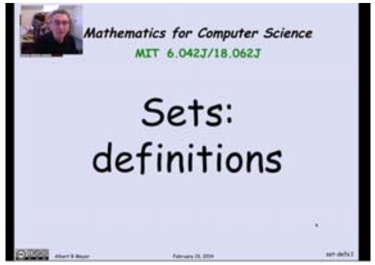
情報数学I（第3回）

集合と二項関係

岡本正吾
情報科学科・情報科学域
okamotos@tmu.ac.jp

集合 (Set)

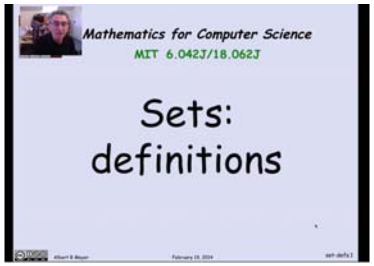
- 要素（元（げん）: element, メンバ: member）の集まり



MIT Open Courseware

集合 (Set)

- 要素（元（げん）: element, メンバ: member）の集まり
- 例
  - $\mathbb{R}$ 実数の集合
  - $\mathbb{N}$ 自然数の集合（本テキストでは0を含む）
  - $\mathbb{Z}$ 整数の集合
  - $\mathbb{C}$ 複素数の集合



MIT Open Courseware

集合 (Set)

- 集合 A を表記するときは
  - $A = \{0,1,2,3\}$
  - { } (brace)で要素を囲む
- 色々な要素が混在してもよい
  - $\{7, \text{“Albert R.”}, \frac{\pi}{2}\}$ は数，文字列，数からなる

集合 (Set)

- 要素の順番は気にしない（下記の意味は同じ）
  - $\{7, \frac{\pi}{2}\}$
  - $\{\frac{\pi}{2}, 7\}$

- 同じ要素を同一の集合内に記載しない
  - $\{7, \frac{\pi}{2}, 7\}$ は $\{7, \frac{\pi}{2}\}$ と記載すべき

空集合 (Null set ,empty set)

- 要素の数が0である集合
- 記号は ∅ (0に斜線) と決まっている（reserved symbol）
  - $\emptyset = \{\}$
  - $\{\}$ だけでも空集合を意味する

集合 (Set)

- 集合Xは，$P(x)$を満たす元xの集まりである

$$X = \{x | P(x)\}$$

集合 (Set)

- 集合Xは，$P(x)$を満たす元xの集まりである

$$X = \{x | P(x)\}$$

- 例
  - $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\} = \{0,1,2,3\}$　　コンマ（，）は「かつ」の意味

集合 (Set)

- 集合Xは，$P(x)$を満たす元xの集まりである

$$X = \{x | P(x)\}$$

- 例
  - $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\} = \{0,1,2,3\}$　コンマ（，）は「かつ」の意味
  - $\{x | x \in \mathbb{R}, x^2 < 0\} = \{\}$

集合 (Set)

- 集合Xは，$P(x)$を満たす元xの集まりである

$$X = \{x | P(x)\}$$

- 例
  - $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\} = \{0,1,2,3\}$　コンマ（，）は「かつ」の意味
  - $\{x \in \mathbb{R} | x^2 < 0\} = \{\}$
  - $\{x \in \mathbb{N} | x < 5, 2$で割り切れる$\} = \{2,4\}$

演習

次の集合のメンバをすべて記せ

- $\{x \in \mathbb{N} |, x = x^2\}$
- $\{2x + 1 | x$は10以下の素数$\}$
- $\{x \in \{0,2,4,6,8\} | \exists y \in \mathbb{N}\ x = 4y\}$

- このテキストでは自然数は0を含む.
- 1は素数ではない!

演習

次の集合のメンバをすべて記せ

- $\{x \in \mathbb{N} |, x = x^2\}$　0, 1
- $\{2x + 1 | x$は10以下の素数$\}$　5, 7, 11, 15
- $\{x \in \{0,2,4,6,8\} | \exists y \in \mathbb{N}\ x = 4y\}$　0, 4, 8

- このテキストでは自然数は0を含む.
- 1は素数ではない!

属する (Membership)

- x は集合 A の元（または要素・メンバ）である
  - $x \in A$

$\in$ の向きを間違わないように注意してください

属する (Membership)

- x は集合 A の元（または要素・メンバ）である
  - $x \in A$

- 読み方は色々です
  - x は A に属する.
  - x is an element of A. x は A の要素である.
  - A は x を含む.　A includes x. A contains x.

属する (Membership)

- x は集合 A の元（または要素・メンバ）である
  - $x \in A$

- $\frac{\pi}{2} \in \left\{\frac{\pi}{2}, 7, "Albert\ R."\right\}$
- $"Albert\ R." \in \{\frac{\pi}{2}, 7, "Albert\ R."\}$
- $\frac{14}{2} \in \{\frac{\pi}{2}, 7, "Albert\ R."\}$

- $\frac{\pi}{3} \notin \{\frac{\pi}{2}, 7, “Albert\ R.”\}$　$\frac{\pi}{3}$ は $\{\frac{\pi}{2}, 7, “Albert\ R.”\}$ に属しない

属する (Membership)

- $7 \in \mathbb{Z}$

- $7 \in \mathbb{R}$

- $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

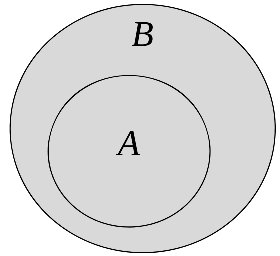
- $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$

部分集合 (Subset)

- A は B の部分集合である． A is a subset of B.
- A は B に含まれる． B contains A.
  - $A \subseteq B$
  - $A \subset B$

部分集合 (Subset)

- A は B の部分集合である． B is a subset of A.
- A は B に含まれる． B contains A.
  - $A \subseteq B$



- A のすべての要素はB の要素でもある
  - $\forall x. [x \in A \longrightarrow x \in B]$
  - $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4,5\}$

部分集合 (Subset)

- A は B の部分集合である． B is a subset of A.
- A は B に含まれる． B contains A.
  - $A \subseteq B$
  - $A \subset B$

- 例
  - $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\{3\} \subseteq \{3,5,7\}$　注: $3 \in \{3,5,7\}$
  - $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq$ every (any) set（空集合はどの集合にも含まれる）

べき集合 (Power set)

- $\mathrm{pow}(A)$ ::= A のすべての部分集合

  $= \{B | B \subseteq A\}$

べき集合 (Power set)

- $\mathrm{pow}(A)$ ::= A のすべての部分集合
  $= \{B | B \subseteq A\}$

- 例
  - $\mathrm{pow}(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}) = \{\{\mathrm{T}\}, \{\mathrm{F}\}, \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}, \emptyset\}$ （集合の集合．集合族）

べき集合 (Power set)

- $\mathrm{pow}(A)$ ::= A のすべての部分集合
  $= \{B | B \subseteq A\}$

- 例
  - $\mathrm{pow}(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}) = \{\{\mathrm{T}\}, \{\mathrm{F}\}, \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}, \emptyset\}$ （集合の集合．集合族）
  - $E \in \mathrm{pow}(\mathbb{Z})$　E は奇数の集合
  - $\mathbb{Z} \in \mathrm{pow}(\mathbb{R})$

$E \subseteq \mathrm{pow}(\mathbb{Z})$ でないことに注意

* 集合は，集合族のメンバになれる
集合は，集合族の部分集合出ない

べき集合 (Power set)

- $\mathrm{pow}(A)$ ::= A のすべての部分集合
  $= \{B | B \subseteq A\}$

- 例
  - $\mathrm{pow}(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}) = \{\{\mathrm{T}\}, \{\mathrm{F}\}, \{\mathrm{T},\mathrm{F}\},\emptyset\}$ （集合の集合．集合族）
  - $E \in \mathrm{pow}(\mathbb{Z})$　E は奇数の集合
  - $\mathbb{Z} \in \mathrm{pow}(\mathbb{R})$

$E \subseteq pow(\mathbb{Z})$ でないことに注意

- 一般に，$B \in \mathrm{pow}(A)$　IFF　$B \subseteq A$
  - 集合BがAのべき集合のメンバであるとき，BはAの部分集合

べき集合 (Power set)

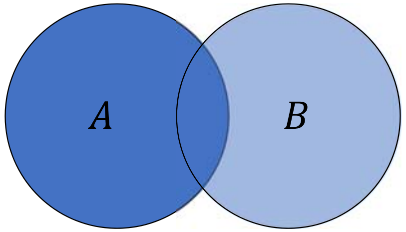
- $\mathrm{pow}(A)$ の代わりに，2^A と書くこともある

- 例

$$\mathrm{pow}(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$$

$$2^{\{a,b\}} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$$

Venn diagram（ベン図）

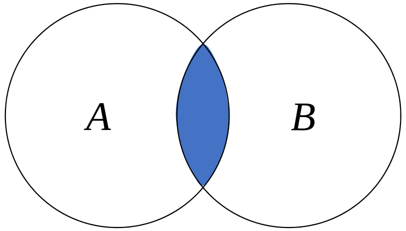


set A　　set B

- 複数の集合の関係を図示したもの

ベン図と集合の演算子

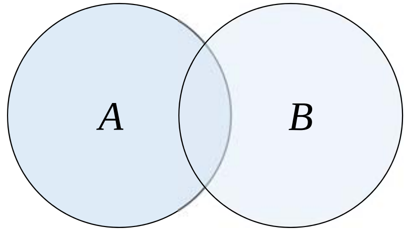
共通集合（intersection set）
積集合（product set）



$A \cap B ::= \{x | x \in A \text{ AND } x \in B\}$

「キャップ（cap）or intersection」と読む

和集合(union set)



$A \cup B ::= \{x | x \in A \text{ OR } x \in B\}$

「カップ（cup）or union」と読む

集合の分配法則

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

集合の分配法則

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

証明

$x \in A \cup (B \cap C)$　IFF（等値）
$x \in A \text{ OR } x \in (B \cap C)$　IFF
$x \in A \text{ OR } (x \in B \text{ AND } x \in C)$　IFF
$(x \in A \text{ OR } x \in B) \text{ AND } (x \in A \text{ OR } x \in C)$　IFF
$(x \in A \cup B) \text{ AND } (x \in A \cup C)$　IFF
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

論理演算の
分配法則

証明おわり

集合の分配法則

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

証明

$x \in A \cup (B \cap C)$　IFF（等値）
$x \in A$ OR $x \in (B \cap C)$　IFF
$x \in A$ OR $(x \in B$ AND $x \in C)$　IFF
$(x \in A$ OR $x \in B)$ AND $(x \in A$ OR $x \in C)$
$(x \in A \cup B)$ AND $(x \in A \cup C)$　IFF
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

証明おわり

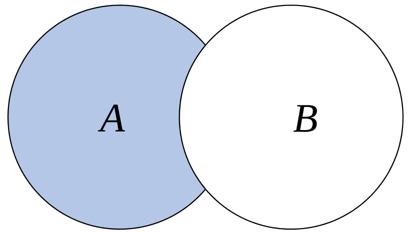
命題と同様に，分配法則はもう一種類ある．レポート課題でやってみよう

差集合と補集合 (Difference set & complement set)

集合AとBの差集合

$A - B$

は，集合Aから集合Bのメンバを除いた，Aの部分集合



$A - B ::= \{x | x \in A \text{ AND } x \notin B\}$

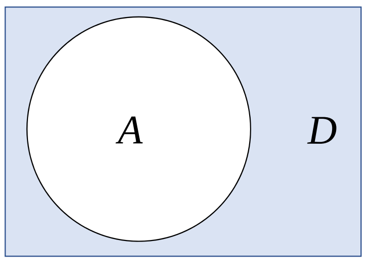
差集合と補集合 (Difference set & complement set)

ある集合Dを議論の対象とするとき

$\bar{A} ::= D - A$

をAの補集合と呼ぶ．A意外の部分をあらわす．

補集合(complement set)



$\overline{A} ::= D - A = \{x | x \notin A\}$

差集合と補集合 (Difference set & complement set)

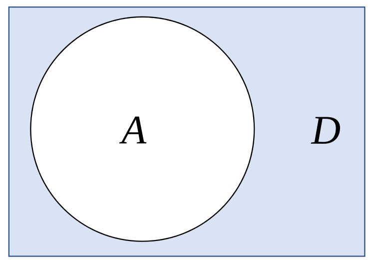
ある集合Dを議論の対象とするとき

$\bar{A} ::= D - A$

をAの補集合と呼ぶ．A意外の部分をあらわす．

議論の対象とする集合D を，Domain of discourse（議論領域，ドメイン）とよぶ

補集合(complement set)



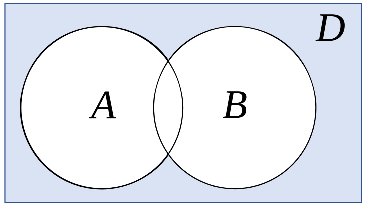
$\overline{A} ::= D - A = \{x | x \notin A\}$

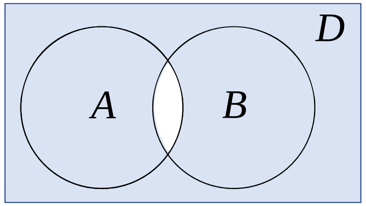
ド・モルガンの法則（集合版）

集合A, Bについて，次の法則が成立する

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$





演習: 集合の演算

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, B = \{1,3,5,7\}, C = \{0,2,4,6,8\}, D = \{0,3,6,9\}$とする．次の集合を示せ．

(1) $A \cup B$

(2) $(B \cup C) \cap \bar{D}$

(3) $\mathrm{A} - (B \cup C)$

(4) $\mathrm{pow}(\mathrm{C} \cap D)$

演習: 集合の演算

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, B = \{1,3,5,7\}, C = \{0,2,4,6,8\}, D = \{0,3,6,9\}$とする．次の集合を示せ．

(1) $A \cup B = \mathrm{A}$

(2) $(B \cup C) \cap \bar{D} = \{1,2,4,5,7,8\}$

(3) $\mathrm{A} - (B \cup C) = \{\}$

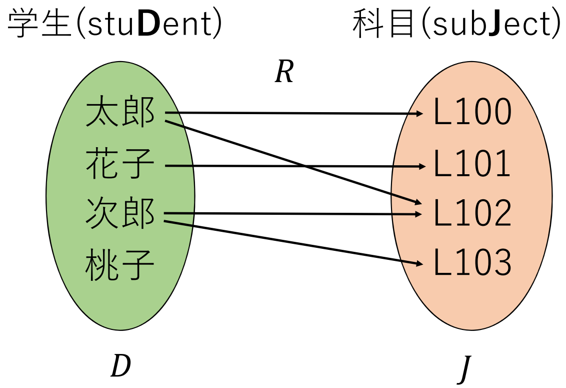
(4) $\mathrm{pow}(\mathrm{C} \cap D) = \{\{0\}, \{6\}, \{0,6\}, \emptyset\}$

二項関係 (Binary relations)

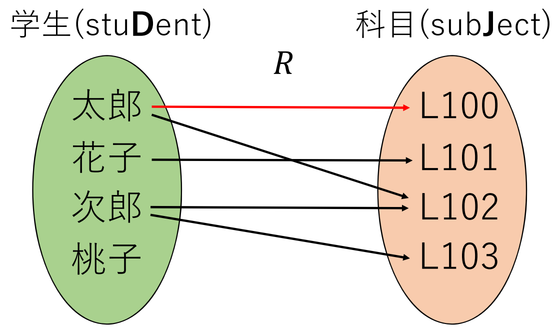
- 二項関係は**始集合**（**定義域・始域・domain**とも言う）と呼ばれる1つの集合の要素と，**終集合**（**終域・codomain・target set**）とも言う）と呼ばれるもう1つの集合の要素との結合関係である．
- A binary relation associates elements of one set called the **domain**, with elements of another set called the **codomain**.
- 二項関係は，関数（後に定義します）を拡張する概念です
  - 「関数」をきちんと定義することは本日の目的の１つ

二項関係 (Binary relations)

二項関係 R は集合 D と集合 J を関係づける



二項関係 (Binary relations)



"Taro is registered for L100."

二項関係 (Binary relations)

「太郎はL100を履修登録している」，「太郎とL100はRの関係にある」のnotation（記法）には数パターンがある

太郎 R L100　　**中置記法**(infix notation)

R(太郎, L100)　　**前置記法**(prefix notation)

(太郎, L100) $\in R$

(太郎, L100) $\in$ graph(R)

R は演算子・関数・集合のように記載される

直積（direct product）

- Graph（グラフ）
  - 集合Aと集合Bの直積（ちょくせき）の部分集合
- 直積（直積集合・積・direct product・product ・デカルト積）
  - ２つの集合の要素を組み合わせたものを要素としてもつ集合

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{1,2\}$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

タプル（Tuple）

$$A \times B = \{\boxed{(a, 1)}, (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

タプル（tuple），組（くみ）

- 集合AとBの要素の組．括弧（）とコンマ，で記載する．
- 順序に意味がある
  - $(a, 1) \neq (1, a)$
  - $(太朗, L100)$ と $(L100, 太朗)$ は意味が異なる

二項関係を言い換えると

二項関係とは，集合AとBの直積$A \times B$の部分集合である．

または

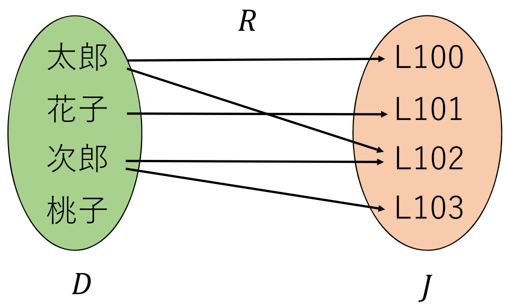
$A \times B$の部分集合Rを，AからBへの二項関係という．

二項関係は直積の部分集合

$D = \{太朗，花子，次郎，桃子\}$

$J = \{L100, L101, L102, L103\}$

$R = \{$
$(太朗, L100), (太朗, L101),$
$(花子, L101),$
$(次郎, L102), (太朗, L103)$
$\}$



$D \times J$は16個のメンバを有する．
Rはそのうちの5個を有する（$R \subseteq D \times J$）．

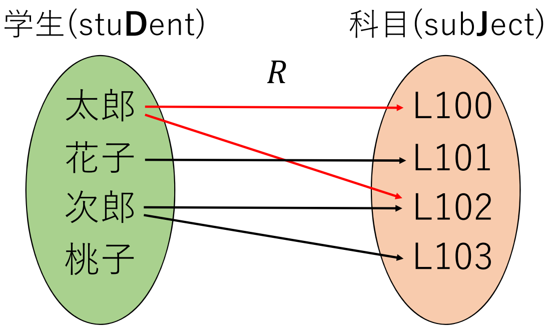
集合Aから集合Bへの関係

$A\ (a \in A)$からBへの関係Rを

$$R: A \to B$$

と書く

像（Image）

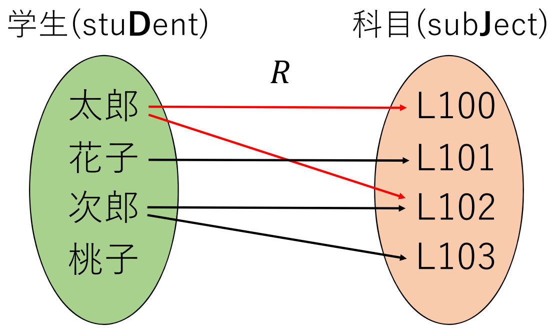


R({太郎}) = 太郎が登録されている科目全ての集合
= {L100, L102}

$R(X)$ ::= 集合X 内の学生により受講されているすべての科目

$R(X)$ ::= R により集合X と関連づけられるすべてのもの

像（Image）



R({太郎, 次郎}) = 太郎 OR 次郎の登録科目
= {L100, L102, L103}

$R(X)$ ::= Xからの矢印の終点の集合

$$=\{j \in J \mid \exists d \in X.\, d\ R\ j\}$$

関数は二項関係の一種

集合Aから集合Bへの関数fは,
Aの要素aと多くともBの要素一つを関連づける関係である.

$f(a)$と呼ぶ

A function, f, from A to B is a relation which associates each element, a, of A with at most one element of B.

関数は二項関係の一種

集合Aから集合Bへの関数fは,
Aの要素aと多くともBの要素一つを関連づける関係である.

$f(a)$と呼ぶ

集合Aのどのメンバも，Bのどれかのメンバ１つに対応するとき，
この関係を関数とか写像と呼ぶ

関数？１

次の関係fは関数だろうか（$x \in \mathbb{R}$）？

$$f(x) ::= \pm\sqrt{x}$$

関数？１

次の関係fは関数だろうか（$x \in \mathbb{R}$）？

$$f(x) ::= \pm\sqrt{x}$$

答え: 関数ではない
理由:
① $x < 0$ のとき，$\sqrt{x}$ は定義されていない
② 単一のxが，$+\sqrt{x}$と$-\sqrt{x}$の２つに対応する

①のように，「定義なし」を許した関数を，部分関数と呼ぶ
②のように，複数の値への対応を許した関数を，多価関数と呼ぶ

関数？２

次の関係fは関数だろうか（$x \in \mathbb{R}$）？

$$f(x) ::= |x|$$

関数？２

次の関係fは関数だろうか（$x \in \mathbb{R}$）？

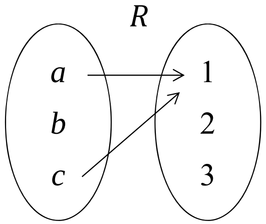
$$f(x) ::= |x|$$

答え: 関数である
理由:
いかなる実数xも必ず一意にある実数に対応するから

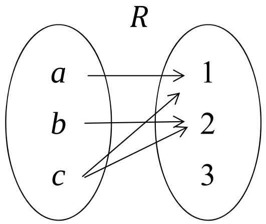
演習: 関数

下記のそれぞれの関係は関数だろうか？

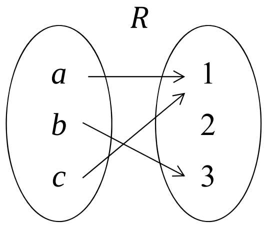
(1)



(2)



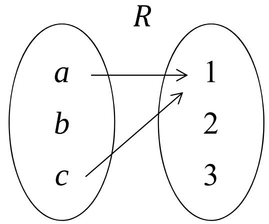
(3)



演習: 関数

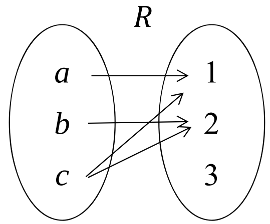
下記のそれぞれの関係は関数だろうか？

(1)



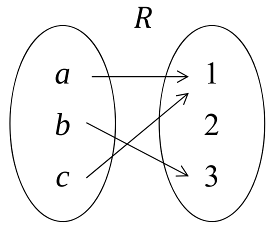
関数ではない．bの像が定義されていない．

(2)



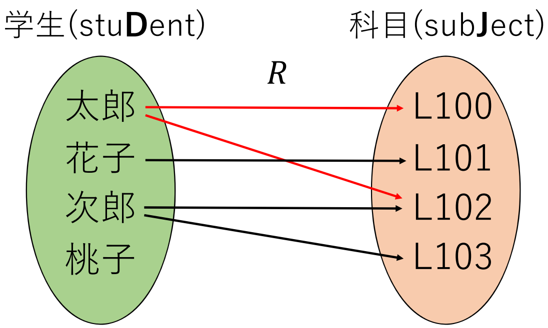
関数ではない．cの像が2つの要素を含む．

(3)



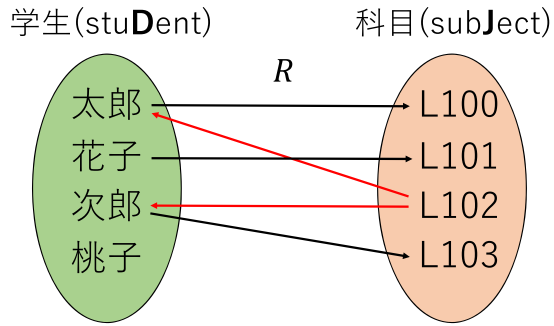
関数である．

逆像（Inverse image）



- (太朗 R L100) は “太郎はL100を受講している”を意味する
- (L100 R^{-1} 太朗) は “L100は太朗に受講されている”を意味する

逆像（Inverse image）



$$R^{-1}(\{\mathrm{L102}\}) = \{\text{太郎，次郎}\}$$

$$R^{-1}(\{\mathrm{L101}, \mathrm{L102}\}) = \{\text{太郎，花子，次郎}\}$$

$R^{-1}(Y)$は，Rのもとでの集合Yの**逆像**（逆像・原像）という

演習: 関数・逆像

$f(n \in \mathbb{N})$をつぎのように定義する: $f(n) = n^2$. このとき，次のものを求めよ.

(1) $f(1)$

(2) $f^{-1}(81)$

(3) $f(\{1,2,3\})$

(4) $f^{-1}(\{0,1,4\})$

(5) $f^{-1}(\{2\})$

演習: 関数・逆像

$f(n \in \mathbb{N})$をつぎのように定義する: $f(n) = n^2$. このとき，次のものを求めよ.

(1) $f(1) = 1$

(2) $f^{-1}(81) = 9$

(3) $f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$

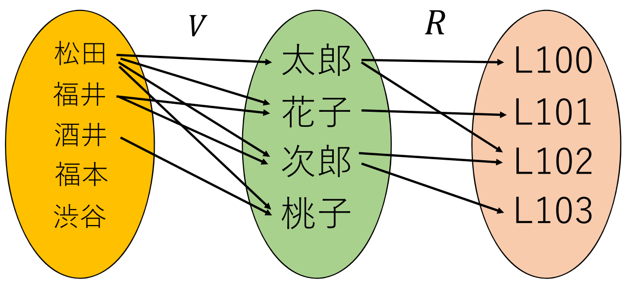
(4) $f^{-1}(\{0,1,4\}) = \{0,1,2\}$

(5) $f^{-1}(\{2\}) = \{\ \}$

関係の合成（Composition）

＊関係の入れ子構造

教員(**P**rofessor)　学生(stu**D**ent)　科目(sub**J**ect)



$$R(V(\{福井, 酒井\})) = R(\{花子, 次郎, 桃子\})$$
$$= \{L101, L102, L103\}$$

関係の合成（Composition）

$(R \circ V)(X) ::= R(V(X))$　　$R \circ V$は，RとVの合成

$p\ (R \circ V)\ j$ ::= 「教員pは科目jに登録している学生を担当する」
IFF
$\exists d \in D. [p\ V\ d \text{ AND } d\ R\ j]$

演習: 関数の合成

2 項関係の合成を計算せよ．ただし，

$A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z, w\}$

$R: A \to A, R \coloneqq \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$

$S: A \to B, S \coloneqq \{(a, w), (b, x), (c, y), (c, z)\}$

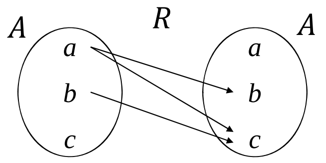
とする．

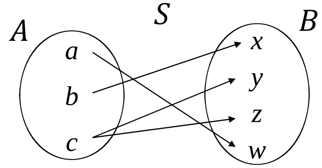
(1) $S \circ R$

(2) $R \circ R$

(3) $R^{-1} \circ R$

(4) $R \circ R^{-1}$





演習: 関数の合成

2 項関係の合成を計算せよ．ただし，

$A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z, w\}$

$R: A \to A, R \coloneqq \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$

$S: A \to B, S \coloneqq \{(a, w), (b, x), (c, y), (c, z)\}$

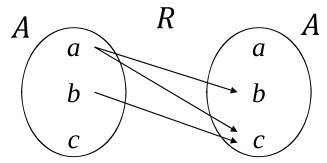
とする．

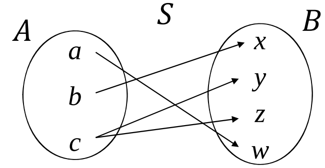
(1) $S \circ R = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, y), (b, z)\}$

(2) $R \circ R = \{(a, c)\}$

(3) $R^{-1} \circ R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c)\}$

(4) $R \circ R^{-1} = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

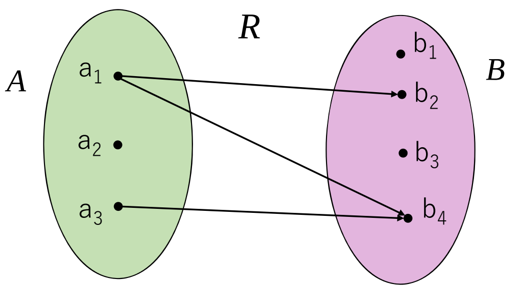




二項関係（Binary relations）

二項関係Rは，集合Aの要素と集合Bの要素を結合する

始集合 (domain)　終集合 (codomain)

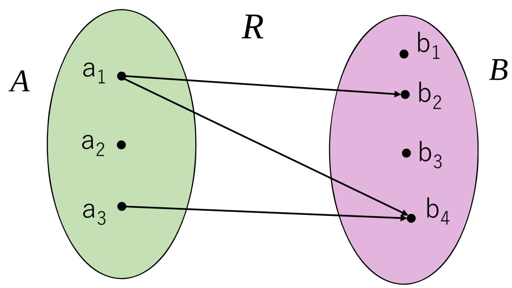


$\mathrm{graph}(R) = \{(a_1, b_2), (a_1, b_4), (a_3, b_4)\}$

レンジ (Range，値域)

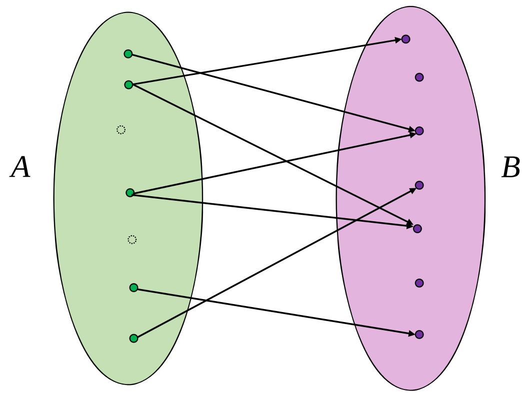
$\mathrm{range}(R)$ ::= 入ってくる(coming in)矢を持つ要素の集合

始集合 (domain)　終集合 (codomain)



$\mathrm{range}(R) = \{b_2, b_4\} = R(A)$

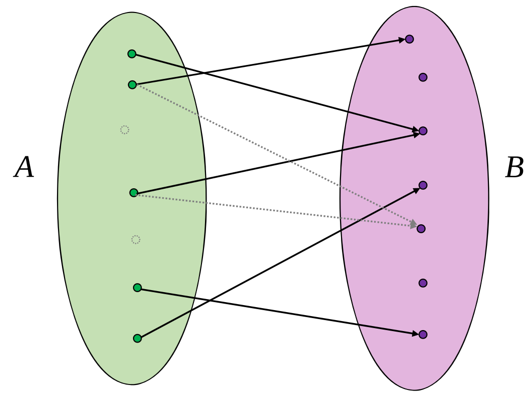
完全関係 (Total relation)



Aの全ての要素が少なくとも１つの矢印を有する

$A = R^{-1}(B)$ であるときRは完全関係である

完全かつ関数 (Total and function)



典型的にわれわれが取り扱う関数は，完全である

完全でない関数の例

$$g(x,y) ::= \frac{1}{x-y}$$

$g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

domain(g) = all pairs of reals.
codomain(g) = all reals.

g は完全ではない.

$g(r,r) = \frac{1}{r-r} = \frac{1}{0}$ は定義されていないから.

完全でない関数の例: 改

$$g_0(x,y) ::= \frac{1}{x-y}$$

$D ::= \mathbb{R}\times\mathbb{R} - \{(x,y) | x = y\}$

始集合（domain）から$x = y$となるペアを除く

g_0 は完全である.

g と g_0 のグラフは同じままである.

完全でない関数の例: 改

$$g_0(x,y) ::= \frac{1}{x-y}$$

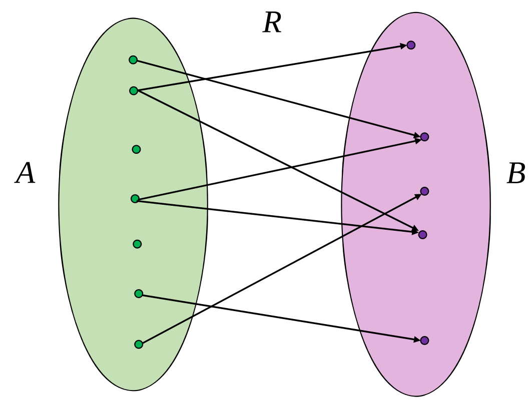
$D ::= \mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(x,y)|x=y\}$　　始集合（domain）から$x=y$となるペアを除く

g_0 は完全である．

g と g_0 のグラフは同じままである．

これは，われわれがよく目にする関数の定義である．
例: $f(x,y)=\frac{1}{x-y}$ （ただし，$x\neq y$）

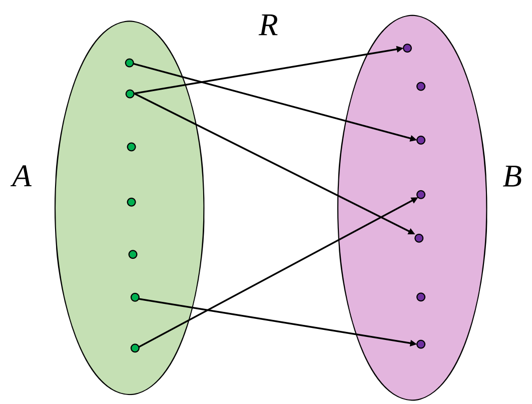
全射 (Surjection)



Bの全ての要素に矢が入ってくる

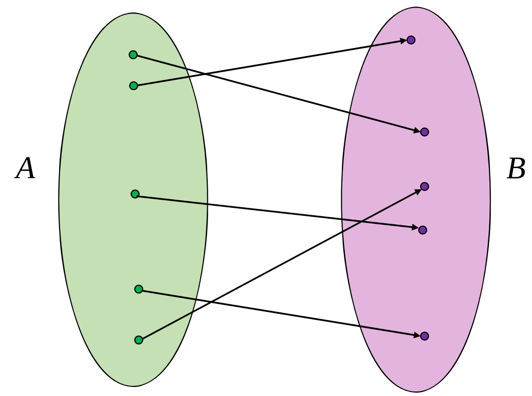
全射的である(surjection) IFF $R(A)=B$

単射 (Injection)



Bの要素には多くとも１つの矢が入ってくる IFF 単射的である

全単射 (Bijection)



完全かつ全射，単射であるとき，全単射という

小テストの時間（第3回講義）

- Kibacoのテストから小テストを実施して下さい
- 14:35までに提出

Column: 1単位はおいくらでしょうか？

- 128単位（卒業するために必要な単位）
- 208万円（4年間の都立大学の学費．52万円×4年）
- 208/128 = 1.625万円/単位
- 講義1回分(90分)は，およそ2,200円の学費

レポート課題

- Due: 13:00, 10/31(Mon)

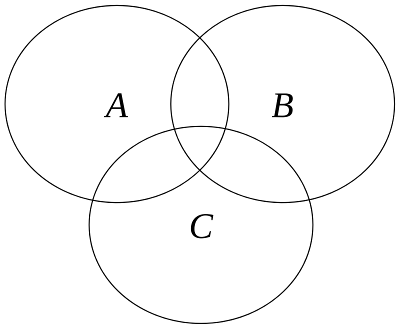
- 学習番号が
  - **奇**数の人: Problems 1, 3, 5, 7
  - **偶**数の人: Problems 2, 4, 6, 8

- 提出方法
  - 課題を任意の紙の上に回答し，携帯電話などで写真を撮り，単一のPDFとして Kibaco から提出して下さい．

Problem 1

- Prove the following distributive law of set. You may use the propositional version of the distributive law. Further, answer the set specified by this equation by using Venn diagram.

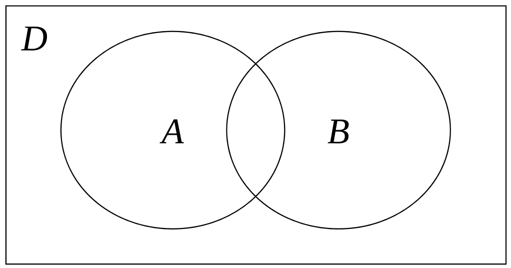
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Problem 2

- Prove De Morgan's law for set equality. You may use the propositional version of De Morgan's Law. Further, answer the set specified by this equation by using Venn diagram.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



Problem 3

- Answer the sets designated by the following equations. Here, $0 \in \mathbb{N}$.
  1) $\{x \in \mathbb{N} | x < 20 \text{ AND } x \text{ is a prime number.}\}$
  2) $\{x \in \mathbb{N} | x^2 < 10\}$

Problem 4

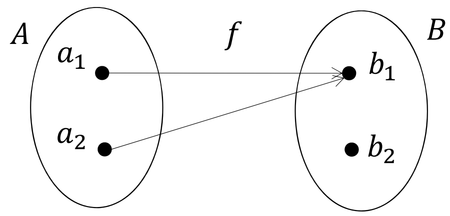
- Regarding sets A, B, and C, judge whether each of the followings is true or false.
  (1) $(A \cup B = A \cup C) \rightarrow (B = C)$
  (2) $(A \cap B = A \cap C) \rightarrow (B = C)$
  (3) $(A - B = A - C) \rightarrow (B = C)$
  (4) $(\bar{A} \subseteq \bar{B}) \rightarrow (A \subseteq B)$
  (5) $(\mathrm{pow}(A) \subseteq \mathrm{pow}(B)) \rightarrow (A \subseteq B)$

Problem 5

- Assume $f(x) = x^3 - x$ on real numbers. Answer the following sets.
1) $f(\mathbb{R})$
2) $f^{-1}(0)$
3) $f^{-1}(6)$

Problem 6

- Consider the following relation for sets A and B, and solve the following problems.
  1) $f(A)$
  2) Complete the following equality/inequality by replacing ★ with $=$, $\geq$, or $\leq$.
     $|f(A)|$ ★ $|B|$
  3) Judge whether the following statements are true or false.
     - f is a surjection function.
     - f is an injection function.
     - f is a total function.



Problem 7

- Assume $f\colon A \longrightarrow B$ is total function, and A is finite (有限である，メンバの数が無限ではない). Replace the ★ with one of $=, \geq$, or $\leq$ to produce the correct version of the following statements.
  a) $|f(A)|$ ★ $|B|$
  b) If f is a surjection, then $|A|$ ★ $|B|$.
  c) If f is a surjection, then $|f(A)|$ ★ $|B|$.
  d) If f is an injection, then $|f(A)|$ ★ $|A|$.
  e) If f is a bijection, then $|A|$ ★ $|B|$.

Problem 8

- For each of the following functions ($f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) on the real numbers ($x \in \mathbb{R}$), indicate whether it is a bijection, a surjection but not a bijection, an injection but not a bijection, or neither an injection nor a surjection.
  (a) $x \longrightarrow x + 2$
  (b) $x \longrightarrow 2x$
  (c) $x \longrightarrow x^2$
  (d) $x \longrightarrow x^3$
  (e) $x \longrightarrow \sin x$
  (f) $x \longrightarrow x \sin x$
  (g) e^x