力と運動

3.1 微分方程式と積分

微分方程式の一般解

微分方程式：未知の導関数（微分）を含む方程式

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$

←2階の微分方程式

* これは、ベクトルの式であるが、まずは、1次元（スカラー）の式が理解できればOK。

位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の時刻 t についての 2 次の導関数を含む

「解く」=方程式を満たす関数$\boldsymbol{r}(t)$を求めること。

解=求められた関数。物体の運動を表す。

ニュートンの運動方程式は、微分方程式である。

これを積分し、解が求まれば、運動の状況を理解できたことになる。

等加速度直線運動

物体がx軸上を一定の加速度aで運動しているとき

実際に微分方程式を解いてみる。

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a = \text{一定}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,\mathrm{d}t = at + \underline{v_0} \quad (v_0 = v(0))$$

$$x(t) = \int_0^t (at + v_0)\,\mathrm{d}t + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + \underline{v_0}t + \underline{x_0} \quad (x_0 = x(0))$$

２回積分を行い、解が求まった。

一般解：微分方程式の階数と同じ個数の独立な任意定数を含む解 ↔ 特殊解

運動方程式(2階)の解 に含まれる任意定数	＝2個＝	初期条件 （t=0での物体の位置と速度）

因果律： 初期条件を与えれば，その後の運動が完全に決まること。
(原因が与えられると結果が決まるという原理)

運動量

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

運動方向を向いているベクトル量

ニュートンの運動の第2法則より

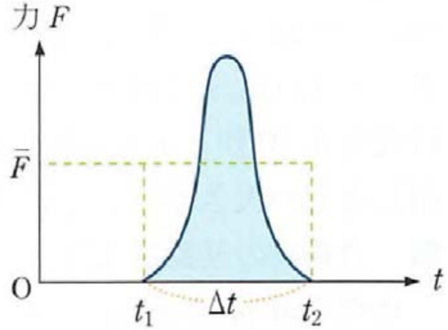
$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

ニュートンの運動方程式の別の表現

運動量の時間変化率は，その物体に作用する力に等しい。

力積と運動量変化の関係

上の式の両辺を積分すると、



$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

もし力が一定ならば、 $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}(t_2 - t_1) = \boldsymbol{F}T$$

力積: 「力と、力の作用した時間の積」を表す積分。

運動量の変化はその間に作用した力の力積に等しい

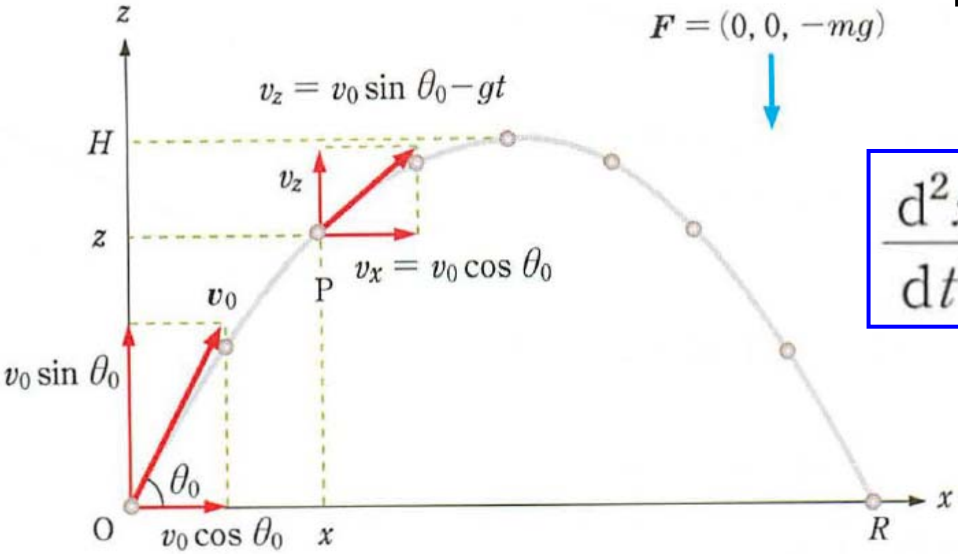
$$m\boldsymbol{v}(t) = m\boldsymbol{v}(t_0) + \int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

←積分形の運動方程式。

放物運動:微分方程式を使って理解する。

高校物理の復習

例題3:復習しておいてください。



物体に働く力は重力だけ。

運動方程式 $\cancel{m}a=\cancel{m}g$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-g}$$

水平方向は、等速運動

鉛直方向は、等加速度運動

$$\int(-g)\,\mathrm{d}t=-gt+\text{任意定数}$$

$$\int(-gt+v_{0z})\,\mathrm{d}t=\int(-gt)\,\mathrm{d}t+\int v_{0z}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0z}t+\text{任意定数}$$

初期条件を入力すると、解が求まる。

$t=0$ のとき、 $x=0,y=0,z=0$

$$v_x=v_0\cos\theta_0,\qquad v_y=0,$$
$$v_z=v_0\sin\theta_0-gt$$

$$x=v_0t\cos\theta_0,\qquad y=0,$$
$$z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta_0$$

↑ 特殊解

質点の運動に関する問題

１．１次元の問題

質量 m の質点が、以下に示す力 f を受けながら x 軸上を運動している。まず、運動方程式を書き表しなさい。次に、運動方程式を時刻 t で積分することにより、時刻 t における質点の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。積分定数として C および C' を用いてよい（一般解）。

（１）$f=A\sin\omega t$（ただし、A と ω は定数）のとき。

（２）$f=-k\,x(t)$（ただし、k は正の定数）のとき。$v(t)$ と $x(t)$ の解には、それぞれ２つの任意定数が入っていればよい。

（３）$f=k\,x(t)$（ただし、k は正の定数）のとき。

空気や水の抵抗力

流体(液体や気体)の中を運動する物体は、運動を妨げる向きに働く抵抗力を受ける。

物体の速さvが小さいとき:　速さに比例する抵抗を粘性抵抗という。

粘性抵抗: $F = bv$　　流体の粘性が原因

ストークスの法則　半径Rの球状の物体に対する粘性抵抗の大きさ

$$F = 6\pi\eta Rv = bv$$

η: 流体の粘度

↑ 憶えなくても良い。

参考

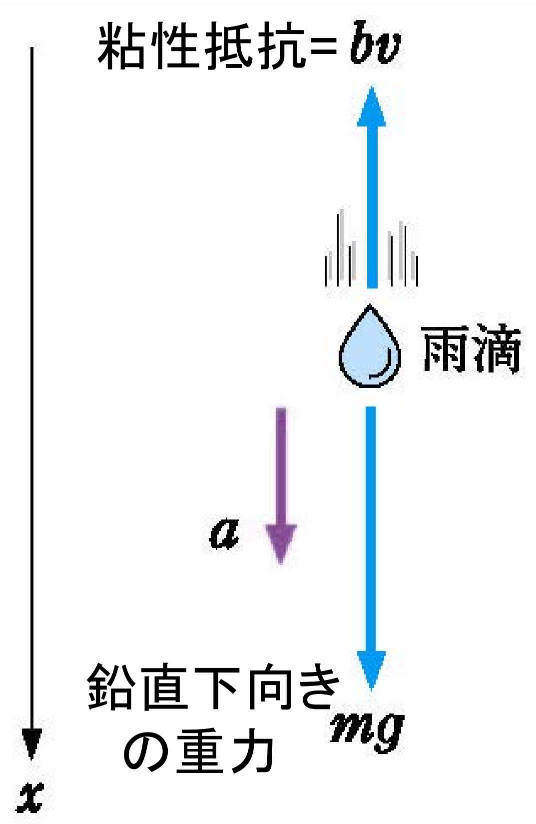
物体の速さvが速くなり、運動物体の後方に渦が発生
→ 抵抗力の大きさは、速さv^2に比例するようになる。

慣性抵抗: $$F = \frac{1}{2} C\rho A v^2$$

ρ: 流体の密度
A: 運動物体の断面積
C: 0.5~1の定数(球は約0.5)

例: 自動車が空中で受ける抵抗

例題　雨滴の落下　小さな雨滴：空気中を粘性抵抗bvを受けながら落下



運動方程式

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv$$ ←合力

落下を始めた雨滴の運動を、まずは推測しよう。

1. 落下しはじめ

   雨滴の速さvは小さい。→ 粘性抵抗を無視できる。

   重力加速度gの等加速度直線運動を行う。

2. vが増す → 粘性抵抗が無視できない

   → 加速度が減少

   → 最終的に合力=0となり、等速運動になるだろう。

$$v_{\mathrm{t}} = \frac{mg}{b}$$ ← 終端速度

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{b}{m}v = g$ は、このような振る舞いをする解 $v(t)$ を持つはず。

力学で出てくる微分方程式は、多くの場合、以下の形となる。

線形微分方程式

「未知関数$x(t)$とその導関数の1次方程式」という形の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=f(t) \qquad (a, b \text{ は定数})$$ 2階

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{b}{m}v=g \qquad (b, m, g \text{ は定数})$$ 1階← 雨滴の落下

定（数）係数の微分方程式：　係数が定数のとき。

上式の右辺は、xやvについて0次の項＝非斉次（せいじ）項と呼ぶ。
（未知関数$x(t)$とその導関数を含まない項）

非斉次方程式（非同次方程式）：　非斉次項あり
斉次方程式（同次方程式）：　非斉次項なし

＊この授業では、上記の数学の専門用語を覚えなくてもよい。

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = f(t)$$ の一般解（積分定数を含む）を求めたい。

解

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 = f(t) \longleftarrow x_1(t)$$ ←積分定数なし（特殊解）

$$+\quad \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + x_2 = 0 \longleftarrow x_2(t)$$ ←積分定数含む（一般解）

$$\ddot{(x_1+x_2)} + \dot{(x_1+x_2)} + (x_1+x_2) = f(t) \longleftarrow x_1+x_2 \text{ も解だ。}$$

↑

積分定数含む（一般解）

非斉次の定係数の線形微分方程式の一般解は、
右辺 ≠ 0

[1つの特殊解] ＋ [非斉次項＝0とおいた斉次方程式の一般解]
右辺＝0

と書ける。

例： $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg \qquad \therefore \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = g$

[1つの特殊解]

積分定数が入っていない。

$$x(t) = \boxed{\frac{1}{2}gt^2}$$

[非斉次項を0とおいた斉次方程式の一般解]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = \boxed{C\,t + C'}$$

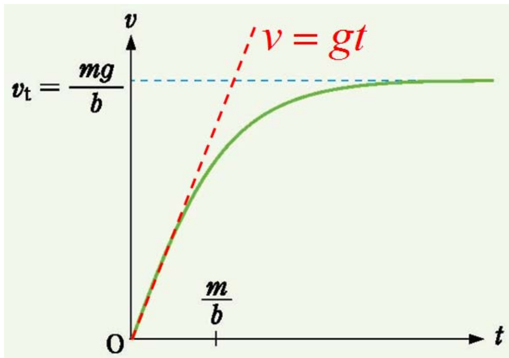
一般解： $x(t) = \boxed{\dfrac{1}{2}gt^2} + \boxed{C\,t + C'}$

非斉次の定係数の線形微分方程式の一般解

＝[1つの特殊解] ＋ [非斉次項を0とおいた斉次方程式の一般解]

問題： $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{b}{m}v=g$ ← 雨滴の落下

注意： $\exp(x)\equiv e^{x}$



① 1つの特殊解： $v=$ 一定となる解は、 $v=\boxed{\dfrac{mg}{b}}$

② $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{b}{m}v=0$ （斉次方程式）の一般解：

変数分離して、 $\dfrac{1}{v}dv=-\dfrac{b}{m}dt$ $\qquad \log_e|v|=-\dfrac{b}{m}t+C$

$$v=\exp\left(-\frac{b}{m}t+C\right)=\boxed{A\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)} \qquad A=\exp(C)$$

よって、非斉次方程式の一般解は、 $v=\boxed{\dfrac{mg}{b}}+\boxed{A\exp\left(-\dfrac{b}{m}t\right)}$

初期条件 $v(0)=0$ のとき、 $v=\dfrac{mg}{b}\left[1-\exp\left(-\dfrac{b}{m}t\right)\right]$

例題 3　空気中で質量 m の雨滴が速さに比例する抵抗力を受けて落下するとき，速さ v は微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv \qquad (3.40)$$

を満たす（例題 2）．$t=0$ での雨滴の速さを 0 として (3.40) 式を解け．また，雨滴の終端速度 $v_{\mathrm{t}} = \lim_{t\to\infty} v(t)$ を求めよ．

解　$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ は $\Delta v \div \Delta t$ の $\Delta t \to 0$ の極限なので，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}v \div \mathrm{d}t$ とみなして，(3.40) 式を

$$\frac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{b}-v} = \frac{b}{m}\mathrm{d}t$$

と変形して，両辺を積分すると，

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{b}-v} = \frac{b}{m}\int \mathrm{d}t$$

となる．$-\log|A-v|$ は $\dfrac{1}{A-v}$ の原始関数であることを使うと，

$$-\log\left|\frac{mg}{b}-v\right| = \frac{b}{m}t + C \quad (C \text{ は任意関数}) \qquad (3.44)$$

となる．本書では log は e を底とする対数（自然対数）を意味する．$A = \mathrm{e}^B$ と $B = \log A$ は同じ関係を表すので，(3.44) 式は

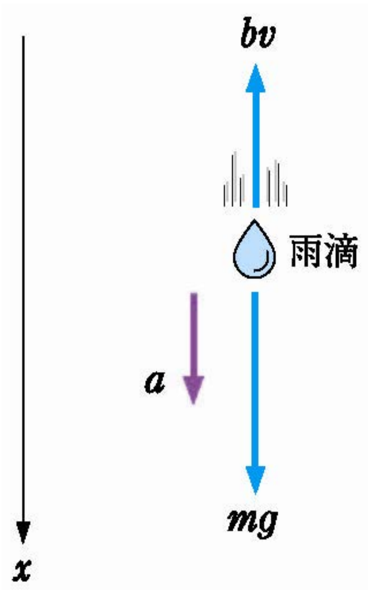
$$\left|\frac{mg}{b} - v(t)\right| = \mathrm{e}^{-C}\mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}} \qquad (3.45)$$

となる．時刻 $t=0$ に落下し始めるので，$v(0)=0$ である．$t=0$ で (3.45) 式は $\mathrm{e}^{-C} = \dfrac{mg}{b}$ となるので，任意定数 C が決まる．そこで，(3.45) 式から雨滴の速さ $v(t)$ は

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{mg}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}}\right) \qquad (3.46)$$

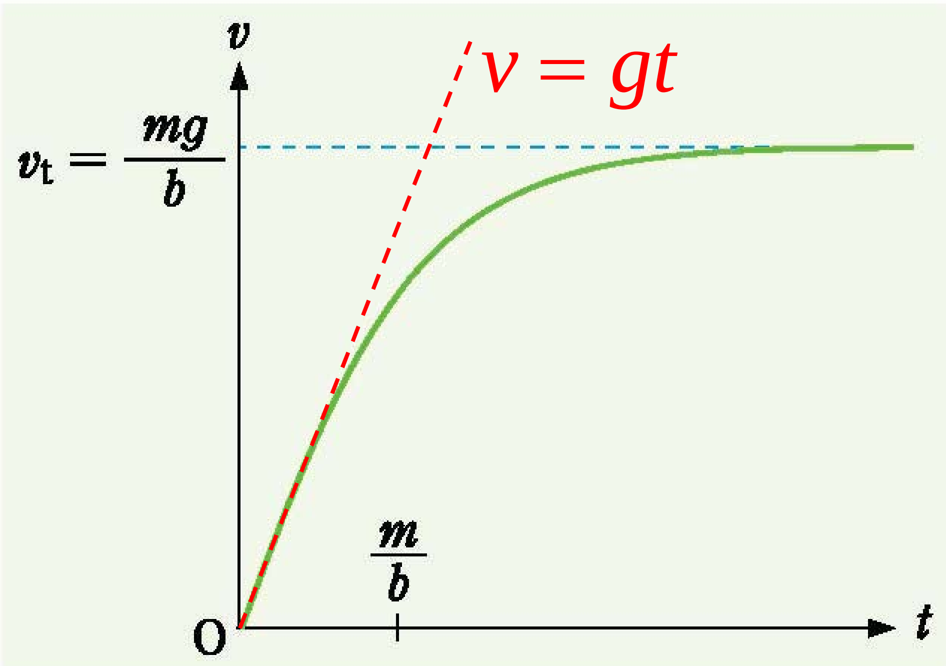
このように、非斉次方程式を、
変数分離法により、一気に
解くこともできる（教科書に記載）。

例題4,5 雨滴の落下



運動方程式 $ma = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv$

初速度=0の場合の解: $v = \dfrac{mg}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt/m})$



$$v_{\mathrm{t}} = \lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{mg}{b}$$

終端速度となる

$|t| \ll 1$ では $\mathrm{e}^{-bt} \fallingdotseq 1 - bt$

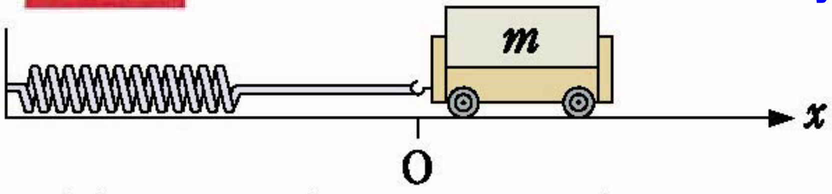
$$v \fallingdotseq gt$$

重力加速度gの等加速度直線運動

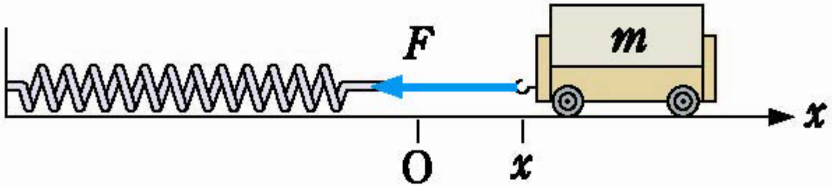
振　動

高校物理の復習
確認しておくこと。

4.1 単振動



(a)　ばねが自然な長さの状態



弾力：固体を変形させる
→変形をもとに戻そうとして働く復元力。

変形の大きさが小さいとき：弾力∝変形量

フックの法則： $F = -kx$

k：弾性定数(ばね定数)

マイナス符号：復元力の向きと変形の向きは逆向き

単振動：フックの法則にしたがう復元力による振動。もっとも簡単な振動。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

運動方程式

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

標準的な形

解は、2回微分すると-ω^2倍になる関数だ。

一般解①　このような条件を満たす関数

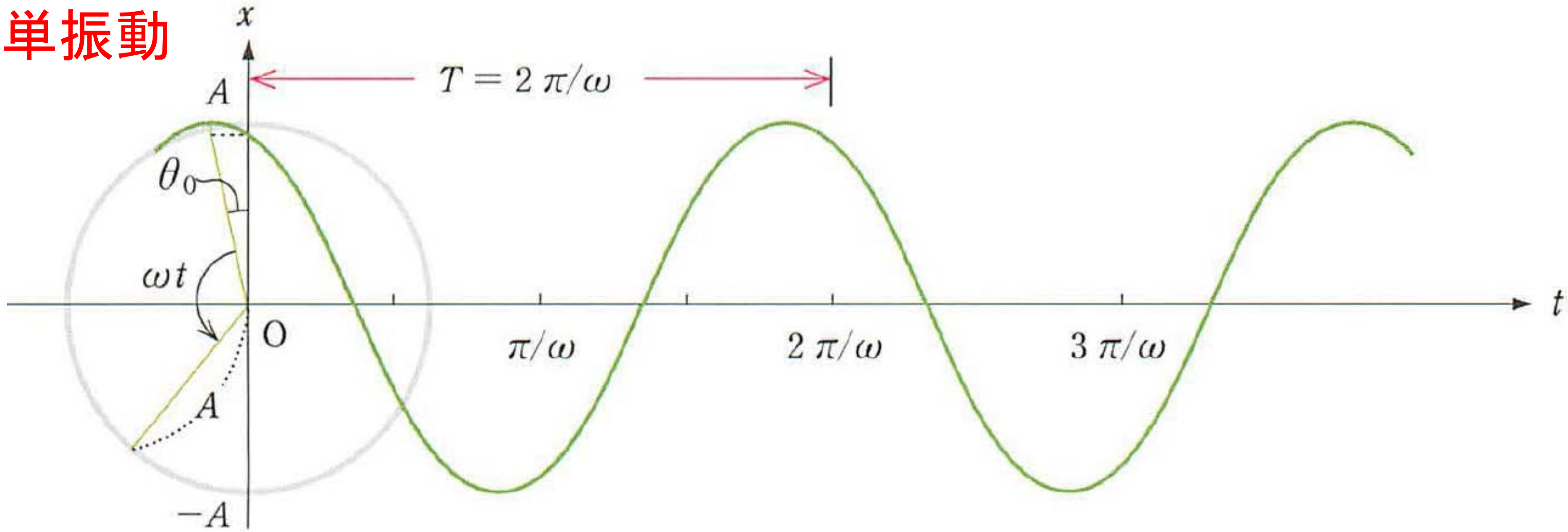
$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0)$$

2つの任意定数を含む。
初期条件に対応。

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t)$$

単振動



半径A，角速度ωの等速円運動をx軸に射影した運動と同じ。

A：振幅（変位の最大値）
ω：角振動数

振動の位相：$(\omega t + \theta_0)$ phase

周期運動（同じ運動を繰り返す）

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

* 距離÷速さ＝時間

振動数 $f = \dfrac{1}{T}$ 単位は「回/秒」(s^{-1})
ヘルツ Hz

等時性：振幅が変わっても，単振動の周期は変化しない（単振動の重要な特徴）

高校物理の復習
確認しておくこと。

一般解②

解は、2回微分すると-ω^{2}倍になる関数だ。→ $\cos\omega t, \sin\omega t$

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$ ← 2つの任意定数a,bを含む。

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t \qquad \begin{cases} x_0 = x(0) = a \\ v_0 = v(0) = b\omega \end{cases}$$

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$ 任意定数は初期条件に対応

三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を使って、

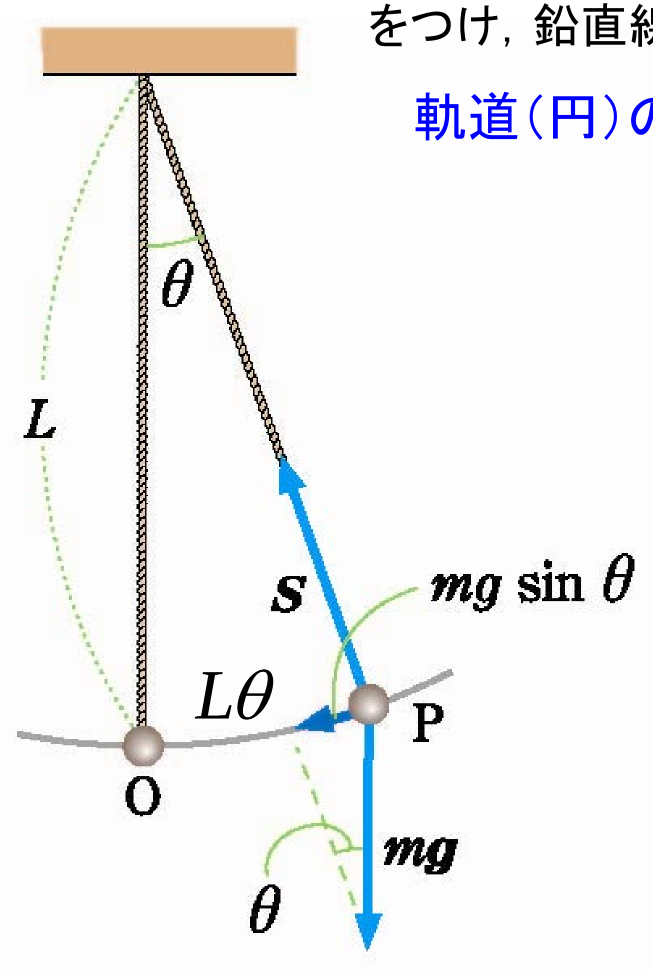
一般解① $x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$

の表現に変換できる。

単振り子

長さLの軽いひもの上端を固定し，下端に質量mのおもりをつけ，鉛直線を含む平面内で小さな振幅の振動をさせる装置

高校物理の復習
確認しておくこと。



往復運動

軌道(円)の接線方向成分 $F = -mg\sin\theta$

力の向きがおもりのずれの向きと逆向き

加速度 $\dfrac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

接線方向の運動方程式は

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

* 非線形微分方程式
厳密に解ける。
「楕円関数」

振れが小さい場合 $\sin\theta \fallingdotseq \theta$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

単振動と同じだ

単振り子

振幅が小さな場合の単振り子の振動を表す一般解

高校物理の復習
確認しておくこと。

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \beta)$$

任意定数: θ_0＝振れの角の最大値、β＝位相

振動数と周期

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}} \qquad T = \frac{1}{f}$$

周期: ひもの長さLが長いほど長い。

等時性: 単振り子の振動の周期が振幅の大きさによらずに一定

ガリレオ　1583年に発見

重力加速度の測定に使える（Tの精密測定により）

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

100×Tを測定→2桁精度が高まる
0.01秒まで測れるストップウォッチで、
0.0001秒の位まで測定可能。

ひもの長さ＝1m → 周期は何秒？

問題1

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0}$$

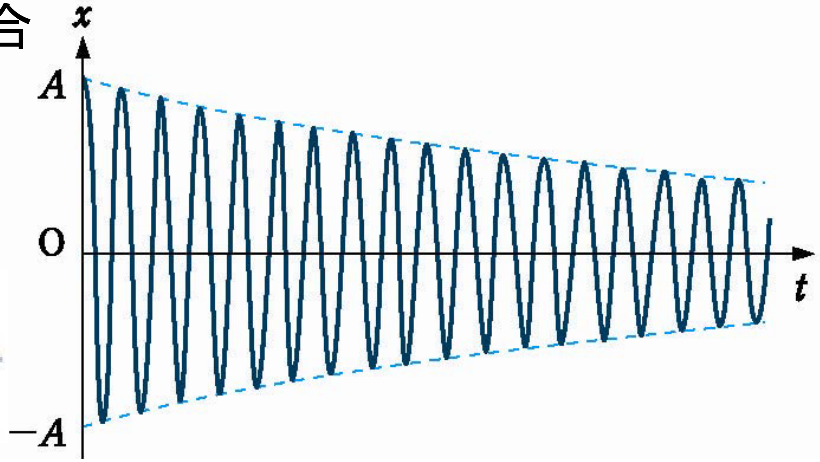
$x(t)=y(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$とおいて、

$y(t)$が満たす微分方程式を導きなさい。tに依存する項に注意。

減衰振動

現実の振動では、摩擦や空気の抵抗などで振動のエネルギーが失われ（熱に変わる）、振幅が時間とともに減衰

速さに比例する抵抗 $-2m\gamma v$ $(\gamma > 0)$ が働く場合
（空気の粘性抵抗）



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$= -m\omega^2 x - 2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

解くべき微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0}$$

自分で手を動かして
計算すること。

① $x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ とおく。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}e^{-\gamma t} - \gamma y e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-\gamma t} - 2\gamma\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t} + \gamma^2 y e^{-\gamma t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2)y = 0}$$

$y(t)$ の微分方程式

減衰振動の一般解

② $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+(\omega^2-\gamma^2)y=0}$

3つのパターンに分類

$$\begin{cases} y = A\cos[\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t+\beta], & \leftarrow (\omega^2-\gamma^2)>0 \\ y = A+Bt, & \leftarrow (\omega^2-\gamma^2)=0 \\ y = Ae^{pt}+Be^{-pt} \quad (p=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}) & \leftarrow (\omega^2-\gamma^2)<0 \end{cases}$$

単振動、摩擦が弱い

振動なし

振動なし、摩擦強い

$x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ に代入して、

(1) $\omega > \gamma$ の場合（減衰振動）

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos[\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t+\beta]$$

(2) $\omega = \gamma$ の場合（臨界減衰）

$$x(t) = (A+Bt)e^{-\gamma t}$$

(3) $\omega < \gamma$ の場合（過減衰）

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-p)t}+Be^{-(\gamma+p)t}$$

ここで $p=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$

減衰振動　3パターン

抵抗により周期が長くなる: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$

(1)　$\omega > \gamma$ の場合（**減衰振動**）

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left[\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \beta\right]$$

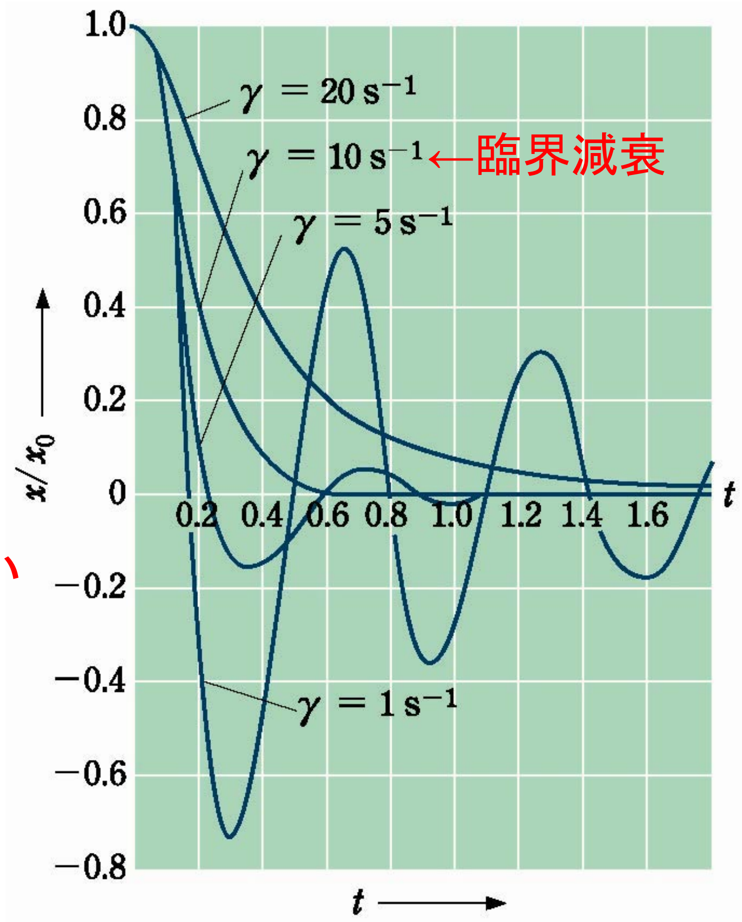
(2)　$\omega = \gamma$ の場合（**臨界減衰**）

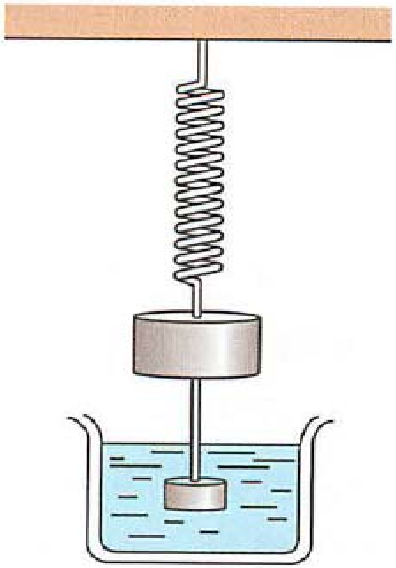
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

減衰がいちばん速い

(3)　$\omega < \gamma$ の場合（**過減衰**）

$$x(t) = Ae^{-(\gamma - p)t} + Be^{-(\gamma + p)t}$$





ドアダンパー

臨界減衰となるように調整すると、ドアが音を立てることなく早く閉じる。

Tacoma Bridge 1940年11月7日

www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs
www.youtube.com/watch?v=OrqdFxpM_N4
Youtubeに掲載

問題1

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_\mathrm{f} t}$$

（ ω は、正の定数とする）

(1) 特殊解を求めなさい。解は、$x(t) = D(\omega_\mathrm{f})\cos\omega_\mathrm{f} t$ と書けるものと仮定する。$D(\omega_\mathrm{f})$ は、振動の振幅に対応する。

(2) $D(\omega_\mathrm{f})$ 対 ω_f の概略図を描きなさい。

強制振動

振動する外力を作用して、外力と同じ周期で振動させること。

例：　ブランコ。単振り子の上端を手でもって，水平方向に振動させる。

外力の振幅（最大値）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mf_0 \cos\omega_\mathrm{f} t$$

$$k = \omega^2 m$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_\mathrm{f} t}$$

解が、$x(t) = D(\omega_\mathrm{f})\cos(\omega_\mathrm{f} t)$ と書けるものと仮定して代入する。

$$-\omega_\mathrm{f}{}^2 D + \omega^2 D = f_0$$ 　よって、　$$D(\omega_\mathrm{f}) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_\mathrm{f}{}^2}$$

特殊解：$x(t) = \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_\mathrm{f}{}^2}\cos(\omega_\mathrm{f} t)$　← 強制振動を表す。

$\omega_\mathrm{f} = \omega$ のとき、強制振動の振幅が無限大となる。

一般解は、上の特殊解に、自由振動を表す $A\cos(\omega t + \theta_0)$ を加えたもの。

共振(共鳴)　外力の振動数ω_fが、固有振動数ωに一致するとき、強制振動の振幅が大きくなる。

さらに、摩擦があるときは

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=f_0\cos\omega_f t \qquad (\omega>\gamma)}$$

$x(t)=D(\omega_f)\cos(\omega_f t-\phi)$ と仮定して代入し、整理すると、

一般解: $x(t)=\boxed{\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_f{}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega_f{}^2}}}\cos(\omega_f t-\phi)$

強制振動の振幅

$+Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t+\theta_0)$ ←自由振動(前回求めた)

$$\sin\phi=\frac{2\gamma\omega_f}{\sqrt{(\omega_f{}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega_f{}^2}}, \qquad \cos\phi=\frac{\omega^2-\omega_f{}^2}{\sqrt{(\omega_f{}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega_f{}^2}}$$

十分に時間がたてば、自由振動の成分は消える。

上式を微分方程式に代入して、解であることを確かめておくこと(加法定理を使う)。

解の求め方

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=f_0\cos\omega_{\mathrm{f}}t \qquad (\omega>\gamma)$$

$x=D\cos(\omega_{\mathrm{f}}t-\phi)$ を代入し、加法定理を使って、三角関数をバラバラにする。

加法定理
$$\begin{cases}\sin(\omega_{\mathrm{f}}t-\phi)=\sin(\omega_{\mathrm{f}}t)\cos(\phi)-\cos(\omega_{\mathrm{f}}t)\sin(\phi)\\ \cos(\omega_{\mathrm{f}}t-\phi)=\cos(\omega_{\mathrm{f}}t)\cos(\phi)+\sin(\omega_{\mathrm{f}}t)\sin(\phi)\end{cases}$$

$$\cos(\omega_{\mathrm{f}}t)\left[\text{時間に依存しない式A}\right]+\sin(\omega_{\mathrm{f}}t)\left[\text{時間に依存しない式B}\right]=0$$

$$\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}=$$

$$\begin{cases}\sin(\phi)=\\ \cos(\phi)=\end{cases}$$

$D=$

共振(共鳴)

強制振動の振幅：

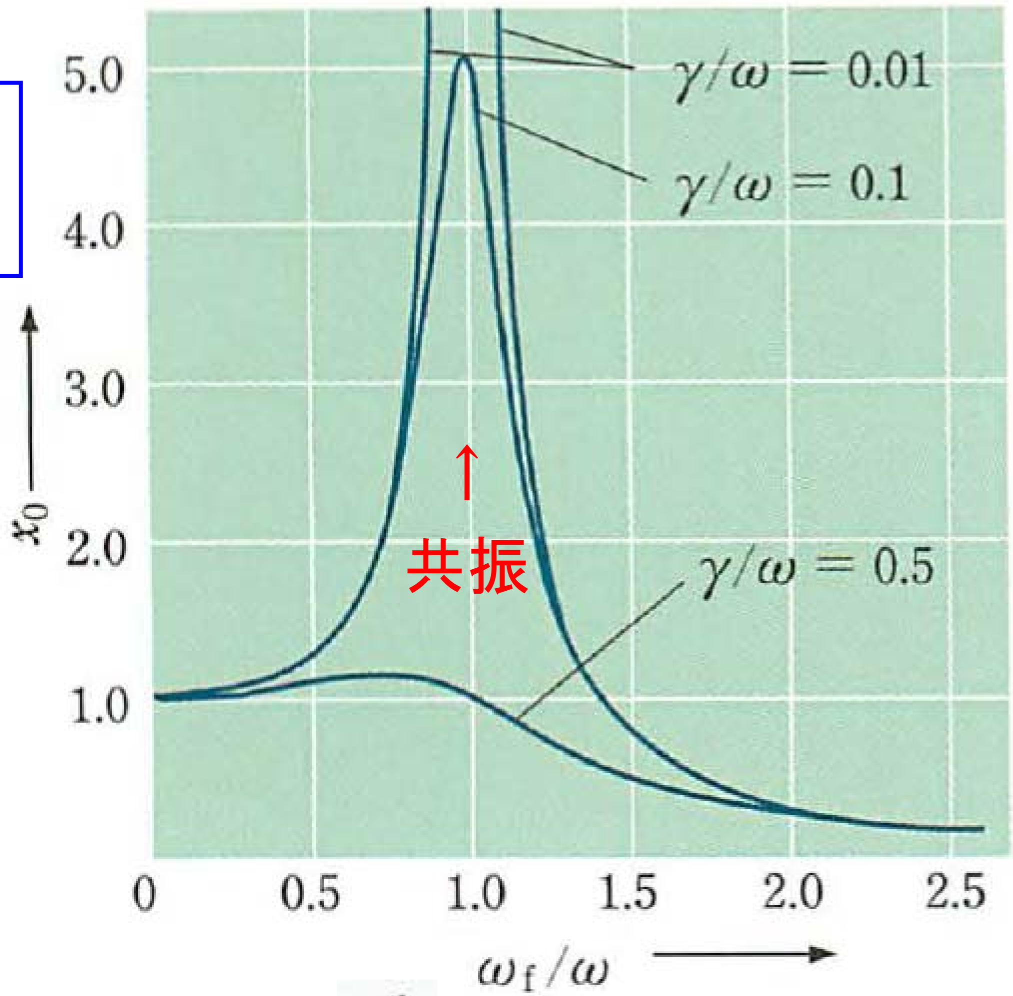
$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\omega_f = \omega_R = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$$

のときに、振幅が最大となる。

このときの振幅(最大値)：

$$(x_0)_{max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

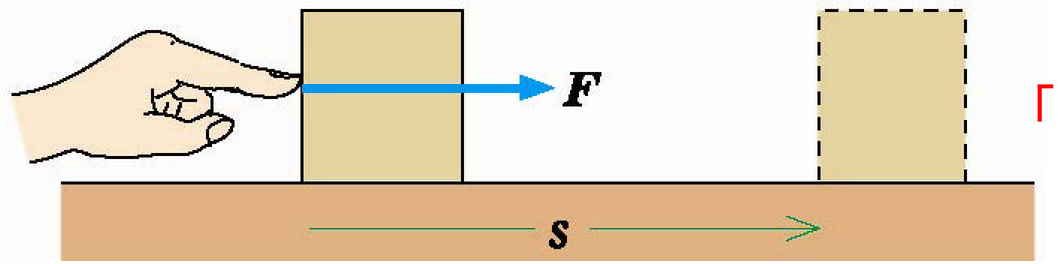


縦軸の単位＝$\frac{f_0}{\omega^2}$

仕事とエネルギー

5.1 仕事と仕事率

仕事（work）とは？

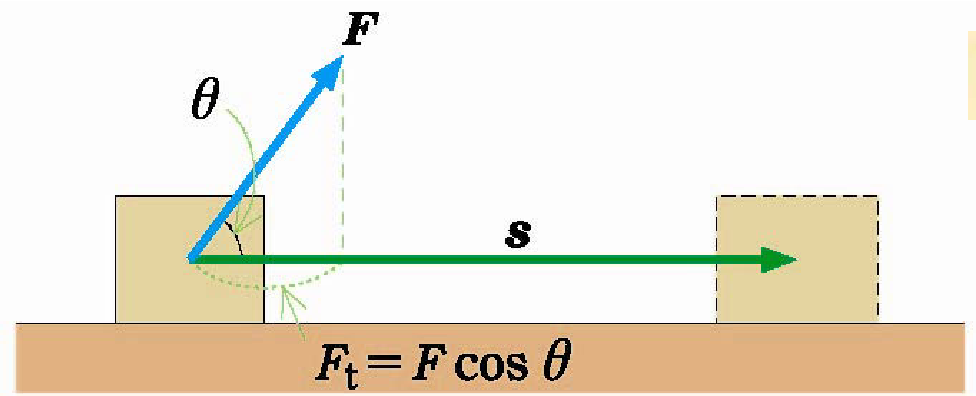


力Fが物体に作用して、
物体が力と同じ方向に
距離sだけ移動したとき、

「力が物体に仕事 $W = Fs$ をした」

と表現する。このとき、
物体にWのエネルギーを
与えている。

物体の移動の向きと力Fの向きが一致しない場合



$$W = F_t s = Fs\cos\theta$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$ ← 内積

（$\cos\theta < 0$ なら、力のした仕事は負）

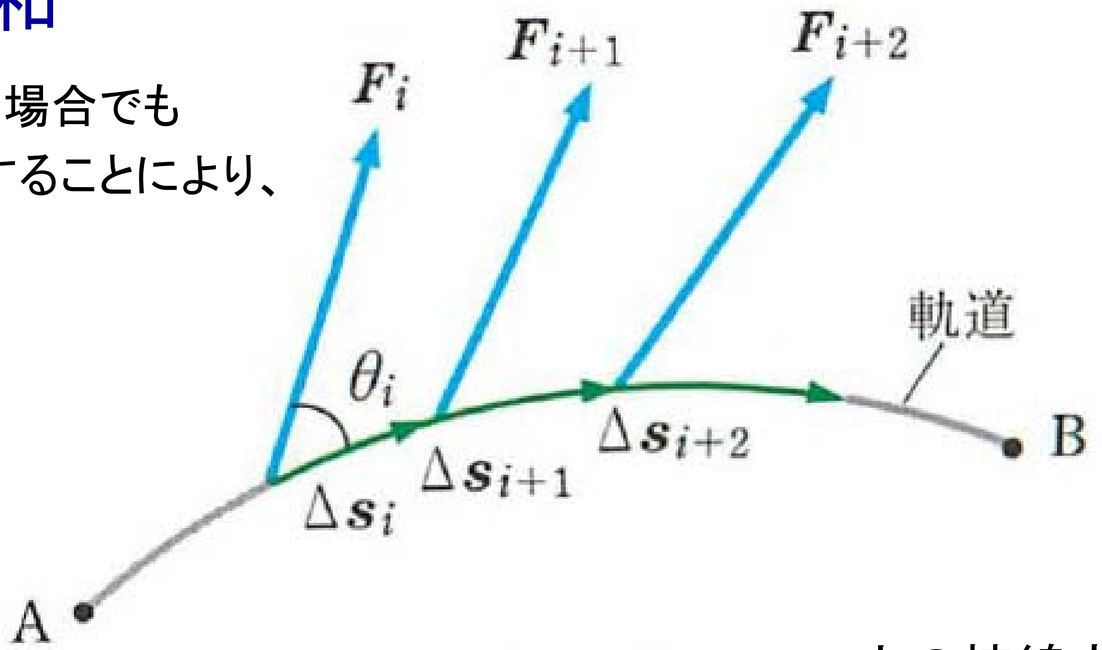
垂直抗力: 力の方向と移動方向が垂直 → $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s} = 0$: 仕事をしない。

仕事の単位 ＝ エネルギーの単位 $\mathrm{J} = \mathrm{N\cdot m} = \mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$ ジュール

微小仕事の和

参考

複雑な運動をする場合でも
微小区間に分割することにより、
計算できる。



微小区間で力Fがする微小な仕事：

力の接線方向の成分
↓

$$\Delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i = F_i \Delta s_i \cos\theta_i = F_{it} \Delta s_i$$

全体の仕事＝微小な仕事の和：

$$W_{A\to B} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_A^B F_t \, ds$$

↑
接線方向の成分

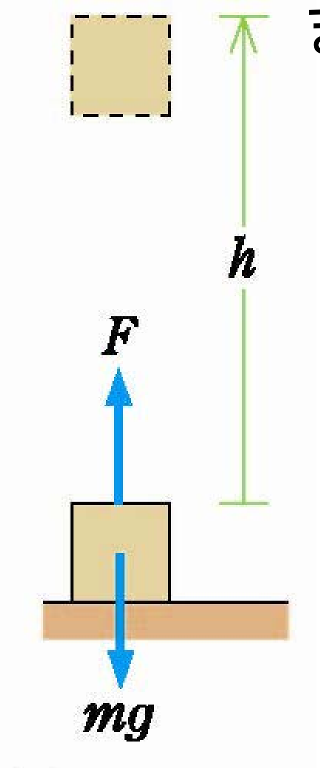
仕事率(パワー)＝単位時間(1秒間)あたりに行われる仕事

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad 仕事率(パワー) = \frac{行われた仕事}{時間}$$

パワーの国際単位　ワット　W=J/s
電力の単位のワットと同じ

仕事の記号 W
仕事率の単位 W
混同しないように！

例題1　クレーンが1000kgのコンテナを20秒間で25mの高さまで吊り上げた。このクレーンの平均仕事率$\overline{P}$を計算せよ。



$$W = mgh = (1000\ \mathrm{kg}) \times (9.8\ \mathrm{m/s^2}) \times (25\ \mathrm{m})$$
$$= 2.45 \times 10^5\ \mathrm{J}$$

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{2.45 \times 10^5\ \mathrm{J}}{20\ \mathrm{s}}$$
$$= 1.2 \times 10^4\ \mathrm{W} = 12\ \mathrm{kW}$$

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$ ＝力x速度
とも表現できる。

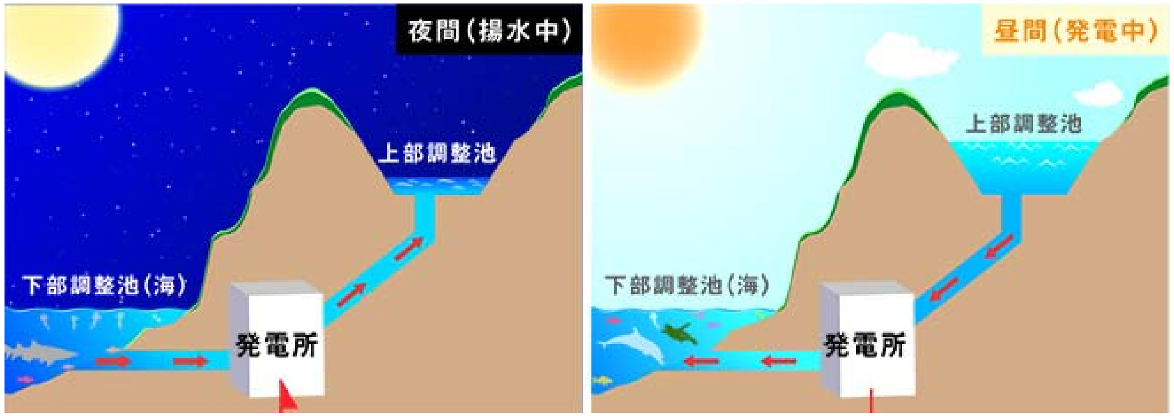
「保存力」とは？　エネルギーを貯めることができる

conservative force

「仕事」を用いて理解する

揚水発電所

重力　保存力

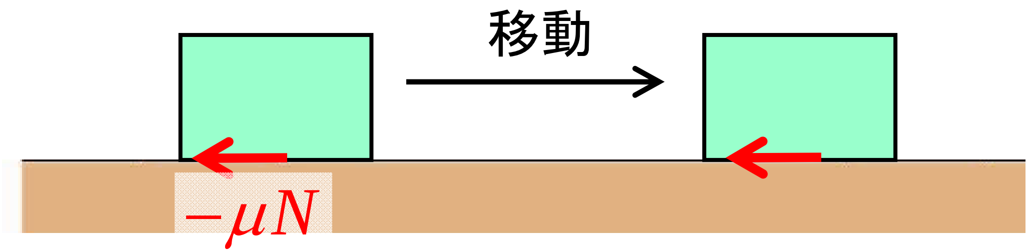


「仕事」をする。
水を高いところへ運ぶ。

発電
電気エネルギーとして回収できる。

エネルギーを、位置エネルギーとして貯蓄し、回収することができる。

摩擦力　保存力ではない



仕事をしても、役立つエネルギーとして、回収できない。　熱として散逸する。

5.2 仕事とエネルギー

エネルギー＝仕事をする能力

保存力の場合、力学的エネルギーが保存する

運動方程式でつながる

① $ma = F$

仕事

W

② $W = \Delta U$

運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2$$

力学的エネルギーが保存

ポテンシャルエネルギー $U(x)$

（保存力では定義できる）

$$mgx,\ \frac{1}{2}kx^2,\ -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

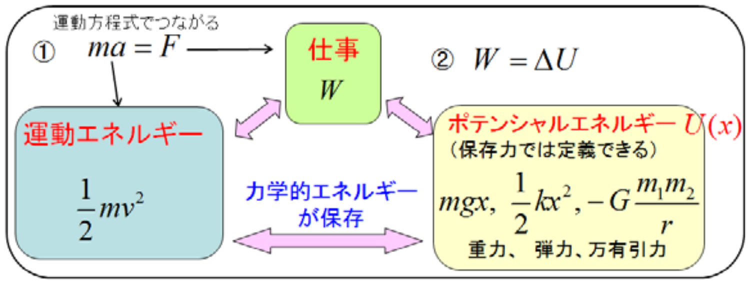
重力、 弾力、万有引力

単振動、ジェットコースター、人工衛星…

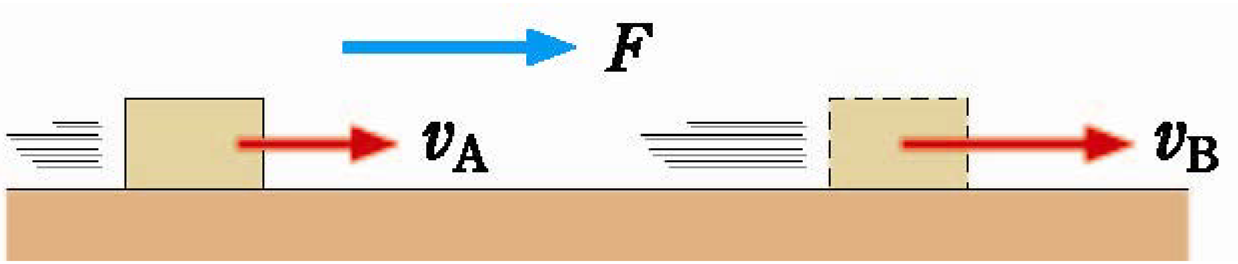
非保存力　力学的エネルギーが保存しない。

例：摩擦力 $-\mu N$ 、粘性抵抗 $-bv$

①　仕事と運動エネルギーの関係



外力により、物体(質量m)が点Aから点Bに移動するとき、

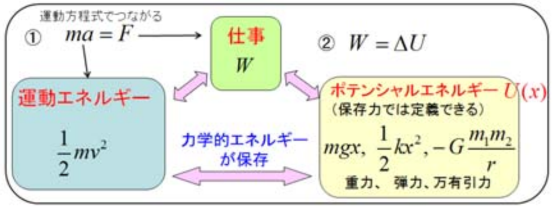


$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\,m{v_{\mathrm{B}}}^2 - \frac{1}{2}\,m{v_{\mathrm{A}}}^2$$

外力が物体にする仕事 = 物体の運動エネルギーの変化量

①　証明

参考



「仕事と運動エネルギーの関係」は、運動方程式から導かれる。

右辺を、「仕事」にするために

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$$

↓このテクニックを覚えておこう。

の両辺に，$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を掛けて，時刻 t_A から t_B まで積分すると

左辺:

$$m\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{m}{2}\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{mv^2}{2}\Big|_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} = \boxed{\frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 - \frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2}$$

右辺:

$$= \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} F\,\mathrm{d}x = \boxed{W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}}$$

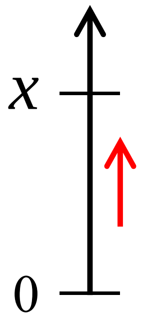
ここで，$x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}, v_\mathrm{A}, v_\mathrm{B}$ は時刻 $t_\mathrm{A}, t_\mathrm{B}$ での位置と速度である．

運動エネルギーの変化量（左辺） ＝ 仕事（右辺）
が証明された。

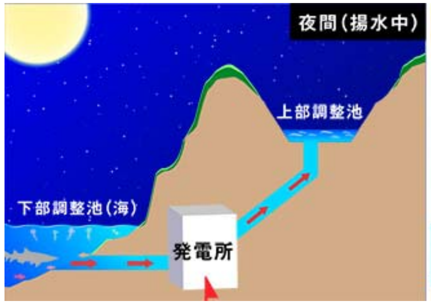
② ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）の定義

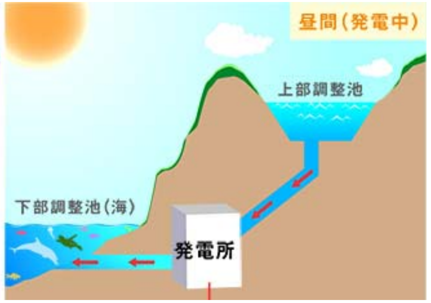
簡単な、揚水発電の場合で考えよう

鉛直方向の移動のみ考える。



$$-F^{保}(x) = +mg$$





$$F^{保}(x) = -mg$$

2つの見方が可能

- 保存力に逆らって、$-F^{保}$の力で、基準点0からxまで物体を移動する仕事

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x F^{保}(x)dx} = -\int_0^x (-mg)dx = +mgx$$

- 保存力が、xから基準点0まで物体を移動する仕事

$$= \int_x^0 F^{保}(x)dx = \int_x^0 (-mg)dx = +mgx = W^{保}_{x\to 0}$$

⇨ 保存力は、ポテンシャルエネルギーの微分（傾き）である

$$\boxed{F^{保}(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

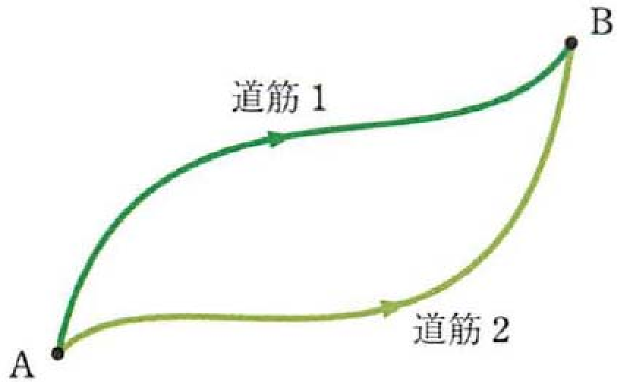
ポテンシャルエネルギーの特徴　2つ

・道筋を $\mathrm{A} \to \boldsymbol{r}_0 \to \mathrm{B}$　と選ぶ（基準点を経由して、点Bに向かう）

$$W^{保}{}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}_{保}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F}_{保}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}_{保}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= U(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - U(\boldsymbol{r}_\mathrm{B})$$

$$\therefore \quad \boxed{W^{保}{}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = U(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - U(\boldsymbol{r}_\mathrm{B})}$$

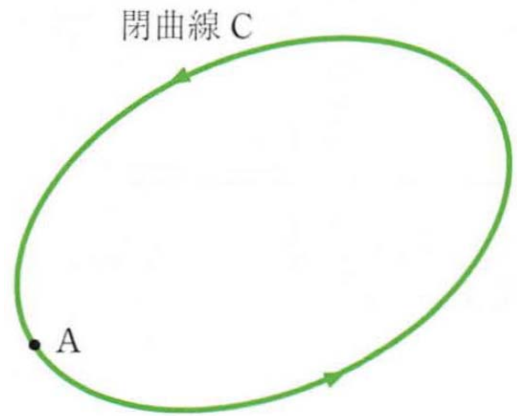


保存力のする仕事は、途中の道筋によらず、
出発点Aと到着点Bの位置だけで決まる。
ポテンシャルエネルギーの差で与えられる。

・閉曲線Cを1周する積分を考える。

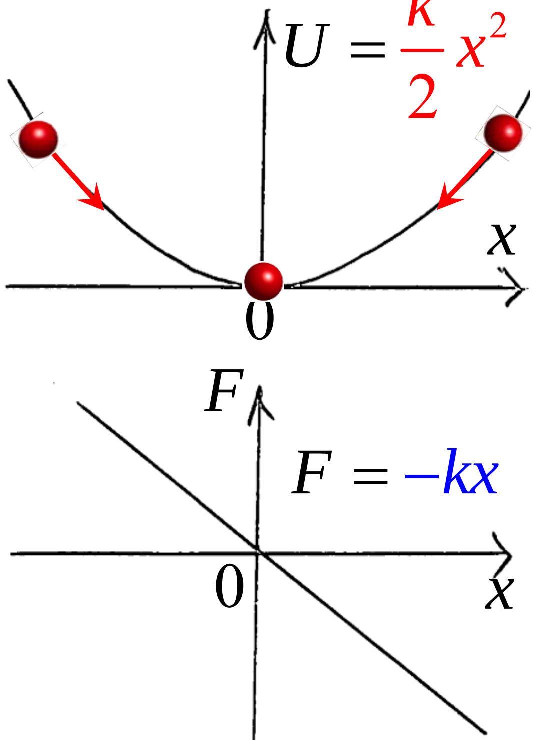
$$\oint_\mathrm{C} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \qquad \text{（力 } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \text{ が保存力の場合）}$$

↑ ゼロでなければ、非保存力である。



ポテンシャルエネルギーと保存力の関係：3つの典型例

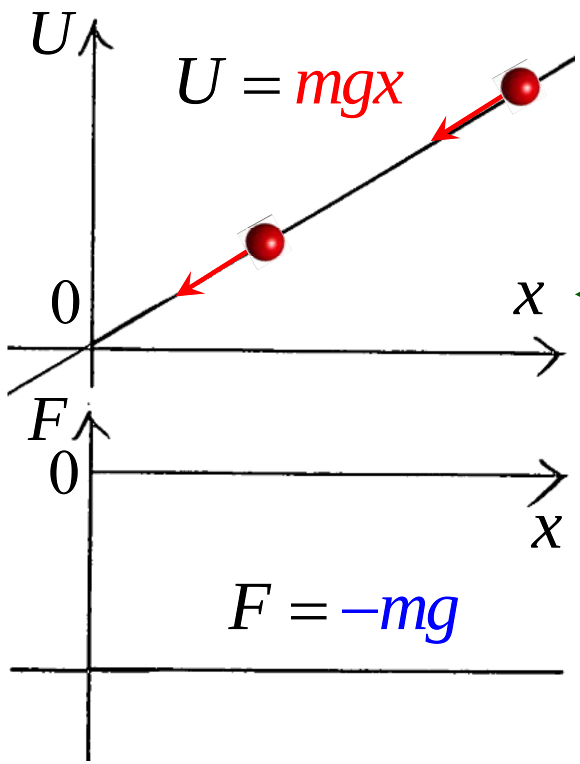
バネの弾力



$$U=-\int_0^x(-kx)dx$$

$F(x)$の面積に相当する。

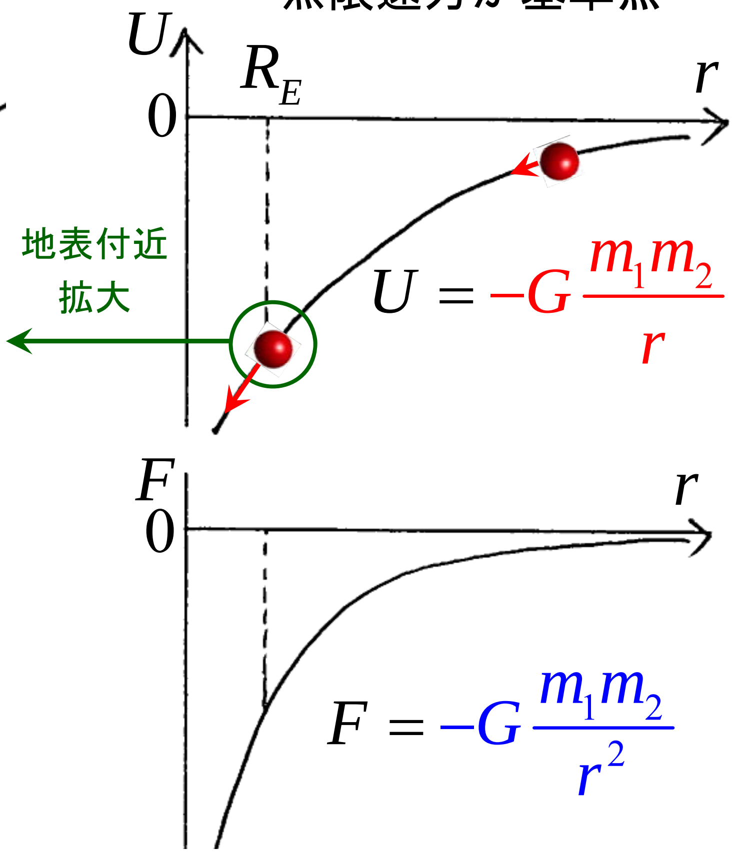
重力



$$U=-\int_0^x(-mg)dx$$

万有引力

*無限遠方が基準点



$$U=-\int_{\infty}^{r}\left(-G\frac{m_1m_2}{r^2}\right)dr$$

$$=-\int_r^{\infty}G\frac{m_1m_2}{r^2}dr$$

補足: 保存力を位置エネルギーから導く。3次元の場合 参考

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

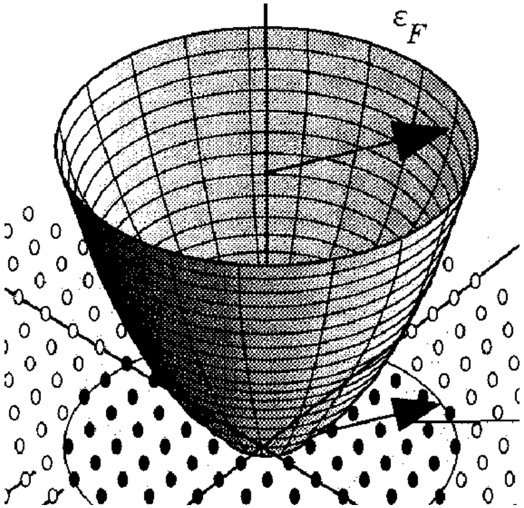
偏微分 $$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}$$

このとき、yとzは定数であるとみなす。

記号∇(「ナブラ」と呼ぶ)で表されるベクトルの微分演算子

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

問題: $U(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ から$\boldsymbol{F}$を求めよ。



力学的エネルギーのまとめ

エネルギー＝仕事をする能力

力学的エネルギーの保存

$$U = -\int_0^x F(x)dx$$

$$F = -\frac{dU}{dr}$$

仕事

W

運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2$$

ポテンシャルエネルギー
（保存力では定義できる）

$$mgx,\ \frac{1}{2}kx^2,\ -G\frac{m_1m_2}{r}$$

重力、 弾力、万有引力

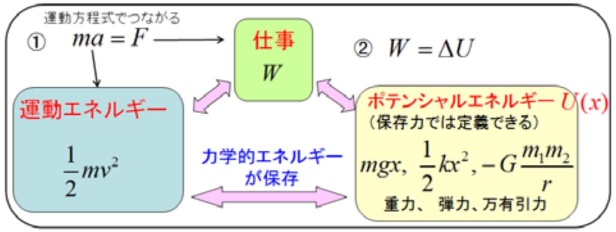
単振動、ジェットコースター、人工衛星…

非保存力　力学的エネルギーが保存しない。

例：摩擦力、粘性抵抗　$\mu N, -bv$

5.3 エネルギー保存則

運動エネルギーと仕事の関係、仕事と位置エネルギーの関係より



$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = W^{保}{}_{A\to B} = U(\boldsymbol{r}_A) - U(\boldsymbol{r}_B)$$

位置エネルギーの減少分(あるいは増加分)は、
運動エネルギーの増加分(あるいは減少分）に等しい。この式を変形して、

「力学的エネルギー」=「運動エネルギー」+「位置エネルギー」

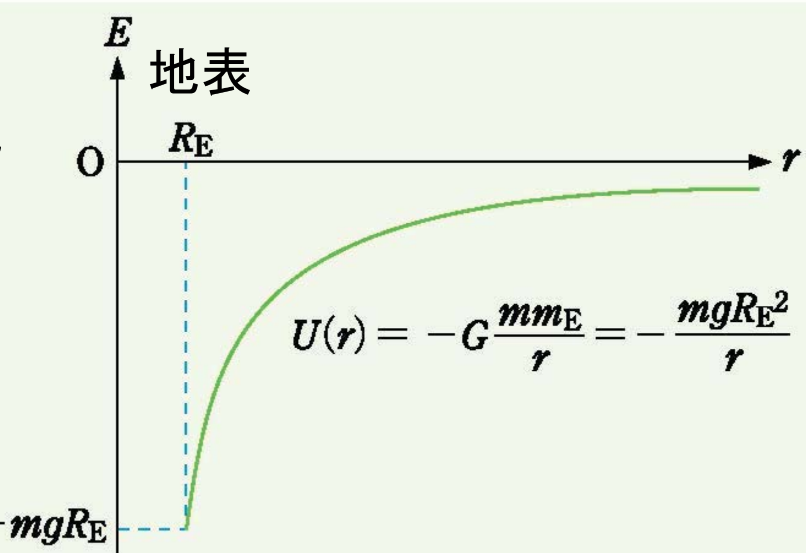
$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 + U(\boldsymbol{r}_B) = \frac{1}{2}m{v_A}^2 + U(\boldsymbol{r}_A) = 一定$$

物体が保存力を受けて運動する場合に、物体の力学的エネルギーは一定である。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 一定 & \text{重力の作用による物体の運動} \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 一定 & \text{ばねの弾力による物体の運動} \end{cases}$$

脱出速度

ロケットを発射して，地球の重力圏から脱出させ，無限の遠方まで到達させたい。ロケットの初速vの最小値（脱出速度）を求めよ（地球の自転の効果を無視する）



$$U(R_E) = -G\frac{mm_E}{R_E} = -mgR_E$$

打ち上げ時のロケットの力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgR_E = \frac{1}{2}mv_\infty{}^2 \geqq 0$$

地球の重力圏を脱出できるための条件

$$v = \sqrt{2gR_E} = \sqrt{2\times(9.8\ \mathrm{m/s^2})\times(6.37\times10^6\ \mathrm{m})}$$
$$= 1.12\times10^4\ \mathrm{m/s} = \boxed{11.2\ \mathrm{km/s}} \qquad (5.40)$$

＊もしm_Eが大きくなると、gが大きくなる。$v>c$（光速）となると、どうなるか？

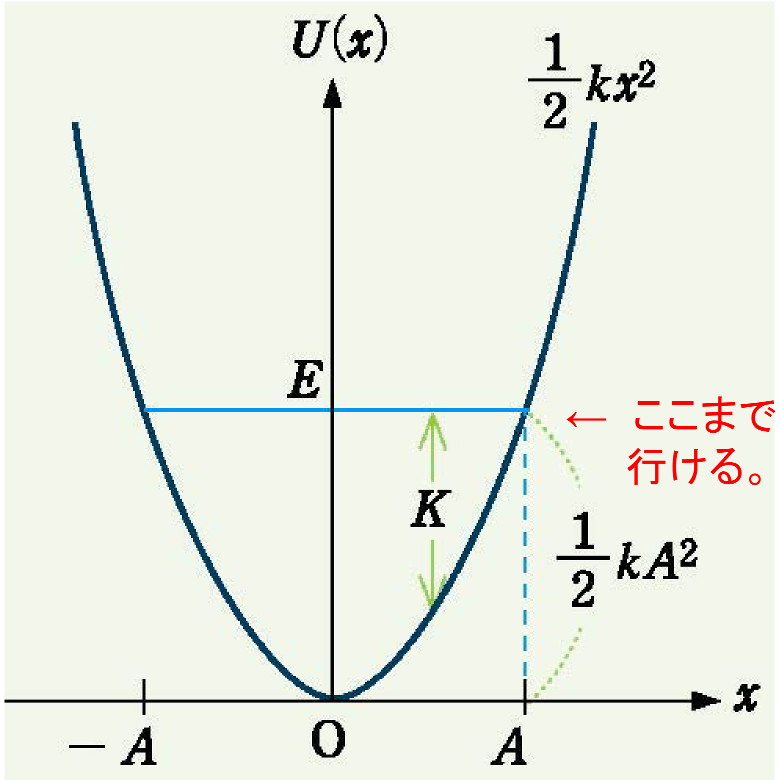
単振動の力学的エネルギー

$F = -kx$ によって振幅 A の単振動

$$x(t) = A\cos(\omega t + \beta)$$

を行う物体の速度は

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \beta)$$



力学的エネルギー
　= 運動エネルギー
　　＋ 弾性ポテンシャルエネルギー

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2} = \frac{1}{2}A^2(m\omega^2)\sin^2(\omega t + \beta) + \frac{1}{2}A^2k\cos^2(\omega t + \beta)$$

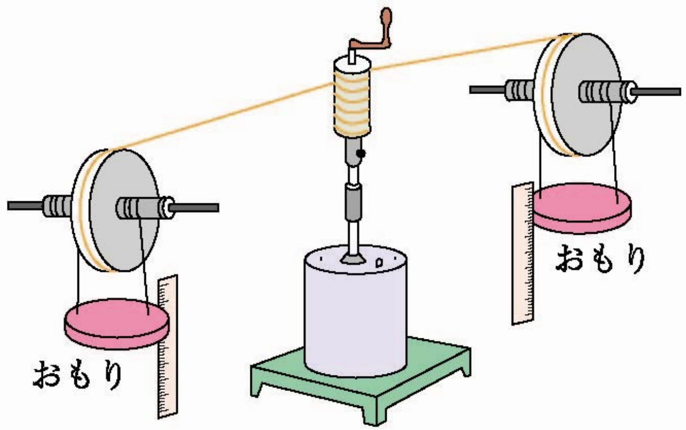
$$\boxed{= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2} = 一定 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

力学的エネルギー保存の法則

（$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$　に対応）

*cf.*等速円運動 → $v = r\omega$

摩擦力と熱

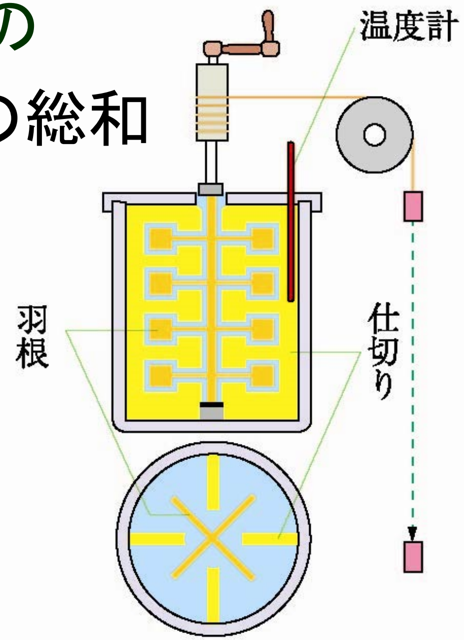


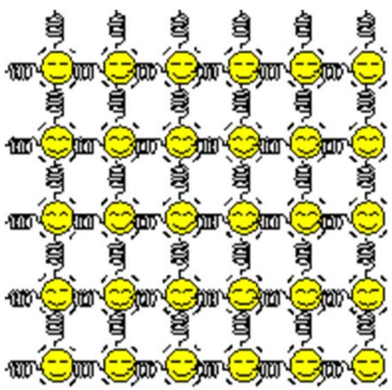
(a) ジュールの実験

非保存力が行った仕事は、どこへ消えた？

負の仕事（力と運動方向は逆）によって失われた
力学的エネルギーは、物質を構成する分子の
熱運動のエネルギーになった。

内部エネルギー＝物体を構成する分子の熱運動の運動エネルギー＋分子間力の位置エネルギーの総和





熱として移動

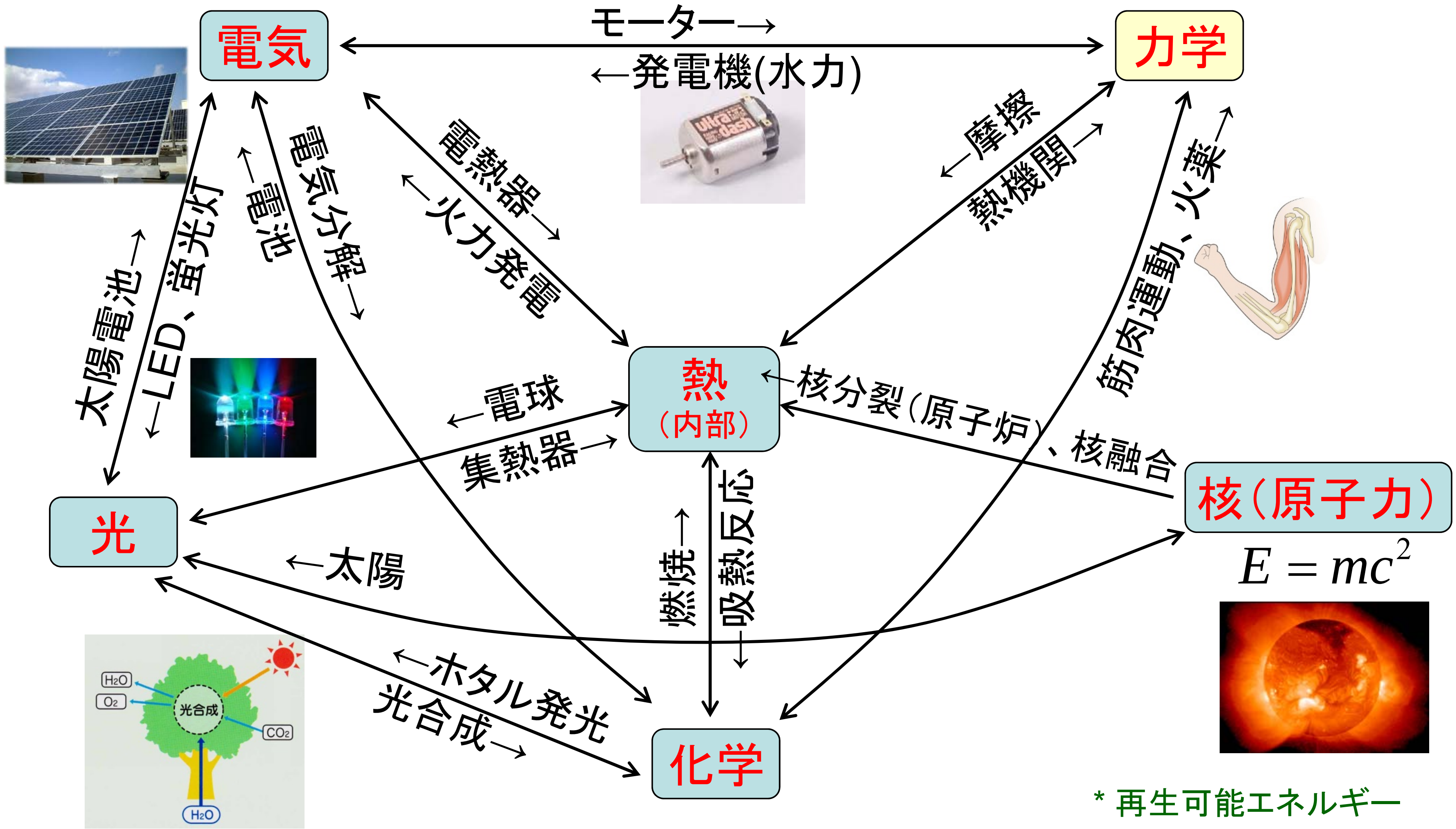
原子振動

内部エネルギーと力学的エネルギーの和が保存
1843年にジュールが確認

1gの水の温度を1℃
上げるのに必要な熱量
1cal=約4.2J

いろいろな形態のエネルギー

エネルギー保存則：総量はつねに一定



* 再生可能エネルギー

外部と熱や仕事のやりとりをしない孤立した系のエネルギーは一定。

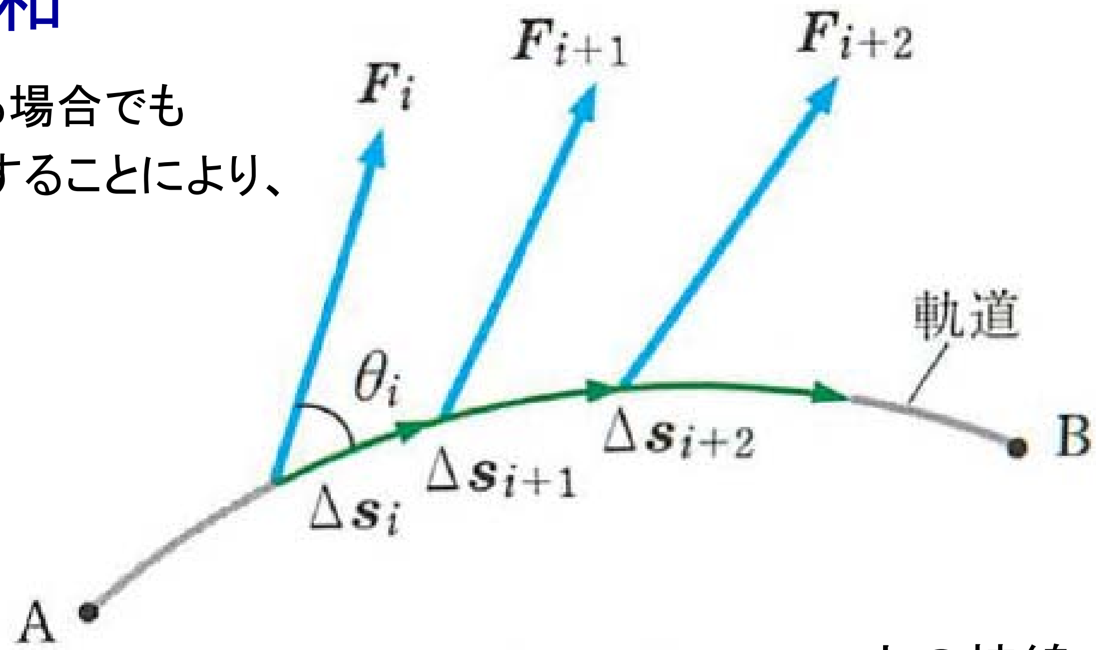
$$\Delta K + \Delta U^{保} + \Delta U + \Delta E_{化学} = 0$$

運動エネルギー、保存力の位置エネルギー、内部エネルギー、化学エネルギーの増加分

微小仕事の和

参考

複雑な運動をする場合でも
微小区間に分割することにより、
計算できる。



微小区間で力Fがする微小な仕事：

力の接線方向の成分
↓

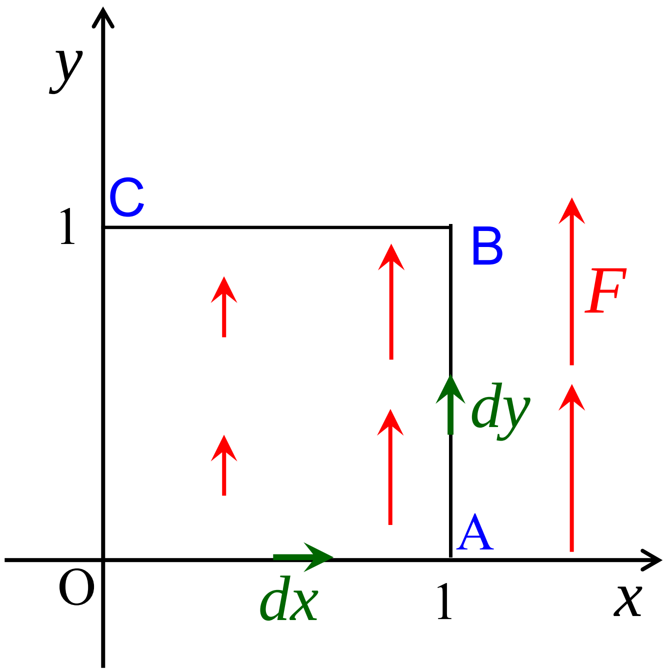
$$\Delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta\boldsymbol{s}_i = F_i \Delta s_i \cos\theta_i = F_{it} \Delta s_i$$

全体の仕事＝微小な仕事の和：

$$W_{A\to B} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta\boldsymbol{s}_i = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_A^B F_t\, ds$$

↑
接線方向の成分

問題: 2次元平面内で、力 $F=(0,ax)$ がはたらいている。2つの経路①と②にそって質点を移動させるとき、それぞれの仕事を計算せよ。



① $\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=(\quad,\quad)\cdot(dx,0)=$$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=(\quad,\quad)\cdot(0,dy)=$$

$$W=\int\qquad dx+\int\qquad dy=$$

② $\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{B}$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=(\quad,\quad)\cdot(0,dy)=$$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=(\quad,\quad)\cdot(dx,0)=$$

$$W=\int\qquad dy+\int\qquad dx=$$