4. Лабораторная работа №4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

4.1.1. Метод Ньютона

Пусть требуется решить систему вида:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}, \tag{4.1}$$

где функции $f_1, f_2, ..., f_n$ – заданные нелинейные вещественнозначные функции n вещественных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ F(\overline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ f_2(\overline{x}) \\ ... \\ f_n(\overline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}, \ \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (4.1) можно записать в виде

$$F(\overline{x}) = \overline{0}. \tag{4.2}$$

Обозначим через

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}; \frac{\partial f_1}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}; \frac{\partial f_n}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

J – матрица Якоби, якобиан.

Для n-мерного случая итерационный процесс Ньютона:

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \left[J(\overline{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\overline{x}^{(k)}). \tag{4.4}$$

Замечание: Если начало приближения выбрано достаточно близко к решению системы, то итерационный процесс (4.4) сходится к этому решению с квадратичной скоростью.

Недостаток: Метод Ньютона достаточно трудоемкий – на каждом шаге итерационного процесса необходимо найти матрицу, обратную якобиану.

Модификации метода Ньютона:

I. Если матрицу Якоби вычислить и обратить лишь в начальной точке, то получим ***модифицированный метод Ньютона***:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(0)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)}). \qquad (4.5)$$

Плюсы: Требует меньших вычислительных затрат на 1 итерационный шаг. ***Минусы:*** Итераций требуется значительно больше для достижения заданной точности, чем основной метод Ньютона. Имеет геометрическую скорость сходимости.

II. ***Двухступенчатый метод Ньютона.***

Идея: Вычисление и обращение матрицы Якоби не на каждой итерации, а через несколько шагов.

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)}) - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)})). \qquad (4.6)$$

За $\bar{x}^{(k)}$ принимается результат одного шага основного метода, затем одного шага модифицированного метода – двухступенчатый процесс.

$$\bar{z}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)});\ \bar{x}^{(k)} = \bar{z}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{z}^{(k)}). \qquad (4.7)$$

Такой процесс при определенных условиях дает кубическую сходимость последовательности $\{\bar{x}^{(k)}\}$ к решению $\bar{x}^{*}$.

Существуют модификации метода Ньютона, в которых задача обращения матриц Якоби на каждой итерации решается не точно, а приближенно. К таким методам относятся:

– ***аппроксимационный*** аналог метода Ньютона;

– ***разностный*** метод Ньютона.

4.1.2. Метод простой итерации

Необходимо найти решение системы (4.2). Таким образом, рассматривается задача о нулях нелинейного отображения

$F : R_n \to R_n$.

Пусть $\Phi : X \to X$, где $\Phi(X)$ – нелинейный оператор, а X – банахово подпространство (сепарабельное, т. е. счетное, всюду плотное множество).

Определение. Элемент пространства $x^* \in X$ называется неподвижной точкой оператора *Ф,* если $\Phi(x^*) = x^*$.

Определение. Оператор *Ф* называется сжимающим на множестве $Q \subset X$, если для $\forall x'$ и $x''Q$ справедливо $\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \le q\|x' - x''\|$, $q < 1$ – условие Липшица.

Рассмотрим наиболее простой метод – метод итерации.

Пусть система (4.1) преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}), \tag{4.9}$$

где $\Phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ ... \\ \varphi_n(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$.

Запишем итерацию

$$\bar{x}^{(k+1)} = \Phi(\bar{x}^{(k)}), \tag{4.10}$$

которая определяет ***метод простой итерации*** для задачи (4.1).

Если отображение, задаваемое системой (4.8), является сжимающим в некоторой окрестности корня, начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$ лежит в той же окрестности и итерации (4.10) не выходят за ее пределы, то последовательность $\{\bar{x}^{(k)}\}$ сходится к вектору решения системы (4.1) – $\bar{x}^{*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$.

Теорема о простых итерациях. Пусть функция $\Phi(\bar{x})$ и замкнутое множество $M \subseteq D(\Phi) \in R_n$:

1) $\Phi(\bar{x}) \in M, \forall \bar{x} \in M$;

2) $\exists q < 1 : \left\|\Phi(\bar{x}) - \Phi(\tilde{\bar{x}})\right\| \le q\left\|\bar{x} - \tilde{\bar{x}}\right\|$, для $\forall\ \bar{x}, \tilde{\bar{x}} \in M$,

тогда $\Phi(\bar{x})$ имеет в M единственную неподвижную точку $\bar{x}^*$; последовательность $\{\bar{x}^{(k)}\}$, определяемая методом простых итераций по формуле (4.10), при $\forall$ начальных $\bar{x}^{(0)} \in M$ сходится к $\bar{x}^*$ и справедливы оценки:

$$\left\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\left\|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\right\|, \forall k \in N. \qquad (4.11)$$

Для приведения системы нелинейных уравнений к виду, пригодному для итерации, можно использовать такой способ: умножить каждое уравнение системы (4.1) на α_i, где $i = \overline{1,n}$, – некоторый множитель, не равный нулю. Затем эти множители можно использовать для достижения условия сжимаемости.

Недостаток: необходимо прибегать к искусственным приемам при приведении системы к виду, пригодному для итерации.

4.1.3. Метод наискорейшего спуска

Общим недостатком рассмотренных ранее методов является локальный характер сходимости. Когда возникают проблемы с выбором хорошего начального приближения, применяют методы спуска.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}. \qquad (4.12)$$

Из функций f и g системы (4.12) образуем новую функцию:

$$\Phi(x,y) = f^2(x,y) + g^2(x,y). \quad (4.13)$$

Так как функция $\Phi(x,y)$ неотрицательная, то $\exists (x^*, y^*)$:

$\Phi(x,y) \ge \Phi(x^*, y^*) \ge 0, \ \forall (x,y) \in R_2$, т. е. $(x^*, y^*) = \arg\min\limits_{x,y \in R_2} \Phi(x,y)$.

Так как $\Phi(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*)$ решение системы (4.12).

Последовательность точек $\{x_k\}, \{y_k\}$ получим по рекуррентной формуле

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

где $k = 0,1,2,...;$ $(p_k, q_k)^T$ – вектор, определяющий направление минимизации; α_k – скалярная величина, шаговый множитель.

При этом выполняется условие релаксации: $\Phi(x_{k+1}, y_{k+1}) < \Phi(x_k, y_k)$.

Вектор $\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = -grad\Phi(x_k, y_k) = -\begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k, y_k) \\ \Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}$ – антиградиент $\Phi(x,y)$.

Тогда градиентный метод имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k, y_k) \\ \Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где оптимальный шаг $\alpha_k = \arg\min\limits_{\alpha > 0} \Phi \begin{pmatrix} x_k - \alpha\Phi'_x(x_k, y_k) \\ y_k - \alpha\Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}$. (4.16)

Формулы (4.15) и (4.16) определяют градиентный метод, который называют методом наискорейшего спуска.

Достоинство: глобальная скорость (из любой начальной точки процесс приведет к минимальной точке).

Недостаток: медленная скорость сходимости эквивалентная линейной, причем, скорость замедляется в окрестности корня. Лучше применять совместно с другими методами (сначала – спуск, затем – метод Ньютона).

4.2. Пример выполнения лабораторной работы

4.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Локализуйте корни системы уравнений графически.

2. Найдите с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все корни системы нелинейных уравнений, используя методы Ньютона и наискорейшего спуска.

4.2.2. Решение типового примера

1. Локализуем корни системы уравнений графически.

$$\begin{cases} \sin(x_1 + 1{,}5) - x_2 + 2{,}9 = 0 \\ \cos(x_2 - 2) + x_1 = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем систему уравнений к виду

$$\begin{cases} x_2 = \sin(x_1 + 1{,}5) + 2{,}9 \\ x_2 = \arccos(-x_1 - 2) + 2 \end{cases}.$$

Построим графики полученных функций (рис. 4.1).

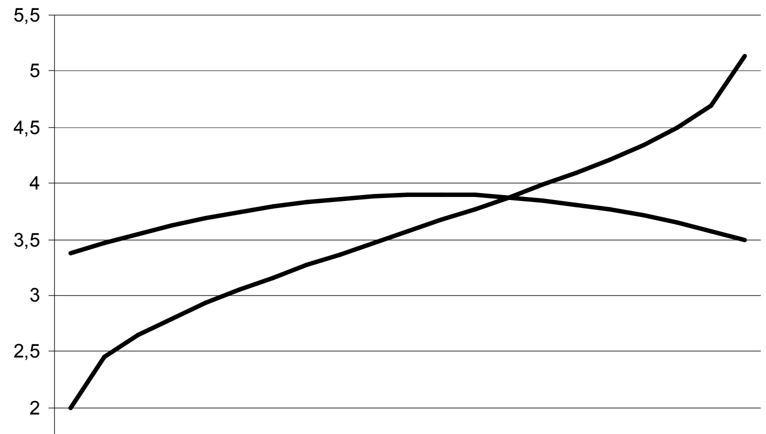

Рис. 4.1. Графическая локализация корня уравнения

Система уравнений имеет один действительный корень на отрезке единичной длины $x_1 \in [0;1]$ и $x_2 \in [3;4]$.

2. Найдем с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ корень системы нелинейных уравнений, используя метод Ньютона.

Построим итерационный процесс Ньютона

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \left[J(\overline{x}^{(k)})\right]^{-1} \cdot F(\overline{x}^{(k)}).$$

Найдем якобиан $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1 + 1{,}5) - x_2 + 2{,}9 \\ f_2(x_1, x_2) = \cos(x_2 - 2) + x_1 \end{cases}.$$

Получим $J = \begin{pmatrix} \cos(x_1 + 1{,}5) & -1 \\ 1 & -\sin(x_2 - 2) \end{pmatrix}$.

Выберем начальное приближение: $\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Вычисления будем выполнять до выполнения условия

$\left\| \overline{x}^{k} - \overline{x}^{k-1} \right\| \le \varepsilon = 0{,}000\,001$.

Найдем значение якобиана в точке $\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, получим

$$J(\overline{x}^{0}) = \begin{pmatrix} 0{,}070\,737 & -1 \\ 1 & -0{,}909\,297 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к якобиану $\left[J(\overline{x}^{0})\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}971\,804 & 1{,}068\,743 \\ -1{,}068\,743 & 0{,}075\,600 \end{pmatrix}$.

Значение функции $F(\overline{x}^{0}) = \begin{pmatrix} -0{,}102\,505 \\ -0{,}416\,147 \end{pmatrix}$.

Выполним первую итерацию

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}971\,804 & 1{,}068\,743 \\ -1{,}068\,743 & 0{,}075\,600 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}102\,505 \\ -0{,}416\,147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}345\,139 \\ 3{,}921\,909 \end{pmatrix}.$$

$\left\| \overline{x}^{k} - \overline{x}^{k-1} \right\| = 0{,}345\,139$.

Занесем вычисления в таблицу.

k	$\overline{x}^k$	$\lVert \overline{x}^k - \overline{x}^{k-1} \rVert$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0{,}345\,139 \\ 3{,}921\,909 \end{pmatrix}$	0,345 139
2	$\begin{pmatrix} 0{,}299\,791 \\ 3{,}874\,888 \end{pmatrix}$	0,047 021
3	$\begin{pmatrix} 0{,}298\,713 \\ 3{,}874\,140 \end{pmatrix}$	0,001 078
4	$\begin{pmatrix} 0{,}298\,712 \\ 3{,}874\,139 \end{pmatrix}$	0,000 001

Поскольку $\lVert \overline{x}^4 - \overline{x}^3 \rVert \le 0{,}000\,001$, считаем, что корень системы уравнений $\overline{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}298\,712 \\ 3{,}874\,139 \end{pmatrix}$ с точность $\varepsilon = 10^{-6}$.

Найдем с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ корень системы нелинейных уравнений, используя метод наискорейшего спуска.

Построим итерационный процесс метода наискорейшего спуска

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_{x_1}(x_1^k, x_2^k) \\ \Phi'_{x_2}(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix}.$$

Строим функцию $\Phi(x_1, x_2) = f_1^2(x_1, x_2) + f_2^2(x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= \sin^2(x_1 + 1{,}5) + \cos^2(x_2 - 2) + x_1^2 + x_2^2 + 5{,}8\sin(x_1 + 1{,}5) - \\ &- 2x_2 \sin(x_1 + 1{,}5) + 8{,}41 - 5{,}8x_2 + 2x_2 \cos(x_2 - 2) \end{aligned}.$$

Найдем частные производные функции $\Phi(x_1, x_2)$:

$$\Phi'_{x_1}(x_1, x_2) = 2\left[\cos(x_1 + 1{,}5) \cdot \left(\sin(x_1 + 1{,}5) + 2{,}9 - x_2\right) + x_1 + \cos(x_2 - 2)\right],$$

$$\begin{aligned} \Phi'_{x_2}(x_1, x_2) = -2\big[&\cos(x_2 - 2)\sin(x_2 - 2) - x_2 + \sin(x_1 + 1{,}5) + 2{,}9 + \\ &+ x_1 \sin(x_1 + 1{,}5)\big] \end{aligned}.$$

Путем перебора выбираем наилучший шаговый множитель α, который оставим постоянным α = const = 0,3.

После первой итерации получаем вектор: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}254\,039 \\ 3{,}711\,456 \end{pmatrix}$.

И только на 25 итерации достигается необходимая точность $\varepsilon = 10^{-6}$, и мы получаем решение:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}298\,711 \\ 3{,}741\,390 \end{pmatrix}.$$

4.2.3. Варианты заданий

№	**Система уравнений**	**№**	**Система уравнений**
1	$\sin(x_1 + x_2) - x_2 - 1.2 = 0$ $2x_1 + \cos x_2 - 2 = 0$	10	$\sin(0.5x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
2	$\cos(x_1 - 1) + x_2 - 0.5 = 0$ $\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$	11	$\tan(x_1 x_2 + 0.3) - x_1^2 = 0$ $0.9x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
3	$\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ $\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$	12	$\sin(x_1 + x_2) - 1.3x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + 0.2x_2^2 - 1 = 0$
4	$\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$ $2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) - 1 = 0$	13	$\tan(x_1 x_2) - x_1^2 = 0$ $0.8x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
5	$\sin(x_1 + 1.5) - x_2 + 2.9 = 0$ $\cos(x_2 - 2) + x_1 = 0$	14	$\sin(x_1 + x_2) - 1.5x_1 - 0.1 = 0$ $3x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
6	$\cos(x_1 + 0.5) + x_2 - 0.8 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1.6 = 0$	15	$\tan(x_1 x_2) - x_1^2 = 0$ $0.7x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
7	$\sin(x_1 - 1) + x_2 - 0.1 = 0$ $x_1 - \sin(x_2 + 1) - 0.8 = 0$	16	$\sin(x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 0.1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
8	$\cos(x_1 + x_2) + 2x_2 = 0$ $x_1 + \sin x_2 - 0.6 = 0$	17	$\tan(x_1 x_2 + 0.2) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
9	$\cos(x_1 + 0.5) - x_2 - 2 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1 = 0$	18	$\sin(x_1 + x_2) - x_1 + 0.1 = 0$ $x_2 - \cos(3x_1) + 0.1 = 0$

Окончание

№	Система уравнений	№	Система уравнений
19	$\sin(x_1+x_2)-x_2-1.5=0$ $x_1+\cos(x_2-0.5)-0.5=0$	25	$\cos(x_1+0.5)+x_2-1=0$ $\sin x_2-2x_1-2=0$
20	$\sin(x_2+1)-x_1-1.2=0$ $2x_1^2+x_2-2=0$	26	$\cos(x_2-2)+x_1=0$ $\sin(x_1+0.5)-x_2+2.9=0$
21	$\cos(x_2-1)+x_1-0.5=0$ $x_2-\cos x_1-3=0$	27	$\sin(x_1-1)+x_2-1.5=0$ $x_1-\sin(x_2-1)-1=0$
22	$\tan(x_1x_2+0.4)-x_1^2=0$ $0.6x_1^2+2x_2^2-1=0$	28	$\sin(x_2+1)-x_1-1=0$ $2x_2+\cos x_1-0.5=0$
23	$\sin(x_1+x_2)-1.6x_1-1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$	29	$\cos(x_2-1)+x_1-0.8=0$ $x_2-\cos x_1-2=0$
24	$\tan(x_1x_2+0.1)-x_1^2=0$ $x_1^2+2x_2^2-1=0$	30	$\cos(x_1-1)+x_2-1=0$ $\sin x_2+2x_1-1.6=0$