システムプログラミング実験
確率プログラミング

2023 年度
担当：中嶋一貴

第 2 回：円周率の推定とモンティホールジレンマ

第 1 回目の実験では簡単なモンテカルロ法によるシミュレーションを行った．その結果から，ある実験が独立試行の場合には，試行回数が増えるにつれて得られる確率は理論的確率に近づくという「大数の法則」に則っていることが確認できた．第 2 回の実験では，大数の法則をより身近に感じるための課題を解いていく．

実験課題（第 2 回）

課題 2-1：シミュレーションによる円周率推定

円周率を推定するためのモンテカルロ法によるシミュレーションのプログラムを作成せよ．ただし，乱数のシードには各自の学修番号を指定すること．

なお，以下のようにシミュレーションを組むとよい．

1. 区間 $[0,1)$ の乱数の組 $(r1, r2)$ を独立に n 個生成する．
2. 図 1 のように，1 辺の長さが 1 の正方形の中に n 個の点が含まれる．n 個の点のうち，半径 1 の円を 4 等分した扇形に含まれる点の個数 n' を数える．n と n' から円周率を推定する．

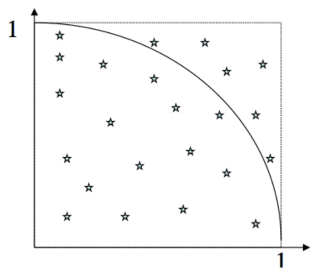

図 1　円周率の推定方法のイメージ

レポートには，以下を記載せよ．

1. $n = 100,000$ 個の生成した点から得られる円周率の推定値．有効数字 5 桁で報告すること．
2. 横軸を生成した点の個数 n，縦軸を n 個の点から得られる円周率の推定値としたグラフ．なお，$10,000 \leq n \leq 100,000$ とし，少なくとも 10 個の n に対する結果をプロットすること．
3. 実験結果の考察．

課題 2-2：大数の法則を用いた円周率推定の説明

以下に大数の法則の簡単な定義を示す．これまでの実験を通して言えることを考えつつ，文章の空欄を埋めよ．レポートには，空欄を埋めた文章を記載せよ．

1 回の試行結果が確率変数 X_n によって表される (_____) した実験を繰り返す．その実験において，X_n の (_____) を m と表すとき，どんなに小さな $h(h > 0)$ であっても n が大きければ以下が成り立つ．

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq h\right) \to 0 \tag{1}$$

この法則を適用して課題 2-1 を説明すると，確率変数 X_1 は 1 回の実験で円周の内側に入る事象 A が起これば 1, 事象 A が起こらない（円周の外側に入る）場合は 0 をとるものとする．このときそれぞれの事象が起こる確率は

$$P(X_n = 1) = \underline{\quad\quad}, P(X_n = 0) = \underline{\quad\quad} \tag{2}$$

となるため m は以下の様に計算できる．

$$m = 1 * \underline{\quad\quad} + 0 * \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad} \tag{3}$$

この実験を何回も繰り返すことで確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ を得ることができる．n 回までの試行で事象 A が起こる回数は $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ に等しいので，大数の法則に当てはめると

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \underline{\quad\quad}\right| \geq h\right) \to 0 \tag{4}$$

となる．つまり，$\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ は $n \to \infty$ のとき___に確率収束するため円周率を求めることが可能となる．

※式（1）と式（4）は同じ式ではない．

課題 2-3：モンティホールジレンマ

あなたは今，テレビのクイズ番組に出演しています．最後まで勝ち残ったあなたは，ハワイ旅行のチャンスをつかみました．状況は以下の通りです．

- 司会者が 3 つの箱を見せて，このうち 1 つを選ぶように指示される．箱は 1 つだけハワイ旅行の当たりで，残りの 2 つはハズレ．
- あなたが箱を 1 つ選んだ後，司会者は選ばれなかった箱のうちハズレのものを開けてしまう．(司会者は当たりを知っている)
- 残った箱は 2 つだけ．そのうち 1 つはあなたが選択した箱．

さて，このとき，司会者は「選択した箱を変えるかどうか？」を聞いてきます．ハワイ旅行の欲しいあなたは，選択を変更した方が得でしょうか，損でしょうか？

モンティホールジレンマとは一見，簡単そうな確率問題だが直感的な答えは誤りであるという問題である．また，数学者でさえ間違える問題として有名な問題である．上記の状況をモンテカルロ法でシミュレーションするプログラムを作成せよ．ただし，乱数のシードには各自の学修番号を指定すること．

レポートには，以下を記載せよ．

1. 選択した箱を変える場合と変えない場合それぞれの確率．有効数字 3 桁で報告すること．
2. 箱を変える場合と変えない場合それぞれについて，横軸をシミュレーション回数 n，縦軸を当選確率としたグラフ．なお，$10,000 \leq n \leq 100,000$ とし，少なくとも 10 個の n に対する結果をプロットすること．
3. 実験結果の考察．

追加課題 2-A**：モンテカルロ法と大数の法則**

モンテカルロ法と大数の法則の関連性について調べ，レポートに記載せよ．

レポート提出方法

以下を kibaco の課題ページから提出すること．

- 課題の内容を記載したレポート．
  - 課題 2-1, 2-2, 2-3 の内容は必須である．追加課題 2-A の内容は必須ではないが，意欲があれば取り組むと望ましく，加点対象である．
  - ファイル名は “syspro_pp_xxx_yyy.pdf” とする．xxx には学修番号，yyy には氏名を入力する．例えば学修番号が 22012345 で氏名が Kazuki Nakajima の場合，“syspro_pp_21012345_kazuki_nakajima.pdf” とする．漢字やひらがなをファイル名に含めないこと．
- 各課題を解くために使用したソースコード．
  - ソースコードが複数に分かれている場合は，zip ファイルにまとめて提出すること．
  - 各ソースコードが，誰のもので，どの課題に対応しているかわかるようにファイル名を設定すること．例えば，氏名が Kazuki Nakajima で課題 2-1 に対する C++ コードのファイル名は “kadai_2_1_kazuki_nakajima.cpp” とする．

注意事項

- **本課題の提出締め切りは 1 週間後（2023/11/1）の 12:00 である．**
- レポート作成時には，テクニカルライティングの資料を確認し，全体をよく検証してから提出すること．
- 提出期限を過ぎると，kibaco から課題を提出できない．提出期限後に課題を提出する場合，下記に連絡をすること．連絡先：nakajima [at] tmu.ac.jp（[at] を@に変える）
- 提出ファイルを間違えていないか，提出前に慎重に確認すること．間違ったファイルが提出されても，教員から学生に逐一連絡することはしない．
- 本授業の成績が確定するまで，tmu メールをよく確認すること．成績に関わる重大な事項で教員から連絡する場合がある．