

**«Самостоятельная работа по вычислению производных
высших порядков»**

17 декабря 2024 г.

Оглавление

I	Вступление	2
II	Вычисление	2
III	Заключение	3

I. Вступление

В первом классе советской школы математика была не просто предметом, а боевым рубежом. Пока загнивающий Запад в детских садах изучал цвета радуги и делал поделки из макарон, наши первоклассники уже знали, что дифференцировать функции — это не прихоть, а вопрос государственной важности. С урока сразу на доске красовалось грозное: “ДЕРИВАТЫ — старшие братья численных рядов!”. Мелом, быстро и четко.

Учительница Мария Ивановна, с легким прищуром и неотразимой верой в светлое будущее, объясняла суть производной на примере сбора картошки: “Если Ваня копает одну сотку за 10 минут, а Петя — за 5 минут, то чья производная выше?”. Кто не понимал, оставался после уроков считать частные производные по полям кукурузы.

Зато к концу первой четверти маленькие дифференциаторы могли находить скорость распространения слухов в очереди за колбасой, а на переменах спорили о втором законе Ньютона, пока взрослые стояли в очереди за учебниками. Такие времена, такой уровень. И если кто-то на вопрос “Чему равна производная синуса?” пытался сказать “Что такое синус?”, его тут же отправляли в третий класс — в народное хозяйство стране помощники нужны!

II. Вычисление

Давайте продифференцируем данную легчайшую функцию.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

Вычислим 1-ую производную:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Давайте немного упростим данное выражение.

Получаем 1-ую производную:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Вычислим 2-ую производную:

$$f^{(2)}(x) = \frac{0 \cdot 1 + x^2 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot x^{2-1}}{(1+x^2)^2}$$

Давайте немного упростим данное выражение.

Получаем 2-ую производную:

$$f^{(2)}(x) = \frac{2 \cdot x}{(1+x^2)^2}$$

Вычислим 3-ую производную:

$$f^{(3)}(x) = \frac{0 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot (1+x^2)^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot x^{2-1} \cdot (1+x^2)^1}{((1+x^2)^2)^2}$$

Давайте немного упростим данное выражение.

Получаем 3-ую производную:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2 \cdot (1+x^2)^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2}{((1+x^2)^2)^2}$$

Вычислим 4-ую производную:

$$f^{(4)}(x) = \frac{0 \cdot (1+x^2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot x^{2-1} \cdot (1+x^2)^1 - 0 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 0 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x}{1}$$

Давайте немного упростим данное выражение.

Получаем 4-ую производную:

$$f^{(4)}(x) = \frac{4 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2 - 4 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot ((1+x^2)^2)^2 - 2 \cdot (1+x^2)^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot ((1+x^2)^2)^2}{(((1+x^2)^2)^2)}$$

III. Заключение

Наша функция и полученная производная:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2 - 4 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot ((1+x^2)^2)^2 - 2 \cdot (1+x^2)^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot ((1+x^2)^2)^2}{(((1+x^2)^2)^2)}$$

Несложно заметить, что графики выглядят так:

