UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Sciences et Technologies
Mention : Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques Pures
Option : Analyse et Géométrie Complexe

Sujet : Traces des fonctions pluriharmoniques

Présenté par : Sény DIATTA

Sous la direction de : Professeur Marie Salomon SAMBOU

Devant le jury ci-après :

Nom et Prénom(s)	**Grade**	**Qualité**	**Etablissement**
DIOUF Edouard	Chargé d'enseignement	Examinateur	UASZ
SAMBOU Marie Salomon	Professeur	Directeur	UASZ
SALL Oumar	Maître de conférences	Président de jury	UASZ
GUEDENON Thomas	Chargé d'enseignement	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2013-2014

TRACES DES FONCTIONS PLURIHARMONIQUES

3 juillet 2014

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude au professeur Marie Salomon SAMBOU d'avoir bien voulu m'encadrer pour ce mémoire de master. Sa vision des mathématiques, claire et synthétique reste un modèle pour moi. Je le suis infiniement reconnaissant du soutien constant et de la grande disponibilité qu'il a pu m'accorder.

Je suis également reconnaissant à tous les professeurs du département de mathématiques de l'UASZ (Université Assane Seck de Ziguinchor), pour la qualité de l'enseignement qu'ils m'ont dispensé ; particulièrement les professeurs Alassane DIEDHIOU, Edouard DIOUF, Oumar SALL, Diène NGOM et Thomas GUEDENON, qui ont bien voulu être membres du jury de ma soutenance.

Je remercie sincèrement les responsables du projet NLAGA (Non-Linear Analys and Geometry Algebra), pour m'avoir permis d'assister au séminaire de recherche qui a eu lieu en mars dernier à Dakar et qui fut riche d'enseignements mathématiques ; particulièrement l'exposé du professeur Cheikh Mbacké DIOP portant sur “les fibrés vectoriels réels et les fibrés holomorphes complexes”.

Je remercie tous mes camarades du groupe de recherche analyse et géometrie complexe : Mamadou Dian DIALLO, Mamadou Eramane BODIAN, Ibrahima HAMIDINE, Mansour SANE et Waly NDIAYE. Je retiendrai en eux, ces nombreuses contributions et les critiques mathématiques qui surgissaient lors de nos séminaires de recherche, qui se tiennent régulièrement les samedis.

Je remercie très chaleureusement les responsables du Campus Numérique de l'UASZ, Gora LO et Ababacar NDIAYE, pour m'avoir permis d'effectuer mes recherches documentaires dans leurs locaux.

Enfin j'adresse mes sincères remerciements à toute ma famille, à qui je dédie ce travail, pour le soutien et les encouragements qu'ils n'ont cessé de me renouveller toutes ces dernières années. Je suis infiniment reconnaissant à mes parents pour l'éducation qu'ils m'ont donnée et de m'avoir appris à acquérir la connaissance avec passion et patience.

Introduction

Etant donnée une variété analytique complexe X et une hypersurface réelle orientée M, telle que M divise X en deux composantes connexes X^+ et X^-, Paolo De BARTOLOMEIS et Giuseppe TOMASSINI cherchent à caractériser en termes d'opérateurs différentiels linéaires tangents sur M, les distributions T sur M qui sont traces ou sauts (dans le sens des courants) de fonctions pluriharmoniques sur X^+ et X^-.
Notre objectif est de réécrire le document de façon explicite, suite à une bonne compréhension des outils techniques utilisés.

Pour une bonne compréhension de l'article, nous introduisons dans les préliminaires certaines notions essentielles ainsi que les définitions et notations qui concerneront tout le reste du manuscrit. Ensuite, on s'intéressera à la méthode utilisée pour caractériser l'opérateur non tangentiel par l'équation $\overline{\partial_b}\partial T = 0$; qui peut être aussi déduite de la théorie des valeurs aux bords pour les formes holomorphes. Si l'hypersurface M n'est pas Levi-plate, un second opérateur différentiel linéaire local tangent ω_M est construit tel que si T est la trace sur M d'une fonction pluriharmonique h, alors $\omega_M(T) = \partial h$. Ce qui a permis plus tard de montrer que l'équation tangente $\overline{\partial_b}\omega_M(T) = 0$ caractérise localement sur M les traces de fonctions pluriharmoniques sur X^+ ou X^- : c'est le problème local de Cauchy-Dirichlet. Nous expliciterons la solution proposée par Paolo De BARTOLOMEIS et Giuseppe TOMASSINI dans le cas global, lorsque M est compact ou que sa forme de Levi admet au moins une valeur propre positive. Enfin nous verrons comment ils résolvent le problème global de Riemann-Hilbert (traitant des sauts de fonctions pluriharmoniques sur $X \setminus M$), par des arguments standards de la cohomologie, lorsque $H^2(X, \mathbb{C}) = 0$ ou $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Des cas particuliers de ce problème ont été étudiés dans [1], [5] (voir aussi [4], [6]).
Leur article est aussi une version améliorée du résultat annoncé dans [2].

I Préliminaires

I.1 Calculs différentiels sur une variété analytique complexe

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty, w\}$. Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et de dérivées continues et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

I.1.1 Notion de variété

Un atlas de classe C^k est une collection d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, appelée carte différentielle où $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ constitue un recouvrement d'ouverts de X, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous α *et* $\beta \in I$, les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k.
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte φ_α.

Définition. *Variété différentiable réelle*

Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition. *Variété analytique complexe*
Une variété analytique complexe X de dimension complexe n est une variété munie d'un atlas holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. C'est-à-dire, d'après la définition ci-dessus, que les fonctions de transitions sont des biholomorphismes.(cf. [8])

- *Une variété analytique complexe X de dimension n est dite de Stein, si elle vérifie les propriétés suivantes.*
  - *(i) X est holomorphiquement convexe, c'est-à-dire pour tout compact K contenu dans X, $\widehat{K} = \{z \in X,\ |f(z)| \leq sup_K|f| \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X)\}$ est un compact de X ;*
  - *(ii) pour tout point $z \in X$, il existe n fonctions $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}(X)$ [1] qui forment un système de coordonnées locales au voisinage de z.*

  Un ouvert de Stein est un ouvert qui est une variété de Stein.
- *Un sous-ensemble $W \subset X$ est appelé sous-variété de dimension m $(m \leq n)$ si :*
  (i) W est fermé
  (ii) pour tout $v \in W$, il existe un système de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$ dans un voisinage V de v , tel que $V \cap W = \{w, w \in W, z_{m+1}(w) = \cdots = z_n(w) = 0\}$.

cf.[9]

1. $\mathcal{O}(X)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur X.

I.1.2 Espaces vectoriels tangents à une variété

Soit X une variété différentiable réelle de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$. Une fonction f est de classe C^s sur Ω si $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est de classe C^s sur $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)$ pout tout $\alpha \in I$. L'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω est noté $C^s(\Omega, \mathbb{R})$.
Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel qui agit sur les fonctions

$$C^1(\Omega, \mathbb{R}) \ni f \mapsto v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0);$$

dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ au tour de x_0 sur Ω.
On écrit simplement

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Par conséquent, pour tout $x_0 \in \Omega$, le n-uplet

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}_{1 \leq j \leq n}$$

constitue une base de l'espace tangent à X au point x_0 ; noté $T_{x_0}X$. Son dual $T^*_{x_0}X$ est l'espace vectoriel cotangent à X au point x_0.
Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, sa différentielle au point x_0 est une forme linéaire sur $T_{x_0}X$, définie par :

$$df_{x_0}(v) = v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \ ; \forall v \in T_{x_0}X$$

En particulier, si $v_j = dx_j(v)$, on écrit localement

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

La famille $\{dx_1, ..., dx_n\}$ est la base duale de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ dans l'espace cotangent $T^*_{x_0}X$.
Et les unions disjointes

$$T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x X \text{ et } T^*(X) = \bigcup_{x \in X} T^*_x X$$

sont appelées respectivement fibré tangent et fibré cotangent (cf.[8]).

Remarque. -
Sur une variété analytique complexe, les espaces tangents sont munis d'une structure naturelle d'espace vectoriel complexe. Elle est définie par les isomorphismes de coordonnées

$$d\varphi_\alpha(x) : T_x X \to \mathbb{C}^n, \ x \in U_\alpha.$$

La structure complexe induite sur $T_x X$ est indépendante de α, puisque les différentielles $d\varphi_{\alpha\beta}$ sont des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires. L'espace tangent réel sous-jacent est noté $T^{\mathbb{R}}X$

et $J \in End(T^{\mathbb{R}}X)$ *la structure presque complexe, qui est l'opérateur de multiplication par* $i = \sqrt{-1}$. *Si* $(z_1, ..., z_n)$ *sont des coordonnées analytiques complexes sur un ouvert* $U \subset X$ *et* $z_k = x_k + iy_k$, *alors* $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ *définit un système de coordonnées réelles sur* U *et* $T^{\mathbb{R}}X|_U$ *admet comme base*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$$

La structure presque complexe est définie par

$$J\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_k} \text{ et } J\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Par conséquent l'espace tangent complexifié

$$\mathbb{C} \otimes T(X) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^{\mathbb{R}}(X) = T^{\mathbb{R}}(X) \oplus iT^{\mathbb{R}}(X)$$

se décompose en deux sous-espaces complexes conjugués, qui sont des espaces propres de l'endomorphisme complexifié $Id \otimes J$ *associés aux valeurs propres* i *et* $-i$ *; ayant comme bases respectives*

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\Big) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\Big) \quad 1 \leq k \leq n$$

Ces sous-espaces sont respectivement notés $T^{1,0}(X)$ *(espace des vecteurs holomorphes ou de type* $(1,0)$*) et* $T^{0,1}(X)$ *(espace des vecteurs antiholomorphes ou de type* $(0,1)$*). Il existe un isomorphisme naturel entre* $T^{1,0}(X)$ *et l'espace tangent complexe* $T(X)$ *défini par le plongement* $\mathbb{C}$*-linéaire*

$$\begin{aligned} T(X) &\to T^{1,0}(X) \subset \mathbb{C} \otimes T(X) \\ \xi &\mapsto \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \overline{T(X)} &\to T^{0,1}(X) \subset \mathbb{C} \otimes T(X) \\ \xi &\mapsto \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme ; d'où la décomposition

$$\mathbb{C} \otimes T(X) = T^{1,0}(X) \oplus T^{0,1}(X) \backsimeq T(X) \oplus \overline{T(X)}$$

et par dualité,

$$Hom_{\mathbb{R}}(T^{\mathbb{R}}(X), \mathbb{C}) \backsimeq Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes T(X), \mathbb{C}) \backsimeq T^*(X) \oplus \overline{T^*(X)}$$

où $T^*(X)$ est l'espace des formes $\mathbb{C}$-linéaires et $\overline{T^*(X)}$ son espace conjugué. Sous cette notation (dx_k, dy_k) est une base de $Hom_{\mathbb{R}}(T^{\mathbb{R}}(X), \mathbb{C})$, (dz_j) une base de $T^*(X)$, $(d\overline{z}_j)$ une base de $\overline{T^*(X)}$ et la différentielle d'une fonction $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} df &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} dz_k \quad et \quad \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} dz_k$$

L'opérateur de différentiation extérieure peut être décomposé :

$$d = \partial + \overline{\partial}$$

Une fonction f définie sur Ω est holomorphe si sa différentielle df est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point de Ω. C'est-à-dire si f satisfait l'équation de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0 \quad 1 \leq k \leq n \ sur \ \Omega$$

L'espace des fonctions holomorphes sur X est noté $\mathcal{O}(X)$. cf.[8]

Définition. *Mesure de Hausdorff*
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit pour tous $\delta \in \mathbb{R}^+_*$, $s \in \mathbb{R}^+$ la quantité

$$\mathcal{H}^{\delta}_s(A) = inf \left\{ \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{i \in I} diam(A_i)^s, \ A \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \ diam(A_i) \leq \delta, \ \#(I) \leq N_0 \right\} \in \mathbb{R}^+$$

où $\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ et $diam(B) = sup_{(x,y) \in B^2} ||x - y||$. L'application qui à $\delta \mapsto \mathcal{H}^{\delta}_s$ est trivialement décroissante, donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand $\delta \to 0$.
On note $\mathcal{H}_s(A) = lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^{\delta}_s(A)$: c'est la s-mesure de Hausdorff de A, ou mesure de Hausdorff s-dimensionnelle de A.

I.2 Formes différentielles et courants

I.2.1 Notion de distribution

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note
$\mathcal{D}(V) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid supp\varphi \subset V \ compact\}$
Rappelons que $supp\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}$

Une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(V)$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(V)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

– *Pour tout entier naturel j, il existe un compact K contenu dans V tel que supp$\varphi_j \subset K$ et supp$\varphi \subset K$.*

– *$D^\alpha \varphi_j(x)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi(x)$ sur K pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n); \alpha_i \in \mathbb{N}$ et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}...\partial^{\alpha_n}} \text{ est la dérivée d'ordre } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_n$$

Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(V)$ est dite séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(V)$ si l'application $T : \mathcal{D}(V) \to \mathbb{C}$ est linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$; si φ_j tend vers φ dans $\mathcal{D}(V)$, alors la suite de nombres complexes $T(\varphi_j)$ tend vers $T(\varphi)$.

Désignons par $\mathcal{D}_K$ l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K. L'espace $\mathcal{D}_K$ peut être muni du système fondamental de voisinages de 0

$$\mathcal{V}(m, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{D}_K;\ Sup_{x\in K, |p|\leq m}|D^p\varphi(x)| \leq \varepsilon\}$$

$\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet[2] *et φ_j converge vers φ dans $\mathcal{D}_K$ si et seulement si pour tout multi-indice α, $D^\alpha\varphi_j(x)$ converge uniformément vers $D^\alpha\varphi(x)$ sur K. D'après la propriété des espaces de Fréchet, une forme linéaire sur $\mathcal{D}_K$ est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue.*
(cf.[8])

Définition. *Distribution*

Une distribution T sur V est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(V)$ dont la restriction à chaque $\mathcal{D}_K$ est continue.
On peut alors munir $\mathcal{D}(V)$ de la topologie limite inductive des $\mathcal{D}_K$ et d'après les propriétés de cette topologie, pour qu'une forme linéaire soit continue sur $\mathcal{D}(V)$ il faut et il suffit que sa restriction à chaque $\mathcal{D}_K$ soit continue. cf. [7]
De plus, si T est une distribution réelle, l'application $\varphi \mapsto - < T, \frac{d\varphi}{dx} >$ est une distribution.

Par définition c'est la dérivée de T notée $\frac{dT}{dx}$.

I.2.2 Notion de formes différentielles

Définition. *Forme différentielle*
Soit X une variété différentiable réelle de dimension n.
Une forme différentielle de degré p (ou simplement une p-forme différentielle) sur X est une application u sur X à valeurs dans l'espace des p-formes multilinéaires alternées $\Lambda^p T^* X$.

2. Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet par rapport à la métrique provenant des semi-normes.

Dans un ouvert de coordonnées $\Omega \subset X$, une p-forme s'écrit

$$u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I$$

où $I = (i_1, ..., i_p)$ est un multi-indice d'entiers vérifiant $i_1 < i_2 < ... < i_p$,
$dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

$$\text{et } \sum' \text{ indique que la somme se fait suivant les indices croissants.}$$

On dit que u est différentiable de classe C^s, si pour tout ouvert de coordonnées, les u_I sont de classe C^s.
Pour tout $p = 0, 1, ..., n$ et $s \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ tel que $s \leq k$ (où est k l'ordre de différentiabilité de X), on note $C^s(X, \Lambda^p T^* X)$ l'espace des p-formes différentielles de classe C^s.(cf. [8])

Soient X une variété différentiable réelle de dimension n et $\Omega \subset X$ un ouvert de coordonnées. Par définition , une p-forme u sur X s'écrit dans Ω :

$$u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I$$

.
Pour tout compact $L \subset \Omega$ et tout entier s, on peut définir une semi-norme

$$P_L^s(u) = sup_{x \in L}\ max_{|I|=p, |\alpha| \leq s}\ |D^\alpha u_I(x)|$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n); \alpha_i \in \mathbb{N}$ et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} ... \partial^{\alpha_n}} \text{ est la dérivée d'ordre } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_n$$

Nous avons les notations suivantes :

- ❖ *On note $\mathcal{E}^p(X)$, l'espace $C^\infty(X, \Lambda^p T^* X)$ muni de la topologie définie par toutes les semi-normes P_L^s lorsque s, L, Ω varient.*
- ❖ *Si $K \subset X$ est compact, $\mathfrak{D}^p(K)$ représente l'espace des éléments $\mathcal{E}^p(X)$ à support dans K. Muni de la topologie induite sur les espaces $\mathfrak{D}^p(K)$, on désigne par $\mathcal{D}^p(X)$ l'espace des p-formes à support compact, i.e $\mathfrak{D}^p(X) = \bigcup_{K \subset X} \mathfrak{D}^p(K)$.*

Par définition d'une variété, X est un espace séparé, donc la topologie sur $\mathcal{E}^p(X)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes P_L^s. Par conséquent, $\mathcal{E}^p(X)$ est un espace de Fréchet

Remarque. -
$\mathcal{D}^p(X)$ n'est pas un espace de Fréchet. En effet $\mathcal{D}^p(X)$ est dense dans $\mathcal{E}^p(X)$; donc n'est pas complet pour la topologie induite.
Plusieurs opérations naturelles peuvent être définies sur les formes différentielles.

- ***Produit extérieur***

$$Si\ v(x) = \sum_{|J|}{}^{'} v_J(x)dx_J\ est\ une\ q-forme\ différentielle\ sur\ X,$$

alors le produit extérieur de u avec v est la forme de degré $(p+q)$ définie par :

$$u \wedge v(x) = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}^{'} u_I(x)v_J(x)dx_I \wedge dx_J\ avec\ 0 \leq p+q \leq n$$

- ***Dérivée extérieure***
La dérivation extérieure des p-formes différentielles est un opérateur différentiel

$$d : \mathcal{E}^p(X) \to \mathcal{E}^{p+1}(X)$$

défini localement par la formule

$$du = \sum_{|I|=p\ 1\leq k\leq n}{}^{'} \frac{\partial u_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I$$

et vérifie les propriétés suivantes :
– $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^{p+1} u \wedge dv$ *(La règle de Leibnitz)*
– $d^2u = 0$ *(idempotence) cf. [15]*
Une forme u est dite fermée si $du = 0$ *et elle est dite exacte s'il existe une forme v, telle que* $deg(v) = deg(u) - 1$*, vérifiant* $u = dv$*.*

- ***Pull-back***
Soit $F : X \to Y$ *une application* C^∞ *entre deux variétés orientées de dimensions respectives* n_1*,* n_2*. Si* $v(y) = \sum'_{|I|=p} v_I(y)dy_I$ *est une p-forme différentielle sur* Y*, le pull-back (tiré-en-arrière)* F^*v *est la p-forme différentielle sur* X *obtenue en remplaçant y par* $F(x)$ *dans l'écriture de v ; i.e*

$$F^*v(x) = \sum_{|I|=p}{}^{'} v_I(F(x))dF_{i_1} \wedge ... \wedge dF_{i_p}$$

- ***Intégration d'une forme différentielle***
Soient X *une variété différentielle de dimension réelle* n *et* ϕ *une n-forme différentielle à support dans un ouvert de coordonnées* U*. Si* $\chi : U \to \mathbb{R}^n$ *préserve l'orientation, alors*

$$\int_X \phi = \int_{\mathbb{R}^N} \chi^{-1^*}(\phi)$$

Si ϕ *est une r-forme différentielle telle que* $r \neq n$*, son intégrale est formellement égale à zéro. On peut remarquer que la définition est indépendante du choix de la carte. Donc si* $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ *est une autre carte qui contient le support de* ϕ*, alors nous devrons établir que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{-1^*}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi^{-1^*}(\phi)$$

Puisque $\psi\circ\chi^{-1}$ est un isomorphisme différentiable, donc préserve l'orientation de $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire $det(D(\psi\circ\chi^{-1}))>0$. En utilisant cette formule de changement de variables, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\psi^{-1*}(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n}(\psi\circ\chi^{-1})^*(\psi^{-1*}\phi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\chi^{-1*}\psi^*\psi^{-1*}(\phi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\chi^{-1*}(\phi)\end{aligned}$$

Supposons que ϕ est une n-forme différentielle à support dans X (pas nécessairement dans un ouvert de coordonnées) et $\{U_1,U_2,...,U_m\}$ est une collection de ouverts coordonnées recouvrant le support de ϕ. Soient $\chi_j:U\to\mathbb{R}^n$ une carte qui préserve l'orientation et $\{\phi_1,...,\phi_m\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement du support de ϕ avec $\phi_j\in\mathcal{D}(U_j)$. L'intégrale de ϕ sur X est définie par

$$\int_X\phi=\sum_{j=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_j{}^{-1})^*\{\phi_j\phi\}$$

Si $\{\psi_i:V_i\to\mathbb{R}^n,\ i=1,...,n\}$ est un autre atlas ayant la même orientation que l'atlas défini par les cartes $\{\chi_j\}$ et dont les ouverts constituent un recouvrement du support de ϕ, alors on considère une partition de l'unité $\{\rho_1,...,\rho_n\}$ $\{\rho_1,...,\rho_n\}$ subordonnée au recouvrement du support de ϕ avec $\rho_j\in\mathcal{D}(V_j)$. Puisque $\sum\rho_k=1$, alors

$$\sum_{j=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_j{}^{-1})^*\{\phi_j\phi\}=\sum_{k=1}^n\sum_j^m\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_j{}^{-1})^*\{\phi_j\rho_k\phi\}$$

puisque $\phi_j\rho_k\phi$ est à support dans un ouvert de coordonnées, donc

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_j)^{-1*}\{\phi_j\rho_k\phi\}=\int_{\mathbb{R}^n}(\psi_k)^{-1*}\{\phi_j\rho_k\phi\}$$

En sommant le membre droite, on obtient

$$\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_j^{-1})^*\{\phi_j\phi\}=\sum_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}(\psi_k^{-1})^*\{\rho_k\phi\}$$

Si W est une sous-variété de dimension l de X ;

$$\int_W\phi=\int_{\mathbb{R}^l}j^*\phi\quad\phi\in\mathfrak{D}^l(X)\text{ où }\ j:W\to X\quad \textit{est l'application inclusion}$$

Si W est une sous-variété à bord dans X, alors $\int_W\phi$ se calcule de la même manière que lorsque W est une variété. La seule différence vient du fait que W a deux types de cartes coordonnées. La première est définie autour d'un point intérieur de W et la seconde autour d'un point du bord. Si $\chi:U\to\mathbb{R}^n$ est une carte de coordonnées autour d'un point de la variété , alors $\chi(U\cap W)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^l=\{(t_1,...,t_n),\ t_{l+1}=...=t_n=0\}$. Donc pour une l-forme ϕ à support dans $U\cap W$,

$$\int_W\phi=\int_{t\in\mathbb{R}^l}\{(\chi^{-1})^*\phi\}(t)$$

Si $\chi : U \to \mathbb{R}^n$ est une carte de coordonnées autour d'un point du bord, alors $\chi(U \cap W)$ est un ouvert du demi-espace de $\mathbb{R}^l$, $\{(t_1, ..., t_n),\ t_l \geq 0$ et $t_{l+1} = ... = t_n = 0\}$, et l'intégrale d'une l-forme ϕ à support dans $U \cap W$ est donnée par :

$$\int_W \phi = \int_{\{t \in \mathbb{R}^l, t_l \geq 0\}} \{(\chi^{-1})^* \phi\}(t)$$

Remarque. -

✓ *Les définitions ci-dessus sont indépendantes des cartes de coordonnées choisies.*

✓ *Si ϕ est une l-forme différentielle sur W à support compact (pas nécessairement contenu dans un ouvert de coordonnées), alors son intégrale est définie de la même manière que dans le cas d'une variété sans bord par une partition de l'unité.*

Soient X et Y deux variétés différentielles de même dimension n et $F : X \to Y$ une application différentielle. On dit que F préserve l'orientation lorsque $\psi \circ \chi^{-1}$ préserve l'orientation sur $\mathbb{R}^n$ pour toute carte χ dans X et ψ dans Y. La formule de changement de variables se généralise facilement aux variétés par le lemme suivant.

Lemme 1. -

Soient X et Y deux variétés différentielles de dimension n et $F : X \to Y$ une application différentielle qui préserve l'orientation. Si $\phi \in \mathfrak{D}^n(Y)$, alors

$$\int_Y \phi = \int_X F^* \phi$$

- ***Cohomologie de De Rham***

Soit X une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞. $(\mathcal{E}^p(X), +)$ est un groupe commutatif. Dans ce cas, les ensembles $Z^p(X, \mathbb{R}) = \{\omega \in \mathcal{E}^p(X) \mid d\omega = 0\}$ et $B^p(X, \mathbb{R}) = \{d\omega \mid \omega \in \mathcal{E}^{p-1}(X)\}$ sont des sous-groupes de $\mathcal{E}^p(X)$ appelés respectivement ; les p-formes fermées et les p-formes exactes sur $\mathcal{E}^p(X)$.

Puisque $d^2\omega = 0$, alors $B^p(X, \mathbb{R}) \subset Z^p(X, \mathbb{R})$.

Définition. -

On appelle $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de De Rham, le groupe quotient noté

$$H^p(X, \mathbb{R}) = \frac{Z^p(X, \mathbb{R})}{B^p(X, \mathbb{R})}$$

Le symbole $\mathbb{R}$ est mis pour préciser que les formes différentielles sont à coefficients réels. On peut donc définir le groupe $H^p(X, \mathbb{C})$ pour les p-formes différentielles à coefficients complexes.

$H^p(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes H^p(X, \mathbb{R})$ est le complexifié du groupe de cohomologie réel de De Rham.

cf. [8]

Remarque. -

$$H^p(X, \mathbb{R}) = 0 \Rightarrow Z^p(X, \mathbb{R}) = B^p(X, \mathbb{R})$$

i.e les formes exactes sont fermées. Donc pour $\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ tel que $d\omega = 0$, l'équation $du = \omega$ admet une solution $u \in \mathcal{E}^{p-1}(X)$.

En particulier lorsque $p = 1$*,* $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$*, on a une solution de l'équation* $du = \omega$*.*

- ***Produit scalaire hermitien***

Soit X *une variété analytique complexe de dimension* n*. Le produit scalaire hermitien sur* X *est la donnée en tout point* $z_0 \in X$ *d'une application*
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C}$*, définie par :*
étant donné deux vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \textit{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u, v) = \sum_{j,k=1}^{n} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_k}\Big) u_j \overline{v}_k = \sum_{j,k=1}^{n} h_{j,k} u_j \overline{v}_k$$

où

$$h_{j,k} = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

➢ $h(\lambda u, v) = \lambda h(u, v), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

➢ $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$

➢ $h(u, u) > 0 \forall u \neq 0$

➢ $h(u + v, w) = h(u, w) + h(v, w), \ \forall U, \ V$ *et* $W \in T_{z_0}X$*.*

Remarque. -
$(h_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$ *est une matrice hermitienne, définie positive et dépend de façon* C^∞ *du point* z_0*.*
Ce produit scalaire hermitien, défini sur l'espace tangent à X *en un point, s'étend aux formes différentielles sur* X *comme suit :*
soient

$$u = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' u_{I,J} \ dz_I \wedge d\overline{z}_J \quad \textit{et} \quad v = \sum_{|K|=p,|L|=q}{}' v_{K,L} \ dz_K \wedge d\overline{z}_L$$

$$h(u, v) = \sum_{K,L \quad I,J} u_{I,J} \ \overline{v}_{K,L} \ h^{i_1 k_1} ... h^{i_p k_p} \overline{h^{j_1 l_1}} ... \overline{h^{j_q l_q}}$$

où $(h^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ *est l'inverse de la matrice hermitienne* (h_{ij})*.*

I.2.3 Notion de courant

Soient X *une variété analytique complexe de dimension* n *et* $K \subset X$ *un compact.*

Définition. *[De Rham 1955]*
L'espace des courants de dimension p sur X est l'espace $\mathfrak{D}'_p(X)$ des formes linéaires T sur $\mathfrak{D}^p(X)$ telles que la restriction de T sur tout sous-espace $\mathfrak{D}^p(K)$, $K \subset\subset X$ soit continue. L'espace des courants $\mathfrak{D}'_p(X)$ peut s'identifier à l'espace des formes différentielles de degré $(m-p)$ à coefficients distributions sur un ouvert de coordonnée Ω. cf [8]
$\mathfrak{D}'_p(X) = \mathfrak{D}'^{(m-p)}(X)$:= le dual topologique de $\mathfrak{D}_p(X)$, $\mathcal{E}'^{(m-p)}(X)$ désigne l'ensemble des $T \in \mathfrak{D}'^{(m-p)}(X)$ qui sont à support compact.

Si $T \in \mathfrak{D}'^{(m-p)}(X)$, alors $T = \sum_{|I|=m-p} T_I dx_I$.
L'action d'un courant T sur une p-forme différentielle φ est représentée par $\langle T, \varphi\rangle$. Son support, noté supp$T$, est le plus petit fermé $A \subset X$ tel que sa restriction à $\mathfrak{D}(X\backslash A)$ soit nulle. L'espace topologique duale $\mathcal{E}'^p(X)$ peut être identifié aux courants appartenant à $\mathfrak{D}'^p(X)$, qui sont à support compact. En effet, si T est une forme linéaire sur $\mathcal{E}^p(X)$ telle que

$$|\langle T, \varphi\rangle| = C max_j\{P^s_{K_j}(\varphi)\}$$

où $s \in \mathbb{N}$, $C \geq 0$ et les K_j sont un nombre fini de compacts sur X, alors supp$T \subset \bigcup K_j$. Réciproquement, si $T \in \mathfrak{D}'_p(X)$ à support dans un compact K ; soient K_j une famille de compacts telle que K soit contenu dans l'intérieur de $\bigcup K_j$ et $\psi \in \mathfrak{D}(X)$ égale 1 sur K avec supp$\psi \subset \bigcup K_j$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^p(X)$, on définit

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle$$

cf.[8]
Cette écriture ne dépend pas de ψ et la résultante T est bien définie sur $\mathcal{E}^p(X)$. La terminologie utilisée pour la dimension d'un courant se justifie par les deux exemples suivants.

- ***Exemples***

Exemple 1. *Soit Z une sous-variété orientée de X de dimension p et de classe C^1 ayant pour bord ∂Z. Le courant d'intégration au dessus de Z est défini par*

$$\langle [Z], \varphi\rangle = \int_Z \varphi \quad \text{avec } \varphi \in \mathcal{D}^p(X)$$

$[Z]$ est un courant de dimension $p = dimZ$ et supp$[T] = Z$.

Exemple 2. *Si f est une forme différentielle de degré q sur X à coefficients L^1_{loc}, à f on peut associer le courant de dimension $n-q$*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_X f \wedge \varphi \quad \text{avec } \varphi \in \mathfrak{D}^{n-q}(X)$$

- ***Pull-back et push-forward***

Soit $F : X \to Y$ une application C^∞ entre deux variétés orientées de dimensions respectives n_1, n_2.

Le pull-back morphisme défini par :

$$\begin{gathered}\mathfrak{D}^p(Y) \to \mathcal{E}^p(X)\\ u \mapsto F^*u\end{gathered}$$

est continu pour la topologie définie par les semi-normes et supp$(F^*u) \subset F^{-1}(supp(u))$. *En général, supp*$(F^*u)$ *n'est pas compact. Soit* $T \in \mathfrak{D}'_p(X)$, *on dit que la restriction de* F *au supp*(T) *est propre si supp*$(T) \cap\ F^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* $K \subset Y$. *Si* T *est tel que* F *vérifie la condition précédente, alors la forme linéaire* $u \mapsto < T, F^*u >$ *est bien définie et continue sur* $\mathfrak{D}^p(Y)$. *Par conséquent, il existe un unique courant* $F_*T \in \mathfrak{D}'_p(Y)$, *appelé image directe de* T *par* F, *telle que*

$$< F_*T, u >=< T, F^*u >,\ \forall u \in \mathfrak{D}^p(Y).$$

F_*T *est aussi appelé le push-forward (tiré-en-avant) de* T.

Remarque. -
Si $F : X \to Y$ *est un isomorphisme, alors* $F_*g = \pm F^{-1^*}g$ *; selon que* F *préserve l'orientation ou non.*
Si F *est une submersion, on définit l'image inverse* $F^*T \in \mathfrak{D}'^qX$ *du courant* $T \in \mathfrak{D}'^qY$ *par :*

$$< F^*T, u >=< T, F_*u >,\ u \in \mathfrak{D}^{q+n_1-n_2}(X).$$

F^*T *est aussi appelé pull-back (tiré-en-arrière) de* T.
(cf. [8])

Par ailleurs la structure complexe de $\mathbb{C}^n$ *induit la décomposition de* $\mathfrak{D}'^p$ *en somme directe* $\mathfrak{D}^{s,t}$ *vérifiant* $s + t = p$.
i.e

$$\mathfrak{D}'_p = \mathfrak{D}'^{n-p} = \bigoplus_{s+t=p} \mathfrak{D}'_{s,t} = \bigoplus_{s+t=p} \mathfrak{D}'^{n-s,n-t}$$

$$Donc\ si\ T \in \mathfrak{D}'_{r,s}, alors\ T = \sum_{r+s=p} T_{r,s}$$

avec $T_{r,s} \in \mathfrak{D}'_{r,s}$ *et qui vérifie*

$$T_{r,s}(\varphi) = \begin{cases} T(\varphi)\ si\ \varphi \in \mathfrak{D}_{r,s} \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

C'est la décomposition de Dolbeault

Les éléments de $\mathfrak{D}'_{s,t}$ *sont appelés courants de bi-dimension* (s, t) *ou courants de bidegré* $(n - s, n - t)$.
L'opérateur de dérivation extérieure, défini sur les formes différentielles, s'étend aux courants par une simple dualité d'arguments sur une variété différentiable réelle. Soit $T \in \mathfrak{D}'^r(X)$; $dT \in \mathfrak{D}'^{r+1}(X)$ *est définie par* $< dT, \varphi >= (-1)^{r+1} < T, d\varphi >$, $\forall \varphi \in \mathfrak{D}^{m-r-1}(X)$. *La continuité de la forme linéaire découle de celle de l'application* $d : \mathfrak{D}^{m-r-1}(K) \to \mathfrak{D}^{m-r}(K)$. *Si* X *est une variété différentiable complexe :* $d\varphi = \partial\varphi\ +\ \overline{\partial}\varphi$, *ce qui entraîne la décomposition de la forme linéaire* $dT = \partial T\ +\ \overline{\partial}T$, *où* ∂ *est la dérivée par rapport aux coordonnées holomorphes et* $\overline{\partial}$ *la dérivée par rapport aux coordonnées antiholomorphes.*

$$\partial : \mathfrak{D}'_{r,s} \to \mathfrak{D}'_{r-1,s}$$
$$\overline{\partial} : \mathfrak{D}'_{r,s} \to \mathfrak{D}'_{r,s-1}$$

Si

$$T = \sum_{|I|=n-r} \sum_{|J|=n-s} T_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

alors

$$\overline{\partial} T = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|I|=n-r} \sum_{|J|=n-s} \frac{\overline{\partial} T_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

Puisque $d^2 = 0$
donc $\overline{\partial}^2 = \partial^2 = 0$ *et* $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$ *;*
de plus $< \overline{\partial} T, \varphi >= (-1)^{r+s+1} < T, \overline{\partial}\varphi >$ *et* $< \partial T, \varphi >= (-1)^{r+s+1} < T, \partial\varphi >$.

Définition. ***Pré-faisceau et Faisceau***
Soit X *un espace topologique, un pré-faisceau* $\mathcal{A}$ *sur* X *est la donnée :*

a) *pour tout ouvert* U *de* X*, d'un ensemble* $\mathcal{A}(U)$ *non vide,*

b) *une famille d'applications* $\phi_{U,V} : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U)$*, pour* $U \subset V$ *et qui vérifient la propriété de transitivité suivante*

c) $\phi_{U,V} \circ \phi_{V,W} = \phi_{U,W}$ *pour* $U \subset V \subset W$ *et* $\phi_{U,U} = id_U$ *avec* U, V, W *des ouverts de* X.
L'ensemble $\mathcal{A}(U)$ *est appelé pré-faisceau des sections au dessus* U.

$\mathcal{A}$ *est appelé pré-faisceau de groupes abéliens (respectivement d'anneaux, R-modules, algèbres) si pour tout ouvert* U *de* X*, les ensembles* $\mathcal{A}(U)$ *sont des groupes abéliens (respectivement anneaux, R-modules, algèbres) et les applications* $\phi_{U,V}$ *sont des morphismes entre ces structures d'algèbres. On considère que* $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$.

Un faisceau est un pré-faisceau qui vérifie les axiomes suivants : Soient $(U_\alpha)_\alpha$ *une famille d'ouverts de* X*,* $F_\alpha \in \mathcal{A}(U_\alpha)$*,* $F_\beta \in \mathcal{A}(U_\beta)$ *et* $U = \bigcup(U_\alpha)$.

(*) *Si pour tout couple d'indices* (α, β) *tel que* $\phi_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(F_\alpha) = \phi_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(F_\beta)$*, alors il existe* $F \in \mathcal{A}(U)$ *qui vérifie* $\phi_{U_\alpha, U}(F) = F_\alpha$

(**) *Si pour tout indice* α *et* F, $G \in \mathcal{A}(U)$ *vérifient* $\phi_{U_\alpha,U}(F) = \phi_{U_\alpha,U}(G)$*, alors* $F = G$
Ces axiomes sont appelés axiomes de recollement.
(cf. [8]).

I.3 Définitions et notations

Précisons que dans le reste du document, X *sera une variété analytique complexe de dimension* $n \geq 2$ *et* $M \subset X$ *une hypersurface réelle orientée connexe.*
Soit $\rho : X \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞*. On suppose que* M *est définie par* $\rho = 0$ *(i.e* $M = \{x \in X \mid \rho(x) = 0\}$*) et divise* X *en deux composantes connexes* $X^+ = \{x \in X \mid \rho(x) > 0\}$ *et* $X^- = \{x \in X \mid \rho(x) < 0\}$*, telles que* $d\rho \neq 0$ *dans un voisinage de* M *:* ρ *est appelée fonction définissante de* M*. Pour tout ouvert* U *de* X*, on notera par*

$U^{\pm} = U \bigcap X^{\pm}$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout ε vérifiant $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\pi_\varepsilon : M_\varepsilon \to M$ est un difféomorphisme où M_ε est l'hypersurface définie par $\rho = \varepsilon$.
Sous ces hypothèses, la famille $\{M_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<\varepsilon_0}$ est appelée famille admissible de sous-variétés qui approchent M.(cf. [14])
L'hypersurface M est orientée de façon compatible à X^+ c'est-à-dire que $d[X^+] = [M]$.
Dans la suite, nous considérons les définitions suivantes :

(i) Soit $L : \mathcal{E}^r(X) \to \mathcal{E}^r(M)$ l'opérateur restriction ; on pose $\mathcal{E}^{(p,q)}(M) = L(\mathcal{E}^{(p,q)}(X))$.

(ii) Soit $K \in \mathfrak{D}'^r(M)$;$K \wedge [M]$ un courant de degré $(r+1)$ sur X défini par :
$< K \wedge [M], \varphi >=< K, L(\varphi) >, \varphi \in \mathfrak{D}^{(2n-r-1)}(X)$.

(iii) On dit que $K \in \mathfrak{D}'^r(M)$ est un $(r,0)$-courant (respectivement $(0,r)$-courant) si $(K \wedge [M])^{p,q} = 0$ pour $p \leq r$ (respectivement $(K \wedge [M])^{q,p} = 0$ pour $p \leq r$). On note $\mathfrak{D}'^{(r,0)}(M)$ (respectivement $\mathfrak{D}'^{(0,r)}(M)$ l'espace des $(r,0)$-courants (respectivement $(0,r)$-courants).

(iv) Si $K \in \mathfrak{D}'^{(r,0)}(M)$, alors $K \wedge [M]^{1,0}$ est un $(r+1,0)$-courant défini par :
$(K \wedge [M]^{1,0})(\varphi) =< K \wedge [M]^{1,0}, \varphi >=< K, L(\varphi) >$ lorsque $\varphi \in \mathfrak{D}^{(n-r-1,n)}(X)$ et $K \wedge [M]^{0,1}$ est un $(r,1)$-courant défini par :
$(K \wedge [M]^{0,1})(\varphi) =< K \wedge [M]^{0,1}, \varphi >=< K, L(\varphi) >$ pour $\varphi \in \mathfrak{D}^{(n-r,n-1)}(X)$.

(v) Soit $\alpha \in \mathcal{E}^r(X^+)$; On dit que α admet une trace $K \in \mathfrak{D}'^{(r)}(M)$ sur M (ou que K est la valeur au bord de α) si pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}^{(2n-r-1)}(M)$
on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{M_\varepsilon} \alpha \wedge \pi_\varepsilon^*(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_M \pi_{\varepsilon *}(\alpha) \wedge \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} < \pi_{\varepsilon *}(\alpha), \varphi > \\ &=< K, \varphi >\end{aligned}$$

(cf. [13]) ; s'il en est ainsi, on pose $K = \gamma_+(\alpha)$ et on définit $\gamma_-(\alpha)$ de la même manière pour tout $\alpha \in \mathcal{E}^r(X^-)$:
i.e si

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{M_\varepsilon} \alpha \wedge \pi_\varepsilon^*(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_M \pi_{\varepsilon *}(\alpha) \wedge \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^-} < \pi_{\varepsilon *}(\alpha), \varphi > \\ &=< K, \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}^{(2n-r-1)(M)}\end{aligned}$$

.

Soit $\alpha \in \mathcal{E}^r(X \setminus M)$ tel que $\gamma_+(\alpha)$ et $\gamma_-(\alpha)$ existent, alors la différence $\gamma_+(\alpha) - \gamma_-(\alpha)$ représente le saut de α sur M.

Par suite on note

$$\mathcal{E}_*{}^{(r,s)}(X^+) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{(r,s)}(X^+) \mid \gamma_+(\alpha) \text{ et } \gamma_+(d\alpha) \text{ existent}\}$$
$$\mathcal{E}_*{}^{(r,s)}(X^-) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{(r,s)}(X^-) \mid \gamma_-(\alpha) \text{ et } \gamma_-(d\alpha) \text{ existent}\}$$

En particulier si $\alpha \in \mathcal{E}_*{}^{(r,0)}(X^+)$, *on a :* $\partial(\gamma_+(\alpha) \wedge [M]^{1,0}) = (-1)^{(r+1)}\gamma_+(\partial\alpha) \wedge [M]^{1,0}$
En effet

$$\begin{aligned}\partial(\gamma_+(\alpha) \wedge [M]^{1,0}) &= \partial(\gamma_+(\alpha)) \wedge [M]^{1,0} + (-1)^r\gamma_+(\alpha) \wedge \partial[M]^{1,0} \\ &= (-1)^{r+1}\gamma_+(\partial\alpha) \wedge [M]^{1,0} + 0 \quad \text{car } [M]^{1,0} \text{ est } \partial - \text{fermé}\end{aligned}$$

A présent, nous allons énoncer, sans faire la preuve, de résultats[3] *tirés de [13], essentiels à la caractérisation des traces et la résolution du problème de Riemann-Hilbert.*

Théorème I.1. *[Correspond au Corollaire I.1.2 dans [13]]*
Soit f *une forme holomorphe sur* $X \setminus M$ *et qui vérifie* $\gamma_+(f) = \gamma_-(f)$. *Alors il existe une forme holomorphe sur* X *qui prolonge* f.

Théorème I.2. *[Correspond au Théorème II.1.3 dans [13]]*
Si $H^{p,1}(X) = 0$, *alors pour tout* $(p, 0)$*-courant* K *sur* M $\overline{\partial}_b$*-fermé, il existe* $f \in \mathcal{E}^{(p,0)}(X \setminus M)$ *telle que* $\gamma_+(f) - \gamma_-(f) = K$.

Remarque. *Ce théorème garantit au préalable l'existence des traces* $\gamma_+(f)$ *et* $\gamma_-(f)$.

3. ces résultats correspondent respectivement au corollaire I.1.2 du Lemme I1.1 et au théorème II.1.3 dans [13].

II Traces des fonctions pluriharmoniques

II.1 Caractérisaton de l'opérateur non-tangentiel

II.1.1 Cas lisse

Sans perte de généralité, supposons que le produit hermitien vérifie $h(\partial\rho, \partial\rho) = \frac{1}{2}$. *Posons*

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{(p,q)}(M) &= \{\alpha \in \mathcal{E}^{(p,q)}(M) \mid \alpha = \varphi \wedge L(\partial\rho), p \geq 1\} \\
\xi^{(p,q)}(M) &= \{\alpha \in \mathcal{E}^{(p,q)}(M) \ \mid \ h(\alpha,\beta) = 0, \ \forall\beta \in \mathcal{N}^{(p,q)}(M)\} \\
\overline{\mathcal{N}}^{(p,q)}(M) &= \{\alpha \in \mathcal{E}^{(p,q)}(M) \ \mid \ \alpha = \varphi \wedge L(\overline{\partial}\rho), \ q \leq 1\} \\
\overline{\xi}^{(p,q)}(M) &= \{\alpha \in \mathcal{E}^{(p,q)}(M) \ \mid \ h(\alpha,\beta) = 0, \ \forall\beta \in \overline{\mathcal{N}}^{(p,q)}(M)\}
\end{aligned}$$

Il s'en suit la décomposition ci-dessous

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \mathcal{E}^{(p,q)}(M) & = \mathcal{N}^{(p,q)}(M) \bigoplus \xi^{(p,q)}(M) \\ \mathcal{E}^{(p,q)}(M) & = \overline{\mathcal{N}}^{(p,q)}(M) \bigoplus \overline{\xi}^{(p,q)}(M) \end{cases}$$

Désignons par ;

$$\begin{aligned}
\tau : \mathcal{E}^{(p,q)}(M) &\to \xi^{(p,q)}(M) \\
\overline{\tau} : \mathcal{E}^{(p,q)}(M) &\to \overline{\xi}^{(p,q)}(M)
\end{aligned}$$

les projections naturelles qui envoient une (p,q)-forme de M sur sa partie tangentielle. Soient α *et* β *appartenant à* $\mathcal{E}^{(p,q)}(M)$ *; d'après la décomposition ci-dessus,*

$$\alpha = \tau(\alpha) + \alpha' \wedge \partial\rho \text{ et } \beta = \tau(\beta) + \beta' \wedge \partial\rho$$

Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}
\tau(\alpha) = \tau(\beta) &\Leftrightarrow \tau(\alpha) \wedge [M]^{1,0} = \tau(\beta) \wedge [M]^{1,0} \\
&\Leftrightarrow (\alpha - \alpha' \wedge \partial\rho) \wedge [M]^{1,0} = (\beta - \beta' \wedge \partial\rho) \wedge [M]^{1,0} \\
\tau(\alpha) = \tau(\beta) &\Leftrightarrow \alpha \wedge [M]^{1,0} = \beta \wedge [M]^{1,0}
\end{aligned}$$

Définition. -
Un opérateur linéaire local $\Phi : \mathcal{E}^{(p,q)}(X) \to \mathcal{E}^{(r,s)}(M)$ *est dit tangentiel sur* M *si* $L(f) = 0$ *entraîne que* $\Phi(f) = 0$*. De plus,* $\mathcal{E}^{(p,q)}(M) = L(\mathcal{E}^{(p,q)}(X))$ *; donc* $\Phi : \mathcal{E}^{(p,q)}(M) \to \mathcal{E}^{(r,s)}(M)$ *est un opérateur que nous noterons aussi* Φ.

On pose

$$\begin{aligned}
\partial_b : \mathcal{E}^{(p,q)}(M) &\to \xi^{(p+1,q)}(M) \\
\overline{\partial}_b : \mathcal{E}^{(p,q)}(M) &\to \xi^{(p,q+1)}(M)
\end{aligned}$$

définis respectivement par
$\partial_b(\alpha) = \tau \circ L \circ \partial(\alpha \wedge [M]^{1,0})$ *et* $\overline{\partial}_b(\alpha) = \tau \circ L \circ \overline{\partial}(\alpha \wedge [M]^{0,1})$

Par définition ∂_b *et* $\overline{\partial}_b$ *sont des opérateurs tangentiels sur* M*.(cf. [10]) Ainsi*

$$\begin{aligned}\partial(\alpha \wedge [M]^{1,0}) &= \partial\alpha \wedge [M]^{1,0} + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \partial[M]^{1,0};\ \textit{puisque}\ \partial[M]^{1,0} = 0\\ &= \partial_b\alpha \wedge [M]^{1,0}\\ \overline{\partial}(\alpha \wedge [M]^{0,1}) &= \overline{\partial}\alpha \wedge [M]^{0,1} + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \overline{\partial}[M]^{0,1}\\ &= \overline{\partial}_b\alpha \wedge [M]^{0,1}\end{aligned}$$

En particulier,

1.) *Si* $f \in \mathcal{E}^{(0,0)}(X)$*, on pose* $N(f) = h(L(\partial f), L(\partial\rho))$ *et* $\overline{N}(f) = h(L(\overline{\partial} f), L(\overline{\partial}\rho))$ *;*

Sur M*, on a* $L(\partial f) = \tau(L(\partial f)) + N(L(\partial f)) = \partial_b f + \varphi L(\partial\rho)$
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}h(L(\partial f), L(\partial\rho)) &= h(\partial_b f + \varphi L(\partial\rho), L(\partial\rho))\\ &= h(\partial_b f, L(\partial\rho)) + h(\varphi L(\partial\rho), L(\partial\rho))\\ &= \varphi h(L(\partial\rho), \varphi L(\partial\rho)) \qquad (1)\\ h(L(\partial f), L(\partial\rho)) &= \frac{1}{2}\varphi\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi = 2h(L(\partial f), L(\partial\rho)) = 2N(f)$ *; d'où* $L(\partial f) = \partial_b f + 2N(f)L(\partial\rho)$
Par analogie, on montre que $L(\overline{\partial} f) = \overline{\partial}_b f + 2N(f)L(\overline{\partial}\rho)$ *;*

Remarques. -

(a) *En tout point de M,* $N(f)$ *représente la dérivée normale complexe de* f *et* $N(f) + \overline{N}(f)$ *sa dérivée normale réelle.*
(b) *L'application qui à* $f \mapsto N(f) - \overline{N}(f)$ *est un opérateur tangentiel sur* M*;*
En effet, si $L(f) = 0$*, alors il existe une fonction* g *telle que* $f = \rho g$
$\partial f = g\partial\rho + \rho\partial g \Rightarrow L(f) = L(g\partial\rho) + L(\rho\partial g)$
or pour tout x *appartenant à* M*,* $\rho(x) = 0$*,* $L(f) = L(g\partial\rho)$*. De même,* $L(\overline{\partial} f) = L(g\overline{\partial}\rho)$*. En appliquant le produit hermitien, on obtient :*

$$N(f) - \overline{N}(f) = h(L(g\partial\rho), L(\partial\rho)) - h(L(g\overline{\partial}\rho), L(\overline{\partial}\rho) = g(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0$$

On montre facilement que :

$$L(\partial f) = \partial_b f + [N(f) - \overline{N}(f)]L(\partial\rho + [N(f) + \overline{N}(f)]L(\partial\rho)$$

Cette écriture nous permet d'isoler la partie non tangentielle : $[N(f) + \overline{N}(f)]$

2.) *Si* $\beta \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$*,* $N_1(\beta)$ *et* $\overline{N}_1(\beta)$ *sont définis par :*

$$L(\partial\beta) = \partial_b\beta + 2N_1(\beta) \wedge L(\partial\rho)$$
$$L(\partial\overline{\beta} + \overline{\partial}\beta) - \overline{\tau}(\partial\overline{\beta} + \overline{\partial}\beta) = \overline{N}_1(\beta) \wedge L(\partial\rho)$$

La fonction qui à $\beta \mapsto N_1(\beta) - \overline{N}_1(\beta)$ est un opérateur tangentiel, on obtient alors la décomposition sur M

$$L(\partial\beta) = \partial_b\beta + [N_1(\beta) - \overline{N}_1(\beta)] \wedge L(\partial\rho) + [N_1(\beta) + \overline{N}_1(\beta)] \wedge L(\partial\rho)$$

Ce qui permet d'isoler la partie non-tangentielle de $L(\partial\beta)$, $[N_1(\beta)+\overline{N}_1(\beta)]\wedge L(\partial\rho)$.

Soit $U \subset X$ un ouvert, on note $\mathcal{P}(U)$ l'espace des fonctions pluriharmoniques réelles sur U (i.e $f \in \mathcal{P}(U)$ telles que $\partial\overline{\partial}f = 0$).

Proposition 1. -
Si $L(\partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \partial\overline{\partial}\rho) \neq 0$, il existe alors un opérateur différentiel linéaire local R : $\mathcal{E}^{(0,0)}(M) \mapsto \mathcal{E}^{(0,0)}(M)$ tel que $R(f) = N(f) + \overline{N}(f)$ quel que soit $f \in \mathcal{P}(X)$.

Démonstration. -

Soit $f \in \mathcal{P}(X)$; par définition $\overline{\partial}\partial f = 0$.

$$\begin{aligned}
\tau\overline{\tau}L(\overline{\partial}\partial f) = \tau(\overline{\partial}_b L(\partial f)) = \tau(\overline{\partial}_b[\partial_b f + 2N(f)L(\partial\rho)]) &= 0\\
\tau(\overline{\partial}_b\partial_b f + 2\overline{\partial}_b N(f) \wedge L(\partial\rho) + 2N(f)\overline{\partial}_b L(\partial\rho)) &= 0\\
\tau(\overline{\partial}_b\partial_b f) + 2\tau[\overline{\partial}_b N(f) \wedge L(\partial\rho)] + 2N(f)\tau(\overline{\partial}_b L(\partial\rho)) &= 0\\
\tau(\overline{\partial}_b\partial_b f) + 2N(f)\tau(\overline{\partial}_b L(\partial\rho)) &= 0\\
\Rightarrow \tau(\overline{\partial}_b\partial_b f) &= -2N(f)\tau(\overline{\partial}_b L(\partial\rho)) \qquad (2)
\end{aligned}$$

D'autres part, puisque $\partial\overline{\partial}f + \overline{\partial}\partial f = 0$, donc $\partial\overline{\partial}f = -\overline{\partial}\partial f = 0$

$$\begin{aligned}
\overline{\tau}\tau L(\partial L\overline{\partial}f) = \overline{\tau}(\partial_b L\overline{\partial}f) = \overline{\tau}[\partial_b(\overline{\partial}_b f + 2\overline{N}(f)L(\overline{\partial}\rho)] &= 0\\
\overline{\tau}[\partial_b\overline{\partial}_b f + 2\partial_b\overline{N}(f) \wedge L(\overline{\partial}\rho) + 2\overline{N}(f)\overline{\partial}_b L(\overline{\partial}\rho)] &= 0\\
\overline{\tau}(\partial_b\overline{\partial}_b f) + 2\overline{N}(f)\overline{\tau}(\partial_b L(\overline{\partial}\rho)) &= 0\\
\overline{\tau}(\partial_b\overline{\partial}_b f) - 2\overline{N}(f)\tau(\overline{\partial}_b L(\partial\rho)) &= 0\\
\Rightarrow \overline{\tau}(\partial_b\overline{\partial}_b f) &= 2\overline{N}(f)\tau(\overline{\partial}_b L(\partial\rho)) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Posons $\delta_b = \partial_b + \overline{\partial}_b$, $*\delta_b = \overline{\tau}\partial_b + \tau\overline{\partial}_b$ et $\delta_b^c = i(\overline{\partial}_b - \partial_b)$ On obtient la relation :

$$\begin{aligned}
*\delta_b\delta_b^c f &= (\overline{\tau}\partial_b + \tau\overline{\partial}_b)[i(\overline{\partial}_b - \partial_b)f]\\
&= (\overline{\tau}\partial_b + \tau\overline{\partial}_b)[i\overline{\partial}_b f - i\partial_b f]\\
&= \overline{\tau}[i\partial_b\overline{\partial}_b f - i\partial_b\partial_b f] + \tau[i\overline{\partial}_b\overline{\partial}_b f - i\overline{\partial}_b\partial_b f]\\
&= \overline{\tau}[i\partial_b\overline{\partial}_b f] + \tau[-i\overline{\partial}_b\partial_b f]\\
&= i\overline{\tau}(\partial_b\overline{\partial}_b f) - i\tau(\overline{\partial}_b\partial_b f)\\
&= 2iN(f)\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho) + 2i\overline{N}(f)\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho)\\
*\delta_b\delta_b^c f &= 2i[N(f) + \overline{N}(f)]\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho) \qquad (4)
\end{aligned}$$

En prenant le produit hermitien on a :

$$h(*\delta_b\delta_b^c f, i\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho)) = 2[N(f)+\overline{N}(f)]\|i\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho)\|^2$$

Puisque l'opérateur réel $i\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho)$ représente la restriction sur M de la forme de Levi de ρ, on suppose qu'en tout point $i\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho)>0$ et l'opérateur R cherché est donné par :

$$R(f) = \frac{1}{2}[h(*\delta_b\delta_b^c f, i\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho))]\|i\tau(\overline{\partial}_b\partial\rho)\|^{-2}$$

(cf. [1]).
Il existe une formule analogue dans [16], établie de façon beaucoup moins facile.

La proposition ci-dessus stipule que si f est une fonction pluriharmonique sur X et que M n'est pas Levi-plat (i.e que sa hessienne n'est pas nulle), alors sa dérivée normale sur M peut être exprimée en fonction d'un opérateur tangent réel.
On obtient ainsi sur M :

$$(*)\ L(\partial f) = \partial_b f + [N(f)-\overline{N}(f)]L(\partial\rho) + R(f)L(\partial\rho)$$

$$\textit{Soit } \omega_M : \mathcal{E}^{(0,0)}(M) \to \mathcal{E}^{(1,0)}(M) \tag{5}$$
$$f \mapsto L(\partial f) \tag{6}$$

Il est facile de voir que :

(a) si $f\in\mathcal{E}^{(0,0)}(M)$, alors $\partial_b\omega_M(f)=0$
(b) si f est la restriction d'une fonction pluriharmonique F, alors $\overline{\partial}_b\omega_M(f)=0$.

En effet, d'après la décomposition de Dolbeault, $[M]=[M]^{1,0}+[M]^{0,1}$ avec $[M]^{1,0}=\mu\partial\rho$ et $[M]^{0,1}=\mu\overline{\partial}\rho$, où μ est la mesure de Hausdorff $(2n-1)$-dimensionnelle. (cf. [7])

(a) soient $f\in\mathcal{E}^{(0,0)}(M)$ et $\widetilde{f}$ son extension sur X^+ (i.e $\widetilde{f}\in\mathcal{E}^{(0,0)}(X^+)$).
On a $L(\partial\rho)\wedge[M]^{1,0} = L(\partial\rho)\wedge\mu\partial\rho = 0$
d'après $(*)$ $\omega_M(f) = \partial_b f + [N(f)-\overline{N}(f)]L(\partial\rho) + R(f)L(\partial\rho)$

$$\omega_M(f)\wedge[M]^{1,0} = (\partial_b f + [N(f)-\overline{N}(f)]L(\partial\rho) + R(f)L(\partial\rho))\wedge[M]^{1,0} \tag{7}$$
$$= \partial_b f\wedge[M]^{1,0} + [N(f)-\overline{N}(f)]L(\partial\rho)\wedge[M]^{1,0} + R(f)L(\partial\rho)\wedge[M]^{1,0} \tag{8}$$

$$\omega_M(f)\wedge[M]^{1,0} = \partial_b f\wedge[M]^{1,0}$$

or

$$\partial(\widetilde{f}[M]^{1,0}) = \partial\widetilde{f}\wedge[M]^{1,0} + \widetilde{f}\partial[M]^{1,0} \tag{9}$$
$$= \partial_b f\wedge[M]^{1,0} \tag{10}$$

finalement

$$\partial(\widetilde{f}[M]^{1,0}) = \omega_M(f)\wedge[M]^{1,0}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\partial\omega_M(f) \wedge [M]^{1,0} &= \partial(\omega_M(f) \wedge [M]^{1,0}) - f \wedge \partial[M]^{1,0} && (11)\\
&= \partial(\omega_M(f) \wedge [M]^{1,0}) && (12)\\
&= \partial(\partial(\widetilde{f}[M]^{1,0})) && (13)\\
\partial_b\omega_M(f) &= \partial^2(\widetilde{f}[M]^{1,0}) = 0
\end{aligned}$$

(b) *Soit f la restriction d'une fonction pluriharmonique F.*
D'après $(*)$ $\omega_M(f) = L(\partial f) = L(\partial F)$;
donc $\omega_M(f) \wedge [M]^{0,1} = L(\partial F) \wedge [M]^{0,1} = \partial F \wedge [M]^{0,1}$.
Puisque F est pluriharmonique,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}(\omega_M(f) \wedge [M]^{0,1}) &= \overline{\partial}\omega_M(f) \wedge [M]^{0,1} + \omega_M(f) \wedge \overline{\partial}[M]^{0,1}\\
&= \overline{\partial}\partial F \wedge [M]^{0,1}\\
\overline{\partial}(\omega_M(f) \wedge [M]^{0,1}) &= 0 && (14)
\end{aligned}$$

donc $\overline{\partial}_b\omega_M(f) = 0$

Remarque. -
Pour établir la preuve de (b), on aurait pu simplement voir que

$$\overline{\partial}_b\omega_M(f) = \overline{\partial}\omega_M(f) \wedge [M]^{0,1} = \overline{\partial}\partial F \wedge [M]^{0,1} = 0$$

II.1.2 Extension au cas général

Considérons la décomposition duale de $(\mathcal{D})$

$$\mathfrak{D}'^{(p,q)}(M) = \mathcal{N}'^{(p,q)}(M) \bigoplus \xi'^{(p,q)}(M) \quad (15)$$

$$\mathfrak{D}'^{(p,q)}(M) = \overline{\mathcal{N}'}^{(p,q)}(M) \bigoplus \overline{\xi'}^{(p,q)}(M) \quad (16)$$

Les projections τ et $\overline{\tau}$ sont définies de façon naturelle, qui à chaque (p,q)-courant sur M associe sa partie tangentielle dans $\xi'^{(p,q)}(M)$ respectivement dans $\overline{\xi'}^{(p,q)}(M)$. Par conséquent les opérateurs ∂_b et $\overline{\partial}_b$ s'étendent naturellement aux courants sur M. Soient $T \in \mathfrak{D}'^{(p,q)}(M)$ et $\varphi \in \mathcal{E}^{(n-p,n-q-1)}(M)$. On pose

$$< \partial_b T, \varphi >= (-1)^{p+q+1} < T, \partial_b\varphi >$$

$$< \overline{\partial}_b T, \varphi >= (-1)^{p+q+1} < T, \overline{\partial}_b\varphi >$$

d'autre part les opérateurs N_1 et $\overline{N}_1$ sont définis de ${\mathcal{E}_*}^{(1,0)}(X^{\pm})$ dans $\mathfrak{D}'^{(1,0)}(M)$ et induisent un opérateur continu $N_1 - \overline{N}_1 : \mathfrak{D}'^{(1,0)}(M) \to \mathfrak{D}'^{(1,0)}(M)$ (comme nous l'avons vu dans la Remarque (a)) du II.1.1 .
Par exemple si $\beta \in {\mathcal{E}_*}^{(1,0)}(X^+)$, on a :

$$\gamma_+(\partial\beta) = \partial_b\beta + (N_1 - \overline{N}_1)(\gamma_+(\beta)) \wedge L(\partial\rho) + (N_1 + \overline{N}_1)(\beta) \wedge L(\partial\rho).$$

Il est évident que $\partial\beta = 0$ entraîne que $N_1(\beta) = 0$; mais aussi $\overline{N}_1(\beta) = 0$ si β est holomorphe ou s'écrit sous la forme $\beta = \partial f$ où f est une fonction à valeurs réelles. En particulier, si $\gamma_+(\beta) = \gamma_+(f)\partial\rho$, alors

$$
\begin{aligned}
(N_1 - \overline{N}_1)(\beta) &= (N_1 - \overline{N}_1)(f\partial\rho) && (17)\\
&= (N_1 - \overline{N}_1)(\partial(f\rho) - \rho(\partial f)) && (18)\\
&= (N_1 - \overline{N}_1)(\partial(f\rho)) - (N_1 - \overline{N}_1)(\rho(\partial f)) && (19)
\end{aligned}
$$

Par définition, la fonction définissante ρ est nulle sur M, donc $(N_1 - \overline{N}_1)(\rho(\partial f)) = 0$. D'autre part, comme souligné ci-dessus $\partial(\partial(f\rho)) = 0$ entraîne que $N_1(\partial(f\rho)) = 0$, mais aussi $\overline{N}_1(\partial(f\rho)) = 0$;
d'où

$$(**) \quad (N_1 - \overline{N}_1)(\beta) = 0$$

Finalement, l'application ω_M, définie sur les formes différentielles de type $(0,0)$ sur M, s'étend en tant que opérateur aux courants de degré $(0,0)$ sur M.
On pose $\omega_M : \mathfrak{D}'^{(0,0)}(M) \to \mathfrak{D}'^{(0,1)}(M)$ tel que,
$< \omega_M(T), f > = < T, \omega_M(f) >$, $\forall T \in \mathfrak{D}'^{(0,0)}(M)$ et $f \in \mathcal{E}^{(0,0)}(M)$.
Dans ce cas, les conséquences (a) et (b) établies dans le cas lisse restent vraies. C'est-à-dire :

- *(a') si $T \in \mathfrak{D}'^{(0,0)}(M)$, alors $\partial_b\omega_M(T) = 0$,*
- *(b') si T est la trace sur M d'une fonction pluriharmonique F, alors $\overline{\partial_b}\omega_M(T) = 0$.*

II.2 Problème de Cauchy-Dirichlet

Le théorème ci-dessous donne une solution locale au problème de trace de Cauchy-Dirichlet pour l'opérateur $\overline{\partial}\partial$.

Théorème Principal. -

Soient $p \in M$ et U un voisinage de p tel que $L(\partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}\partial\rho) \neq 0$ sur $M \cap U$. Pour toute distribution réelle T sur $M \cap U$, les assertions suivantes sont équivalentes.

- *(i) $\overline{\partial_b}\omega_M(T) = 0$ sur $M \cap U$.*
- *(ii) Il existe un voisinage V de p et $F \in \mathcal{P}(V \setminus M)$ tels que $\gamma_+(F) - \gamma_-(F) = T$ dans $U \cap V \cap M$; plus exactement si la forme de Levi de ρ admet une valeur propre positive (respectivement une valeur propre négative) au point p, on pose $F|_{V^-} = 0$ (respectivement $F|_{V^+} = 0$). Donc T est en fait la trace d'une fonction pluriharmonique.*

Démonstration. -
La conséquence (b') montre que $(ii) \Rightarrow (i)$.
Inversement, supposons que $\overline{\partial}_b\omega_M(T) = 0$ sur $M \cap U$; soit $W \subset U$ un voisinage de Stein contenant p.
On a $\overline{\partial}_b\omega_M(T) = \overline{\partial}[\omega_M(T) \wedge [M]^{0,1}] = 0$ sur $M \cap U$ donc $\overline{\partial}[\omega_M(T) \wedge [M \cap W]^{0,1}] = 0$ dans W ; il existe alors $\widetilde{K} \in \mathfrak{D}'^{(1,0)}(W)$ tel que $\overline{\partial}\widetilde{K} = \omega_M(T) \wedge [M \cap W]^{0,1}$. Sous ces

hypothèses, $\widetilde{K}|_{W^+}$ *et* $\widetilde{K}|_{W^-} \in \mathcal{E}_*^{(1,0)}(W^\pm)$ *et* $\gamma_+(\widetilde{K}|_{W^+}) - \gamma_-(\widetilde{K}|_{W^-}) = \omega_M(T)$ *sur* $M \cap W$ *(d'après le Théorème I.2). Supposons maintenant que la forme de Levi de* ρ *admet une valeur propre positive au point* p *; donc* $\widetilde{K}|_{W^+}$ *se prolonge sur* M *comme une* $(1,0)$*-forme holomorphe* β *dans un voisinage de Stein* V *contenant* p *: si* $K_+ = \widetilde{K}|_{V^+}$*, il est évident que* $\gamma_+(K_+ - \beta) = \omega_M(T)$ *sur* $M \cap W$ *puisque* $K_- = \widetilde{K}|_{V^-} = 0$.
Par conséquent on a :

$$\gamma_+[\partial(K_+ - \beta)] = 0$$

En effet, puisque $(K_+ - \beta)$ *est une forme holomorphe donc* $\overline{N}_1[K_+ - \beta] = 0$; *ainsi :*

$$\gamma_+[\partial(K_+ - \beta)] = \partial_b[\gamma_+(K_+ - \beta)] + 2(N_1 - \overline{N}_1)(\gamma_+(K_+ - \beta)) \quad (20)$$

$$= \partial_b\omega_M(T) + 2(N_1 - \overline{N}_1)(\omega_M(T)) \quad (21)$$

$$\gamma_+[\partial(K_+ - \beta)] = 0 + 2(N_1 - \overline{N}_1)(\partial_b(T)) \quad (22)$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{E}^{(0,0)}(V)$ *telle que* $L(f_n) \to T$ *dans* $\mathfrak{D}'^{0,0}(M \cap V)$ *; la relation* $(**)$ *permet d'établir que :*

$$2(N_1 - \overline{N}_1)(\partial_b(T)) = \lim_{n\to+\infty} 2(N_1 - \overline{N}_1)(\partial_b f_n) \quad (23)$$

$$\gamma_+[\partial(K_+ - \beta)] = \lim_{n\to+\infty} 2(N_1 - \overline{N}_1)(\partial f_n) = 0 \quad (24)$$

Dans V *nous avons :*

$$\overline{\partial}[\partial(K_+ - \beta) \wedge [V^+]] = \gamma_+(\partial K_+ - \beta) \wedge [V \cap M]^{0,1} = 0$$

$\partial(K_+ - \beta) \wedge [V^+]$ *est holomorphe dans* V.
Par conséquent $\partial(K_+ - \beta) \equiv 0$ *sur* V^+ *; il s'en suit que sur* V *:*

$$\partial[(K_+ - \beta) \wedge [V^+] - T \wedge [M \cap V]^{1,0}] = 0$$

donc on peut trouver $\widetilde{G} \in \mathfrak{D}'^{(0,0)}(V)$ *tel que :*

$$\partial\widetilde{G} = (K_+ - \beta) \wedge [V^+] - T \wedge [M \cap V]^{1,0}.$$

Alors si on pose $G = \widetilde{G}|_{V\setminus M}$*, on obtient* $\overline{\partial}\partial G = 0$.
Ainsi, on a :

(a) G *est une fonction pluriharmonique dans* $V \setminus M$

(b) D'après ce qui précède, G *peut être prolongée sur* M *et satisfait la condition* $\overline{\partial}\partial G = 0$*, alors* $\gamma_+(G)$ *et* $\gamma_-(G)$ *existent (cf. corollaire I.2.6 dans [13])*

(c) $\partial G = K_+ - \beta$ *sur* V^+.

De plus $\gamma_+(G) + T$ *est* ∂_b*-fermé :*
car

$$\partial[(\gamma_+(G) + T) \wedge [M \cap V]^{1,0}] = \partial((\gamma_+(G) \wedge [M \cap V]^{1,0}) + \partial(T \wedge [M \cap V]^{1,0}) \quad (25)$$

$$= -\gamma_+(\partial G) \wedge [M \cap V]^{1,0} + \omega_M(T) \wedge [M \cap V]^{1,0} \quad (26)$$

$$= -\gamma_+(K_+ - \beta) \wedge [M \cap V]^{1,0} + \omega_M(T) \wedge [M \cap V]^{1,0} \quad (27)$$

$$\partial[(\gamma_+(G) + T) \wedge [M \cap V]^{1,0}] = 0 \quad (28)$$

Alors il existe une fonction antiholomorphe H sur V^+ vérifiant $\gamma_+(H) = \gamma_+(G) + T$. La fonction $H - G$ est pluriharmonique sur V^+ et $\gamma_+(H - G) = T$ de façon générale. Il suffit donc de poser $F = H - G$; en réalité $\gamma_+(ReF) = T$. Ce qui met fin à la preuve du théorème.

De ce théorème, on en déduit les solutions globales du problème de Cauchy-Dirichlet.

Proposition 2. -
Si la forme de Levi de ρ admet au moins une valeur propre strictement positive, en tout point $p \in M$, alors il existe un voisinage U de M tel que l'équation $\overline{\partial}_b\omega_M(T) = 0$ caractérise les distributions sur M qui sont traces de fonctions pluriharmoniques dans U^+.

Démonstration. -
Le Théorème Principal nous garantit l'existence d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M d'ouverts de X tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $f_n \in \mathcal{P}(U_n^+)$ qui vérifie $\gamma_+(f_n) = T$ sur $M \cap U_n$. Donc, si $U_n \cap U_m \neq \varnothing$, on a $\gamma_+(f_m) = \gamma_+(f_n)$ sur $U_m \cap U_n \cap M$.Puisque la trace sur M caractérise une fonction pluriharmonique, $f_m = f_n$ sur $U_m^+ \cap U_n^+$ et ainsi de suite.

Proposition 3. -
Soit X une variété de Stein telle que X^+ est relativement compact et $L(\partial\rho\wedge\overline{\partial}\rho\wedge\overline{\partial}\partial\rho) \neq 0$. Si T est une distribution réelle sur M, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{\partial}_b\omega_M(T) = 0$

(ii) il existe $F \in \mathcal{P}(X^+)$ telle que $\gamma_+(F) = T$.

Démonstration. -
(i) découle immédiatement de (ii).
Supposons maintenant que $\overline{\partial}_b\omega_M(T) = 0$.
La démonstration est identique à celle du Théorème 2. Il suffit de poser $W = X$; on constate que $X^+ \cup M$ est compact et $\widetilde{K}|_{X^-}$ est une $(1,0)$-forme holomorphe. Dans ce cas le théorème de Hartogs stipule que $\widetilde{K}|_{X^-}$ est la restriction d'une forme holomorphe définie sur X.

II.3 Problème global de Riemann-Hilbert

Dans ce paragraphe, on propose une résolution du problème de Riemann-Hilbert (dans le cas global), en utilisant des arguments standard de cohomologie.
Soient $\mathcal{S}$ le faisceau des germes de distributions réelles T sur M qui vérifient l'équation $\overline{\partial}_b\omega_M(T) = 0$, $\widehat{\mathcal{S}}$ son extension naturelle sur X et $\mathcal{A}$ le faisceau de germes des distributions T sur M telles que $\overline{\partial}_bT = 0$. Notons par $\mathcal{P}_X$ le faisceau de germes des fonctions pluriharmoniques sur X et $*\mathcal{P}_M$ le faisceau associé au pré-faisceau canonique défini sur X par :

$$*\mathcal{P}(U) = \begin{cases} \mathcal{P}(U) \quad si\ U \cap M = \varnothing \\ \{f \in \mathcal{P}(U)/\gamma_+(f),\ \gamma_-(f)\ existent\ sur\ M\}\ si\ U \cap M \neq \varnothing \end{cases}$$

Supposons que $L(\partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}\partial\rho) \neq 0$ sur M.
Soient

Re : $\mathcal{A} \to \mathcal{S}$ *l'homomorphisme de faisceaux qui a* T *associe sa partie réelle et* $\phi : *\mathcal{P}_M \to \widehat{\mathcal{S}}$

$$\phi_x(f) = \begin{cases} [\gamma_+(f) - \gamma_-(f)]_x & si\ x \in M \\ 0 & si\ x \notin M \end{cases}$$

Corollaire 1. *: Les suites ci-dessous sont exactes*

(1) $0 \to \mathcal{P}_X \xrightarrow{\psi} *\mathcal{P}_M \xrightarrow{\phi} \widehat{\mathcal{S}} \to 0$

(2) $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{Re} \mathcal{S} \to 0.$

Pour établir la démonstration de ce corollaire, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. -
Supposons que M *n'est pas Levi-plat au point* $p \in M$ *; soient* U *un voisinage de* p *et* $f_\pm \in \mathcal{P}(U^\pm)$ *qui ont pour traces respectives* $\gamma_+(f_+)$ *et* $\gamma_-(f_-)$ *sur* $U \cap M$*. Si* $\gamma_+(f_+) = \gamma_-(f_-)$*, alors il existe* $f \in \mathcal{P}(U)$ *telle que* $f|_{U^\pm} = f|_{f_\pm}$*.*

Démonstration. ***Lemme 2***
Le problème étant local, on considère un domaine U *de* $\mathbb{C}^n$*.*
$\partial\overline{\partial} f_\pm = 0 \ \Rightarrow\ \overline{\partial}\partial f_\pm = 0$ *sur* U*. Donc pour* $1 \leq j \leq n$*, les dérivées partielles* $\frac{\partial f_\pm}{\partial z_j}$ *sont holomorphes sur* $U^\pm$ *et les traces* $\gamma_+(\frac{\partial f_+}{\partial z_j})$*,* $\gamma_-(\frac{\partial f_-}{\partial z_j})$ *existent.*
De plus
$\gamma_+(f_+) = \gamma_-(f_-) \ \Rightarrow\ \gamma_+(\frac{\partial f_+}{\partial z_j}) = \gamma_-(\frac{\partial f_-}{\partial z_j}),\ 1 \leq j \leq n$*. D'après le Théorème I.1, il existe une fonction holomorphe sur* U *qu'on notera* g_j *et qui vérifie* $g_j|_{U^+} = \frac{\partial f_+}{\partial z_j}$ *et* $g_j|_{U^-} = \frac{\partial f_-}{\partial z_j}$
i.e les dérivées partielles de f_+ *et* f_- *existent sur* U *et sont holomorphes. Il suffit donc de poser*

$$f = \begin{cases} f_+ & si\ x \in U^+ \\ f_- & si\ x \in U^- \\ g & si\ x \in U \cap M \end{cases}$$

Démonstration. ***Corollaire***

(1) $0 \to \mathcal{P}_X \xrightarrow{\psi} *\mathcal{P}_M \xrightarrow{\phi} \widehat{\mathcal{S}} \to 0$
Nous voulons montrer que ψ *est injectif,* ϕ *est surjectif et* $Im\psi = Ker\phi$*.*
L'application ψ *est une inclusion, donc elle est naturellement injective.*
Soit $p \in M$*,* $T \in \widehat{\mathcal{S}_p} \Rightarrow \overline{\partial}_b \omega_M(T) = 0$
d'après le Théorème Principal, il existe $f \in \mathcal{P}(X \backslash M)$ *telle que* $[\gamma_+(f) - \gamma_-(f)]_p = T$*.*
Si $U \subset X$ *est un voisinage de* $p \in M$*, alors toute fonction pluriharmonique sur* U *est de saut nul sur* $U \cap M$ *; donc* $Im\psi \subset ker\phi$*.*
Soit $f \in \mathcal{P}(U^\pm)$*, pour laquelle* $\gamma_+(f)$ *et* $\gamma_-(f)$ *existent sur* $U \cap M$*. Si* $\gamma_+(f) = \gamma_-(f)$*, le Lemme 2 stipule que :* $\exists \widetilde{f} \in \mathcal{P}(U) /\ \widetilde{f}|_{U^+} = f_+$ *et* $\widetilde{f}|_{U^-} = f_-$*. Donc* $ker\phi \subset Im\psi$ *; d'où* $Im\psi = Ker\phi$*. Ce qui conclu l'exactitude de la suite* (1)*.*

(2) $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{Re} \mathcal{S} \to 0$

Comme conséquence du Lemme 2, en tout point p *de* M*,* $T \in \mathcal{S}_p$*, il existe* $\widetilde{T} \in \mathcal{A}_p$ *telle que* $Re(\widetilde{T}) = T$ *;* $KerRe = Im(i)$*.*
D'autre part, en vertu du Théorème Principal, on peut toujours trouver un voisinage

ouvert U de p dans X et $F \in \mathcal{P}(X \setminus M)$ tels que $T = \gamma_+(F) - \gamma_-(F)$. De [13] nous déduisons qu'il existe $G \in \mathcal{O}(U \setminus M)$ telle que $Re(G) = F$ et $\gamma_+(G)$, $\gamma_-(G)$ existent ;(en effet les fonctions holomorphes et les fonctions pluriharmoniques ayant des traces qui vérifient $dH = d^c$ [4] *etc). Il s'en suit que $Re : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ est surjectif. D'où l'exactitude de* (2).$\square$

Théorème [Solution globale du problème de Riemann-Hilbert pour le $\overline{\partial}\partial$]. - *Soit X une variété de Stein telle que $L(\partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}\partial\rho) \neq 0$. Si $H^2(X, \mathbb{C}) = 0$ ou bien $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, alors pour toute distribution réelle T sur M, les affirmations ci-dessous sont équivalentes :*

i) $\overline{\partial}_b \omega_M(T) = 0$

ii) Il existe $F \in \mathcal{P}(X \setminus M)$ telle que $\gamma_+(F) - \gamma_-(F) = T$.

Démonstration. -

Tout d'abord, dans une variété de Stein, $H^r(X, \mathcal{P}_X) \approx H^{r+1}(X, \mathbb{C})$ pour tout entier naturel $r \geq 1$ et $H^0(X, \widehat{\mathcal{S}}) \approx H^0(M, \mathcal{S})$.
Si $H^2(X, \mathbb{C}) = 0$, La suite exacte courte (1) *du corollaire II.1 engendre* [5] *la suite exacte de groupes de cohomologies ci-dessous*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{P}_X) \to H^0(X, *\mathcal{P}_M) \to H^0(X, \widehat{\mathcal{S}}) \to H^1(X, \mathcal{P}_X) \to \cdots$$

Puisque X est une variété de Stein, donc pour $r = 1$, $H^1(X, \mathcal{P}_X) \approx H^2(X, \mathbb{C})$ et $H^0(X, \widehat{\mathcal{S}}) \approx H^0(M, \mathcal{S})$. L'hypothèse $H^2(X, \mathbb{C}) = 0$ permet d'obtenir la suite exacte courte

$$0 \to H^0(X, \mathcal{P}_X) \xrightarrow{d_1} H^0(X, *\mathcal{P}_M) \xrightarrow{d_2} H^0(M, \mathcal{S}) \to 0$$

d_2 surjective $\Rightarrow$

$$\frac{H^0(X, *\mathcal{P}_M)}{ker(d_1)} \approx H^0(M, \mathcal{S})$$

d_1 injective $\Rightarrow H^0(X, \mathcal{P}_X) \approx Im(d_1)$
d'autre part $Im(d_1) = Ker(d_2)$ ce qui entraîne que ;

$$\frac{H^0(X, *\mathcal{P}_M)}{H^0(X, \mathcal{P}_X)} \approx H^0(M, \mathcal{S})$$

Si $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, la suite exacte courte (2) *du corollaire II.1 engendre la suite exacte*

$$0 \to \mathbb{R} \to H^0(M, \mathcal{A}) \to H^0(M, \mathcal{S}) \to H^1(M, \mathbb{R}) \to H^1(M, \mathcal{A}) \to \cdots$$

L'hypothèse $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ permet aussi d'obtenir la suite exacte courte ci-dessous

$$0 \to \mathbb{R} \to H^0(M, \mathcal{A}) \to H^0(M, \mathcal{S}) \to 0$$

On montre de la même manière que

$$\frac{H^0(M, \mathcal{A})}{\mathbb{R}} \approx H^0(M, \mathcal{S}) \ \square$$

---

4. $d^c = \frac{1}{2i\pi}(\partial + \overline{\partial})$ est un opérateur réel, appelé opérateur de Monge-Ampère et vérifie $d^c d = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.
5. voir le chapitre V du livre de Frank W. WARNER : FOUNDATIONS OF DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND LIE GROUPS.

III Bibliographie

[1] AUDIBERT Thierry : Caractérisation locale par des opérateurs différentiels des restrictions à la sphère $\mathbb{C}^n$ des fonctions pluriharmoniques, C.R.A.S, 1977, A285 1029-1031.

[2] BARTOLOMEIS Paolo De, TOMASSINI Giuseppe : Traces of pluriharmonic functions Analytic Functions, Kozubnik 1979, Lecture Notes in Math. 798 Springer, 1980, 10-17.

[3] BARTOLOMEIS Paolo De, TOMASSINI Giuseppe : Traces of pluriharmonic functions, Compositio Mathematica, tome 44 n° 1-3, 1981, p.29-39.

[4] BEDFORD Eric : $(\partial\overline{\partial})_b$ and the real part of CR functions Indiana Univ. Math. J. (1980) 29 3 333-340.

[5] BEDFORD Eric, FEDERBUSH Paul : Pluriharmonic boundary values Tohoku Math. (1974), 26 505-511.

[6] BELOSAPKA Valerij : Pluriharmonic functions on manifolds Math. U.S.S.R. Isvestija (1978),12 439-447.

[7] BOGGESS Albert : CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex, C.R.C Press. Inc (1991), ISBN 0-8493-7152-X

[8] DEMAILLY Jean-Pierre : Complex Analytic and Differential Geometry, version of Thursday June 21, 2012, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/documents.html` *.*

[9] HORMANDER Lars : An Introduction to the Complex Analysis in Several Variables, Third Edition, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V (1990), Amsterdam, New-York, Oxford, Tokyo ISBN 0-444-88446-7.

[10] KOHN Joseph J., ROSSI Hugo : On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, Ann. of Math. (1965), 81 451-473.

[11] KYTMANOV Alexander M. : The Bochner-Martinelli Integral and Its Applications, Birkhauser, Basel, Boston, berlin, 1995.

[12] LAVILLE Guy : Fonctions pluriharmoniques et solution fondamentale d'un opérateur du 4^e^ ordre Bull. Sc. Math. 2s. (1977), 101 305-317.

[13] LOJASIEWICS Stanislaw, TOMASSINI Giusseppe : Valeurs au bord des forms holomorphes, Several Complex Variables, Proceedings of nternational Conferences, Cortona

Italy 1976-1977 222-245 Scuola Normale Superiore, Pisa (1978).

[14] POLKING John, WELLS Raymond O. : Boundary values of Dolbeault Cohomology classes and a generalized Bochner-Hartogs Theorem Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (1978) 47 3-24.

[15] RANGE R.Michael :Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, Springer-Verlag (1986), New-York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, ISBN 0-387-96259-X.

[16] RIZZA Giovanni Battista : Dirichlet problem for n-harmonic functions and related geometrical properties Math. Ann. Bd. (1955) 130 s. 202-218.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur un article de Paolo De BARTOLOMEIS et Giuseppe TOMASSINI intitulé "Traces of pluriharmonic functions", publié dans "Compositio Mathematica" en 1981.
Soient X ***une variété analytique complexe et*** M ***une hypersurface réelle orientée, telle que*** M ***divise*** X ***en deux composantes connexes*** X^+ ***et*** X^-. ***Dans leur article, ils cherchent à caractériser en termes d'opérateurs différentiels linéaires tangents sur*** M***, les distributions*** T ***sur*** M ***qui sont traces ou sauts (dans le sens des courants) de fonctions pluriharmoniques sur*** X^+ ***et*** X^-.