演習問題 No. 5 の解答

■$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$ となるから，$\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であり，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

も $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．ロピタルの定理を繰り返して用いることにより，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)''}{(x\sin x)''}==\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}=0$$

を得る．

(2)

$$f'(x)=2(x-a)(x-b)^2+2(x-a)^2(x-b)=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$$

なので,$f'(x)=0$ となるのは, $x=a,b,\frac{a+b}{2}$ の 3 つのみ.

$$f''(x)=2(x-b)^2+8(x-a)(x-b)+2(x-b)^2$$

なので

$$f''(a)=f''(b)=2(a-b)^2>0,\quad f''(\frac{a+b}{2})=-(a-b)^2<0$$

となる．よって, $x=a,b$ で極小値 0 をとり, $x=\frac{a+b}{2}$ で極大値 $\frac{1}{16}(a-b)^4$ をとる．

■$\boxed{2}$ (1) $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos^2 x)-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'}=2$$

(2) $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であり，

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\log x + 1 - x)'}{(\cos\pi x + 1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{(1/x)-1}{-\pi\sin\pi x}$$

も $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．ロピタルの定理を繰り返して用いることにより，

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\log x + 1 - x)''}{(\cos\pi x + 1)''}=\lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{-\pi^2\cos\pi x}=-\frac{1}{\pi^2}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\log x + 1 - x}{\cos\pi x + 1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\log x + 1 - x)'}{(\cos\pi x + 1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{(\log x + 1 - x)''}{(\cos\pi x + 1)''}=-\frac{1}{\pi^2}$$

(3) $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．対数微分法より，$\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{-\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)+\dfrac{1}{x(x+1)}\right\}$ であるから，ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-2\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x(x+1)}\right\}\right]=1-2\log 2$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-2\right)'}{(x-1)'}=1-2\log 2$$

(4) $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であり，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - \tan^{-1}x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

も $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．ロピタルの定理を繰り返して用いることにより，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\tan^{-1}x)''}{(x^3)''}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\tan^{-1}x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\tan^{-1}x)''}{(x^3)''}=\frac{1}{6}$$

(5) $y=\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ とおくと，

$$\lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+a)-\log(x-a)}{1/x}$$

は $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\big(\log(x+a)-\log(x-a)\big)'}{(1/x)'}==\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x-a}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{1-(a/x)^2}=2a$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=2a$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\log y}=e^{2a}$$

■$\boxed{3}$　(1) $f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{3}$ で極大値または極小値をとるならば，$f'(\dfrac{\pi}{3})=0$ でなければならない．

$$f'(x)=a\cos x+2\cos 2x\,,\qquad f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}a+2(-\frac{1}{2})=0$$

より，$a=2$ となる．

(2) $a=2$ を代入して，

$$f''(x)=-2\sin x-4\sin 2x\,,\qquad f''(\frac{\pi}{3})=-3\sqrt{3}<0$$

であるから，定理 2.14 により $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ は極大値となる．

■$\boxed{4}$　$f(\dfrac{\pi}{4})=a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}b=5$ と

$$f''(x)=-4a\sin 2x-9b\cos 3x\,,\qquad f''(\frac{\pi}{4})=-4a+\frac{9}{\sqrt{2}}b=0$$

より，$a=9,\ b=4\sqrt{2}$

■$\boxed{5}$　(1) (下の図参照)　内接円の半径を r とすると，$\triangle$ABC の周の長さは $2(a+x)$ であるから，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S=r(a+x)$$

と表される．一方，S は x を用いて，

$$S=x\sqrt{a^2-x^2}$$

と表されるから，

$$r=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}$$

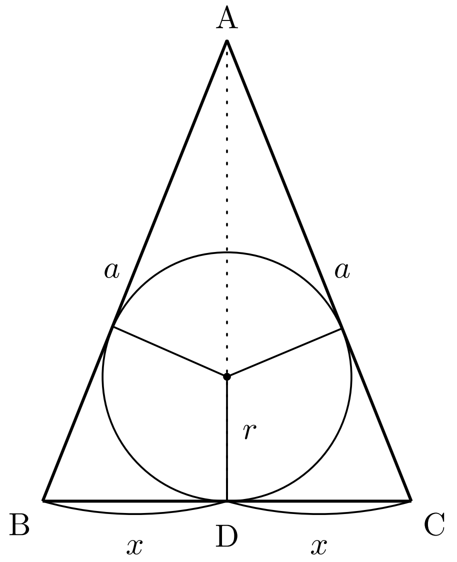
$$I=\pi r^2=\frac{\pi x^2(a^2-x^2)}{(a+x)^2}=\frac{\pi x^2(a-x)}{a+x}$$

(2) I を x で微分すると，

$$\frac{dI}{dx}=\frac{\pi(2ax-3x^2)}{a+x}-\frac{\pi x^2(a-x)}{(a+x)^2}=\frac{2\pi x(a^2-ax-x^2)}{(a+x)^2}$$

$0<x<a$ であるから，$I'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$ のときのみである．

増減表



x	0		$(\sqrt{5}-1)a/2$		a
I'		$+$	0	$-$	
I		$\nearrow$	$(5\sqrt{5}-11)\pi a^2/2$	$\searrow$	

により，$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$ のとき，すなわち，$\mathrm{BC}=(\sqrt{5}-1)a$ のとき内接円の面積は最大となる．

■ $\boxed{6}$ $f(x)=a\sin^{-1}x-\cos^{-1}(1-2x^2)$ とおく．$[\,0,\,1\,]$ において，$f(x)=b$（定数）が成り立つためには，

$$f'(x)=\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}-(-1)\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}(-4x)=\frac{a-2}{\sqrt{1-x^2}}=0 \quad (\,0<x<1\,)$$

とならなければならないから，$a=2$，$b=f(0)=0$ である．