情報数学II
第13回 離散フーリエ変換2（補足）

小野順貴
(ONO, Nobutaka)
東京都立大学 システムデザイン学部
情報科学科 教授
onono@tmu.ac.jp

再掲

行列の写像の例:基底変換

- ベクトルを他のベクトル(基底)の線形和で表す
  - 例

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 5\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + (-3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= 1\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} + 2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

基底ベクトル
(他のベクトルを表すための
部品のようなもの)

基底係数
(座標のようなもの)

  - n個の線形独立な基底により、任意のn次元ベクトルを表せる
  - 基底ベクトルが与えられた場合、基底係数はどうやって求められるか？

再掲

基底係数の求め方

- 例

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

基底ベクトルを並べてできた行列の逆行列を
元のベクトルに左からかけると、基底係数が得られる

- 元のベクトルから基底係数を得る演算も写像

基底係数の求め方(直交基底の場合)

- 例 $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

直交している

両辺、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ との内積をとると

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

直交している
ので内積0で
消えてしまう

$$c_1 = \frac{5-3}{1+1} = 1$$

直交基底の場合、基底係数は
各基底との内積計算のみで簡単に求まる!

再掲

離散逆フーリエ変換の解釈

- N=4の場合を具体的にかき下してみる

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi jkn/N}$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = F_0 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j0\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j0\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j0\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j0\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_1 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j1\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j1\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j1\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j1\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_2 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j2\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j2\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j2\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j2\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_3 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j3\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j3\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j3\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j3\cdot 3/4} \end{pmatrix}}$$

離散周波数0の複素正弦波

離散周波数1の複素正弦波

離散周波数2の複素正弦波

離散周波数3(-1)の複素正弦波

離散フーリエ変換 F_kは複素正弦波を基底とする信号の展開係数

練習:フーリエ基底の直交性

- 前頁の基底は全て直交していることを確認する。
- 数値的に行ってもよいが以下が一例。
  - 簡単のため、$z = e^{2\pi j/4}$ とおく。$z^2 = -1,\ \ z^4 = 1$ に注意。
    さらに、$(z^4 - 1) = (z-1)(z^3 + z^2 + z + 1) = 0$
    であり、$z \neq 1$ であるから、$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
  - 前頁の基底は以下のようにかける。

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\z\\z^2\\z^3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\z^2\\z^4\\z^6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\z^3\\z^6\\z^9\end{pmatrix}$$

  - 例えば2個目と3個目の基底の内積は

$$1\cdot 1 + \underline{z^*} z^2 + \underline{(z^2)^*} z^4 + \underline{(z^3)^*} z^6 = 1\cdot 1 + \underline{z^{-1}} z^2 + \underline{z^{-2}} z^4 + \underline{z^{-3}} z^6 = 1 + z + z^2 + z^3 = 0$$

複素数ベクトルの内積なので
片方に複素共役

$z^* = e^{-2\pi j/4} = z^{-1}$ など

離散フーリエ変換の導出

- 基底が直交しているので展開係数は基底との内積によって容易に求まる。

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = F_0 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j 0\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j 0\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j 0\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j 0\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_1 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j 1\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j 1\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j 1\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j 1\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_2 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j 2\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j 2\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j 2\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j 2\cdot 3/4} \end{pmatrix}} + F_3 \cdot \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j 3\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j 3\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j 3\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j 3\cdot 3/4} \end{pmatrix}}$$

  - 例えば F_1 は、この基底と両辺内積をとれば

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{-2\pi j 1\cdot 0/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 1/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 2/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 3/4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = F_1 \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{-2\pi j 1\cdot 0/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 1/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 2/4} \\ e^{-2\pi j 1\cdot 3/4} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{2\pi j 1\cdot 0/4} \\ e^{2\pi j 1\cdot 1/4} \\ e^{2\pi j 1\cdot 2/4} \\ e^{2\pi j 1\cdot 3/4} \end{pmatrix} \cdot$$

より、 $F_1 = \sum_{n=0}^{3} f_n e^{-2\pi j 1\cdot n/4}$ のように、得られる。

まとめ

- 離散フーリエ変換の基底変換からの解釈
  - 直交基底の基底係数は、一般の場合と異なり基底との内積によって得られる。ただし、複素ベクトルの内積の定義（片方に複素共役がつく）に注意
  - 互いに直交する複素正弦波を基底として選ぶと基底係数を求める式として離散フーリエ変換が導かれる。

期末試験について

- 日時:1月31日(水)13:00-14:30
- 場所:4-405教室
- 対面
- 試験範囲:小野担当分(第8回～第13回の講義内容全体)
- MATLABの使用可(教室の端末で)
- 講義資料の参照可(教室の端末で or 印刷物して持ち込みも可)
- 個人のPCやタブレット端末は原則使用しない。
- 他人との相談、会話、情報のやり取り、は不可

以下、過去の出題例

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} (k = 1, \cdots, 5) \text{ として、} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

というデータが得られている。このとき、二乗誤差の和である

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{5} (ax_k + b - y_k)^2$$

を最小とする　a, b を求めよ。値は小数点第 2 位を四捨五入して答えよ。

線形回帰問題に関する出題。今年度は、
線形回帰の解法を詳細には行っていないので、
出題する場合は、もう少し誘導を加える予定

以下の文章が正しいか誤りかを答えよ。

・最急降下法は、十分な反復回数を繰り返せば常に最小値（大域的最適解）を与える変数を求めることができる手法である。

・確率密度関数を全定義域で積分すると必ず１となる。

・４点での離散逆フーリエ変換は以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

講義内容の理解を確認するための正誤問題。

2つの生産ラインA, Bが同じ部品を生産している。ラインAは1週間に1,000個の部品を生産し、そのうち100個が不良品である。ラインBは週に2,000個の部品を生産し、そのうち150個が不良品である。いま、１週間にラインA，Bから生産された部品をすべて集め、ランダムに部品を選んだら不良品であった。この部品がラインAで生産されたものである確率を求め、小数第２位を四捨五入して答えよ。

ベイズ推定に関する出題

$x_k\ (k=1,\cdots,6)$ として、$5,\ 7,\ 1,\ 4,\ 2,\ -1$ というデータが得られている。$x_k\ (k=1,\cdots,6)$ それぞれが同一の正規分布

$$p(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

に従うと仮定し、パラメータ　$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ を最尤法により推定せよ。答えは小数第２位で四捨五入して答えよ。

最尤推定に関する出題

以下の制約付き最適化問題を解け。

$x^2 - xy + y^2 = 1$ の制約の下、$f(x, y) = x + y$ を最小化する x, y を求めよ。また、そのときの $f(x, y)$ の値を求めよ。

制約付き最適化に関する出題

その他検討している出題

- 変数変換による確率密度分布の変換（逆関数法）関連
- 離散フーリエ変換関連
  （直交性の証明、離散フーリエ変換の計算）
- 多少のMatlabコーディングを含む問題