# 演習問題 No. 4 の解答

■$\boxed{1}$ (1) $f'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x)=\frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$, $f'''(x)=-\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$ であるから，$n=2$ に対するマクローリンの定理は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \\ &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}} \qquad (\ 0<\theta<1\ ) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2)}{x^3}=-\frac{5}{16}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}$$

となる $0<\theta<1$ より，$x\to0$ のとき $\theta x\to 0$ である．よって，

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2)}{x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{5}{16}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}=-\frac{5}{16}$$

■$\boxed{2}$ (1) $f'(c)=(c-a)^{m-1}(c-b)^{n-1}\{m(c-b)+n(c-a)\}=0$ より，$c=\dfrac{na+mb}{m+n}$.

(2) $f'(c)=(2c-a-b)^3=0$ より，$c=\dfrac{a+b}{2}$.

■$\boxed{3}$ (1) $f'(2\theta)=3(2\theta)^2+1=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=5$ より，$\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) $f'(\theta)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\theta^2}}=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}=1$ より，$\theta=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

■$\boxed{4}$ $f(x)=\sqrt[5]{1+x}$ とすると，

$$f'(x)=\frac{1}{5}(1+x)^{-4/5}, \qquad f''(x)=-\frac{4}{25}(1+x)^{-9/5}, \qquad f'''(x)=\frac{36}{125}(1+x)^{-14/5}$$

であるから，$n=2$ に対するマクローリンの定理は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \\ &= 1+\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}x^2+\frac{6}{125}x^3(1+\theta x)^{-14/5} \end{aligned}$$

となる．$0<\theta<1$ より，$x\to0$ のとき $\theta x\to0$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}-1}-\frac{5}{x} &= \frac{x-5(\sqrt[5]{1+x}-1)}{x(\sqrt[5]{1+x}-1)} = \frac{x-x+\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{6}{25}x^3(1+\theta x)^{-14/5}}{x\Big(\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{25}x^2+\dfrac{6}{125}x^3(1+\theta x)^{-14/5}\Big)} \\ &= \frac{\dfrac{2}{5}-\dfrac{6}{25}x(1+\theta x)^{-14/5}}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{25}x+\dfrac{6}{125}x^2(1+\theta x)^{-14/5}} \longrightarrow \frac{2/5}{1/5}=2 \quad (\ x\to0\ ) \end{aligned}$$

■$\boxed{5}$ (1) $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$ より，

$$\sin x=-(x-\pi)+\frac{1}{6}(x-\pi)^3-\frac{1}{24}\sin\big(\theta(x-\pi)\big)(x-\pi)^4 \qquad (\ 0<\theta<1\ )$$

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x)=\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$, $f'''(x)=\dfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$ より，

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{6}\,\frac{1+2\theta^2x^2}{(1-\theta^2x^2)^{5/2}}\,x^3 \qquad (\ 0<\theta<1\ )$$