

출품번호

과학전시관에 서 기재함

제65회 서울과학전람회 본선대회 탐구보고서

음계의 과학적 원리 탐구

2024. 3. 10.

구분	학생부
출품부문	물리

【 차례 】

1. 탐구 동기 및 목적	1
가. 탐구 동기	1
나. 탐구 목적	1
2. 선행연구 고찰	1
3. 연구 절차 및 방법	2
4. 작품의 내용	2
가. 12음계 음들의 규칙 찾기 (실험 1)	2
나. 음계의 음들이 가지는 원리 탐구	4
다. 다양한 음계 만들기 (실험 2)	5
라. 10음계로 음악을 연주하는 피아노 프로그램 만들기 (스크래치)	6
마. 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램으로 연주하기 (실험 3)	7
바. 음계 내의 화음이 가지는 원리 탐구 (실험 4)	9
사. 10음계에서의 화음 찾기 (실험 5)	10
아. 10음계로 음악을 위한 애플벤터 모바일 피아노 프로그램 만들기 연주하기 (실험 6)	11
자. 10음계로 음악을 위한 아두이노 키패드 피아노 만들기 (실험 7)	12
차. 음계 내의 화음이 가지는 원리 탐구 (심화)	12
카. 배음과 맥놀이를 이용한 <어울림 정도 계산법> 찾기	15
타. <어울림 정도 계산법>을 이용한 화음 분석 (실험 8)	17
5. 결론	19
6. 전망 및 활용성	21

【 그림 차례 】

그림 1: 12음계 음들의 진동수 측정 과정	3
그림 2: 12음계 음들의 진동수 비교 그래프	4
그림 3: 12음계 도(C) 음들의 진동수 비교 그래프	4
그림 4: 10음계 음들의 음원파일을 만드는 과정과 만들어진 음원파일들	6
그림 5: 10음계 음악을 연주할 수 있는 스크래치 프로그램	7
그림 6: 10음계 음악 연주를 위한 간단한 악보들	8
그림 7: 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램으로 연주하는 모습	8
그림 8: 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램으로 연주하는 동영상 QR Code ..	9
그림 9: 10음계 음악을 애플벤터 모바일 피아노 프로그램으로 연주하는 모습	11
그림 10: 10음계 음악을 애플벤터 모바일 피아노 프로그램으로 연주하는 동영상 QR Code	11
그림 11: 10음계 음악을 아두이노 키패드 피아노로 연주하는 모습	12
그림 12: C4(가온도) 음을 피아노로 연주했을 때 나타나는 부분음들	13
그림 13: 기음과 배음들의 파장의 길이	13
그림 14: C4(가온도) 음을 피아노로 연주했을 때 나타나는 부분음들의 이름	14
그림 15: 9Hz음파와 10Hz음파가 만나서 만들어지는 맥놀이	14
그림 16: 맥놀이가 만들어지는 진동수비의 범위	16
그림 17: 진동수비에 대한 <맥놀이 판별법>	16
그림 18: <어울림 정도 계산법>	16
그림 19: 12음계 음들의 진동수비 및 <맥놀이 판별법>의 적용 결과	17
그림 20: 10음계 음들의 진동수비 및 <맥놀이 판별법>의 적용 결과	18

【 표 차례 】

표 1: 12음계 음들의 진동수 측정 결과	3
표 2: 12음계 도(C) 음들의 진동수 측정 결과	4
표 3: N음계 음들의 진동수 비율 R의 계산 결과	5
표 4: N음계 음들의 진동수 계산 결과	5
표 5: 12음계 음들의 가온도(C4)에 대한 진동수 비율과 화음	10
표 6: 10음계 음들의 가온도(C4)에 대한 진동수 비율과 화음	10
표 7: <어울림 정도 계산법>을 이용하여 12음계 화음들의 어울림 정도를 계산한 결과	18
표 8: <어울림 정도 계산법>을 이용하여 10음계 화음들의 어울림 정도를 계산한 결과	19

1. 탐구 동기 및 목적

1. 작품연구의 동기 및 목적

가. 탐구 동기

피아노를 공부하다 피아노의 건반은 흰 건반과 검은 건반의 반복된 패턴으로 이루어져 있다는 것을 알게 되었다. 반복되는 패턴 속에 흰 건반 7개와 검은 건반 5개, 모두 12개의 건반으로 이루어져 있는데 왜 꼭 12개로 이루어져 있는지 궁금증이 생겼다. 그리고 12개가 아닌 다른 개수의 건반을 가지는 피아노는 없는지 궁금했다. 이런 궁금증을 풀기 위해서 탐구를 시작했다.

나. 탐구 목적

- 1) 12음계 음들의 규칙 찾기
- 2) 음계들이 가지는 패턴 탐구
- 3) 다른 음계로 피아노 건반을 만들어 연주해 보기
- 4) 음계 내의 화음이 가지는 원리 탐구
- 5) 다른 음계에서 화음 찾기
- 6) 협화음과 불협화음이 만들어지는 원인 탐구
- 7) 협화음과 불협화음을 구분할 수 있는 방법 탐구

2. 선행연구 고찰

음계에 관한 학술 자료 검색 결과, 2015년 서울시 과학전람회 고등부 예선 대회 출품작 ‘새로운 음계를 만드는 방법 탐구와 새 음계의 영향 탐구’의 요약서 1장만이 검색되었고, 전국과학전람회 통합 검색에서는 유사한 주제의 탐구보고서를 찾지 못했다. 서울시 과학전람회 예선 출품작 ‘새로운 음계를 만드는 방법 탐구와 새 음계의 영향 탐구’는 탐구보고서가 서울특별시교육청 과학관 사이트에서 검색되지 않아 자세한 탐구 내용을 알 수 없었으며 요약서 내용으로 볼 때 9음계를 만들어 탐구한 보고서라고 추정된다. 본 탐구는 음계를 총 5가지 (8음계부터 12음계까지 만들어 봄)의 음계를 만들었고, 스크래치 (Scratch) 블록 코딩 프로그램과 앱인벤터 (MIT App Inventor) 애플리케이션을 이용해서 직접 연주가 가능한 피아노

프로그램을 만들어 보았기 때문에 서로 다른 독창적인 탐구라고 볼 수 있다.

3. 연구 절차 및 방법

- 가. 소리의 높낮이를 결정하는 조건 탐구
- 나. 음계의 규칙성 탐구
- 다. 12음계가 아닌 다른 음계를 찾아 보고 직접 만들어 보기
- 라. 음계 내의 화음이 가지는 원리 탐구
- 마. 다른 음계에서 화음 찾기
- 바. 협화음과 불협화음이 만들어지는 과학적인 원리 탐구
- 사. 화음의 어울림 정도값을 계산하여 비교하기

4. 작품의 내용

가. 12음계 음들의 규칙 찾기 (실험 1)

피아노를 공부하다 피아노는 흰 건반과 검은 건반의 반복된 패턴으로 이루어져 있다는 것을 알게 되었다. 반복되는 패턴 속에 흰 건반 7개와 검은 건반 5개, 모두 12개의 건반으로 이루어져 있는데 왜 꼭 12개로 이루어져 있는지 궁금증이 생겼다. 그리고 12개가 아닌 다른 개수의 건반을 가지는 피아노는 없는지 궁금했다. 관련된 자료를 공부하다 보니 12개의 건반에 해당하는 12개의 음이 음계를 이룬다는 사실을 알게 되었다. 궁금증을 풀기 위해서 탐구한 내용을 정리하면 아래와 같다.

음악은 소리를 내는 악기로 연주한다. 악기가 연주하는 음들은 그 높이에 따라 이름을 붙여 부르는데 도(C)-레(D)-미(E)-파(F)-솔(G)-라(A)-시(B)-도(C)가 그것이다. 이것을 **음계**라고 하고 음과 음 사이의 높이 차이를 **음정**이라고 한다. 우리가 음악 연주에 가장 많이 사용하는 음계는 **12음계**인데 앞의 7개의 음과 피아노의 검은 음반에 해당하는 도#(C#), 레#(D#), 파#(F#), 솔#(G#), 라#(A#)의 5개의 음을 더하면 모두 12개이기 때문이다. 피아노 건반에는 여러 개의 도(C)가 있는데 뒤에 숫자를 붙여서 구분한다. 예를 들어 C4는 피아노 건반의 가운데에 있는 가온도(가온다)를 나타내고 C5는 그 다음에 있는 높은도를 나타낸다. C4와 C5처럼 이웃하는 같은 이름의 음들 사이의 음정을 **옥타브**라고 부른다.

소리는 공기의 떨림(진동)에 의해서 생기는 파동이다. 이 떨림의 정도를 **진동수**라고 하고 단위로는 1초에 몇 번 떨리는지를 나타내는 **헤르츠(Hz)**를 사용한다. 예를 들어 440Hz는 1초에 440번 진동한다는 의미이다. 진동수가 높을수록 떨림의 속도가 빠르다는 뜻이고 높은 소리를 의미한다. 음악에서 음은 강약, 높낮이, 길이, 음색 등의 성질을 가지는데 음의 높낮이는 진동수로 측정될 수 있다. 현악기와 같이 음의 높낮이가 주변 환경이나 악기의 상태에 따라 자주 변하는 악기들은 연주하기 전에 높낮이를 맞추는 과정이 필요한데 이를

조율(튜닝)이라고 한다.

12음계의 음들이 가지는 높낮이의 규칙성을 찾기 위해서 우선 음들의 진동수를 측정해 보기로 하였다. 가정용 디지털 피아노(모델명: Yamaha CLP-645R)와 안드로이드 무료 조율 앱 gStrings를 사용하여 실험을 진행하였다.

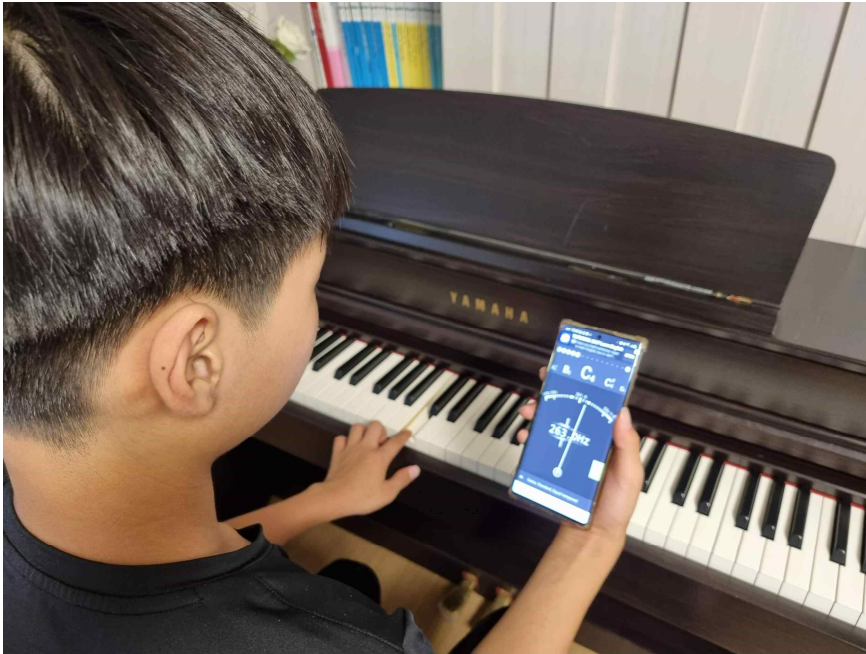


그림 1: 12음계 음들의 진동수 측정 과정

실험 1(12음계 음들의 진동수 측정)의 실험 절차는 다음과 같다(그림 1).

1. 피아노의 한 건반을 쳐서 소리를 낸다.
2. 스마트폰의 조율(튜닝) 앱을 사용하여 진동수를 측정하고 기록한다.
3. 1~2의 과정을 20회 반복한다.
4. C4 ~ C5, C3, C6에 대해서 1~3의 과정을 각각 반복한다.

표 1: 12음계 음들의 진동수 측정 결과

(단위: Hz)

음	C4	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C5
진동수	261.7	277.6	293.5	311.7	330.7	350.0	370.9	392.9	416.4	440.5	467.1	494.0	524.5

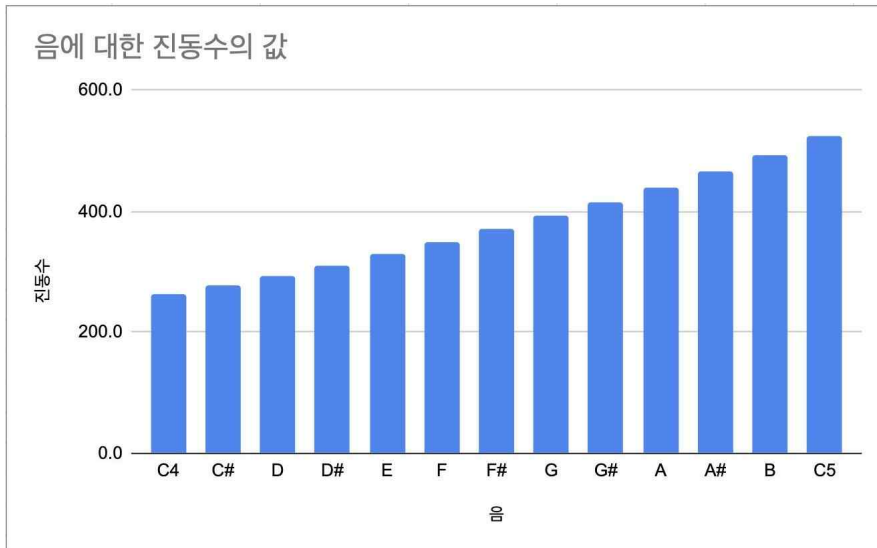


그림 2: 12음계 음들의 진동수 비교 그래프

표 1은 실험 1에서 측정된 진동수의 평균값들을 정리한 것이고, 그림 2는 이를 그래프로 나타낸 것이다. 그래프를 보면 12음계에서 이웃한 음들의 진동수는 일정한 비율을 가지는 것을 발견할 수 있었다. 이웃한 음들의 진동수가 일정한 비율을 가지도록 조율하는 것을 **평균율**이라고 한다.

표 2: 12음계 도(C) 음들의 진동수 측정 결과

(단위: Hz)

음	C3	C4	C5	C6
진동수	130.6	261.7	524.5	1,047.9

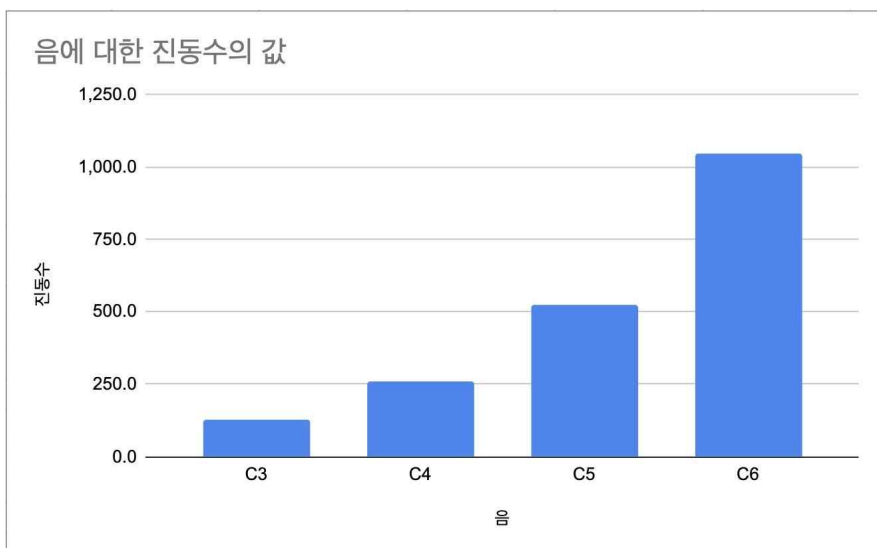


그림 3: 12음계 도(C) 음들의 진동수 비교 그래프

표 2는 실험 1에서 측정된 도(C) 음들의 진동수의 평균값들을 정리한 것이고, 그림 3은 이 값들을 그래프로 나타낸 것이다. 그래프를 보면 12음계에서 이웃한 도(C) 음들의 진동수는

2배씩 증가하는 것을 발견할 수 있었다.

실험 1(12음계 음들의 진동수 측정)의 결과를 정리하면 다음과 같다.

- 12음계의 이웃한 음들의 진동수는 일정한 비율을 가진다.
- 12음계의 도(C)음들의 진동수는 2배씩 증가한다.

나. 음계의 음들이 가지는 원리 탐구

실험 1에서 발견한 규칙을 이용하여 12음계 음들의 진동수 사이의 관계를 좀 더 수학적으로 탐구해 보기로 하였다. 이웃한 음들 사이의 일정한 진동수의 비를 R이라고 하면 다음의 수학식을 얻을 수 있다.

- $C4 \times R \times \dots \times R$ (R을 12번 곱함) = $C4 \times R^{12} = C5$
- $C4 \times 2 = C5$

이를 정리하면, $R \times \dots \times R$ (R을 12번 곱함) = 2임을 알 수 있다. 계산기를 사용하여 계산하면 $R = 1.0595$ 임을 알 수 있다.

이번 탐구를 통해서 발견한 12음계 음들이 가지는 수학적 규칙을 정리하면 아래와 같다.

- 12음계의 이웃한 음들의 진동수비는 1.0595로 일정하다.
- 12음계의 이웃한 옥타브 음들의 진동수는 2배씩 증가한다.

다. 다양한 음계 만들기 (실험 2)

앞에서 발견한 평균율 음계가 가지는 수학적 규칙을 사용하여 한 옥타브 안의 음의 수가 12개가 아닌 (즉, 12음계가 아닌) 음계를 만들 수 있음을 알 수 있다. 이 규칙을 이용하여 한 옥타브 안의 음의 수가 다양한 음계의 음들의 진동수를 계산하는 실험을 진행하였다.

실험 2(N음계 음들의 진동수 계산)의 실험 절차는 다음과 같다.

1. 진동수 비율 R을 계산한다. ($R \times \dots \times R$ (R을 N번 곱함) = 2의 식을 이용해서 계산기로 값을 계산한다.
2. 가온도(C4)의 국제 표준 진동수인 261.63Hz를 기준으로 R 배씩 곱하거나 나누어서 이웃한 음들의 진동수를 차례로 계산한다.
3. 서로 다른 N 값들에 대해서 1~2의 과정을 반복한다.

표 3: N음계 음들의 진동수 비율 R의 계산 결과

(단위: Hz)

N	8	9	10	11	12
R	1.0905	1.0801	1.0718	1.0650	1.0595

표 4: N음계 음들의 진동수 계산 결과

(단위: Hz)

진동수	1음(C4)	2음	3음	4음	5음	6음	7음	8음	9음	10음	11음	12음	13음
N = 8	261.63	285.31	311.13	339.29	370.00	403.49	440.01	479.83	523.26				
N = 9	261.63	282.58	305.20	329.63	356.02	384.53	415.31	448.56	484.47	523.26			

N = 10	261.63	280.41	300.53	322.10	345.22	370.00	396.56	425.02	455.52	488.22	523.26		
N = 11	261.63	278.65	278.65	316.07	336.63	358.52	381.84	406.68	433.13	461.30	491.30	523.26	
N = 12	261.63	277.19	293.67	311.13	329.63	349.23	370.00	392.00	415.31	440.01	466.17	493.89	523.26

표 3과 표 4는 실험 2를 통해서 계산된 여러 가지 N 값들에 대한 진동수 비율 R의 계산값과 음들의 진동수 계산값들을 각각 표로 정리한 것이다.

이번 실험을 통해서 음계 내의 음들이 가지는 진동수의 수학적 규칙을 이용하여 N음계(즉, 한 옥타브 내의 음의 개수가 N개인 음계)의 음들의 진동수를 계산할 수 있음을 확인하였다. 예를 들어 N = 10인 10음계의 경우 진동수 비율 R = 1.0718을 계산하고 이를 이용하여 10개의 음들의 진동수를 계산할 수 있었다.

라. 10음계로 음악을 연주하는 피아노 프로그램 만들기 (스크래치)

앞의 실험 2에서 계산한 10음계 음들을 연주할 수 있는 피아노 프로그램을 만들어 보기로 했다. 방학 때 새싹 코딩 수업에서 배운 스크래치 (Scratch) 블록 코딩 프로그램 언어를 사용하여 프로그램을 작성하기로 했다. 스크래치에서 소리를 내기 위해서는 우선 원하는 진동수의 소리를 내는 음원 파일이 필요하다. 인터넷 검색을 통해서 Online Tone Generator라는 사이트를 찾을 수 있었는데, 이 사이트를 이용하면 무료로 원하는 진동수의 음원 파일을 만들 수 있다. 앞의 실험 2에서 계산한 10음계 음 11개의 진동수를 각각 입력하여 .WAV형식의 음원 파일들을 다운로드 받을 수 있었다.

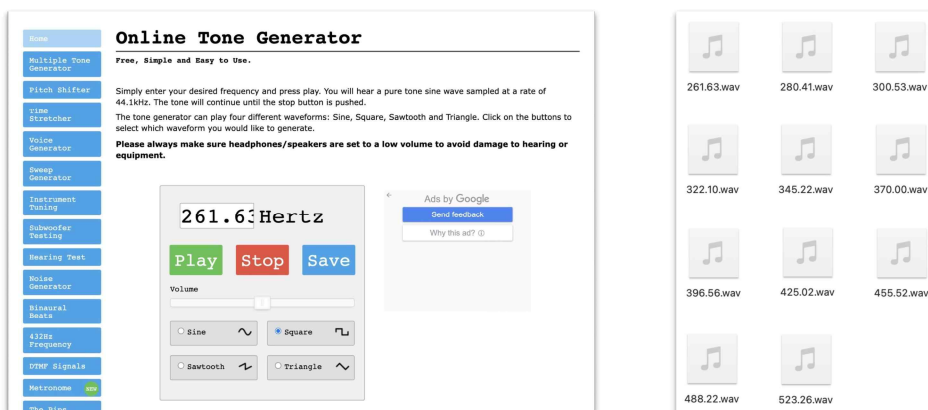


그림 4: 10음계 음들의 음원 파일을 만드는 과정과 만들어진 음원파일들

그림 4는 Online Tone Generator 사이트를 이용해서 10음계 음원과 일들을 만드는 과정과 다운로드 받은 음원 파일들을 보여준다.

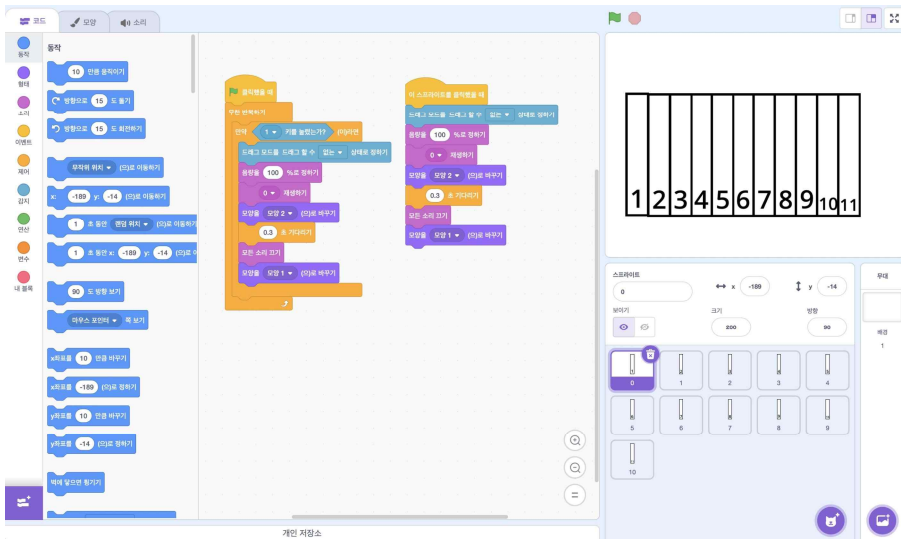


그림 5: 10음계 음악을 연주할 수 있는 스크래치 프로그램

만들어진 음원 파일들을 이용해서 10음계 음악을 연주할 수 있는 피아노 프로그램을 스크래치로 만들었다. 그림 5는 작성된 스크래치 프로그램을 보여준다. 연주를 위해서 11개의 피아노 건반이 필요하다. 이를 위해서 1개의 음원 파일당 1개의 스프라이트를 만들고 그 스프라이트를 클릭하면 음원 파일의 소리를 0.3초 동안 연주하도록 하였다. 연주를 더 쉽게 하기 위해서 마우스와 함께 컴퓨터의 키보드로도 연주할 수 있도록 하였다. 키보드 ‘1’을 음1로, 키보드 ‘2’를 음2로, ..., 키보드 ‘0’을 음10으로, 키보드 ‘P’를 음11로 연결하였다.

마. 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램 으로 연주하기 (실험 3)

앞에서 작성한 10음계 피아노 스크래치 프로그램을 이용해서 음악을 연주할 수 있는지 실험해 보기로 하였다. 우선 악보를 만들기 위해서 연주할 곡을 선정하였다. 쉬운 멜로디를 가지고 누구나 알 수 있는 귀에 익은 멜로디를 가지는 ‘산토끼’, ‘학교 중’, 그리고 ‘무궁화꽃이 피었습니다’ 세 곡을 선정하였다. 연주를 위해서 간단한 악보를 만들었다. 잘 알고 있는 멜로디이기 때문에 음의 이름을 나열하는 식으로 간단하게 작성하였다.

산토끼 (10음계)	학교종 (10음계)
7 5 5 7 5 2	7 7 9 9 7 7 5
3 5 3 1 5 7	7 7 5 5 3
11 7 11 7 11 7 5	7 7 9 9 7 7 5
7 3 6 5 3 1	7 5 3 5 1
 * 11음 = 높은 1음	 무궁화 꽃이 피었습니다 (10음계)
	5 9 9 7 9 5 7
	5 9 9 9 7 9 9 5 5 7

그림 6: 10음계 음악 연주를 위한 간단한 악보들

그림 6은 연주할 세 곡에 대해서 간단하게 작성한 10음계 악보를 보여준다. 세 곡은 원래 12음계로 작곡된 곡이므로 10음계에서는 같은 음이 없는 경우가 많다. 이 경우는 가장 비슷한 음을 대신 사용하는 식으로 악보를 작성하였다.

작성된 악보를 이용해서 선정된 세 곡을 직접 연주해 보았다.

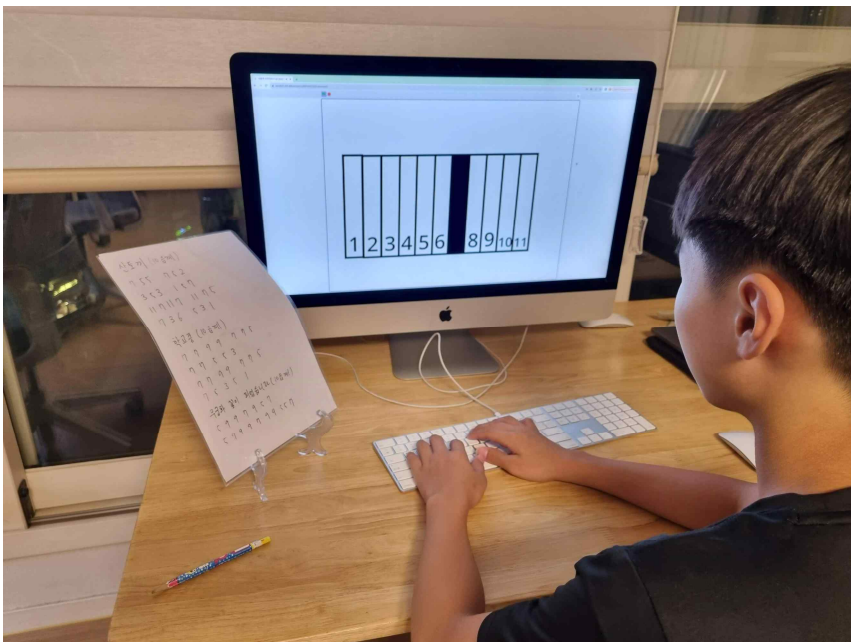


그림 7: 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램으로 연주하는 모습

그림 7은 컴퓨터 키보드를 이용해서 연주하는 모습을 보여준다. 쉬운 멜로디이고 잘 알고 있는 멜로디라서 그런지 연주가 어렵지는 않았다. 처음에는 12음계의 원래의 음들과 조금씩 달라서 어색했지만 여러 번 연주하니 귀에 조금씩 익숙해지고 어색한 느낌도 어느 정도 줄어들었다.



그림 8: 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램으로 연주하는 동영상 QR Code

그림 8의 QR Code를 통해서 10음계 음악을 스크래치 피아노 프로그램으로 연주하는 모습을 담은 동영상을 확인할 수 있다.

실험 3(10음계 음악을 피아노 프로그램으로 연주하기)의 결과를 요약하면 아래와 같다.

- 12음계로 작곡된 음악을 10음계 악보로 바꿀 수 있었다.
- 10음계 피아노 프로그램을 이용하여 10음계 음악을 직접 연주할 수 있었다.
- 원래 12음계로 작곡된 곡이어서 그런지 처음에는 멜로디가 조금 어색하게 들렸지만 여러 번 연주하니 어색한 느낌이 어느 정도 줄어들었다.

바. 음계 내의 화음이 가지는 원리 탐구 (실험 4)

음악과 관련된 인터넷 문서들을 통해서 음계 내의 화음이 가지는 원리를 탐구하였다. 탐구한 내용을 요약하면 아래와 같다.

화음은 다른 2개 이상의 음이 동시에 울렸을 때의 만들어지는 소리를 말한다. 화음은 크게 협화음과 불협화음이 있다. 협화음은 사람이 들었을 때 안정적인 느낌이 드는 화음이고 불협화음은 불안정한 느낌이 드는 화음이다. 협화음은 두 음의 진동수가 간단한 정수비에 가까울 때 나타난다. 예를 들어 12음계에서 도(C)와 솔(G)의 표준 진동수는 각각 261.63hz와 392.00hz인데 두 값을 나누어 보면 $392.00 / 261.63 = 1.4982$ 로 정수비인 $3/2 = 1.5$ 와 아주 가까운 값인 것을 확인할 수 있다.

12음계 음들의 표준 진동수를 이용하여 진동수의 비율만을 가지고 협화음인지 불협화음인지 조사해 보는 실험을 진행해 보기로 하였다(실험 4).

표 5: 12음계 음들의 가온도(C4)에 대한 진동수 비율과 화음

(단위: Hz)

음	C4	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C5
진동수	261.63	277.18	293.66	311.13	329.63	349.23	369.99	392.00	415.30	440.00	466.16	493.88	523.25
비율	1	1.0595	1.1225	1.1892	1.2599	1.3348	1.4142	1.4983	1.5874	1.6818	1.7818	1.8877	2
정수비	1/1				5/4	4/3	7/5	3/2	8/5				2/1
소수값	1.0000				1.2500	1.3333	1.4000	1.5000	1.6000				2.0000
협/불협	협	불협	불협	불협	협	협	협	협	협	불협	불협	불협	협

표 5는 실험 4를 통해서 조사한 12음계 음들의 진동수의 비율, 가까운 간단한 정수비, 화음의 종류를 표로 정리한 것이다. 가온도(C4)에 대해서 도(C4), 미(E), 파(F), 파#(F#), 솔(G), 솔#(G#), 도(C5) 등은 협화음을 만드는 것을 알 수 있었다. 이때 가까운 간단한 정수비는 각각 1/1, 5/4, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 2/1로 조사되었다.

이번 탐구(실험 4)를 통해서 알게 된 내용을 요약하면 아래와 같다.

- 화음에는 협화음과 불협화음이 있다.
- 두 음의 진동수의 비율이 간단한 정수비에 가까울 때 협화음이 만들어지고 그 반대의 경우에 불협화음이 만들어진다.
- 12음계에서 가온도(C4)와 협화음을 이루는 음들은 모두 도(C4), 미(E), 파(F), 파#(F#), 솔(G), 솔#(G#), 도(C5)인 것으로 조사되었다.

사. 10음계에서의 화음 찾기 (실험 5)

앞에서 계산한 10음계 음들 사이의 화음을 진동수 비율을 통해서 찾는 실험을 진행해 보기로 하였다. 실험 4에서와 같은 방법으로 음들의 진동수의 비율, 가까운 간단한 정수비, 화음의 종류를 찾아보았다.

표 6: 10음계 음들의 1음(=C4)에 대한 진동수 비율과 화음

(단위: Hz)

음	1음(C4)	2음	3음	4음	5음	6음	7음	8음	9음	10음	11음
진동수	261.63	280.41	300.53	322.10	345.22	370.00	396.56	425.02	455.52	488.22	523.26
비율	1	1.0718	1.1487	1.2311	1.3195	1.4142	1.5157	1.6245	1.7411	1.8661	2
정수비	1/1			5/4	4/3	7/5	3/2	8/5			2/1
소수값	1.0000			1.2500	1.3333	1.4000	1.5000	1.6000			2.0000
협/불협	협	불협	불협	협	협	협	협	협	불협	불협	협

표 6은 실험 5를 통해서 조사한 10음계 음들의 진동수의 비율, 가까운 간단한 정수비, 화음의 종류를 표로 정리한 것이다. 1음(=C4)에 대해서 1음, 4음, 5음, 6음, 7음, 8음, 11음(높은 1음)은 협화음을 만드는 것을 알 수 있었다. 이때 가까운 간단한 정수비는 각각 1/1, 5/2, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 2/1로 조사되었다. 이때 정수비와 실제 진동수 비율과의 차이가 12음계의 경우보다는 크게 나타나는 것으로 조사되었다.

이번 탐구(실험 5)를 통해서 알게 된 내용을 요약하면 아래와 같다.

- 10음계에서 1음(=C4)과 협화음을 이루는 음들은 모두 1음, 4음, 5음, 6음, 7음, 8음, 11음(높은 1음)인 것으로 조사되었다.
- 이때 정수비와 실제 진동수의 비율과의 차이가 12음계의 경우보다는 크게 나타나는 것으로 조사되었다.

아. 10음계로 음악을 위한 앱인벤터 모바일 피아노 프로그램 만들기 연주하기 (실험 6)

앞서 만든 스크래치 프로그램은 컴퓨터의 마우스로 해당 음계를 클릭하거나 키보드의 숫자 자판을 입력하는 방식으로만 음악 연주가 가능하여, 컴퓨터가 아닌 모바일 앱 형태로 건반 연주가 가능하게 만들어 보기로 했다. 이를 위해 앱인벤터 프로그램을 사용하여 스마트폰에서 피아노 건반과 유사한 모양으로 화면을 구성하고 손가락으로 10음계 건반을 누르면 연주가 가능한 애플리케이션을 만들어 보기로 했다. 앱인벤터 블록 코딩 프로그램에서 총 11개의 버튼에 각각 맞는 음원 파일을 등록하고 버튼을 누르면 손을 뗄 때까지 음원 파일이 재생되도록 만들었다. 그 결과, 10음계로 피아노 건반과 유사한 형태로 모바일 건반에서 연주하는 것이 가능하게 되었다.

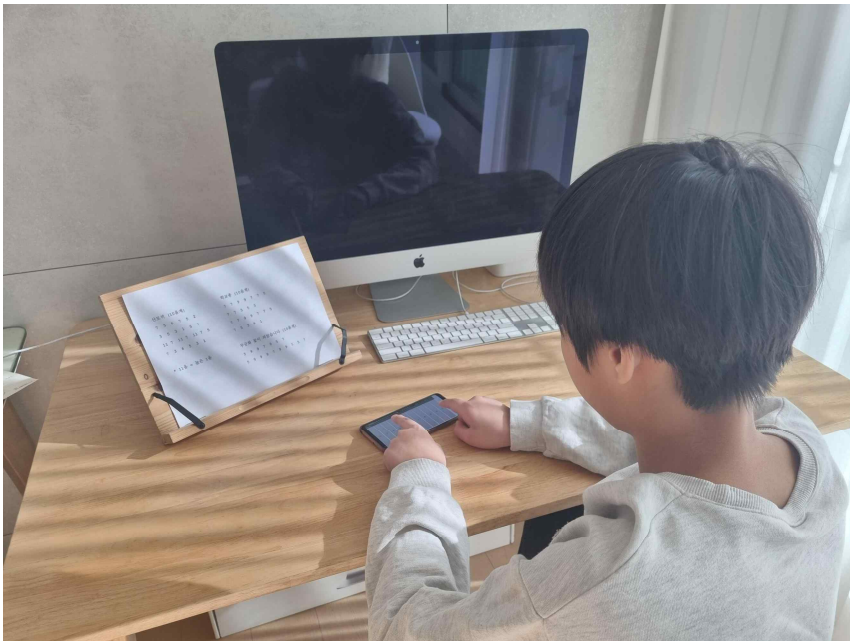


그림 9: 10음계 음악을 앱인벤터 모바일 피아노 프로그램으로 연주하는 모습

앞서 작성된 악보를 이용해서 선정된 세 곡을 스마트폰에서 직접 연주해 보았다.



그림 10: 10음계 음악을 앱인벤터 모바일 피아노 프로그램으로 연주하는 동영상 QR Code

자. 10음계로 음악을 위한 아두이노 키패드 피아노 만들기와 연주하기 (실험 7)

음악을 연주할 때 각 음에 해당하는 진동수의 값을 연주와 동시에 같이 볼 수 있는 장치를 만들어 보기로 했다. 방학 때 새싹 코딩에서 알게 된 아두이노 (Arduino) 마이크로 컨트롤러를 사용해서 만들어 보기로 했다. 아두이노 컨트롤러, 피에조 스피커, LCD 패널, 회로 케이블을 사용하여 아두이노 건반을 만들었는데, 코딩은 아두이노 홈페이지의 Programming Reference 항목과 ‘피에조 스피커로 음계와 진동수’와 ‘아두이노 LCD’ 키워드로 온라인 검색을 하여 아두이노 코딩 소스를 참고하였다.

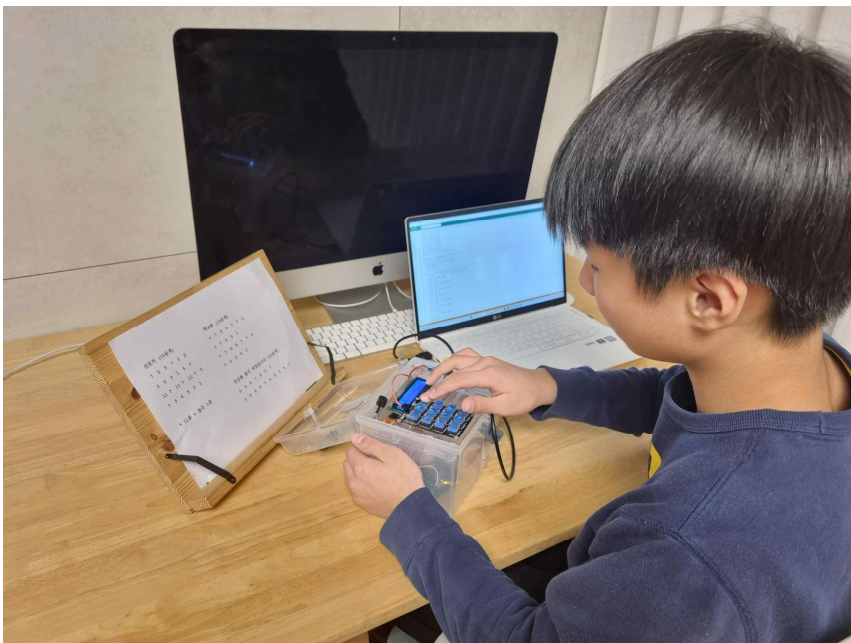


그림 11: 10음계 음악을 아두이노 키패드 피아노로 연주하는 모습

차. 음계 내의 화음이 가지는 원리 탐구 (심화)

앞선 연구에서 음계 내의 화음을 분석하기 위해서 두 음의 진동수가 간단한 정수비에 가까울 때 협화음을 만든다는 원리를 이용하였다. 진동수가 간단한 정수비를 가지는 것과 두 음이 협화음을 이루는 것이 서로 어떻게 관련되는지 쉽게 이해가 되지 않아 심화 연구를 진행해 보기로 하였다.

화음과 관련된 연구 자료들을 통해서 화음이 가지는 물리학적 원리를 탐구하였다. 탐구한 내용을 요약하면 아래와 같다.

1) 기음과 배음

오실로스코프라고 부르는 도구를 사용하면 소리를 진동수별로 분리할 수 있는데, 이를 오디오

스펙트럼이라고 부른다. 음악 연주에서 사용되는 악기의 음들을 오디오 스펙트럼으로 분리해 보면 진동수가 서로 다른 여러 개의 부분음들로 나누어지는 것을 볼 수 있다.

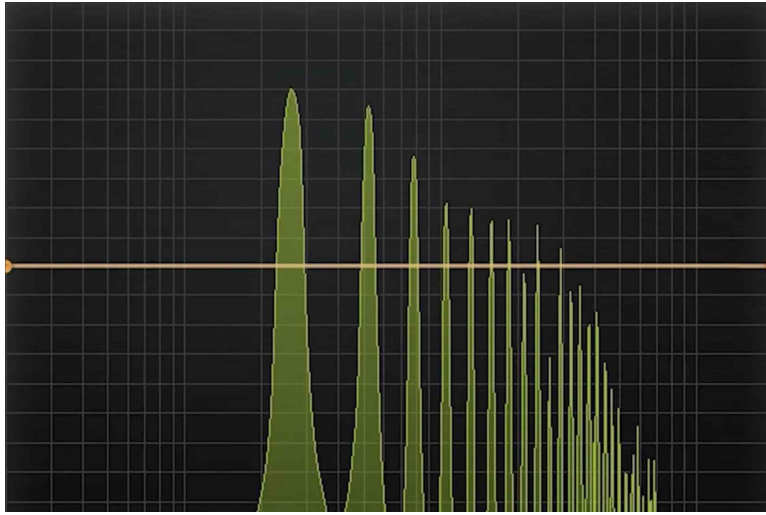


그림 12: C4(가온도) 음을 피아노로 연주했을 때 나타나는 부분음들. 그래프의 가로축이 진동수이고 세로축이 소리의 세기이다. (이미지 출처:

<https://www.youtube.com/watch?v=JnZmUeUaiTI>)

그림 12는 C4(가온도)음을 피아노로 연주했을 때 나타나는 부분음들을 보여준다. 악기를 연주했을 때 여러 부분음들이 함께 만들어지는 이유는 현의 길이를 파장으로 가지는 기본음(이를 **기음**이라고 부른다) 뿐만 아니라 파장의 길이가 현의 길이의 $1/2$, $1/3$, $1/4$, ..., $1/N$ 에 해당하는 음들(이를 **배음**이라고 부른다)이 함께 만들어지기 때문이다.

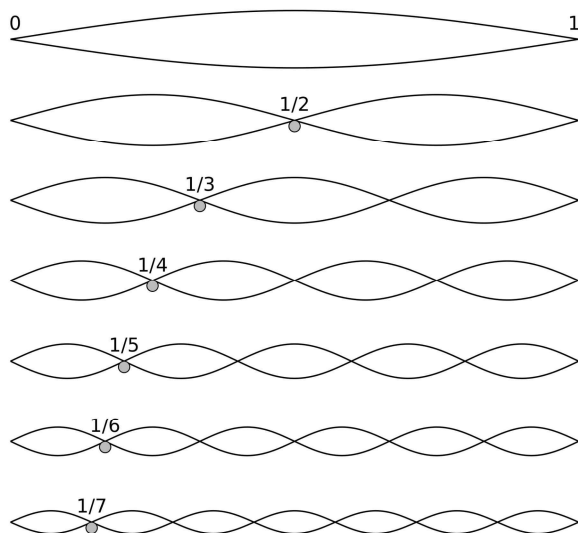


그림 13: 기음과 배음들의 파장의 길이 (이미지 출처:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(music)))

그림 13은 기음과 배음들의 파장의 관계를 보여준다. 이때 파장의 길이가 기음의 $1/2$, $1/3$, $1/4$,

..., $1/N$ 인 배음들의 진동수는 각각 기음의 2배, 3배, 4배, ..., N 배가 된다. 이러한 기음과 배음들을 차례대로 **1배음(기음)**, **2배음**, **3배음**, **4배음**, ..., **N 배음**이라고 부른다.

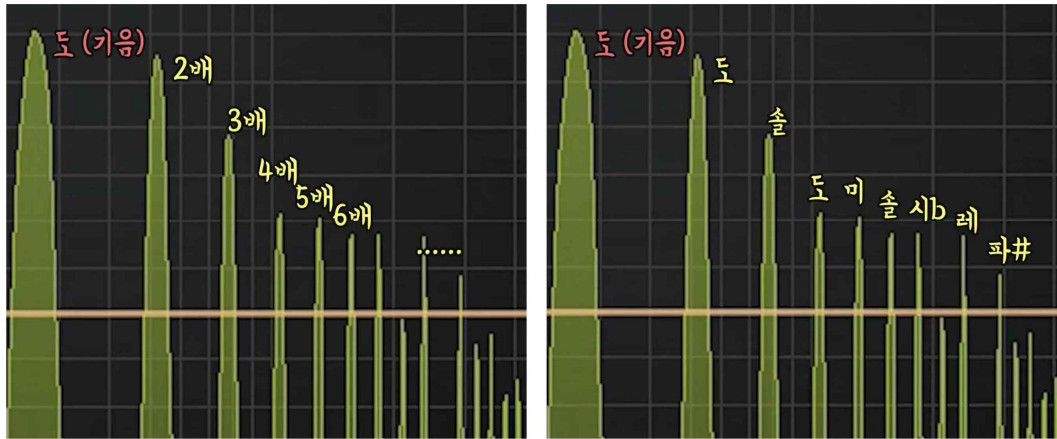


그림 14: C4(가온도) 음을 피아노로 연주했을 때 나타나는 부분음들의 이름 (이미지 출처: <https://www.youtube.com/watch?v=JnZmUeUaiTI>)

그림 14는 C4(가온도)음을 피아노로 연주했을 때 나타나는 배음들의 종류를 보여준다. 보통 7배음 이상은 진동수가 높아서 사람이 느끼는 음색에 거의 영향을 주지 않는 것으로 알려져 있다.

2) 화음과 맥놀이

미세하게 다른 진동수를 가진 소리들이 서로 간섭해서 전체 소리의 크기가 주기적으로 커졌다, 작아졌다는 반복하게 되는 현상을 **맥놀이**라고 한다. 대부분 경우 사람이 느끼기에 자연스럽게 들리게 된다.

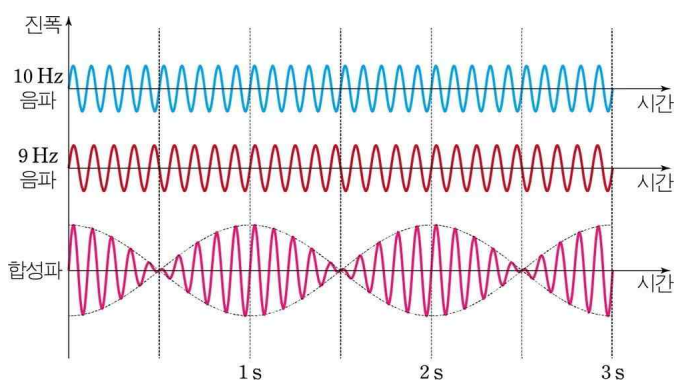


그림 15: 9Hz음파와 10Hz음파가 만나서 만들어지는 맥놀이 (이미지 출처: <https://namu.wiki/w/%EB%A7%A5%EB%86%80%EC%9D%B4>)

그림 15는 두 음파가 만나서 맥놀이가 만들어지는 예를 보여준다. 이때 맥놀이 진동수는 두 음파의 진동수의 차이와 같다(그림에서는 $10\text{Hz} - 9\text{Hz} = 1\text{Hz}$ 가 맥놀이 진동수가 된다, 즉 1초에 한 번씩 맥놀이가 만들어진다는). 따라서 두 음의 진동수의 차가 벌어질수록 맥놀이

진동수는 커진다.

독일의 물리학자인 **헬름홀츠**는 불협화음이 만들어지는 원인은 두 음의 배음들 사이에서 맥놀이(beat)가 만들어지기 때문이라고 하였다. 특히, 맥놀이 진동수가 커짐에 따라 사람이 느끼는 불쾌감이 점점 커지다가 일정한 진동수 이상으로 커지면 다시 불쾌감이 줄어든다는 것을 실험으로 보였다.

이번 탐구를 통해서 알게 된 내용을 요약하면 다음과 같다.

- 음악 연주에 사용되는 악기 음들을 분석해 보면 진동수가 다른 여러 부분음들의 합쳐진 음이라는 것을 알 수 있는데, 이 부분음들을 배음이라고 하고 진동수가 가장 낮은 배음을 기음이라고 한다.
- 배음들의 진동수는 차례대로 악기음의 진동수의 1배, 2배, 3배, ..., N배가 되기 때문에 이들을 1배음(또는 기음), 2배음, ..., N배음이라고 부른다.
- 두 음의 진동수가 미세하게 차이날 때 서로 간섭해서 전체 음이 주기적으로 커졌다, 작아졌다를 반복하게 되는 현상을 맥놀이라고 한다.
- 두 음이 불협화음을 이루는 이유는 두 음의 배음들 사이에 듣기 불쾌한 맥놀이가 만들어지기 때문이다.

카. 배음과 맥놀이를 이용한 <어울림 정도 계산법> 찾기

앞에서 탐구한 화음의 원리를 바탕으로 두 음이 서로 얼마나 어울리는지를 나타내는 어울림 값을 만들어 보기로 하였다.

우선 맥놀이가 만들어지는 조건들을 찾아보았다. 두 음의 진동수가 같은 값을 가지는 상황에서 한 음의 진동수가 조금씩 커져서 진동수의 차이가 점점 커지는 상황을 사람이 어떻게 느낄지 생각해 보면, 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

- 두 음의 진동수가 거의 같은 경우 사람은 그 차이를 느끼지 못하고 같은 음이 들린다고 생각할 것이다. 따라서 불협화음에 의한 불쾌감을 느끼지 않을 것이다.
- 진동수의 차이가 점점 커져서 구분이 갈 정도가 되면 맥놀이가 만들어지고 불쾌하게 느끼기 시작할 것이다.
- 진동수의 차이가 커져서 맥놀이 진동수가 너무 커져서 사람이 느낄 수 없을 정도가 되면 불쾌감이 사라질 것이다.

따라서 1) 두 음이 같은 음으로 느끼는 조건과 2) 맥놀이 진동수가 커져서 더 이상 맥놀이를 느끼지 못하는 조건을 찾으면 맥놀이가 만들어지는 범위, 즉 사람이 불협화음에 의해서 불쾌감을 느끼는 범위를 찾을 수 있을 것이다.

사람의 귀는 두 음을 진동수의 차가 아니라 비율로 구분하기 때문에 각각의 경우에 대해서 진동수비를 찾아보기로 했다. 아래는 추가적인 자료 검색을 통해서 찾아낸, 맥놀이가 만들어지는 진동수비의 계산 과정을 요약한 것이다.

- 진동수가 500Hz인 음에 대해서 사람이 **다른 음**이라고 느끼는 진동수 차이는 약 1Hz정도이고 진동수가 4,000Hz인 경우 약 8Hz라고 알려져 있다. 이를 진동수비로 나타내면 $1.002(= 501/500 = 4008/4000)$ 에 해당한다.
- 헬름홀츠가 얘기한 듣기 불쾌한 맥놀이가 만들어지는 진동수 범위는 진동수 비율이 1/3 옥타브보다 적을 때 발생한다. 12음계에서 C4(가온도)를 기준으로 E(미)는 협화음을 만들고 D#(레#)는 불협화음을 만든다. 여기서 C4(가온도)와 E(미)의 진동수비는 1.2599 ($= 329.63/261.63$)이고 C4(가온도)와 D#(레#)의 진동수비는 1.1891($= 311.13/261.63$)이다. 따라서 그 경계는 두 진동수비의 사이에 있음을 유추할 수 있다. 본 연구에서는 두 진동수비 1.2599와 1.1891의 평균값인 **1.224**를 경계값으로 사용하기로 한다.

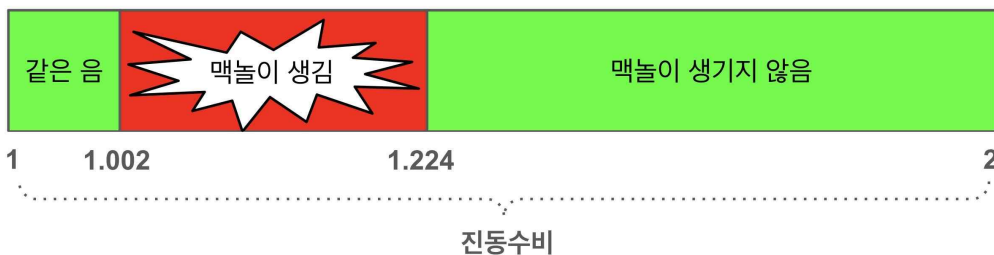


그림 16: 맥놀이가 만들어지는 진동수비의 범위

그림 16은 맥놀이가 만들어지는 진동수비의 범위를 그림으로 나타낸 것이다. 이러한 결과를 바탕으로 두 음이 맥놀이를 만드는지(즉, 불협화음을 만드는지)를 판별할 수 있는 다음과 같은 진동수비에 대한 **<맥놀이 판별법>**을 만들 수 있다.

두 음의 진동수비가 1.002에서 1.224 사이에 있으면 듣기 불쾌한 맥놀이가 만들어진다.

그림 17: 진동수비에 대한 <맥놀이 판별법>

그림 17의 <맥놀이 판별법>을 두 음의 배음들 사이에 적용하면 두 음이 서로 어울리는 정도를 계산하는 방법을 만들 수 있다. 즉, 다음과 같은 **<어울림 정도 계산법>**을 만들어 낼 수 있다.

<맥놀이 판별법>을 이용하여,

1. 낮은 음의 1배음이 높은 음의 1~6배음들과 맥놀이를 만드는지를 조사한다.
만약 맥놀이를 만들면 두 음의 어울림 정도는 0이 된다.
만약 맥놀이를 만들지 않으면 다음 단계로 넘어간다.
2. 낮은 음의 K배음($2 \leq K \leq 6$)이 높은 음의 1~6배음들과 맥놀이를 만드는지를 조사한다.
만약 맥놀이를 만들면 두 음의 어울림 정도는 $K-1$ 이 된다.
만약 맥놀이를 만들지 않으면 다음 단계로 넘어간다.
3. 낮은 음의 1~6배음 각각이 모두 높은 음의 1~6배음들과 맥놀이를 만들지 않으므로 두 음의 어울림 정도는 6이 된다.

그림 18: <어울림 정도 계산법>

그림 18의 <어울림 정도 계산법>을 이용해서 0~6 범위의 값을 가지는 어울림 정도를 계산할

수 있다. 6배음까지만 조사하는 이유는 앞에서 설명한 것처럼 보통 7배음 이상은 진동수가 높아져서 사람이 느끼는 음색에 거의 영향을 주지 않기 때문이다.

이번 탐구 내용을 요약하면 아래와 같다.

- 배음과 맥놀이의 원리를 바탕으로 진동수비를 이용해서 두 배음이 듣기 불쾌한 맥놀이를 만드는지를 판별할 수 있는 <맥놀이 판별법>을 만들 수 있었다.
- <맥놀이 판별법>을 이용하여 화음의 어울리는 정도 값을 계산할 수 있는 <어울림 정도 계산법>을 만들 수 있었다.

타. <어울림 정도 계산법>을 이용한 화음 분석 (실험 8)

위에서 만든 <어울림 정도 계산법>을 이용하여 직접 음계의 음들 사이의 어울림 정도를 계산해 보기로 하였다(실험 8).

1) 12음계 화음들의 어울림 정도 계산

우선 12음계의 음들에 대해서 배음의 진동수와 진동수비를 계산하고 여기에 <맥놀이 판별법>을 적용해 보았다.

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

		C4					
배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2	523.26	2.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
3	784.89	3.00	1.50	1.00	1.33	1.67	2.00
4	1,046.52	4.00	2.00	1.33	1.00	1.25	1.50
5	1,308.15	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	1.25
6	1,569.78	6.00	3.00	2.00	1.50	1.25	1.00

그림 19: 12음계 음들의 진동수비 및 <맥놀이 판별법>의 적용 결과 (초록색은 맥놀이를 만들지 않는 배음의 쌍을, 빨간색은 맥놀이를 만드는 배음의 쌍을 나타낸다)

그림 19는 12음계 음들에 대해서 계산된 배음 쌍들의 진동수비와 <맥놀이 판별법>을 적용한 결과를 보여준다. 그림에서 초록색으로 표시된 항목들은 맥놀이를 만들지 않는 배음의 쌍들을, 빨간색으로 표시된 항목들은 맥놀이를 만드는 배음의 쌍들을 나타낸다. 예를 들어, C4(가온도)의 1배음(기음)부터 6배음까지의 진동수는 각각 261.63, 523.26, 784.89, 1,046.52, 1,308.15, 1,569.78 Hz이고, G(솔)의 1배음(기음)부터 6배음까지의 진동수는 각각 392.00, 784.00, 1176.00, 1568.00, 1960.00, 2352.00 Hz이다. 예를 들어, C4(가온도)의 1배음과 G(솔)의 1배음의 진동수비는 $392.00/261.63 = 1.50$ 이 되고 이 값에 <맥놀이 판별법>을 적용하면 맥놀이가

만들어지지 않는 것을 알 수 있다. 같은 방법으로 C4(가온도)의 4배음과 G(솔)의 3배음의 진동수비는 $1176.00/1046.52 = 1.12$ 가 되고 이 값에 <맥놀이 판별법>을 적용하면 맥놀이가 만들어지는 것을 알 수 있다.

표 7: <어울림 정도 계산법>을 이용하여 12음계 화음들의 어울림 정도를 계산한 결과

C4와의 화음	C4	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C5
어울림 정도	4	0	0	0	2	2	2	3	2	1	1	1	4
협/불협	협	불협	불협	불협	협	협	협	협	협	불협	불협	불협	협

표 7은 앞의 맥놀이 판별 결과에 <어울림 정도 계산법>을 적용하여 12음계 화음들의 어울림 정도를 계산한 결과이다. C4(가온도)를 기준음으로 했을 때, 서로 배음 관계인 C4, C5가 가장 높은 어울림 정도 4, G(솔)은 높은 어울림 정도 3의 값을 가지는 것을 볼 수 있다. E(미)는 어울림 정도 2의 값을 가지고 D#(레#)은 어울림 정도 0의 값을 가지는 것을 볼 수 있다.

계산된 어울림 정도 값이 2 이상이면 협화음으로, 1 이하이면 불협화음으로 해석할 수 있다. 이러한 결과는 우리가 평소에 음악을 연주하면서 느끼는 화음의 어울림 정도와 잘 맞는 결과인 것을 확인할 수 있다.

2) 10음계 화음들의 어울림 정도 계산

10음계의 음들에 대해서도 배음의 진동수와 진동수비를 계산하고 여기에 <맥놀이 판별법>을 적용해 보았다.

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

배음	진동수	1	2	3	4	5	6
1배음	261.63	523.26	784.89	1,046.52	1,308.15	1,569.78	
2배음	523.26	1,046.52	1,569.78	2,116.34	2,667.97	3,219.60	
3배음	784.89	1,569.78	2,354.67	3,219.60	4,084.52	4,949.39	
4배음	1,046.52	2,116.34	3,219.60	4,084.52	4,949.39	5,814.26	
5배음	1,308.15	2,616.30	3,924.45	5,232.60	6,540.75	7,848.90	
6배음	1,569.78	3,139.56	4,709.34	6,279.12	7,848.90	9,418.68	

그림 20: 10음계 음들의 진동수비 및 <맥놀이 판별법>의 적용 결과 (초록색은 맥놀이를 만들지 않는 배음의 쌍을, 빨간색은 맥놀이를 만드는 배음의 쌍을 나타낸다)

그림 20은 10음계 음들에 대해서 계산된 배음 쌍들의 진동수비와 <맥놀이 판별법>을 적용한 결과를 보여준다. 그림에서 초록색으로 표시된 항목들은 맥놀이를 만들지 않는 배음의 쌍들을, 빨간색으로 표시된 항목들은 맥놀이를 만드는 배음의 쌍들을 나타낸다. 예를 들어, 10음계의 1음의 1배음(기음)부터 6배음까지의 진동수는 각각 261.63, 523.26, 784.89, 1,046.52, 1,308.15, 1,569.78 Hz이고, 10음계의 7음의 1배음(기음)부터 6배음까지의 진동수는 각각 396.56, 793.12, 1189.68, 1586.24, 1982.80, 2379.36 Hz이다. 예를 들어, 10음계의 1음의 1배음과 7음의 1배음의

진동수비는 $396.56/261.63 = 1.52$ 가 되고 이 값에 <맥놀이 판별법>을 적용하면 맥놀이가 만들어지지 않는 것을 알 수 있다. 같은 방법으로 1음의 3배음과 7음의 2배음의 진동수비는 $793.12/784.89 = 1.01$ 이 되고 이 값에 <맥놀이 판별법>을 적용하면 맥놀이가 만들어지는 것을 알 수 있다.

표 8: <어울림 정도 계산법>을 이용하여 10음계 화음들의 어울림 정도를 계산한 결과

1음과의 화음	1음	2음	3음	4음	5음	6음	7음	8음	9음	10음	11음
어울림 정도	4	0	0	2	2	2	2	2	1	1	4
협/불협	협	불협	불협	협	협	협	협	협	불협	불협	협

표 8은 앞의 맥놀이 판별 결과에 <어울림 정도 계산법>을 적용하여 10음계 화음들의 어울림 정도를 계산한 결과이다. 1음(=C4)을 기준으로 했을 때, 배음 관계인 1음과 11음이 가장 높은 어울림 정도값 4를, 5~8음은 높은 어울림 정도값 2를 가지는 것을 볼 수 있다. 9~10음은 어울림 정도값 1을 가지고 2~3음은 어울림 정도값 0을 가지는 것을 볼 수 있다. 12음계에서와 같은 기준을 적용하여 어울림 정도 값이 2 이상이면 협화음으로, 1 이하는 불협화음으로 해석할 수 있다.

<어울림 정도 계산법>을 사용하면 12음계가 아닌 다른 음계의 음들에 대해서 쉽게 화음의 어울림 정도를 계산할 수 있다. 그리고 ‘진동수의 간단한 정수비’라고 하는 이전의 판단 기준은 비교하는 것이 쉽지 않은데, ‘어울림 정도’ 값을 이용하면 쉽게 비교할 수 있다. (즉, 어느 화음이 다른 화음보다 더 어울린다, 어울리지 않는다고 얘기할 수 있게 된다).

이번 탐구(실험 8) 내용을 요약하면 아래와 같다.

- <맥놀이 판별법>과 <어울림 정도 계산법>을 사용하여 12음계의 화음들에 대해서 화음의 어울림 정도를 계산할 수 있었는데, 0~4 사이의 값을 가지는 것으로 확인되었다.
- 어울림 정도 2 이상은 협화음으로, 1 이하는 불협화음으로 판단할 수 있다.
- 12음계에 대한 실험 결과는 우리가 평소에 음악을 연주하면서 느끼는 화음의 어울림 정도와 잘 맞는 결과인 것을 확인할 수 있었다.
- 10음계에 대한 실험을 통해서, <맥놀이 판별법>과 <어울림 정도 계산법>을 사용하면 12음계 외의 다른 여러 음계의 화음들에 대해서 쉽게 어울림 정도를 분석할 수 있음을 확인할 수 있었다.
- 기존의 ‘진동수의 간단한 정수비’ 대신 ‘어울림 정도’ 값을 사용함으로써 화음들 간의 어울림 정도를 서로 비교할 수 있게 되었다.

5. 결론

우리가 음악을 연주하기 위해서 사용하는 악기들은 대부분 한 옥타브에 12개의 음이 들어있는 12음계를 사용하는데 12음계 음들 사이의 규칙성을 알아보기 위한 실험(실험 1)을 통해서 1) 이웃한 음들은 진동수의 비가 일정하며, 2) 옥타브를 이루는 음들 사이의 진동수의 비율이 2가 된다는 사실을 알게 되었다. 이를 과학적으로 탐구하여 이웃한 음들 사이의 진동수의 비율이

1.0595라는 사실을 알게 되었다. 이러한 사실을 바탕으로 옥타브를 이루는 음들의 개수가 12개가 아닌 다양한 수 $N = 8, 9, 10, 11$ 인 음계에 대해서 음들의 진동수를 정확하게 계산할 수 있었다(실험 2). 예를 들어 $N = 10$ 인 10음계의 경우 진동수의 비율 $R = 1.0718$ 을 계산할 수 있었고 이를 이용해서 10개의 음들의 진동수를 차례대로 계산할 수 있었다. 계산된 진동수를 사용하여 10음계 음악을 연주할 수 있는 피아노 프로그램을 스크래치로 작성할 수 있었다. 이를 이용하여 쉽고 익숙한 12음계 음악들을 10음계 음악으로 변환하여 연주해 볼 수 있었다. (실험 3). 이를 통해서 과학적인 계산을 통해서 12음계가 아닌 다른 음계를 만들 수 있고 이 음계를 이용하여 실제로 음악을 연주할 수 있음을 확인할 수 있었다.

12음계 음들 사이의 진동수의 비율을 관찰함으로써 두 음이 만들어 내는 화음이 협화음인지 불협화음인지 판별해 낼 수 있다는 사실을 알게 되었다. 즉, 진동수의 비율이 간단한 정수비에 가까우면 협화음을 이루고 그렇지 않으면 불협화음을 이룬다. 이를 통해서 12음계 음들이 만들어 내는 협화음을 모두 찾아내고 이때의 간단한 정수비를 찾을 수 있었다(실험 4). 이 원리를 앞에서 계산해 낸 10음계 음들에 적용해서 10음계 내의 협화음을 모두 찾아낼 수 있었다(실험 5).

사용이 편리한 스마트폰에서 10음계 음악을 연주하기 위해 앱인벤터를 사용하여 모바일앱을 개발하고 연주해 보았다(실험 6). 그리고 손으로 직접 만질 수 있는 키패드 피아노를 아두이노를 사용하여 만들 수 있었다(실험 7).

두 음의 진동수의 비율이 간단한 정수비가 될 때 협화음이 만들어지고 그렇지 않으면 불협화음이 만들어지는 원리가 궁금하여 심화 탐구를 진행하였다. 관련된 자료 조사를 통해서 알게 된 사실은 화음이 배음과 맥놀이 현상과 관련이 깊다는 것이다. 음악 연주에 사용되는 악기음을 분석하면 진동수가 악기음의 1배(기음), 2배, 3배, ..., N배가 되는 부분음들로 분리가 되는데 이들을 배음이라고 한다. 그리고 두 음의 진동수가 미세하게 차이가 날 때 전체적인 소리의 크기가 커졌다, 작아졌다는 반복하게 되는 현상을 맥놀이라고 한다. 독일의 물리학자 헬름홀츠에 따르면, 두 음의 배음들이 서로 듣기 불쾌한 맥놀이를 만들게 되면 두 음은 불협화음을 이루게 되고, 그렇지 않으면 협화음을 만들게 된다.

두 음의 진동수비를 가지고 듣기 불쾌한 맥놀이를 만드는지를 판별할 수 있는 <맥놀이 판별법>을 고안하였다. 즉, 두 음의 진동수비가 1.002에서 1.224 사이에 있으면 맥놀이가 만들어지는 것으로 판단할 수 있다. 이를 이용하여 두 음의 배음들 사이에 맥놀이가 만들어지는 것을 조사해서 두 음이 서로 얼마나 어울리는지를 나타내는 값인 어울림 정도를 계산할 수 있는 <어울림 정도 계산법>을 만들었다. 즉, 화음을 이루는 음들 중 낮은음의 낮은 차수의 배음부터 시작해서 맥놀이가 만들어지지 않는 것을 확인하는 과정을 반복해서 K배음까지 맥놀이가 만들어지지 않고 K+1 배음에서 맥놀이가 만들어지는 것을 확인하게 되면 어울림 정도 값을 K라고 판단하는 것이다. 7배음 이상은 사람이 느끼는 음색에 거의 영향을 주지 않기 때문에 6배음까지 조사하게 되고 따라서 어울림 정도는 0~6의 값을 가지게 된다.

<맥놀이 판별법>과 <어울림 정도 계산법>을 사용하여 12음계의 화음들에 대해서 어울림

정도를 계산해 할 수 있었는데, 0~4 사이의 값을 가지는 것으로 나왔다(실험 8). 이때 어울림 정도 2 이상은 협화음으로, 1 이하는 불협화음으로 판단할 수 있다는 것을 알게 되었다. 12음계에 대한 결과를 통해서 우리가 평소에 음악을 연주하면서 느끼는 화음의 어울림 정도와 잘 맞는 결과인 것을 확인할 수 있었다. 10음계의 화음들에 대해서도 어울림 정도를 계산할 수 있었는데, 역시 0~4 사이의 값을 가지는 것으로 나왔다. 12음계에서와 같은 기준을 적용하여 협화음과 불협화음을 구분할 수 있었다. 기존의 ‘진동수의 간단한 정수비’ 라고 하는 기준 대신 본 연구에서 제안된 ‘어울림 정도’ 값을 사용함으로써 화음의 어울림 정도를 더 명확한 하나의 값으로 계산할 수 있고, 화음들 간의 어울림 정도를 서로 비교할 수 있게 되었다.

6. 전망 및 활용성

흔히 우리 주변에서 볼 수 있는 악기들은 12 음계로 이루어져 있어 다른 음계로 이루어진 악기의 소리에 대해 호기심이 생기게 되는데, 본 탐구에서 밝혀낸 내용을 활용하면 쉽게 12음계 외 다른 음계를 만들어 볼 수 있다. 본 연구에서 제안된 <맥놀이 판별법>과 <어울림 정도 계산법>을 이용하여 음계 내의 화음의 종류를 분석할 수 있다. 또한 실제로 연주해 볼 수 있도록 실제 건반 형태의 프로그램을 만들어 보았기 때문에 친구들과 함께 다양한 음계를 만들어 볼 수도 있고 쉽게 연주도 가능하다.

음계에 담긴 규칙을 설명하고 이를 쉬운 코딩으로 실제 연주해 볼 수 있도록 코딩 프로그램으로 만들어 교육 자료를 제작해 보면 학생들이 소리와 진동수와의 관계를 재미있게 배워 볼 수 있을 것 같다.

참고문헌

- 보고서 쓰기 참고서: 상상 아카데미 출판사 <과학 탐구보고서 소논문 쓰기>
- 진동수: <https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%A7%84%EB%8F%99%EC%88%98>
- 음계: <https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%9D%8C%EA%B3%84>
- 평균율: <https://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%8F%89%EA%B7%A0%EC%9C%A8>
- 음고 (12음계의 표준 진동수): <https://namu.wiki/w/%EC%9D%8C%EA%B3%A0>
- Online Tone Generator: <https://onlinetonegenerator.com/>
- 스크래치 프로그래밍 언어: <https://scratch.mit.edu/>
- 앱인벤터: <https://appinventor.mit.edu/>
- 아두이노: <https://www.arduino.cc/>
- 화음: <https://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%99%94%EC%9D%8C>
- 음정 (협화음과 불협화음): <https://namu.wiki/w/%EC%9D%8C%EC%A0%95>
- 화음과 배음, 음악 속에 숨어있는 놀라운 과학 이야기:
<https://www.youtube.com/watch?v=JnZmUeUaiTI&t=223s>
- Harmonic series (music): [https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(music))
- 맥놀이: <https://namu.wiki/w/%EB%A7%A5%EB%86%80%EC%9D%B4>
- 맥놀이 현상 실험(소리와 파동 관련 실험): <https://www.youtube.com/watch?v=-2ij6RkDCoo>

- 헤르만 폰 헬름홀츠:
https://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%97%A4%EB%A5%B4%EB%A7%8C_%ED%8F%B0_%ED%97%AC%EB%A6%84%ED%99%80%EC%B8%A0
- 화음과 맥놀이 현상: <https://h.orbi.kr/download/united/58052398/5>
- 2개 소리의 주파수 간격 문제: <https://www.youtube.com/watch?v=Bx1MSpwjWZ4&t=162s>
- Just Noticeable Difference:
[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Waves_and_Acoustics/Book%3A_Sound_-_An_Interactive_eBook_\(Forinash_and_Christian\)/07%3A_Pitch_Loudness_and_Timbre/7.01%3A_Pitch_Loudness_and_Timbre/7.1.04%3A_Just_Noticeable_Difference](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Waves_and_Acoustics/Book%3A_Sound_-_An_Interactive_eBook_(Forinash_and_Christian)/07%3A_Pitch_Loudness_and_Timbre/7.01%3A_Pitch_Loudness_and_Timbre/7.1.04%3A_Just_Noticeable_Difference)

실험 결과 데이터 아카이브

- 음계 연구 실험 데이터:
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1QB2ehDpFxEjTROzZWlspEPW7CfnumO041KesxZLNyg/edit#gid=0>
- 10음계를 연주 할 수 있는 스크래치 프로그램: <https://scratch.mit.edu/projects/891401253>
- 12음계 화음들의 어울림 정도 계산:
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1adWuM6IJyLy0I0IFG4qYkW33YWIG0cUoZIYUHPTTdLc/edit?usp=sharing>
- 10음계 화음들의 어울림 정도 계산:
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1X9SbZV1bxMSQH-5x-KtKdrLZvOAsTmtohu5eVIQafbk/edit?usp=sharing>