演習問題 No. 2 の解答

■$\boxed{1}$ (1) $\theta=\sin^{-1}x$ とおくと, $x=\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$. このとき, $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta=x$ であり， $0\le\frac{\pi}{2}-\theta\le\pi$ であることから $\frac{\pi}{2}-\theta=\cos^{-1}x$ となる. 従って,

$$\frac{\pi}{2}=\theta+\cos^{-1}x=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x.$$

(2)

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$$

であることに注意する. よって, e^{2x} は単調増加であることより, $\tanh x$ が単調増加であることがわかる. $y=\tanh x=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$ より

$$\frac{2}{e^{2x}+1}=1-y.$$

よって, $\frac{2}{1-y}=1+e^{2x}$ となり

$$e^{2x}=\frac{2}{1-y}-1=\frac{1+y}{1-y}.$$

従って

$$2x=\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

以上より

$$x=\tanh^{-1}y=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

を得る.

■$\boxed{2}$ (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}\frac{\sqrt{1+4x}+(1+2x)}{\sqrt{1+4x}+(1+2x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1+4x)-(1+2x)^2}{x^2(\sqrt{1+4x}+(1+2x))}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{x^2(\sqrt{1+4x}+(1+2x))}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-4}{\sqrt{1+4x}+1+2x}=-2\end{aligned}$$

(2) $y=2x+3x^2$ とおくと，$x\to0$ のとき $y\to0$ であるから,

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+2x+3x^2)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+2x+3x^2)}{2x+3x^2}\frac{2x+3x^2}{x}=\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y}\lim_{x\to0}(2+3x)=2$$

(3) $y=\sqrt[3]{1+12x}$ とおくと $x=\dfrac{y^3-1}{12}$ であり，$x\to0$ のとき $y\to1$ であるから,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+12x}}{x}=\lim_{y\to1}\frac{y-1}{(y^3-1)/12}=\lim_{y\to1}\frac{12}{y^2+y+1}=4$$

(4) $y=\sqrt[6]{x}$ とおくと $\sqrt{x}=y^3$, $\sqrt[3]{x}=y^2$ であり，$x\to1$ のとき $y\to1$ であるから,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{y\to1}\frac{y^2-1}{y^3-1}=\lim_{y\to1}\frac{y+1}{y^2+y+1}=\frac{2}{3}$$

(5) $x=y+\dfrac{\pi}{4}$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{4}$ のとき $y\to0$ であるから,

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\tan x-1}{x-\pi/4}=\lim_{y\to0}\frac{\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\tan y+1}{1-\tan y}-1}{y}=2\lim_{y\to0}\left(\frac{\tan y}{y}\right)\frac{1}{1-\tan y}=2$$

(6) $\dfrac{\pi}{x}=y+\dfrac{\pi}{2}$ とおくと，$x-2=-\dfrac{2y}{y+\pi/2}$ であり，$x\to2$ のとき $y\to0$ であるから,

$$\lim_{x\to2}\frac{\cos(\pi/x)}{x-2}=\lim_{y\to0}\frac{\cos(y+\pi/2)}{-\frac{2y}{y+\pi/2}}=\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

■$\boxed{3}$ (1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ (3) $\sec\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)=\sec\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(4) $\theta=\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ が成り立つ．$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となるから，

$$\tan\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\tan\theta=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(5) $\alpha=\tan^{-1}3$, $\beta=\tan^{-1}7$ とすると，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\alpha=3$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\beta=7$ が成り立つ．

$$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\beta=\frac{7}{5\sqrt{2}}, \qquad \cos\beta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

となるから，加法定理により，

$$\sin(\tan^{-1}3+\tan^{-1}7)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3\cdot1+7\cdot1}{\sqrt{10}\cdot5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

■$\boxed{4}$ (1) $\theta=\cos^{-1}x=\tan^{-1}3$ とおく．θ は $\cos^{-1}$ の値にも $\tan^{-1}$ の値にもなるから，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，$x=\cos\theta>0$, $\tan\theta=3$ より，

$$x=\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

(2) $\alpha=\tan^{-1}x$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{3}{7}$ とおくと，加法定理により，

$$x=\tan\alpha=\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\cdot\frac{3}{7}}{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{21}{20}$$

(3) $\cos^{-1}$ の値域は $[\,0,\,\pi\,]$ であるから，

$$\frac{\pi}{3}\leqq\cos^{-1}(1-x)\leqq\pi$$

である．$[\,0,\,\pi\,]$ において $\cos$ は単調減少関数であるから．

$$-1\leqq1-x\leqq\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

より，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq2$ となる．