# プログラミング基礎演習 1
# 三角関数入門

東京都立大学情報科学科
柴田祐樹

2022 年

## 1　はじめに

三角関数は周期的なものにいつでも現れる，とても普遍的な関数である．この世界が周期的な現象で満たされていることを疑うものはいないだろうから，その重要性はわかってもらえると期待している．

## 2　円軌道とオイラー法

半径 1 の円を近似する点列を求めることを，図 1 を参考に考える．円を描く軌道が最も基本的な周期的運動であるから，この点列を正確に求めそこから議論を発展させる．この図の幾何学的関係性から，点が円周上の A$(x, y)$ にあるとき，左回りに隣接する円周上の点 B を近似する方法を考える．円に沿って曲がるという軌道を計算機で計算することは困難であるため，直線に移動して円軌道を近似する．円に接する直線は，接点の周辺で円に近いため（曖昧な表現であるが，直感的に理解してもらいたい．），この直線による近似は移動距離が小さい（これも曖昧である）場合にはうまく行く．三角形の合同条件から，三角形 ADC を考えたとき，その斜辺の長さは円の半径と同じで 1 であり，辺 DC は $y$, 辺 AD は $x$ の長さになる．この三角形を $h$ $(< 1)$ 倍縮めた三角形 C'D'A 上の点 C' に $(x, y)$ を移動して，$(x', y')$ を得る．つまり，

$$x' = x - yh, y' = y + xh$$

である．これを繰り返し適用して，$x_0, x_1, ..., x_k, y_0, y_1, ..., y_k$ の列を得ることを考えれば，

$$x_{k+1} = x_k - y_k h, y_{k+1} = y_k + x_k h, k = 0, 1, ... \tag{1}$$

の漸化式を得る．この方法はオイラー法と呼ばれるものに一致する．

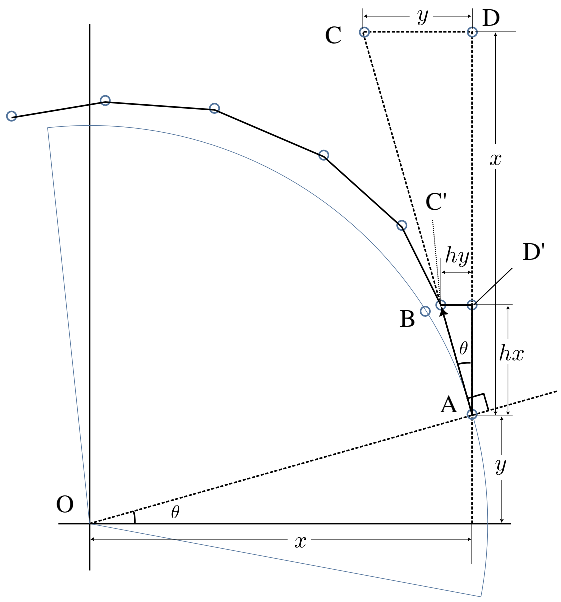


図 1　円軌道の図解

この方法で描かれる円は，初期の点 $x_0, y_0$ による長さ $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ の円を描く．このことについても，図 1 から理解できるだろう．

# 3　三角関数

円軌道のうち，半径 1 の円上に乗る点の y 座標を正弦 (sin)，x 座標を余弦 (cos) と呼ぶ．点 $x = 1, y = 0$ から円上を左回りに $\theta$ だけ進んだ場所にある円周上の点を $\sin\theta, \cos\theta$ と表す習慣がある．これとオイラー法の関係性を考える．三角関数に特に慣れ親しんだ者にとっては既知の導出が別の形で与えられているだけであるため，得られる結果に価値はない．興味があれば導出の方法を参考にしてもらえればありがたい．

オイラー法は (1) により得られ，$k$ の値が直前の $k-1$ の値により定まるように定義されている．この式から得られる $x_k, y_k$ が，

$$x_k = c_k x_0 - s_k y_0, y_k = s_k x_0 + c_k y_0 \tag{2}$$

と仮定する．この仮定を成り立たせる $c_k, s_k$ の定義が存在するのでそれを見ていく．今，

$$c_1 = 1, s_1 = 0 \tag{3}$$

とすれば $k = 1$ について (1) が成り立つ．よって，初期値はこのように設定する．また，$k$ について，(1) に (2) を代入すれば，

$$x_{k+1} = c_k x_0 - s_k y_0 - (s_k x_0 + c_k y_0)h, y_{k+1} = s_k x_0 + c_k y_0 + (c_k x_0 - s_k y_0)h$$

$x_0, y_0$ で整理して，

$$x_{k+1} = (c_k - s_k h)x_0 - (s_k + c_k h)y_0, y_{k+1} = (c_k + s_k h)x_0 + (c_k - s_k h)y_0$$

となるから，以下，

$$c_{k+1} = c_k - s_k h, s_{k+1} = s_k + c_k h \tag{4}$$

とおけば，

$$x_{k+1} = c_{k+1}x_0 - s_{k+1}y_0, y_{k+1} = s_{k+1}x_0 + c_{k+1}y_0$$

となるから，第 $k+1$ の点であっても (2) が成り立つことがわかる．これにより，数学的帰納法からすべての $k$ について (2) が成り立つ．よって，初期値 $x_0, y_0$ から円周上の点を求める場合，先に $c_k, s_k$ を求めておけば，(2) により，$x_k, y_k$ の点がすぐに求まることがわかる．また，$x_k, y_k$ は $x_0, y_0$ より $hk$ だけ左回転した点の座標であるから，$c_k, s_k$ により (2) を用いた変換は，点を角度 $hk$（rad）だけ左に回転させる．

$c_k, s_k$ について考察する．この点列の漸化式 (4) は円軌道を定義する (1) と同一のものである．よって，(3) の初期値設定により，$c_k, s_k$ をそれぞれ横，縦軸に取ったグラフは半径 1 の円を描く．最初に紹介したように，半径 1 の円周上に乗る点の x, y 座標をそれぞれ cos, sin とよぶ．また，$x = 1, y = 0$ から左回りで測ったときのその点までの円周の長さを $\theta$ としたとき，その円周上の点を $\cos\theta, \sin\theta$ と表す．説明している通り，この $\cos\theta, \sin\theta$ の値が与えられる $\theta$ についてわかっているならば，(2) により点を回転した座標が即座にわかり，回転した場所の位置を知りたいことはたくさんあるため，sin, cos の値を事前に計算して置くことの意義は大きい．回転角 $\theta$ から sin, cos の値を与える関数を三角関数と呼ぶ．座標と同じようにこれを単に $\cos\theta, \sin\theta$ と表す．

ここまでの定義から，いくらか定理を導出できる．加法定理と三角関数の微分である．

(4) は (1) と同じであるから，(2) の $x, y$ に $s, c$ を代入することが可能である．この式中の $(x_0, y_0)$ が $(1, 0)$ より $lh$ だけ進んだ場所にある点である，つまり $c_l, s_l$ とし，この式によりこの点が $kh$ 回転するためこれは $c_{l+k}, s_{l+k}$ となるはずである．よって，

$$c_{k+l} = c_k c_l - s_k s_l, s_{k+l} = c_k s_l + s_k c_l$$

が得られる．$\theta_n = nh$ として，定義より $c_n = \cos\theta_n$ であるから，

$$\cos(\theta_k + \theta_l) = \cos\theta_k \cos\theta_l - \sin\theta_k \sin\theta_l,$$

$$\sin(\theta_k + \theta_l) = \cos\theta_k \sin\theta_l + \sin\theta_k \cos\theta_l$$

が得られる．これは加法定理と呼ばれる．当然ながら $\cos\theta_k, \sin\theta_k$ は円周上の点であるため，

$$\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k = 1$$

が $\theta_k$ によらず常に成り立つ．

また，(4) より，

$$\frac{c_{k+1} - c_k}{h} = -s_k, \frac{s_{k+1} - s_k}{h} = c_k$$

であるから，

$$\frac{\cos(\theta_k + h) - \cos\theta_k}{h} = -\sin\theta_k, \frac{\sin(\theta_k + h) - \sin\theta_k}{h} = \cos\theta_k$$

つまり

$$\cos'\theta_k = -\sin\theta_k, \sin'\theta_k = \cos\theta_k$$

で与えられる三角関数の微分が得られる．三角関数の微分を加法定理から導く場合，$\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$ の証明が追加で必要となるが，ここで示した方法だとオイラー法に同等な性質が含まれているため直接は出てこない．オイラー法が収束することの証明は節 4 を参考にされたい．加法定理の証明，$\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$ の証明の両方に幾何学を用いるよりはこちらの方法は数列で議論ができるため，自然数の添字で点を刻んでいることから実数すべてについて議論するにはまだ足りていないが，より形式的であり，証明としてはわかりやすいのではないかと考える．

# 4　オイラー法の収束証明

この証明は微積と実数の性質を駆使するため学部 1 年生には少しむずかしいだろう．意欲のあるものは参考にしてもらいたい．

点列の半径を $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ と定義する．$h = 2\pi/N$ とする．$N$ は自然数である．また $x_0 = 1, y_1 = 0, r_0 = 1$ とする．このとき，例えば，$x_1 = 1, y_1 = h$ であるから，$r_1 = \sqrt{1 + h^2}$ となる．一般には，(1) を用いて，

$$r_{k+1} = \sqrt{x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2} = \sqrt{(x_k - y_k h)^2 + (y_k + x_k h)^2} = \sqrt{(x_k^2 + y_k^2)(1 + h^2)} = r_k\sqrt{1 + h^2}$$

となる．これより，曲線 $y = \sqrt{1 + x}$ は上に凸であるため，$x = 0, y = 1$ で接する接線は常に $f(x)$ より上側にある．その接線の方程式は $y = 0.5x + 1$ であるから，さきほどの等式より，

$$r_{k+1} = r_k\sqrt{1 + h^2} \le r_k\left(1 + \frac{1}{2}h^2\right)$$

の不等式が得られる．この不等式を繰り返し用いれば，

$$r_N \le r_0\left(1 + \frac{1}{2}h^2\right)^N$$

が得られる．変形して，$r_0 = 1$ を代入して

$$r_N \le \left(1 + \frac{1}{2}h^2\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}h^2}\frac{1}{2}h^2 N}$$

について考える．以下の $g(x)$

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

は単調増加で，ある実数 e に収束する（この事の証明は広く知られ Web などでいくらでも証明が乗っているため詳細は省く．$z = \log g(x)$ の 2 階微分を調べ，$g(x)$ が上に有界であることを 2 項定理を用いて調べればこのことはわかる.）．つまり，

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e}$$

が成り立つから，$h = 2\pi/N$ も用いて，

$$r_N \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{2}h^2 N} \leq \mathrm{e}^{\frac{2*\pi^2}{N}}$$

である．さらに，$x \to +0 \Rightarrow 2ax + 1 > \mathrm{e}^{ax}$ であるから，$N \to \infty$ において，

$$r_N \leq \mathrm{e}^{\frac{2*\pi^2}{N}} \leq 4\pi^2/N + 1$$

よって，$N \to \infty$ において，$1 \leq r_N \leq 1$ つまり $r_N = 1$ が得られる．また，

$$r_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq k \leq \cdots \leq r_N$$

であるから，すべての $k$ において $r_k = 1$ である．よって，$(x_k, y_k)$ は原点から距離 1 であることがわかるから，オイラー法により得られる点列は $N \to \infty$ においてすべて円上に乗ることがわかる．また誤差は分割数 $N$ に対して，半径が $4\pi^2/N$ を上界として大きくなるように現れることがわかる.

# 参考文献