

**«Самостоятельная работа по вычислению производных
высших порядков»**

17 декабря 2024 г.

Оглавление

I	Вступление	2
II	Вычисление	2
III	Заключение	4

I. Вступление

В первом классе советской школы математика была не просто предметом, а боевым рубежом. Пока загнивающий Запад в детских садах изучал цвета радуги и делал поделки из макарон, наши первоклассники уже знали, что дифференцировать функции — это не прихоть, а вопрос государственной важности. С урока сразу на доске красовалось грозное: “ДЕРИВАТЫ — старшие братья численных рядов!”. Мелом, быстро и четко.

Учительница Мария Ивановна, с легким прищуром и неотразимой верой в светлое будущее, объясняла суть производной на примере сбора картошки: “Если Ваня копает одну сотку за 10 минут, а Петя — за 5 минут, то чья производная выше?”. Кто не понимал, оставался после уроков считать частные производные по полям кукурузы.

Зато к концу первой четверти маленькие дифференциаторы могли находить скорость распространения слухов в очереди за колбасой, а на переменах спорили о втором законе Ньютона, пока взрослые стояли в очереди за учебниками. Такие времена, такой уровень. И если кто-то на вопрос “Чему равна производная синуса?” пытался сказать “Что такое синус?”, его тут же отправляли в третий класс — в народное хозяйство стране помощники нужны!

II. Вычисление

Давайте продифференцируем данную легчайшую функцию.

$$f(x) = \sin(15 \cdot x^3) + (\cos(10 \cdot x + 5))^3$$

Вычислим 1-ую производную:

$$f^{(1)}(x) = \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 3 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2$$

Давайте немного упростим данное выражение.

Получаем 1-ую производную:

$$f^{(1)}(x) = \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 + 3 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2$$

Вычислим 2-ую производную:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) = & \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot -1 \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -10 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + 3 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \\ & \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^1 \end{aligned}$$

Давайте немного упростим данное выражение.

Получаем 2-ую производную:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) = & \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -1 \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x + 3 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \\ & \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \end{aligned}$$

Вычислим 3-ую производную:

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) = & \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} \cdot -1 + \sin(15 \cdot x^3) \\ & \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 0 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \\ & \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot -1 \cdot 90 \cdot x + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x + 90 \cdot 1 + 0 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \\ & \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + 3 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot -100 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \cos(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -100 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^1 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x \\ & + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -10 \cdot 0 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 \\ & + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \end{aligned}$$

Получаем 3-ую производную:

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) = & \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x \cdot -1 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -1 \\ & \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -1 \cdot 90 \cdot x + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 90 + 3 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \\ & \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \\ & + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \\ & \cdot 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) = & \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot -1 \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \\ & \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x + 90 \cdot 1 \cdot -1 \\ & + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x \cdot 0 \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \\ & \cdot 90 \cdot x \cdot -1 \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \\ & \cdot x^{2-1} \cdot -1 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 0 \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot x + 90 \cdot 1 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \\ & \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^2 + 45 \cdot 2 \cdot x^{2-1} \cdot -1 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 0 \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \\ & \cdot x^2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot x + 90 \cdot 1 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 0 \cdot x^3 + 15 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot -1 \cdot 90 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 0 + 0 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \\ & \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \cos(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -100 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \\ & \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 + 3 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \\ & \cdot 1000 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \\ & \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^1 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot -100 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot 2 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 0 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \\ & + 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot -100 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot 2 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 0 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \\ & + 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot 2 \\ & \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -10 \cdot 0 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 + 2 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \cdot -100 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot \\ & -100 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \cdot x + 10 \cdot 1 + 0 \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 0 \end{aligned}$$

Получаем 4-ую производную:

3

III. Заключение

Наша функция и полученная производная:

$$f(x) = \sin(15 \cdot x^3) + (\cos(10 \cdot x + 5))^3$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) = & \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -1 \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 90 \cdot x + \cos(15 \cdot x^3) \\ & \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot -1 \cdot 45 \cdot x^2 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x \\ & \cdot -1 \cdot 90 \cdot x + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x \cdot -1 \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \\ & \cdot -90 + \cos(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot 45 \cdot x^2 + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 90 \cdot x \cdot -1 \cdot 90 \cdot x + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -90 \\ & + \sin(15 \cdot x^3) \cdot 45 \cdot x^2 \cdot -90 + 3 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot 10000 \cdot (\cos(10 \cdot x + 5))^2 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \cdot 2 \\ & \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \\ & + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot 2 \\ & \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 + \cos(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -100 \cdot 2 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \\ & + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot 2 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot 1000 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \\ & \cdot -10 + \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \cdot \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 + \sin(10 \cdot x + 5) \cdot -10 \cdot \cos(10 \cdot x + 5) \cdot -100 \end{aligned}$$

Несложно заметить, что графики выглядят так:

