情報数学II
第12回 複素数と離散フーリエ変換1

小野順貴
(ONO, Nobutaka)
東京都立大学 システムデザイン学部
情報科学科 教授
onono@tmu.ac.jp

今日の概要

- 複素数
  - 計算の復習
  - 振幅位相表現
- 離散フーリエ変換の導入
  - 有限長信号の基底変換

複素数

- 2乗したら -1 になる数(虚数単位)を j と表すとき、2つの実数 $x,\ y$ によって、$z = x + jy$ と表される数を複素数と呼ぶ
  - x を実部、y を虚部と呼ぶ
  - 複素数 z に対して実部、虚部を取り出す演算を以下のように表すことがある

$$\mathrm{Re}[z] = x \qquad \mathrm{Im}[z] = y$$

  - 四則演算は $j^2 = -1$ 以外は実数と同様に定義される
  - 実部をx 軸、虚部をy軸とする2次元平面(複素平面)上の点として表すことができる

練習問題

- 以下の複素数を $z = x + jy$ の形で表せ。
  1. $(2+j)^2$
  2. $\dfrac{1-j}{1+j}$
  3. $z^2 = 2j$ を満たす複素数 z

代数方程式

- 代数方程式：多項式の和で表される方程式

$$a^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

  - 例）$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$
  - 方程式の係数と解の関係は？
  - いつでも解をもつ？
    どんな数を解の範囲として考えるべき？

方程式と数 (1/3)

- ある数の集合 S を考え、Sの要素を係数にもつ代数方程式を考える。いつでも解が、Sの中にあるだろうか？
- Sとして自然数の集合を考える。

$$\underline{2}x+\underline{4}=0$$

自然数

➡ 自然数の中に解は存在しない。
負の数を追加すると…

- Sに負の数を含め、整数の集合を考える。

$$\underline{3}x\,\underline{-1}=0$$

整数

➡ 整数の中に解は存在しない。
有理数を追加すると…

方程式と数 (2/3)

- Sとして有理数の集合を考える。

$$\underline{x}^2 - \underline{2} = 0$$

有理数（整数）

→ 有理数の中に解は存在しない。
無理数を追加すると…

- Sとして実数の集合を考える。

$$\underline{x}^2 + \underline{1} = 0$$

実数（整数）

→ 実数の中に解は存在しない。
虚数を追加すると…

方程式と数 (3/3)

- Sとして複素数の集合を考える。

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + i = 0$$

$$(3+i)x^3 + (2 - \frac{4}{5}i)x^2 - (\sqrt{2} + 3i)x - \sqrt{5}i = 0$$

複素数係数の代数方程式

代数学の基本定理
複素数係数のn次多項式は、重複度を含め、n個の複素数解をもつ。

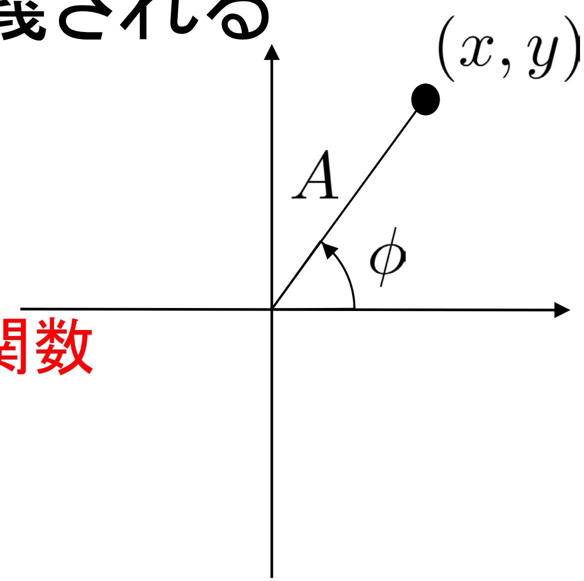
どんな複素数係数の代数方程式を考えたとしても解は複素数の範囲で見つけることができる！

工学上も多くの分野（信号処理、制御理論、振動論、...）の定式化で複素数が用いられる

複素数の振幅と位相

- 複素数 $z = x + jy$ に対し、振幅（絶対値）と位相（偏角）は以下のように定義される
  - 振幅: $A = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - 位相: $\phi = \angle z = \underline{\mathrm{atan2}(y, x)}$

2変数の逆正接関数



- 実部と虚部は振幅と位相で以下のように表される
  - 実部: $x = A\cos\phi$
  - 虚部: $y = A\sin\phi$

オイラーの公式

- 指数関数の「虚数乗」は以下のように表せる。
ただし、θ は実数。

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- 略証
  - 指数関数、三角関数が原点周りでTaylor展開可能として両辺を比較する

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

複素数の振幅･位相表現

- 複素数 z は振幅･位相 A, ϕ を用いて、以下のように表せる

$$z = Ae^{j\phi}$$

- 略証
  - オイラーの公式を適用すると

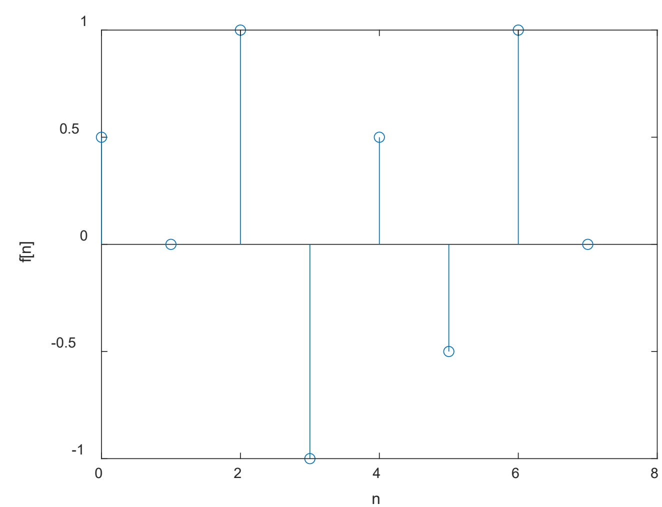
$$z = Ae^{j\phi} = (A\cos\phi) + j(A\sin\phi)$$

となるが、これは2ページ前に示した実部と虚部に一致する。

- $\phi = \omega t$ とすると、複素正弦波を表す

有限長離散時間信号

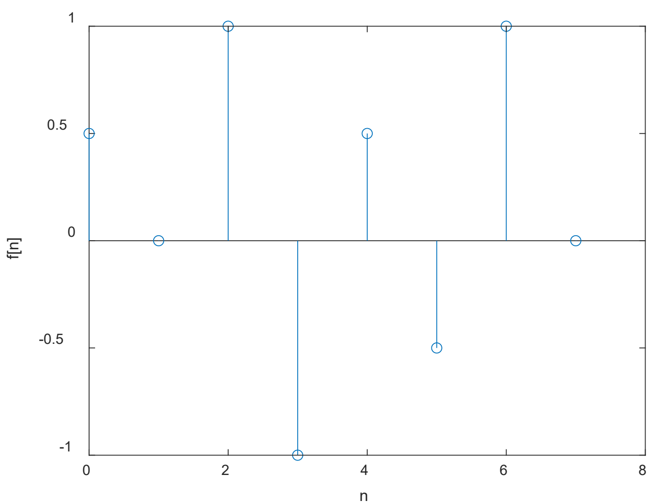
- 情報科学では、情報（データ）のひとつとして、音、画像、生体信号など、様々な信号を扱うことがある
- ここでは信号として有限長離散時間信号を考える
  - 時間の変数が離散変数（整数）
  - 時刻 n（整数） に対して信号の値 f_nが与えられる
  - 有限長の場合、nが有限（例えば 0から7など）
  - 例
    - f_0=0.5
    - f_1=0
    - f_2=1…
    - 以下、[0.5 0 1 -1 0.5 -0.5 1 0]と表す



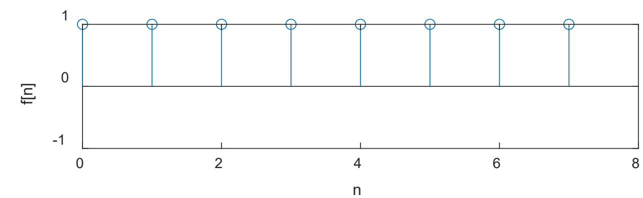
信号の要素への分解

- 信号をなんらかの要素（成分）の和で表すことで分析したい

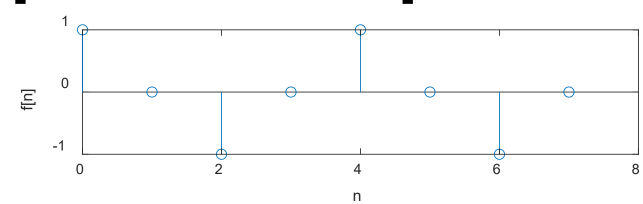
信号: [0.5 0 1 -1 0.5 -0.5 1 0]



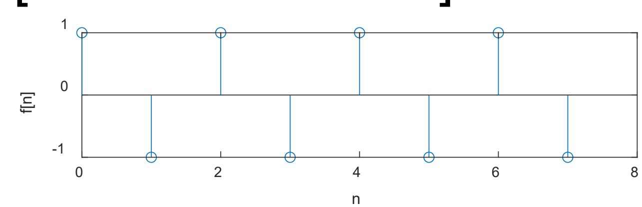
成分1: [1 1 1 1 1 1 1 1]



成分2: [1 0 -1 0 1 0 -1 0]



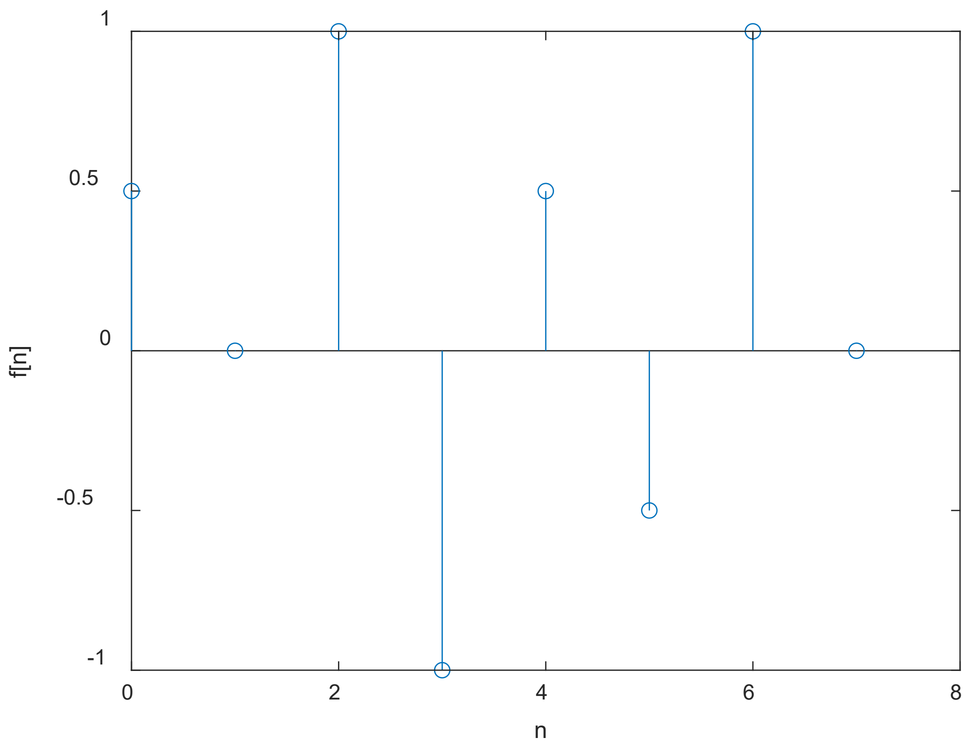
成分3: [1 -1 1 -1 1 -1 1 -1]



信号＝0.3x成分1 + (-0.5)x成分2+ 1.8x成分3
のような分析をしたい。どうすればよいか？

有限長離散時間信号のベクトル表現

- 有限長離散時間信号はベクトルとみなせる



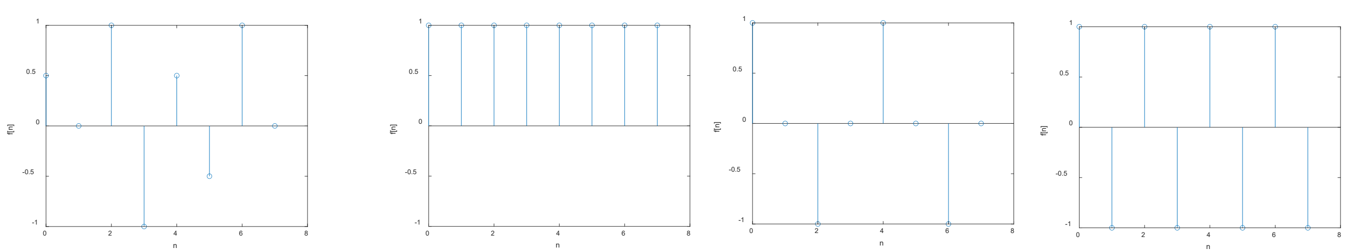
$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基底変換による信号の要素分解

- 信号を何らかの要素の和に分解することはベクトルの基底変換とみなせる

$$
\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cdots
$$

ベクトルと同様に一般には信号の「要素」ではなく「基底」と呼ばれる



再掲

行列の写像の例:基底変換

- ベクトルを他のベクトル(基底)の線形和で表す
  - 例

$$
\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 5\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + (-3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}
$$

$$
= 1\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} + 2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}
$$

基底ベクトル
(他のベクトルを表すための部品のようなもの)

基底係数
(座標のようなもの)

  - n個の線形独立な基底により、任意のn次元ベクトルを表せる
  - 基底ベクトルが与えられた場合、基底係数はどうやって求められるか？

再掲

基底係数の求め方

- 例 $$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

基底ベクトルを並べてできた行列の逆行列を
元のベクトルに左からかけると、基底係数が得られる

- 元のベクトルから基底係数を得る演算も写像

信号の基底

- 長さNの任意の有限長離散信号を表すためには、線形独立なN個の基底が必要
- どのような基底が望ましいか？
  - 直交基底（後述）
  - 物理的に意味のある基底

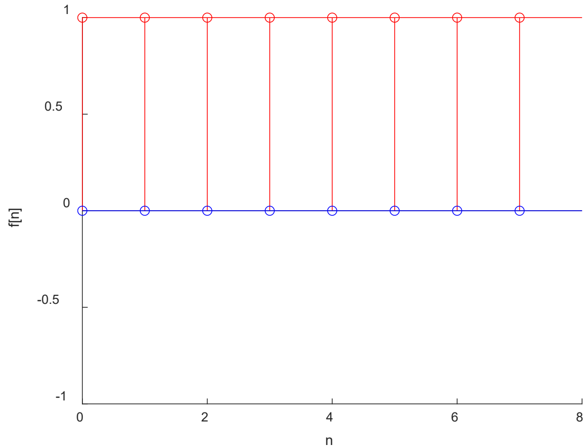
複素正弦波基底（Fourier基底）

- 基底として複素正弦波を選ぶと
  - 互いに直交
  - 信号としての意味が明確(正弦波)
  - k番目の基底のn番目の要素は以下のようにかける

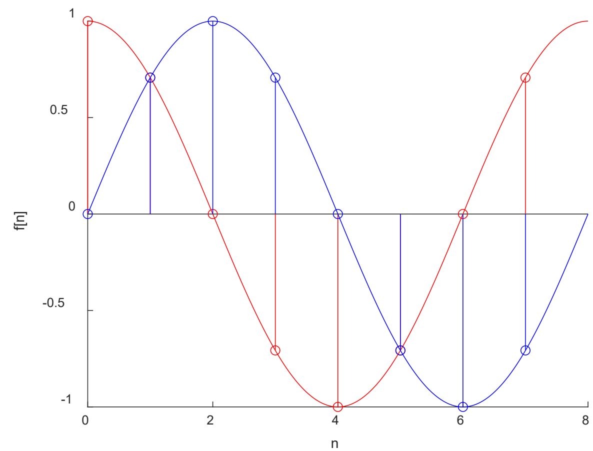
$$f_{nk} = e^{2\pi jkn/N}$$

Fourier基底の例(N=8の場合）

k=0



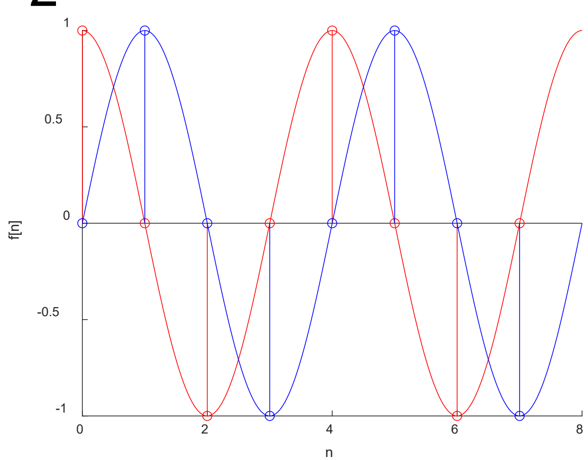
k=1



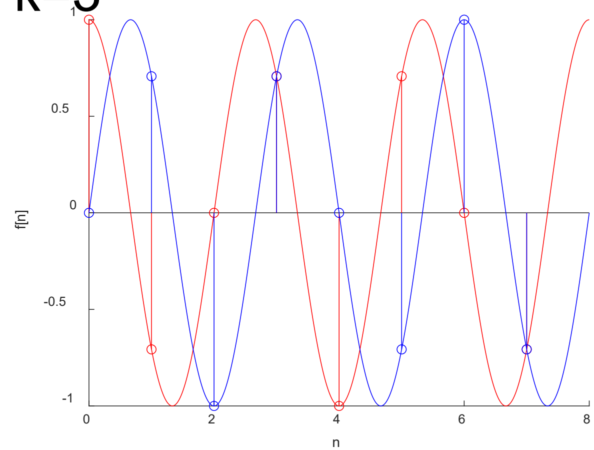
赤が実部
青が虚部

kはN点が正弦波の何周期になるかを表している
→離散周波数

k=2



k=3



離散フーリエ変換

- 離散フーリエ変換 : $f_n \rightarrow F_k$ (N点からN点)

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi jkn/N}$$

n, *k* は0からN-1までの整数値をとる。*j* は虚数単位(-1の平方根)
e の指数の符号の違いに注意

- 離散逆フーリエ変換: $F_k \rightarrow f_n$ (N点からN点)

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi jkn/N}$$

離散逆フーリエ変換の解釈

- N=4の場合を具体的にかき下してみる

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi jkn/N}$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = F_0 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j0\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j0\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j0\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j0\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_1 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j1\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j1\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j1\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j1\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_2 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j2\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j2\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j2\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j2\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_3 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j3\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j3\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j3\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j3\cdot 3/4} \end{pmatrix}}$$

離散周波数0の
複素正弦波

離散周波数1の
複素正弦波

離散周波数2の
複素正弦波

離散周波数3
(-1)の
複素正弦波

離散フーリエ変換 F_kは
複素正弦波を基底とする
信号の展開係数

今日のまとめ

- 複素数
  - 計算の復習
  - 振幅位相表現
- 離散フーリエ変換の導入
  - 有限長信号の基底変換