1. DFT matrix

他是在說明 N 點的離散傅立葉變換可以用一個 nxm 的矩陣乘法來表示，X=wx，x 是原始的輸入信號，X 是經過離散傅立葉變換得到的輸出信號。一個 nxn 的變換矩陣 w 可以定義成

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

ω是 1 的 n 物方根的主值，大小為$e^{\frac{-2\pi i}{n}}$。

快速傅立葉變換演算法利用矩陣的對稱性與 W 的周期性，以減少乘法所需要的時間(從 O(N^2)降為 O(NlogN))。

三個例子：

1. 兩點：第一列代表是直流成份（總和）和第二列是交流成份（差異）。第一列處理總和的部份，第二列處理相差的部份。 因數 $1/\sqrt{2}$致使整個矩陣規一化。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} / \sqrt{2}$$

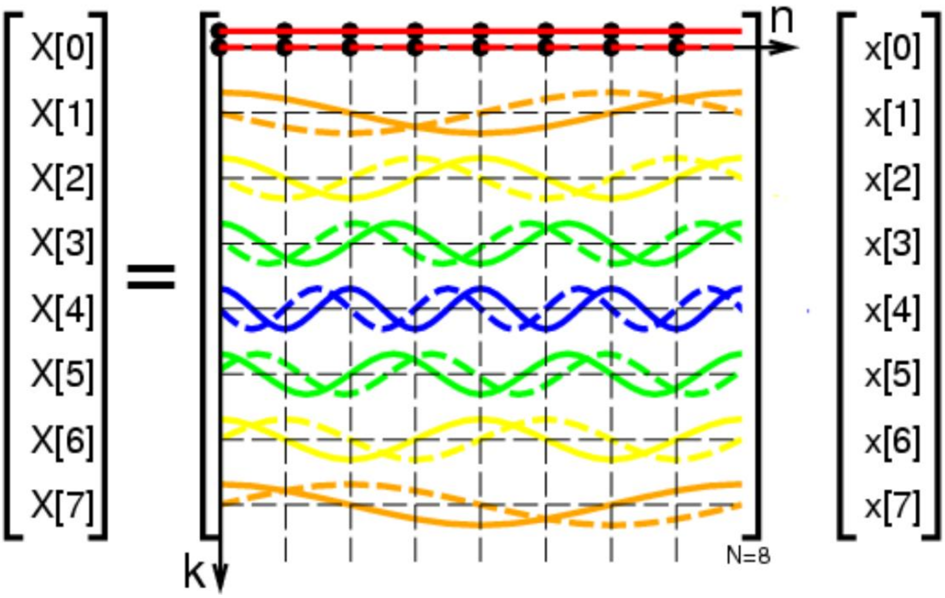
2. 四點：

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

3. 八點：

$$
W = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \dots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^7 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{14} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{21} \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^8 & \dots & \omega^{28} \\ \omega^0 & \omega^5 & \omega^{10} & \dots & \omega^{35} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^7 & \omega^{14} & \dots & \omega^{49} \end{bmatrix}
$$

以下用圖片來解說離散傅立葉變換的矩陣乘法概念：



實部（餘弦波）是由實線代表，虛部（正弦波）由虛線代表。

離散傅立葉變換是一個規一化的變換。

在矩陣中可以看到矩陣不同的變化，在點不同時，矩陣也會有所差異，在上面的途中也可以清楚的看見餘弦波跟正弦波的差別，最上面一行因為乘以根號八分之一來做規一化，所以全為 1，之後會根據倍數跟指數的取樣而產生差別，以分頻表示的話，0 代表直流信號成份，之後根據加減八分之一來增加信號的強度，總體而言離散傅立葉變換對於生活中的聲音信號及數值模擬方面有很大的幫助。

2. DFT

首先它的定義為

對於N點序列$\{x[n]\}_{0\leq n<N}$，它的離散傅立葉變換（DFT）為

$$\hat{x}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}x[n]\qquad k=0,1,\ldots,N-1.$$

其中e是自然對數的底數，i是虛數單位。通常以符號$\mathcal{F}$表示這一變換，即

$$\hat{x}=\mathcal{F}x$$

離散傅立葉變換的逆變換（IDFT）為：

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}nk}\hat{x}[k]\qquad n=0,1,\ldots,N-1.$$

可以記為：

$$x=\mathcal{F}^{-1}\hat{x}$$

實際上，DFT和IDFT變換式中和式前面的歸一化係數並不重要。在上面的定義中，DFT和IDFT前的係數分別為1和$\frac{1}{N}$。有時會將這兩個係數都改成$\frac{1}{\sqrt{N}}$。

可看出他有用到虛數的部分。

原本是連續的時間信號他有對應的連續傅立葉變換，但若系統只能處理有限長的離散信號，就必須將他們離散化，並建立對應的傅立葉變換。他會利用採樣來採樣週期，再根據長度設定採樣點數，在取樣後要將之規一化，就能得到前面定義的離散傅立葉變換，總體來說 DFT 就是先將信號在時域離散化，求其連續傅立葉變換後，再在頻域離散化的結果。

在文章中，還舉例了 DFT 跟 CFT 及 DFT 跟 DTFT 的差別，讓我們能夠反推，他還有提到前幾張教的 windowing，讓我跟前面的章節做了連結，DTFT 中她講到了頻譜的解析度，讓我對頻譜有了更多的認識。之後在從空間的角度分析中可以看見離散傅立葉變換的逆變換。

而在性質方面，作者清楚的說明它具有完全性、正交性、移位定理、週期性普朗歇爾定理與帕塞瓦爾定理的相對應關係，讓我們能簡單明瞭它的功能。

而在生活中的應用 DFT 也提供了很多的幫助，像是快速傅立葉變換、頻譜分析、數據壓縮、解偏微分方程式、OFDM 及長整數與多項式乘法等。從頻譜分析中我們能夠看見它在信號採樣方面有很大的貢獻，在數據壓縮上，因為人體的極限，所以它會將信號的高頻部分除去，讓人類感官較能接受。

總而言之 DFT 讓極限變成平常，使我們能在平常中體驗極限。

3. FFT

FFT 是快速計算序列的離散傅立葉變換或其逆變換的方法。它會通過把 DFT 矩陣分解為稀疏（大多為零）因子之積來快速計算此類變換。它能夠降低 DFT 的 big O，它廣泛的應用於工程、科學和數學領域，總體而言它比 DFT 的計算速度更快，而且值會比較精確。

最常見的 FFT 演算法是庫利-圖基演算法，利用遞迴級分制法做轉換，在研究中也發現它是重新發明高斯的演算法，因為高斯的發現，給我們後人開闢了道路，任我們能在這之中不斷挖寶，做更深入的研究，庫利-圖基演算法

的設計思想也是相當特別，它應用 W 的性質來分解及轉換，使用在蝶形結網路和位反轉中。

有了先前的 DFT 與更加快速的 FFT，我相信對於生活中不管是訊號的應用或是數值的壓縮與轉換都有相當大的幫助，從上面三種轉換中它們的研究都是一步一腳印且非常有秩序的證明出來的，有時我們腦袋不經意的奇異思想，可以為科技帶來強大的改變，我相信對於傅立葉還有很多科學家在持續研究中，往後一定會有更驚人的發現在等著我們。