演習問題 No. 3 の解答

■$\boxed{1}$ (1) $(\sqrt{x+2x\sqrt{x}})' = (\sqrt{x+2x^{3/2}})' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x+2x\sqrt{x}})^{-1/2}\Big(1+3x^{1/2}\Big) = \dfrac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+2x\sqrt{x}}}$

(2) $\left(\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+2}{4}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\Big(\dfrac{x+2}{4}\Big)}}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}$

(3) $(\tan^{-1}y)' = \frac{1}{1+y^2}$ なので

$$\big(\tan^{-1}(\frac{1}{1+x^2})\big)' = \frac{1}{1+(\frac{1}{1+x^2})^2}\times(\frac{1}{1+x^2})' = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}.$$

■$\boxed{2}$ (1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+7h)-f(a-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[7\Big(\frac{f(a+7h)-f(a)}{7h}\Big)+\Big(\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\Big)\right] = 8f'(a)$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}\right]\\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})\right] = 3\sqrt[3]{a^2}f'(a)\end{aligned}$$

■$\boxed{3}$ (1) $\big(\tan^{-1}(\tanh x)\big)' = \dfrac{1}{1+\tanh^2 x}\operatorname{sech}^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x+\sinh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh 2x}$

(2) $\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x} - 1$ であるから，

$$\left(\sin^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)^2}}\frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

(3) 対数微分法を用いる．$y = x^{e^x}$ の両辺の対数をとると，$\log y = e^x\log x$ となる．この式の両辺を微分すると，

$$\frac{y'}{y} = e^x\log x + e^x\frac{1}{x} = e^x(\log x+\frac{1}{x})$$

$$y' = ye^x(\log x+\frac{1}{x}) = x^{e^x}e^x(\log x+\frac{1}{x})$$

(4) 対数微分法を用いる．$y = (\cosh x)^x$ の両辺の対数をとると，$\log y = x\log(\cosh x)$ となる．この式の両辺を微分すると，

$$\frac{y'}{y} = \log(\cosh x) + x\frac{\sinh x}{\cosh x} = \log(\cosh x) + x\tanh x$$

$$y' = y(\log(\cosh x)+x\tanh x) = (\cosh x)^x(\log(\cosh x)+x\tanh x)$$

■$\boxed{4}$ (1) 定義より

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h|h|-0}{h} = |h| \longrightarrow 0 \quad (\ h\to 0\ )$$

となるから，$f'(0)=0$ である．

(2) 定義より

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h\tan^{-1}\Big(-\dfrac{1}{h^2}\Big)-0}{h} = \tan^{-1}\Big(-\frac{1}{h^2}\Big) \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \quad (\ h\to 0\ )$$

となるから，$f'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ である．

■$\boxed{5}$ (1) $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ であるから，

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \qquad (\ n \geqq 2\ )$$

(2) $a^x = e^{x\log a}$ より，$(a^x)' = a^x \log a, \cdots, (a^x)^{(n)} = a^x(\log a)^n$

(3) 3 倍角の公式より，

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

であるから，

$$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4}\cos\big(x + \frac{n\pi}{2}\big) + \frac{3^n}{4}\cos\big(3x + \frac{n\pi}{2}\big)$$

(4) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$ であり，x の 2 次以上の導関数は 0 であるから，ライプニッツの公式を用いて，

$$\begin{aligned}(x\sin x)^{(n)} &= x\sin\big(x + \frac{n\pi}{2}\big) + {}_n\mathrm{C}_1 \times 1 \times \sin\big(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\big)\\ &= x\sin\big(x + \frac{n\pi}{2}\big) + n\sin\big(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\big)\end{aligned}$$