_0, \dots, x_n)$ n -го порядка называется:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Разделенная разность первого порядка: $f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

Свойства разделенной разности.

1. Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда при равномерном разбиении: $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = f^{(n)}(\xi)$, $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$.

2. Разделенная разность n -го порядка, примененная к полиному n -й степени равна константе. Разделенная разность $(n+1)$ -го порядка от полинома n -й степени равна нулю.

3. Разделенная разность n -го порядка $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – симметричная функция своих аргументов.

Для функции $f(x)$, заданной таблично на узлах $x_i, i = \overline{0, n}$, можно записать интерполяционный полином Ньютона:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (5.3)$$

Замечание: Полином Ньютона есть одна из форм представления полинома Лагранжа.

Резюме: Обычно интерполяция проводится не на всех точках разбиения, а только на 5–7 соседних. В этой ситуации при изменении точек интерполирования полином Лагранжа приходится строить заново каждый раз. А полином Ньютона изменяется лишь на несколько слагаемых. При увеличении числа точек интерполяции на одну точку все слагаемые полинома Ньютона сохраняются, добавляются только последующие слагаемые. Для полинома Лагранжа все n слагаемых должны быть построены заново.

I интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$, заданной таблицей с постоянным шагом составлена таблица конечных разностей.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (5.4)$$

Пусть $k = \frac{x - x_0}{h}$, $x = x_0 + kh$, тогда

$$P_n(x) = P_n(x_0 + kh) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (5.5)$$

Формулы (5.4) и (5.5) применяются для интерполирования в начале отрезка для значения k из интервала $(0,1)$.

Путем переобозначений за начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента x , отбросив лишние узлы сетки.

II интерполяционная формула Ньютона

Когда значения аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае строят полином в виде:

$$P_n(x) = P_n(x_n + kh) = y_n + k\Delta y_{n-1} + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (5.6)$$

5.1.3. Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная аппроксимация

Пусть задана функция $y = f(x)$ таблично x_i, y_i ($i = \overline{0, n}$) $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$.

Требуется аппроксимировать функцию $f(x)$ кусочно-линейной функции $\varphi(x)$, исходя из условий интерполяций, т. е.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2 x + b_2, x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ a_n x + b_n, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}.$$

Для нахождения неизвестных параметров a_k, b_k ($k = \overline{1, n}$), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 = y_0 \\ a_1 x_1 + b_1 = y_1 \\ \dots \\ a_n x_{n-1} + b_n = y_{n-1} \\ a_n x_n + b_n = y_n \end{cases}.$$

Каждая из n подсистем решается отдельно.

Кусочно-квадратичная аппроксимация осуществляется аналогично кусочно-линейной аппроксимации. Каждое звено кусочно-квадратичной функции при $n = 2m$

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1, x \in [x_0, x_2] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2, x \in [x_2, x_4] \\ \dots \\ a_n x^2 + b_n x + c_n, x \in [x_{2m-2}, x_{2m}] \end{cases}.$$

Тройка коэффициентов a_k, b_k, c_k ($k = \overline{1, m}$) может быть найдена последовательным решением трехмерных линейных систем, соответствующим выставленным интерполяционным условиям.

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}.$$

5.2. Пример выполнения лабораторной работы

5.2.1. Задание к лабораторной работе

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4$.

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить $L_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Лагранжа.
2. Построить таблицы конечных и разделенных разностей.
3. Построить полином Ньютона и вычислить значение $N_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Ньютона.

4. Построить интерполяционные сплайны линейный и квадратичный. Построить графики сплайнов.

5. На одном чертеже с графиком полиномов построить графики сплайнов.

5.2.2. Решение типового примера

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

x	0,351	0,867	3,315	5,013	6,432
y	-0,572	-2,015	-3,342	-5,752	-6,911

1. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{i=0}^4 p_i(x)f(x_i)$.

Вычислим базисные многочлены.

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} =$$

$$= \frac{(x-0,867)(x-3,315)(x-5,013)(x-6,432)}{(0,351-0,867)(0,351-3,315)(0,351-5,013)(0,351-6,432)} =$$

$$= 0,0231 \cdot (x-0,867)(x-3,315)(x-5,013)(x-6,432),$$

$$p_1(x) = -0,0343 \cdot (x-0,351)(x-3,315)(x-5,013)(x-6,432),$$

$$p_2(x) = 0,0260 \cdot (x-0,351)(x-0,867)(x-5,013)(x-6,432),$$

$$p_3(x) = -0,0215 \cdot (x-0,351)(x-0,867)(x-3,315)(x-6,432),$$

$$p_4(x) = 0,0067 \cdot (x-0,351)(x-0,867)(x-3,315)(x-5,013).$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени будет иметь вид

$$L_4(x) = -0,0132 \cdot (x-0,867)(x-3,315)(x-5,013)(x-6,432) +$$

$$+ 0,0691 \cdot (x-0,351)(x-3,315)(x-5,013)(x-6,432) -$$

$$- 0,0870 \cdot (x-0,351)(x-0,867)(x-5,013)(x-6,432) +$$

$$+ 0,1235 \cdot (x-0,351)(x-0,867)(x-3,315)(x-6,432) -$$

$$- 0,0462 \cdot (x-0,351)(x-0,867)(x-3,315)(x-5,013).$$

Вычислим значение полинома в точке

$$L_4(x_1 + x_2) = L_4(x_1 + x_2) = L_4(0,867 + 3,315) = -4,3453.$$

Построим график многочлена Лагранжа (рис. 5.1).

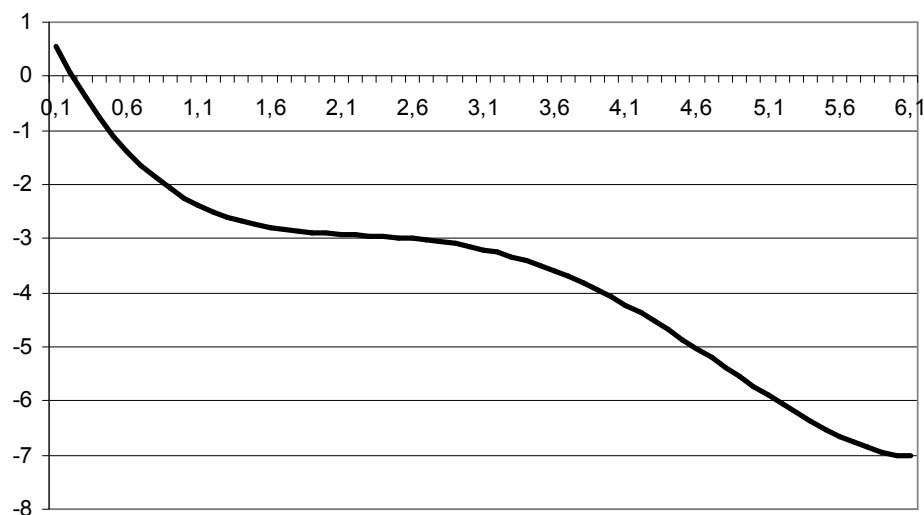


Рис. 5.1. График полинома Лагранжа

2. Построим таблицы конечных и разделенных разностей.

Таблица 5.1

Таблица конечных разностей

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0,351	-0,572	-1,4430	0,1160	-1,1990	3,5330
0,867	-2,015	-1,3270	-1,0830	2,3340	
3,315	-3,342	-2,4100	1,2510		
5,013	-5,752	-1,1590			
6,432	-6,911				

Таблица 5.2

Таблица разделенных разностей

x_k	y_k	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка
0,351	-0,572	-2,7965	0,7606	-0,2085	0,0463
0,867	-2,015	-0,5421	-0,2116	0,0728	
3,315	-3,342	-1,4193	0,1933		
5,013	-5,752	-0,8168			
6,432	-6,911				

3. Построим полином Ньютона, используя таблицу разделенных разностей

$$N_4(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Получим

$$N_4(x) = -0,572 - 2,7965(x - 0,351) + 0,7606(x - 0,351)(x - 0,867) - \\ - 0,2085(x - 0,351)(x - 0,867)(x - 3,315) + \\ + 0,0463(x - 0,351)(x - 0,867)(x - 3,315)(x - 5,013).$$

Вычислим значение полинома Ньютона в точке

$$N_4(x_1 + x_2) = N_4(x_1 + x_2) = L_4(0,867 + 3,315) = -4,3453.$$

Построим график многочлена Ньютона (рис. 5.2).

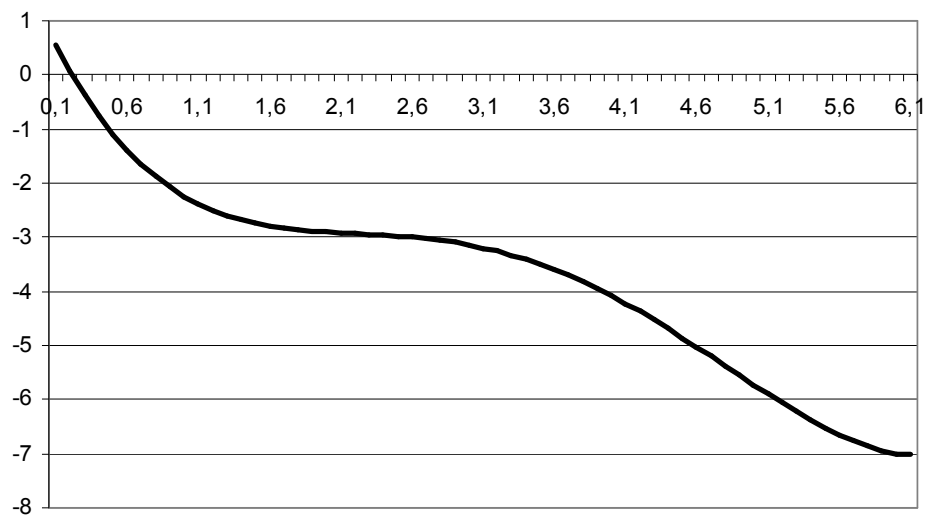


Рис. 5.2. График полинома Ньютона

4. Построим интерполяционные сплайны линейный и квадратичный.

Кусочно-линейная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & 0,351 \leq x \leq 0,867, \\ a_2x + b_2, & 0,867 \leq x \leq 3,315, \\ a_3x + b_3, & 3,315 \leq x \leq 5,013, \\ a_4x + b_4, & 5,013 \leq x \leq 6,432. \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов строим систему:

$$\begin{cases} 0,351a_1 + b_1 = -0,572, \\ 0,867a_1 + b_1 = -2,015; \\ 0,867a_2 + b_2 = -2,015, \\ 3,315a_2 + b_2 = -3,342; \\ 3,315a_3 + b_3 = -3,342, \\ 5,013a_3 + b_3 = -5,752; \\ 5,013a_4 + b_4 = -5,752, \\ 6,432a_4 + b_4 = -6,911. \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$$\begin{aligned} a_1 = -2,797 \quad a_2 = -0,542 \quad a_3 = -1,419 \quad a_4 = -0,817 \\ b_1 = 0,490 \quad b_2 = -1,545 \quad b_3 = 1,362 \quad b_4 = -1,656 \end{aligned}$$

Тогда линейный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2,797x + 0,490, & 0,351 \leq x \leq 0,867, \\ -0,542x - 1,545, & 0,867 \leq x \leq 3,315, \\ -1,419x + 1,362, & 3,315 \leq x \leq 5,013, \\ -0,817x - 1,656, & 5,013 \leq x \leq 6,432. \end{cases}$$

Построим график линейного сплайна (рис. 5.3).

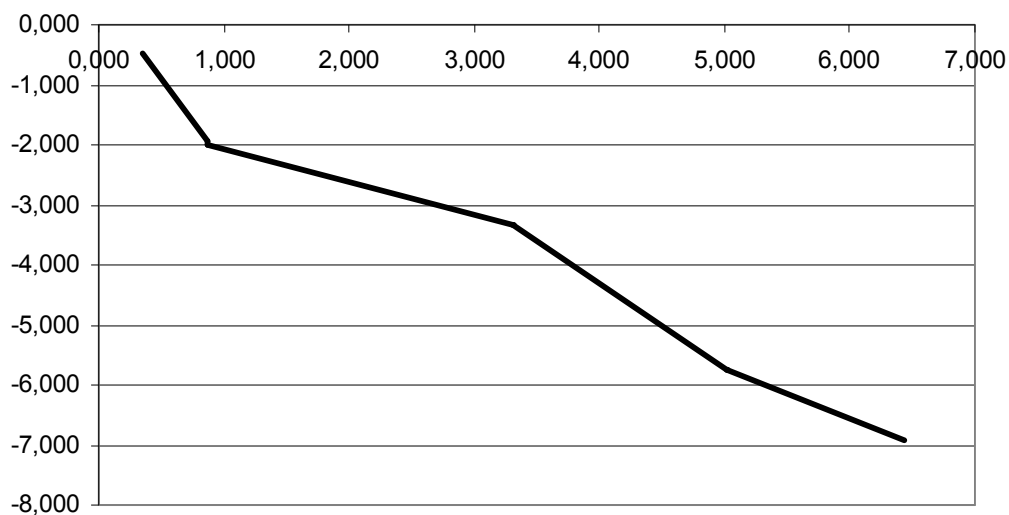


Рис. 5.3. График линейного сплайна

Кусочно-квадратичная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [0,351; 3,315] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in [3,315; 6,432] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 0,123a_1 + 0,351b_1 + c_1 = -0,572, \\ 0,752a_1 + 0,867b_1 + c_1 = -2,015, \\ 10,989a_1 + 3,315b_1 + c_1 = -3,342; \end{cases} \\ \begin{cases} 10,989a_2 + 3,315b_2 + c_2 = -3,342, \\ 25,130a_2 + 5,013b_2 + c_2 = -5,752, \\ 41,370a_2 + 6,432b_2 + c_2 = -6,911. \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$$a_1 = 0,761 \quad a_2 = 0,193$$

$$b_1 = -3,724, \quad b_2 = -3,029.$$

$$c_1 = 0,642 \quad c_2 = 4,576$$

Тогда квадратичный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0,761x^2 - 3,724x + 0,642, & x \in [0,351; 3,315] \\ 0,193x^2 - 3,029x + 4,576, & x \in [3,315; 3.6,432] \end{cases}$$

Построим график квадратичного сплайна (рис. 5.4).

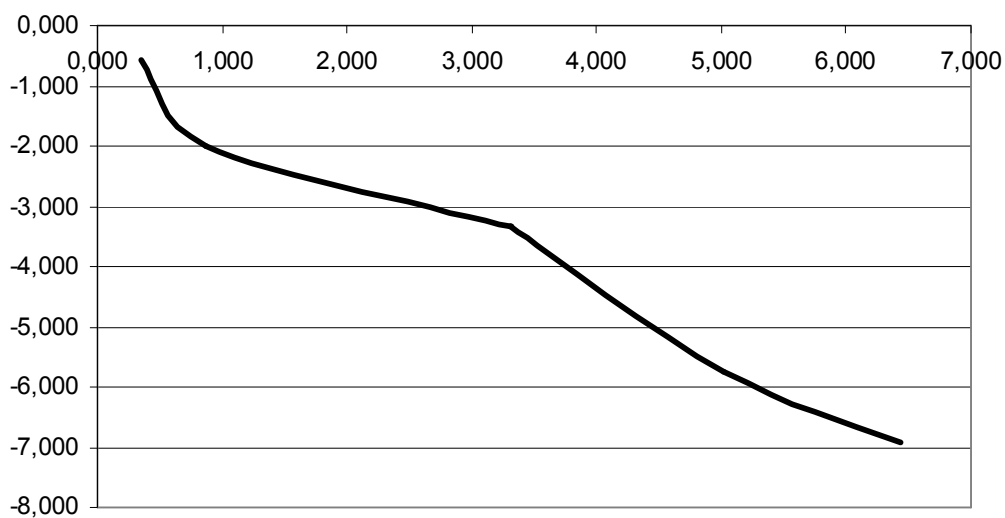


Рис. 5.4. График квадратичного сплайна

5. На одном чертеже с графиком полиномов построим графики сплайнов.

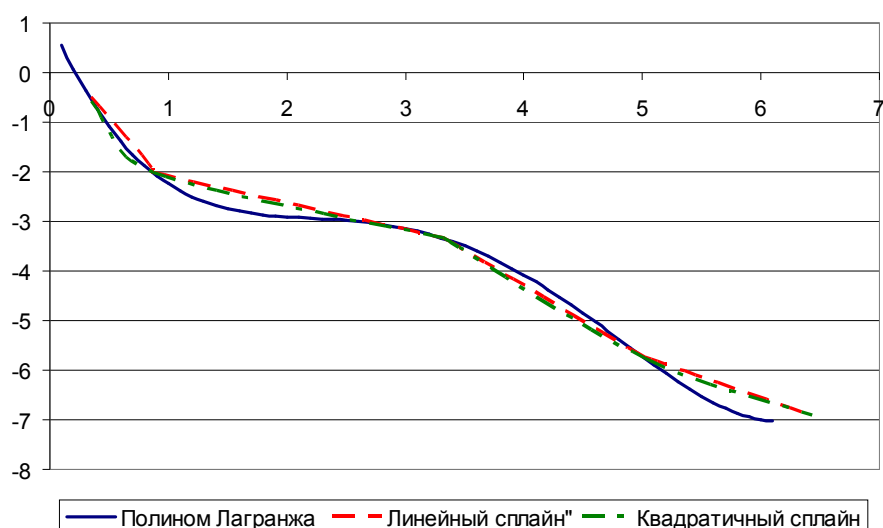


Рис. 5.5. Графики полиномов и сплайнов

5.2.3. Варианты заданий

№	Таблица значений функции
1	x : 0,847 1,546 1,834 2,647 2,910 y : -1,104 1,042 0,029 -0,344 -0,449
2	x : 0,284 0,883 1,384 1,856 2,644 y : -3,856 -3,953 -5,112 -7,632 -8,011
3	x : 0,259 0,841 1,562 2,304 2,856 y : 0,018 -1,259 -1,748 -0,532 0,911
4	x : 0,172 0,567 1,113 2,119 2,769 y : -7,057 -5,703 -0,132 1,423 2,832
5	x : 0,092 0,772 1,385 2,108 2,938 y : 3,161 1,357 -0,158 -0,129 -4,438
6	x : 0,357 0,871 1,567 2,032 2,628 y : 0,548 1,012 1,159 0,694 -0,503
7	x : 0,235 0,672 1,385 2,051 2,908 y : 1,082 1,805 4,280 5,011 7,082
8	x : 0,015 0,681 1,342 2,118 2,671 y : -2,417 -3,819 -0,642 0,848 2,815
9	x : 0,231 0,848 1,322 2,224 2,892 y : -2,748 -3,225 -3,898 -5,908 -6,506
10	x : 0,083 0,472 1,347 2,117 2,947 y : -2,132 -2,013 -1,613 -0,842 2,973
11	x : 0,119 0,718 1,342 2,859 3,948 y : -0,572 -2,015 -3,342 -6,752 -6,742

Окончание

12	$x: 0,184 \quad 0,865 \quad 1,213 \quad 2,019 \quad 2,862$ $y: -1,687 \quad -2,542 \quad -5,082 \quad -7,042 \quad -8,538$
13	$x: 0,351 \quad 0,867 \quad 1,315 \quad 2,013 \quad 2,859$ $y: 0,605 \quad 0,218 \quad 0,205 \quad 1,157 \quad 5,092$
14	$x: 0,135 \quad 0,876 \quad 1,336 \quad 2,301 \quad 2,642$ $y: -2,132 \quad -2,113 \quad -1,613 \quad -0,842 \quad 1,204$
15	$x: 0,135 \quad 0,876 \quad 1,336 \quad 2,301 \quad 2,851$ $y: 2,382 \quad -0,212 \quad -1,305 \quad -3,184 \quad -4,365$
16	$x: 0,079 \quad 0,637 \quad 1,345 \quad 2,095 \quad 2,782$ $y: -4,308 \quad -0,739 \quad 1,697 \quad 4,208 \quad 6,203$
17	$x: 2,119 \quad 3,618 \quad 5,342 \quad 7,859 \quad 8,934$ $y: 0,605 \quad 0,718 \quad 0,105 \quad 2,157 \quad 3,431$
18	$x: 0,345 \quad 0,761 \quad 1,257 \quad 2,109 \quad 2,943$ $y: -1,221 \quad -0,525 \quad 2,314 \quad 5,106 \quad 9,818$
19	$x: 0,234 \quad 0,649 \quad 1,382 \quad 2,672 \quad 2,849$ $y: 0,511 \quad 0,982 \quad 2,411 \quad 3,115 \quad 4,184$
20	$x: 0,238 \quad 0,647 \quad 1,316 \quad 2,108 \quad 4,892$ $y: 0,092 \quad 0,672 \quad 2,385 \quad 3,108 \quad 2,938$
21	$x: 0,248 \quad 0,663 \quad 1,238 \quad 2,092 \quad 2,939$ $y: -3,642 \quad 0,802 \quad 0,841 \quad 0,513 \quad 0,328$
22	$x: 0,282 \quad 0,872 \quad 1,513 \quad 2,022 \quad 2,672$ $y: 6,324 \quad -0,405 \quad -1,114 \quad -1,315 \quad -1,469$
23	$x: 0,324 \quad 0,718 \quad 1,315 \quad 2,035 \quad 2,893$ $y: -2,052 \quad -1,597 \quad -0,231 \quad 2,808 \quad 8,011$
24	$x: 0,218 \quad 0,562 \quad 1,492 \quad 2,119 \quad 2,948$ $y: 0,511 \quad 0,982 \quad 2,411 \quad 3,115 \quad 4,561$
25	$x: 0,132 \quad 0,567 \quad 1,153 \quad 2,414 \quad 3,939$ $y: 69,531 \quad 1,112 \quad -1,672 \quad -1,922 \quad -1,925$
26	$x: 0,234 \quad 0,649 \quad 1,382 \quad 3,672 \quad 5,911$ $y: 3,902 \quad 2,675 \quad 0,611 \quad -3,256 \quad -3,615$
27	$x: 0,134 \quad 0,561 \quad 1,341 \quad 2,291 \quad 6,913$ $y: 2,156 \quad 3,348 \quad 3,611 \quad 4,112 \quad 4,171$
28	$x: 0,452 \quad 0,967 \quad 2,255 \quad 4,013 \quad 5,432$ $y: 1,252 \quad 2,015 \quad 4,342 \quad 5,752 \quad 6,911$
29	$x: 0,151 \quad 0,862 \quad 1,282 \quad 2,139 \quad 2,739$ $y: -4,528 \quad -0,345 \quad 0,638 \quad 1,342 \quad 3,645$
30	$x: 0,219 \quad 0,811 \quad 1,341 \quad 2,111 \quad 2,874$ $y: -2,151 \quad -0,452 \quad 1,214 \quad 2,891 \quad 4,617$