3. Лабораторная работа №3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Численные методы решения нелинейных уравнений

3.1.1. Локализация корней

Будем рассматривать задачу приближенного нахождения нулей функции одной переменной

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

где $f: R_1 \to R_1$ – алгебраическая или трансцендентная функция.

Теорема 1 (Больцано–Коши). Если непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ на концах его имеет противоположные знаки, т. е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \tag{3.2}$$

то на интервале (a, b) она хотя бы один раз обращается в ноль.

Слабость теоремы:

1. Не дает ответа на вопрос о количестве корней на $[a, b]$ в случае выполнения условия (3.2).

2. Если условие (3.2) не выполнено, то не позволяет утверждать, что корней на $[a, b]$ нет.

Усиление теоремы.

Теорема 2. Непрерывная, строго монотонная функция $f(x)$ имеет и при том единственный ноль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Установить монотонность на данном отрезке можно для дифференцируемой функции, потребовав знакопостоянства ее производной на всем отрезке.

Теорема 3. Пусть $f \in C^1[a;b]$, тогда если $f'(x)$ не меняет знак на интервале (a, b), то условие (3.2) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (3.1) имело и при этом единственный корень на отрезке $[a, b]$.

3.1.2. Метод Ньютона

Рассмотрим $f(x)=0$ и построим итерационный процесс:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f`(x_n)},\ n=0,1,2,... \qquad (3.3)$$

Запишем уравнение касательной в точке x_0: $y-f(x_0)=f`(x_0)(x-x_0)$.

Найдем точку пересечения касательной с осью абсцисс:

$y=0$, тогда $x_1\approx x_0-\dfrac{f(x_0)}{f`(x_0)}$.

Затем проводим касательную в x_1 и находим x_2 и так далее.

Поэтому метод Ньютона так же называют методом касательных.

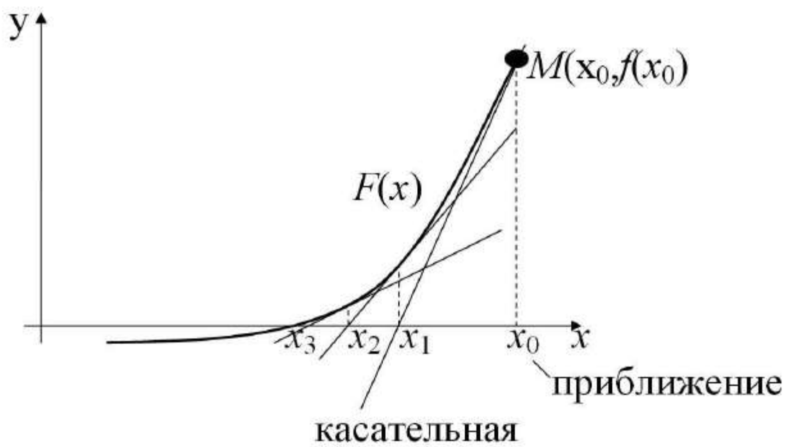

Рис. 3.1. Метод Ньютона (касательных)

Необходимые условия сходимости метода Ньютона:

1. Функция $f(x)$ должна быть дважды дифференцируема и непрерывна, должна иметь непрерывную первую производную, а $|f''(x)|<M$.

2. $f'(x)\neq 0$ на всем промежутке, содержащем корень $\forall x\in[a,b]: x^*\in[a,b]$.

3. $f''(x)$ сохраняет знак на $[a,b]$, $f''(x)<0$ – функция выпукла вверх, $f''(x)>0$ – функция выпукла вниз.

4. Начальное приближение $x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Теорема. При выполнении необходимых условий 1–4, итерационный процесс Ньютона (3.3) сходится к решению x^* уравнения (3.1) с квадратичной скоростью в окрестности корня x^*.

3.1.3. Модификации метода Ньютона

I. Разностный метод с постоянным шагом.

Пусть для $f(x)=0$ построен итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,2,... \tag{3.4}$$

Для сложных функций вычисление $f'(x)$ достаточно трудоемко, поэтому заменим в (3.4) производную по определению

$$f'(x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}.$$

При малых значениях шага h получим приближенное равенство

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}. \tag{3.5}$$

II. Разностный метод с переменным шагом.

Шаг h можно изменять на каждой итерации либо проводить несколько итераций с одним шагом, затем его изменить (в зависимости от свойств функции). Тогда получим набор $h_1, h_2, ...$

Тогда (3.5) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h_k}{f(x_n + h_k) - f(x_n)}, n \neq k. \tag{3.6}$$

Преимуществом методов этой группы является отсутствие производной. Недостатком – низкая скорость сходимости.

3.1.4. Метод Стеффенсена

Если учесть, что функция $f(x_n)\to 0$ с той же скоростью, что и $x_n \to x^*$, то есть смысл полагать, что $h_k = f(x_n)$. Это можно сделать на той стадии итерационного процесса, когда значения функции $|f(x_n)|$ уже достаточно малы. При таких h_k итерационный процесс пронимает вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \tag{3.7}$$

Метод имеет сугубо локальный характер сходимости, но зато сходимость квадратичная.

3.1.5. Метод секущих

Пусть в (3.6) $h_k = x_{n-1} - x_n$, тогда $x_{n-1} = x_n + h_k$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}, \tag{3.8}$$

где x_0 и x_1 задаются.

Формула (3.8) определяет новый метод как двухшаговый.

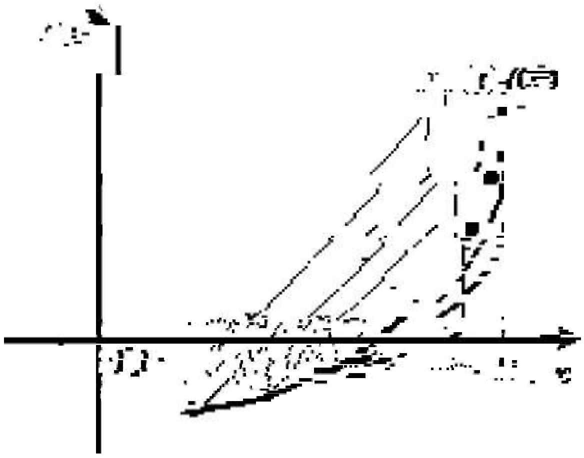

Рис. 3.2. Метод секущих

Из геометрических соображений легко понять, что x_{n+1} есть абсцисса точки пересечения с осью Оx прямой, проведенной через точки (x_{n-1}; $f(x_{n-1})$) и (x_n; $f(x_n)$), т. е. секущей.

3.1.6. Задача «лоцмана»

Наряду с уравнением $f(x)=0$ рассмотрим уравнение $e^{kx}f(x)=0$.

Тогда у $\Phi(x)=e^{kx}f(x)$ корни совпадают с корнями функции $f(x)$.

$\Phi'(x)=e^{kx}[kf(x)+f'(x)]$,

$$x_{n+1}=x_{n-1}-\frac{f(x_n)}{kf(x_n)+f'(x_n)}, \tag{3.9}$$

Идея метода: Используем свободный параметр *k* для повышения скорости сходимости процесса Ньютона.

Так как x^* – корень, заранее известное точное решение, то на каждой итерации можно принять $k=-\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}$. Тогда из (3.9) следует, что

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n)-f(x_n)f''(x_n)}. \tag{3.10}$$

Итерационный процесс метода «лоцмана» (3.10) в окрестности корня имеет кубическую скорость сходимости (при условии выполнения необходимых условий метода Ньютона). К недостаткам формулы (3.10) можно отнести наличие второй производной.

3.1.7. Метод хорд

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$ и выполняется условие (3.2). Запишем уравнение прямой через две точки – уравнение хорды, где $x_0=a$ и $x_1=b$.

$$\frac{y-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

Рассмотрим пересечение хорды с осью О*x*, получим точку x_2.

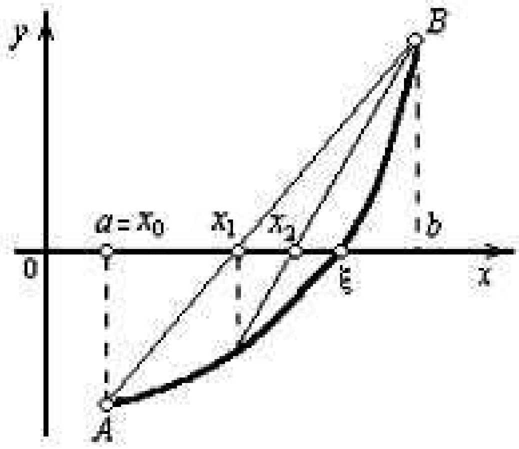

Рис. 3.3. Метод хорд

Выбираем две новые точки таким образом, чтобы на данном отрезке выполнялось условие (3.2).

Опять ищем пересечение с осью *Ox*, то есть $x_2 = x\big|_{y=0}$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

И так далее.

Пусть на *n*-м шаге выполнено условие $f(x_n)f(x_{n-1}) < 0$.

Итерационный процесс метода хорд можно записать:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}). \quad (3.11)$$

3.1.8. Метод простой итерации

Пусть решается уравнение $f(x) = 0$. Заменим его равносильным

$$x = \varphi(x). \quad (3.12)$$

Выберем начальное приближение x_0 и подставим в правую часть уравнения (3.12) и получим $x_1 = \varphi(x_0)$. (3.13)

Подставляя в правую часть уравнения (3.13) x_1 вместо x_0 получим $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,... \quad (3.14)$$

Если эта последовательность сходящаяся, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, то, переходя к пределу в уравнении (3.14), получим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1})$.

Предполагая $\varphi(x)$ непрерывной, получим

$$x^* = \varphi(x^*). \tag{3.15}$$

Теорема (о простых итерациях). Пусть $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на [a;b], причем все ее значения принадлежат [a;b]. Тогда, если $\exists q$ – правильная дробь: $|\varphi'(x)| \le q < 1$, то при $a < x < b$:

1) процесс итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1,2,...$ сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a;b]$;

2) предельное значение $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на [a;b].

Погрешность метода: Метод итераций обеспечивает на n-м шаге абсолютную погрешность приближения к корню уравнения (3.1), не превосходящую длины n-го отрезка, умноженной на дробь $\dfrac{q}{1-q}$: $\left|x^* - x_n\right| \le \dfrac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|$, где $q = \max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|$.

Чтобы функция $\varphi(x)$ обеспечивала сходимость последовательности (3.14), она должна иметь вид

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \tag{3.16}$$

где $|k| \ge \dfrac{Q}{2}$, $Q = \max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, знак k совпадает со знаком $f'(x)$ на $[a,b]$.

3.2. Пример выполнения лабораторной работы

3.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Локализуйте корень уравнения $f(x) = 0$ на начальном промежутке длиной не менее 1 графическим методом.

2. Выбрав в качестве начального приближения один из концов начального отрезка, уточните корень методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

3. Найдите с точностью 10^{-6} корень уравнения методом Ньютона.

4. Найдите методом по варианту корень уравнения с точностью 10^{-6}.

Метод по вариантам:

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 – разностный метод Ньютона с постоянным шагом,

2, 7, 12, 27, 22, 27, 32 – метод Стеффенсена,

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33 – метод секущих,

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 – метод «лоцмана»,

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 – метод хорд.

3.2.2. Решение типового примера

1. Локализуем корень уравнения $f(x) = 2x^2 - x^3 - e^x = 0$ на начальном промежутке длиной не менее 1 графическим методом.

Преобразуем уравнение к виду $2x^2 - x^3 = e^x$, и построим графики полученных функций (рис. 3.4).

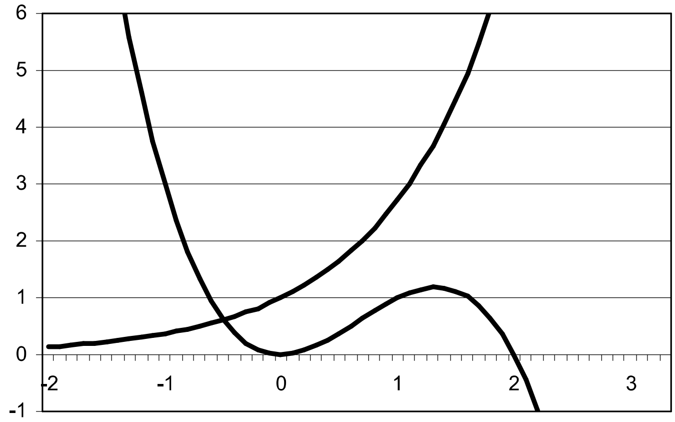

Рис. 3.4. Графическая локализация корня уравнения

Уравнение имеет один действительный корень на отрезке единичной длины $x \in [-1;0]$.

2. Выбрав в качестве начального приближения один из концов начального отрезка, уточним корень методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Для этого предварительно найдем $f'(x) = 4x - 3x^2 - e^x$. Нарисуем график полученной функции на отрезке $x \in [-1;0]$ (рис. 3.5).

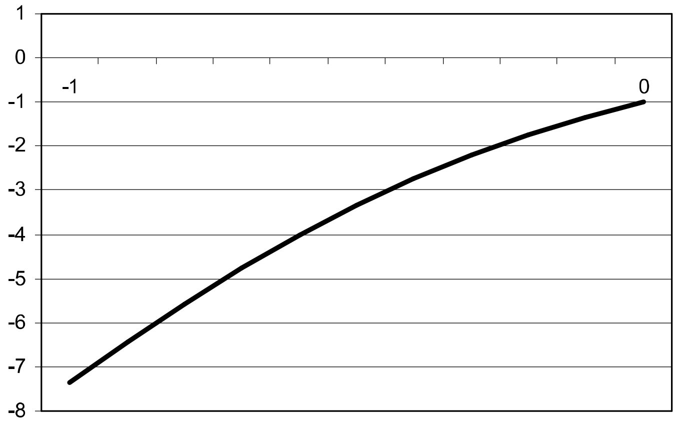

Рис. 3.5. График производной функции $f(x)$

Отсюда находим $Q = \max\limits_{x\in[-1,0]} |f'(x)| = f'(-1) = 7{,}36$.

Выберем k, удовлетворяющее условию (3.16). Так как $f'(x) < 0$ на отрезке $x \in [-1;0]$, следовательно, выберем $k = -4$.

Тогда функция $\varphi(x)$ будет иметь вид:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k} = \frac{4x + 2x^2 - x^3 - e^x}{4}.$$

Найдем производную функции $\varphi(x)$ и построим график этой функции на отрезке $x \in [-1;0]$ (рис. 3.6).

$$\varphi'(x) = x - \frac{f(x)}{k} = \frac{4 + 4x - 3x^2 - e^x}{4}.$$

Тогда $q = \max\limits_{x\in[-1,0]} |\varphi'(x)| = \varphi'(-1) = 0{,}84 < 1$. Возьмем за x_0 левый конец отрезка -1. Вычисления будем выполнять до выполнения условия

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{q}{1-q}\varepsilon = \frac{0{,}84}{1-0{,}84}0{,}001 \approx 0{,}0002 .$$

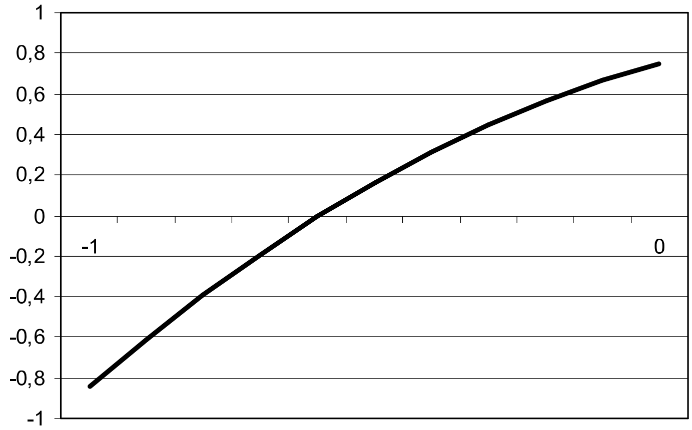

Рис. 3.6. График производной функции $\varphi(x)$

Выполним первую итерацию

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{4x_0 + 2x_0{}^2 - x_0{}^3 - e^{x_0}}{4} = -0{,}3420 .$$

Вычисления занесем в таблицу.

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,0000	–0,3420	
1	–0,3420	–0,4511	0,6580
2	–0,4511	–0,4856	0,1091
3	–0,4856	–0,4929	0,0345
4	–0,4929	–0,4942	0,0073
5	–0,4942	–0,4944	0,0013
6	–0,4944	–0,4945	0,0002

Поскольку $|x_6 - x_5| \le 0{,}0002$, считаем, что корень уравнения $x^* \approx -0{,}494$ с точность $\varepsilon = 0{,}001$.

3. Найдем с точностью 10^{-6} корень уравнения методом Ньютона.

Вычислим вторую производную функции:

$f'(x) = 4x - 3x^2 - e^x$, $f''(x) = 4 - 6x - e^x$.

Возьмем начальное приближение $x_0 = -1$, так как $f(-1)f''(-1) > 0$.

Образуем итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^{\ 2} - x_n^{\ 3} - e^{x_n}}{4x_n - 3x_n^{\ 2} - e^{x_n}}.$$

Выполняем вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$.

Расположим все вычисления в таблице.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	–7,367 879	
1	–0,642 757	0,565 981	–4,336 281	0,357 243
2	–0,512 235	0,060 018	–3,435 251	0,130 522
3	–0,494 764	0,000 982	–3,323 145	0,017 471
4	–0,494 468	0,000 000 3	–3,321 266	0,000 295
5	–0,494 468	0	–3,321 266	0

На пятой итерации достигаем необходимой точности $|x_5 - x_4| \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

4. Найдите методом по варианту корень уравнения с точностью 10^{-6}.

1) ***Разностный метод Ньютона с постоянным шагом***

Построим итерационный процесс разностного метода Ньютона с постоянным шагом *h*= 0,001

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$.

Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	–0,642 524	0,564 968	0,357 476
2	–0,512 074	0,059 462	0,130 450
3	–0,494 742	0,000 910	0,017 331
4	–0,494 468	–0,000 001	0,000 274
5	–0,494 468	0	0

На пятой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_5 - x_4\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

2) ***Метод Стеффенсена***

Построим итерационный процесс метода Стеффенсена

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	0,023 821	–1,022 985	1,023 821
2	–0,262 973	–0,612 266	0,286 794
3	–0,419 295	–0,232 177	0,156 322
4	–0,483 759	–0,035 206	0,064 464
5	–0,494 219	–0,000 827	0,010 461
6	–0,494 468	–0,000 000 5	0,000 249
7	–0,494 468	0	0

На седьмой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_7 - x_6\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

3) ***Метод секущих***

Построим итерационный процесс метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \ .$$

Зададим $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	0,000 000	–1,000 000	1,000 000
2	–0,275 321	–0,586 855	0,275 321
3	–0,666 403	0,670 578	0,391 082
4	–0,457 842	–0,117 435	0,208 561
5	–0,488 924	–0,018 319	0,031 081
6	–0,494 668	–0,000 663	0,005 744
7	–0,494 467	–0,000 004	0,000 201
8	–0,494 468	0	0,000 001

На восьмой итерации достигаем необходимой точности $|x_8 - x_7| \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

4) ***Метод «лоцмана»***

Построим итерационный процесс метода «лоцмана»

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	–0,533 922	0,136 050	0,466 078
2	–0,494 503	0,000 114	0,039 419
3	–0,494 468	0	0,000 034
4	–0,494 468	0	0

На четвертой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_4 - x_3\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

5) ***Метод хорд***

Построим итерационный процесс метода хорд

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

Зададим $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. Будем выполнять вычисления до выполнения условия $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	0,000 000	–1,000 000	1,000 000
2	–0,275 321	–0,586 855	0,275 321
3	–0,666 403	0,670 578	0,391 082
4	–0,457 842	–0,117 435	0,208 561
5	–0,488 924	–0,018 319	0,031 081
6	–0,494 668	0,000 663	0,005 744
7	–0,494 467	–0,000 004	0,000 201
8	–0,494 468	0	0,000 001

На восьмой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_8 - x_7\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

3.2.3. Варианты заданий

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$f(x)=\sqrt{x}-x^{-1}\ln x+4-1{,}5$	16	$f(x)=\exp(-0{,}5x)-0{,}2x^2+1$
2	$f(x)=\cos x-\exp(-x)+0{,}5$	17	$f(x)=\exp(-0{,}4x^2)-0{,}5x^2+1$
3	$f(x)=1{,}5-0{,}4\sqrt{x^3}-0{,}5\ln x$	18	$f(x)=1{,}5-0{,}4\sqrt{x^3}-e^{-x^2}\sin x$
4	$f(x)=2-\sqrt{x^3}-2\ln x$	19	$f(x)=2-0{,}5x^2-0{,}5x^{-1}\sin x-x$
5	$f(x)=1-0{,}5x^2\ln x+0{,}3\sqrt{x}$	20	$f(x)=0{,}3\exp(x)-\cos^2 x+2$
6	$f(x)=1-x\ln x+0{,}3\sqrt{x}$	21	$f(x)=0{,}5\exp(-x^2)+x\cos x$
7	$f(x)=3-0{,}5\sqrt{x}-\exp(-0{,}5x^2)$	22	$f(x)=\cos^2 x-0{,}8x^2$
8	$f(x)=3-\sqrt{x^3}+0{,}5\ln x$	23	$f(x)=1+\exp(-\sqrt{x})-\ln(x)$
9	$f(x)=0{,}3\exp(-0{,}7\sqrt{x})-2x^2+4$	24	$f(x)=x\ln x-\exp(-0{,}5x^2)$
10	$f(x)=0{,}5\exp(-\sqrt{x})-0{,}2\sqrt{x^3}+2$	25	$f(x)=\sin(0{,}5x)+1-x^2$
11	$f(x)=\exp(-0{,}7x)-0{,}3\sqrt{x}+1$	26	$f(x)=\cos(0{,}5x)-0{,}4\ln x$
12	$f(x)=3-\sqrt{x}-0{,}5\ln x$	27	$f(x)=\exp(-0{,}3x^2)-\sqrt{x}+1$
13	$f(x)=0{,}2\exp(-x^2)-\sqrt{x}+3$	28	$f(x)=\cos^2 x-0{,}1\exp(x)$
14	$f(x)=0{,}3\cos^2 x-\ln x+2$	29	$f(x)=x^2-\exp(-x^2)$
15	$f(x)=\exp(-0{,}5x^2)-x^3+0{,}2$	30	$f(x)=x-\sin x-0{,}25$