

# 수학 문제 및 해설 모음집

SNarGo Math Solver

2025년 11월 13일 15시 41분 7초

참고: 이것은 SN의 *SNarGo AI* 에이전트가 직접 수능 문제를 풀어본 뒤에 작성한  
해설을 바탕으로 작성되었습니다.

---

Designed by Dr. Ryun

SNar Lab.

2025.11

SN Academy

---

## 공통 문항

### 문항 1 [2 점]

질문:  $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$  의 값은?

#### 선택지

1. ① 1
  2. ②  $\sqrt{3}$
  3. ③ 3
  4. ④  $3\sqrt{3}$
  5. ⑤ 9
- 

### 문항 1 해설

#### 정답

정답: 1 번(①).

#### 풀이

같은 밑의 거듭제곱  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  과 지수법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned}9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} &= (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\&= 3^{2 \cdot \frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\&= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\&= 3^0 \\&= 1.\end{aligned}$$

#### 난이도

하

## 문항 2

### 문제

배점: 2 점 함수  $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

- ① 7
  - ② 9
  - ③ 11
  - ④ 13
  - ⑤ 15
- 

## 문항 2 해설

### 해설

주어진 극한은 도함수의 정의에 해당하므로  $f'(1)$ 을 구하면 된다.

1. 도함수의 정의:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . 따라서  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$ 이다.
2. 함수  $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 을 미분하면  $f'(x) = 9x^2 + 4$ 이다.
3. 대입:  $f'(1) = 9 \cdot 1^2 + 4 = 13$ .

추가 확인(직접 전개):  $f(1+h) = 3(1+h)^3 + 4(1+h) + 1 = 8 + 13h + 9h^2 + 3h^3$ ,  $f(1) = 8$   
이므로 분자는  $13h + 9h^2 + 3h^3 = h(13 + 9h + 3h^2)$ 이고, 따라서 극한은 13이다.

정답: 13 (선택지 ④)

난이도: 하

### 문제 3

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^4 (2a_k - k) = 0$  일 때,  $\sum_{k=1}^4 a_k$ 의 값은? [3 점]

#### 보기

1. 1
  2. 2
  3. 3
  4. 4
  5. 5
- 

### 해설 3

#### 단계별 풀이

1. 주어진 식을 전개하면  $2 \sum_{k=1}^4 a_k - \sum_{k=1}^4 k = 0$  이다.
2.  $\sum_{k=1}^4 k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  이므로,  $S = \sum_{k=1}^4 a_k$  라고 두면  $2S - 10 = 0$  이다.
3. 따라서  $S = 5$  이다.

#### 최종 정답

정답: 5 (⑤)

#### 난이도

하

## 문항 4: 함수

### 정의

함수  $f(x)$ 를 다음과 같이 정의 한다:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & (x < 1) \\ x^2 - 3x + a, & (x \geq 1) \end{cases}$$

### 질문

이 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3 점]

### 선택지

- (1) 1
  - (2) 2
  - (3) 3
  - (4) 4
  - (5) 5
- 

## 문항 4 해설

1. 함수가 전제에서 연속이려면  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$  이어야 한다.
2. 왼쪽 극한:  $x < 1$  구간에서  $f(x) = 3x - 2$  이므로  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ 이다.
3. 오른쪽 극한과 함수값:  $x \geq 1$  구간에서  $f(x) = x^2 - 3x + a$  이므로  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + a = a - 2$ 이다.
4. 연속이므로  $a - 2 = 1$ 이고, 따라서  $a = 3$ 이다.

따라서 상수  $a$ 의 값은 3이다. (선택지 (3))

난이도: 하

## 문제 5

### 지문

함수  $f(x) = (x + 2)(2x^2 - x - 2)$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은?

### 요구

$f'(1)$ 의 값

### 배점

3 점

### 선택지

1. 6
  2. 7
  3. 8
  4. 9
  5. 10
- 

## 해설 5

### 정답

(3) 8

### 풀이

1.  $f(x)$ 를 전개한다:

$$f(x) = (x + 2)(2x^2 - x - 2) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4.$$

2. 미분한다:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 4.$$

3.  $x = 1$  을 대입한다:

$$f'(1) = 6(1)^2 + 6(1) - 4 = 8.$$

### 난이도

하

## 문제 6

1 보다 큰 두 실수  $a, b$ 가 다음을 만족시킬 때,  $\log_9(ab)$ 의 값은 무엇인가? [3 점]

$$\log_a b = 3, \quad \log_3 \left( \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2}$$

1.  $\frac{3}{8}$

2.  $\frac{1}{2}$

3.  $\frac{5}{8}$

4.  $\frac{3}{4}$

5.  $\frac{7}{8}$

난이도: 하

---

## 해설 6

정답: (2)  $\frac{1}{2}$

### 풀이

1.  $\log_a b = 3$  이므로  $b = a^3$ .

2.  $\log_3 \left( \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2}$  이므로  $\frac{b}{a} = 3^{1/2}$ .

3. 대입하면  $\frac{a^3}{a} = a^2 = 3^{1/2}$  이므로  $a = 3^{1/4}$  ( $a > 1$  이므로 양의 해).

4. 따라서  $b = a^3 = 3^{3/4}$ ,  $ab = a \cdot b = a^4 = (3^{1/4})^4 = 3$ .

5. 그러므로  $\log_9(ab) = \log_9 3 = \frac{1}{2}$ .

따라서 최종 정답은  $\frac{1}{2}$ 이며, 선택지는 (2)이다.

난이도: 하

## 문제 7

두 곡선  $y = x^2 + 3$ ,  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 과 직선  $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 무엇인가? [3 점]

### 보기

1.  $\frac{18}{5}$
2.  $\frac{7}{2}$
3.  $\frac{17}{5}$
4.  $\frac{33}{10}$
5.  $\frac{16}{5}$

### 그림 설명

- 좌표축은 수평  $x$  축과 수직  $y$  축으로, 원점  $O$ 에서 교차한다. 축 끝에는 각각  $x$ ,  $y$  라벨이 있다.
- 포물선  $y = x^2 + 3$ 은 위로 열린 포물선으로  $y$  축 대칭이며, 그래프 좌상단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 포물선  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 은 아래로 열린 포물선으로  $y$  축 대칭이며, 그래프 좌하단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 두 포물선은  $y$  축 위의 한 점에서 서로 접하며, 그 점은 원점 위쪽에 있다.
- 직선  $x = 2$ 는  $y$  축의 오른쪽에 있는 수직선이며, 선 아래쪽 근처에 라벨이 있다.
- 음영 영역은 원쪽 경계가 두 포물선의 접점, 오른쪽 경계가 직선  $x = 2$ 이고, 위쪽 경계는  $y = x^2 + 3$ , 아래쪽 경계는  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이다. 위치는  $y$  축의 오른쪽,  $x = 2$ 의 왼쪽에 있다.

## 해설 7

### 풀이

- 두 곡선의 교점은  $x^2 + 3 = -\frac{1}{5}x^2 + 3 \Rightarrow \frac{6}{5}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3$ 이다. -  $x > 0$ 에서  $x^2 + 3 > -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이므로, 구간  $0 \leq x \leq 2$ 에서 위쪽 곡선은  $y = x^2 + 3$ , 아래쪽 곡선은  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이다. - 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^2 [(x^2 + 3) - (-\frac{1}{5}x^2 + 3)] dx = \int_0^2 \frac{6}{5}x^2 dx = \frac{6}{5} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{5}.$$

정답

5 번,  $\frac{16}{5}$

## 8. 문제

조건:  $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0$ , 그리고  $\cos(\pi - \theta) > 0$ . 물음:  $\sin \theta$ 의 값은? [3 점]

선택지:

1.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. 0

4.  $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

5.  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

난이도: 하

---

## 8. 해설

정답: (1)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

1.  $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = -3 \cos \theta$ .

2. 항등식  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면  $9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$ .

3. 따라서  $|\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $|\sin \theta| = \frac{3}{\sqrt{10}}$ .

4.  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta > 0 \Rightarrow \cos \theta < 0$ .

5.  $\sin \theta = -3 \cos \theta$  이므로  $\cos \theta$ 가 음수일 때  $\sin \theta$ 는 양수. 따라서  $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

최종 정답: (1)

## 문항 9

### 가정

$a$ 는 양수.

### 함수

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 4.$$

### 조건

직선  $y = 5$  가 곡선  $y = f(x)$ 에 접한다.

### 질문

$f(2)$ 의 값은?

### 배점

[4 점]

### 선택지

1. (1) 11
2. (2) 12
3. (3) 13
4. (4) 14
5. (5) 15

### 난이도

중

---

## 문항 9 해설

### 정답

선택지 (4), 값은 14.

## 해설

1. 접선  $y = 5$ 가  $y = f(x)$ 에 접한다는 것은 어떤  $c$ 에 대해  $f(c) = 5$ 이고, 접선의 기울기가 0이므로  $f'(c) = 0$ 임을 뜻한다.
2.  $f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 3(x - a)(x + 3a)$ 이므로 임계점은  $x = a, x = -3a$ 이다.
3. 따라서  $f(a) = 5$  또는  $f(-3a) = 5$  중 하나여야 한다.
  - $f(a) = a^3 + 3aa^2 - 9a^2a + 4 = 4 - 5a^3$ . 만약  $f(a) = 5$ 이면  $4 - 5a^3 = 5 \Rightarrow a^3 = -\frac{1}{5}$  가 되어  $a > 0$ 와 모순이다.
  - $f(-3a) = -27a^3 + 27a^3 + 27a^3 + 4 = 27a^3 + 4$ .  $27a^3 + 4 = 5 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$  (단,  $a > 0$ ).
4.  $a = \frac{1}{3}$ 에서  $f(2)$ 를 계산하면

$$f(2) = 8 + 12a - 18a^2 + 4 = 12 + 12a - 18a^2 = 12 + \frac{12}{3} - 18 \cdot \frac{1}{9} = 12 + 4 - 2 = 14.$$

## 최종 답

14 (선택지 (4))

## 문항 10

### 주어진 정보

- 상수  $a$ 는  $a > 1$ 이다.
- 곡선:  $y = a^x - 2$ .
- 제 1 사분면의 곡선 위 점  $A$ 를 잡는다.  $A$ 의  $x$  좌표를  $t$ 라 두면  $A = (t, a^t - 2)$ 이며  $t > 0, a^t - 2 > 0$ 이다.
- $A$ 를 지나는  $y$  축에 평행한 직선:  $x = t$ .
  - $x = t$ 가  $x$  축 ( $y = 0$ )과 만나는 점:  $B = (t, 0)$ .
  - $x = t$ 가 곡선  $y = a^x - 2$ 의 점근선  $y = -2$ 와 만나는 점:  $C = (t, -2)$ .
- 길이
  - $AB$ 는  $x = t$  위의 수직선분이므로  $|AB| = (a^t - 2) - 0 = a^t - 2$ .
  - $BC$ 는  $x = t$  위의 수직선분이므로  $|BC| = 0 - (-2) = 2$ .
- 조건:  $|AB| = |BC|$ .
- 점  $O$ 는 원점  $O = (0, 0)$ 이다.
- 삼각형  $AOC$ 의 넓이는 8이다.
- $OB$ 는 원점에서  $B$ 까지의 거리로,  $B$ 가  $x$  축 위에 있으므로  $|OB| = t$ 이다.

### 질문

$a \times |OB|$ 의 값, 즉  $a \times t$ 를 구하여라.

### 선택지

- (1)  $2^{13/6}$
- (2)  $2^{7/3}$
- (3)  $2^{5/2}$
- (4)  $2^{8/3}$
- (5)  $2^{17/6}$

### 배점

[4 점]

## 문항 10 해설

### 정답

(3)  $2^{5/2}$

### 해설

1.  $|AB| = a^t - 2, |BC| = 2$  이고  $|AB| = |BC|$  이므로  $a^t - 2 = 2 \Rightarrow a^t = 4$  이다.
2. 삼각형  $AOC$ 의 넓이를 이용한다.  $O = (0, 0), a^t = 4$  이므로  $A = (t, 2), C = (t, -2)$  이다. 두 벡터  $\overrightarrow{OA} = (t, 2), \overrightarrow{OC} = (t, -2)$ 의 행렬식은  $t \cdot (-2) - 2 \cdot t = -4t$  이므로 넓이는
 
$$\frac{1}{2} |t \cdot (-2) - 2 \cdot t| = \frac{1}{2} \cdot 4t = 2t$$
 이다. 조건에 따라  $2t = 8$  이므로  $t = 4$  이다.
3.  $a^t = 4, t = 4$  이므로  $a^4 = 4$  이고  $a = 2^{1/2}$  이다.
4. 따라서  $a \times |OB| = a \times t = 2^{1/2} \times 4 = 4\sqrt{2} = 2^{5/2}$  이다.

### 점증

$a = \sqrt{2} > 1, t = 4 > 0, A = (4, 2)$  는 제 1 사분면에 있고  $|AB| = 2 = |BC|$ 로 모든 조건을 만족한다.

## 11. 문제

시각  $t = 0$  일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점  $P$  가 있다. 실수  $k$  에 대하여 시각  $t$  ( $t \geq 0$ ) 일 때 점  $P$  의 속도  $v(t)$  가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4 점]

### 보기

- ㄱ.  $k = 0$  이면, 시각  $t = 1$  일 때 점  $P$ 의 위치는  $\frac{13}{3}$  이다.
- ㄴ.  $k = 3$  이면, 출발한 후 점  $P$ 의 운동 방향이 한 번 바뀐다.
- ㄷ.  $k = 5$  이면, 시각  $t = 0$  에서  $t = 2$  까지 점  $P$  가 움직인 거리는 3 이다.

### 선택지

- ① ㄱ
  - ② ㄱ, ㄴ
  - ③ ㄱ, ㄷ
  - ④ ㄴ, ㄷ
  - ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ
- 

## 11. 해설

1. 일반식: 위치 함수  $s(t) = \int v(t) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{k}{2}t^2 + 4t$  이고, 원점 출발이므로  $s(0) = 0$  이다.
2. (ㄱ)  $k = 0$  이면  $v(t) = t^2 + 4$  이므로  $s(1) = \frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1 = \frac{13}{3}$  이다. 따라서 참이다.
3. (ㄴ)  $k = 3$  이면  $v(t) = t^2 - 3t + 4$  이다. 판별식  $\Delta = 9 - 16 < 0$  이므로 모든  $t$  에서  $v(t) > 0$  이다. 따라서 운동 방향 변화가 없으므로 거짓이다.
4. (ㄷ)  $k = 5$  이면  $v(t) = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$  이다. 구간  $[0, 1]$  에서는  $v > 0$ , 구간  $(1, 2]$  에서는  $v < 0$  이므로 이동 거리는

$$\int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 |v(t)| dt = \int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 (-v(t)) dt = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3$$

이다. 따라서 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이며, 최종 정답은 ③(ㄱ, ㄷ)이다.

## 문제 12

등비수열  $\{a_n\}$  이]

$$2(a_1 + a_4 + a_7) = a_4 + a_7 + a_{10} = 6$$

을 만족시킬 때,  $a_{10}$ 의 값은? [4 점]

1.  $\frac{22}{7}$

2.  $\frac{24}{7}$

3.  $\frac{26}{7}$

4.  $\frac{30}{7}$

5.  $\frac{32}{7}$

난이도: 중

## 해설 12

정답: 2 번,  $a_{10} = \frac{24}{7}$

1. 등비수열에서  $a_4 + a_7 + a_{10} = r^3(a_1 + a_4 + a_7)$  이다.

2. 주어진 조건에서  $a_1 + a_4 + a_7 = 3$ ,  $a_4 + a_7 + a_{10} = 6$  이므로  $r^3 = \frac{6}{3} = 2$  이다.

3.  $a_1 = \frac{3}{1+r^3+r^6} = \frac{3}{1+2+4} = \frac{3}{7}$  이다.

4. 따라서  $a_{10} = a_1 r^9 = \frac{3}{7} \cdot 2^3 = \frac{24}{7}$  이다.

## 문제 13

함수  $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여, 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, -6)$ 에서의 접선을  $l$ 이라 하고, 함수  $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(1, 6)$ 에서의 접선을  $m$ 이라 하자. 두 직선  $l, m$ 과  $y$  축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 얼마인가? [4 점]

1. 21
  2. 28
  3. 35
  4. 42
  5. 49
- 

## 해설 13

정답: 5

1. 함수  $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여  $f(1) = -6, f'(x) = 2x - 4$  이므로  $f'(1) = -2$ 이다. 따라서 점  $(1, -6)$ 에서의 접선  $l$ 의 방정식은

$$y - (-6) = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x - 4$$

이고,  $y$  절편은  $(0, -4)$ 이다.

2. 함수  $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곱의 미분법을 적용하면

$$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$$

이다. 점  $x = 1$ 에서

$$g(1) = (1^3 - 2 \cdot 1)f(1) = (-1)(-6) = 6,$$

$$g'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2)f(1) + (1^3 - 2 \cdot 1)f'(1) = (1)(-6) + (-1)(-2) = -6 + 2 = -4$$

이므로, 점  $(1, 6)$ 에서의 접선  $m$ 의 방정식은

$$y - 6 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 10$$

이고,  $y$  절편은  $(0, 10)$ 이다.

3. 두 직선  $l : y = -2x - 4, m : y = -4x + 10$ 의 교점을 구하면

$$-2x - 4 = -4x + 10 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7,$$

$$y = -2 \cdot 7 - 4 = -18$$

이다. 따라서 세 꼭짓점은  $A(0, -4), B(0, 10), C(7, -18)$ 이다.

4. 넓이는  $y$  축을 밑변으로 보면 밑변의 길이는  $|10 - (-4)| = 14$ , 높이는 점  $C$ 에서  $y$  축까지의 거리  $|7| = 7$ 이다. 따라서 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49$$

이다. (검산:  $\frac{1}{2}|7(-4 - 10)| = 49$ )

최종 정답: **49** (선택지 5)  
난이도: 중

## 문항 14

그림 정보(정확한 기하 구성만 기술, 해설/추론 없음)

- 기본 도형과 길이/각
  - 직각삼각형  $ABC$ :  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $\angle B = \pi/2$ .
  - 좌표 표현(인식 명확화를 위한 한 가지 일관된 배치):  $B = (0, 0)$ ,  $A = (-3, 0)$ ,  $C = (0, 4)$ . 그러면  $AC = 5$ .
  - 선분  $AB$ 를  $2 : 1$ 로 내분하는 점  $D$ :  $AD : DB = 2 : 1 \Rightarrow D = (-1, 0)$ ,  $AD = 2$ .
- 원과 교점
  - 원  $\omega_1$ : 중심  $A$ , 반지름  $AD = 2$ .
    - \* 직선  $AB$ 와의 교점:  $D$ 와  $F$ .  $F$ 는  $D$ 가 아닌 쪽의 교점  $\Rightarrow F = (-5, 0)$ .
    - \* 선분  $AC$ 와의 교점( $A$ 가 아닌 점)  $E \Rightarrow E = \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ .
  - 호  $EF$  위의 점  $G$ 를 잡되( $\omega_1$  위,  $D$ 를 포함하지 않는  $EF$  호),  $CG = 2\sqrt{6}$ .
  - 원  $\Omega$ : 세 점  $C, E, G$ 를 지나는 원(따라서  $\Omega \cap \omega_1 = \{E, G\}$ ).
  - 점  $H$ :  $\Omega$  위의 점이며  $\angle HCG = \angle BAC$ .
- 그림에 그려진 선/표기
  - $AB$ 는 수평선(그 위에  $F, A, D, B$  순서).  $BC$ 는 수직선( $B$ 에서 위로, 끝점  $C$ ).  $AC$ 는  $A$ 에서  $C$ 로 향하는 사선이며  $E$ 를 지난다.
  - $\omega_1$ (중심  $A$ , 반지름 2)과  $\Omega$ (세 점  $C, E, G$ 를 지나는 원)가 서로 교차하며 교점은  $E$ 와  $G$ .
  - $\Omega$  내부에는 현  $HC, HG, GC$ 가 그려져 있고, 현  $CE$ 도 표시됨.
  - $B$ 에서의 직각 표시( $\angle ABC = 90^\circ$ )가 있음.
  - $A$ 에서 작은 호 표시로  $\angle BAC$ 가 표기됨.
  - $C$ 에서 작은 호 표시로  $\angle HCG$ 가 표기되어  $\angle HCG = \angle BAC$  조건을 시각화.
- 선택지(길이  $GH$ )
  1.  $\frac{6\sqrt{15}}{5}$
  2.  $\frac{38\sqrt{10}}{25}$
  3.  $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
  4.  $\frac{32\sqrt{15}}{25}$
  5.  $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

## 해설

1. 좌표 배치:  $B = (0, 0)$ ,  $A = (-3, 0)$ ,  $C = (0, 4) \Rightarrow AC = 5$ .  $D = (-1, 0)$ ,  $AD = 2$ . 원  $\omega_1$ :  $(x + 3)^2 + y^2 = 4$ .

2. 점  $E$ :  $AC$  위에서  $AE = 2$  이므로 매개변수  $t = \frac{2}{5}$ . 따라서

$$E = A + \frac{2}{5}(C - A) = \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad CE = \frac{3}{5}|AC| = 3.$$

3. 점  $G$ :  $\omega_1$  위이며  $CG = 2\sqrt{6}$ . 두 원  $(x + 3)^2 + y^2 = 4$ 와  $x^2 + (y - 4)^2 = 24$ 의 교점은 직선  $6x + 8y + 13 = 0$  위에 있다. 해를 구하면

$$x = \frac{-27 \pm 4\sqrt{15}}{10}, \quad y = \frac{-13 - 6x}{8}.$$

호  $EF$ 에 해당하는 점은

$$G = \left( \frac{-27 - 4\sqrt{15}}{10}, \frac{4 + 3\sqrt{15}}{10} \right).$$

4. 중심  $A$ , 반지름 2의 원 위에서  $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{12}{10}, \frac{16}{10}\right)$ ,  $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{3-4\sqrt{15}}{10}, \frac{4+3\sqrt{15}}{10}\right)$ . 내적  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$  이므로

$$\cos \angle EAG = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

따라서 현  $EG$ 의 길이

$$EG = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\angle EAG}{2} = 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \angle EAG}{2}} = 4 \sqrt{\frac{1 - 1/4}{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 삼각형  $CEG$ 의 변 길이:  $CE = 3$ ,  $CG = 2\sqrt{6}$ ,  $EG = \sqrt{6}$ . 헤론 공식을 사용하면 넓이  $\Delta$ 는

$$s = \frac{3 + 2\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{2}, \quad \Delta = \sqrt{s(s - 3)(s - 2\sqrt{6})(s - \sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

외접반지름  $R$ 은

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{4 \cdot (3\sqrt{15}/4)} = \frac{4\sqrt{15}}{5}.$$

6. 점  $H$ 는  $\Omega$  위에서  $\angle HCG = \angle BAC$ . 직각삼각형  $ABC$ 에서  $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$ . 원의 성질(현의 길이 공식)로부터

$$GH = 2R \sin \angle HCG = 2 \cdot \frac{4\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}.$$

따라서 정답은 4 번이다. 선택지는 (4)에 해당한다.

## 문항 15

### 문제

다음과 같이 정의된 함수들이 주어진다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$a > 0$ 인 양수에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} ax + a, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x < 1 \\ ax - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

또한

$$h(x) = \int_0^x (g(t) - f(t)) dt$$

로 정의한다.

정의:  $h(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는  $a$ 의 최댓값을  $k$ 라 한다.  $a = k$  일 때  $k + h(3)$ 의 값을 구하라. [4 점]

### 선택지

1.  $\frac{9}{2}$

2.  $\frac{11}{2}$

3.  $\frac{13}{2}$

4.  $\frac{15}{2}$

5.  $\frac{17}{2}$

## 문항 15

### 해설

정답: 4 번

1.  $g$ 와  $f$ 가 연속이므로  $h'(x) = g(x) - f(x)$ 이다. 극값은  $h'(x) = 0$ 에서 부호가 바뀌는 지점에서만 생긴다.

2. 구간별  $h'(x)$ 는 다음과 같다.

$$h'(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 0, \\ -x^2 + x = x(1-x), & 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + (a+1)x - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

특히  $x \in [-1, 1]$ 에서  $h'(x) \geq 0$ 이고,  $x = 0, 1$ 에서만 0이 된다.  $x = 0$ 에서는 좌우 부호가 모두 양이므로 극값이 없다.

3.  $x < -1$ 에서  $h'(x) = x^2 + ax + a$ 의 판별식은  $a^2 - 4a = a(a-4)$ 이다.

- $a < 4$ : 근이 없어서 항상 양이므로 극값이 생기지 않는다.
- $a = 4$ :  $(x+2)^2$ 로 중근이 되어 부호 변화가 없으므로 극값이 생기지 않는다.
- $a > 4$ : 서로 다른 두 실근이 둘 다  $-1$ 보다 작고 부호가  $+ \rightarrow - \rightarrow +$ 로 바뀌어 이 구간에서만 극값이 두 개 생긴다.

따라서 극값이 하나만 되려면 반드시  $a \leq 4$ 여야 한다.

4.  $x \geq 1$ 에서  $h'(x) = -x^2 + (a+1)x - a$ 를 본다.

- $0 < a < 1$ :  $x > 1$ 에서  $h'(x) < 0$ 이므로  $x = 1$ 에서  $+ \rightarrow -$ 로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다.
- $a = 1$ :  $h'(x) = -(x-1)^2 \leq 0$ 이므로 역시  $x = 1$ 에서 극값이 한 개 생긴다.
- $1 < a \leq 4$ :  $h'(x) = -(x-1)(x-a)$ 이므로  $(1, a)$ 에서는 양,  $x > a$ 에서는 음이다. 따라서  $x = a$ 에서만  $+ \rightarrow -$ 로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다.  $x = 1$ 에서는 부호 변화가 없다.

결론적으로  $0 < a \leq 4$ 에서 극값은 정확히 한 개이고,  $a > 4$ 에서는 이미 좌측에서 두 개가 생긴다. 따라서  $k = 4$ 이다.

5. 이제  $a = k = 4$ 일 때  $h(3)$ 을 구한다.

$$\int_0^3 g(t) dt = \int_1^3 (4t-4) dt = [2t^2 - 4t]_1^3 = 8,$$

$$\int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 (t^2 - t) dt = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

따라서  $h(3) = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$ 이고,

$$k + h(3) = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}.$$

최종 정답: 4 번,  $\frac{15}{2}$

## 문항 16

### 문제

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = n^2 a_n + 1$ 을 만족시킨다.  $a_3$ 의 값을 구하시오. [3 점]

### 주어진 조건

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n^2 a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

---

## 문항 16 해설

### 정답

$$a_3 = 9$$

### 해설

1. 초기값은  $a_1 = 1$ 이다.
2.  $n = 1$ 을 대입하면  $a_2 = 1^2 \cdot a_1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$ 이다.
3.  $n = 2$ 를 대입하면  $a_3 = 2^2 \cdot a_2 + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ 이다.

따라서  $a_3$ 의 값은 9이다.

## 문항 17

### 문제

함수  $f(x) = 4x^3 - 2x$ 의 한 부정적분  $F(x)$ 에 대하여  $F(0) = 4$  일 때,  $F(2)$ 의 값을 구하시오.

### 배점

[3 점]

---

## 문항 17 해설

### 정답

16

### 해설

- 함수  $f(x) = 4x^3 - 2x$ 의 한 부정적분은 항별로 적분하여 다음과 같다.

$$F(x) = \int (4x^3 - 2x) dx = x^4 - x^2 + C.$$

- 조건  $F(0) = 4$ 를 대입하면  $C = 4$  이다.
- 따라서  $F(2)$ 는 다음과 같다.

$$F(2) = 2^4 - 2^2 + 4 = 16 - 4 + 4 = 16.$$

최종 정답: 16

## 문항 18

다음 조건을 만족하는 삼각형  $\triangle ABC$ 에서 넓이를 구하시오. [3 점]

### 조건

- $|AB| = 5$
  - $|AC| = 6$
  - $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$
- 

## 문항 18 해설

1. 삼각형의 넓이 공식  $S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle BAC)$  을 사용한다.
2.  $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$  이고  $\angle BAC$  는 삼각형의 내부 각이므로  $\sin(\angle BAC) > 0$  이다.  
따라서

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

3. 넓이는

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12.$$

따라서 삼각형  $\triangle ABC$ 의 넓이는 12이다.

난이도: 하

## 문제 19

$-2 \leq x \leq 2$  인 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음 부등식

$$-k \leq 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8 \leq k$$

이) 성립하도록 하는 양수  $k$ 의 최솟값을 구하시오. [3 점] 조건:  $k > 0$

---

## 해설 19

1. 함수  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ 에 대하여,  $-k \leq f(x) \leq k$  가  $[-2, 2]$ 의 모든  $x$ 에서 성립하려면  $k$ 의 최솟값은

$$k = \max_{x \in [-2, 2]} |f(x)|$$

이다.

2. 도함수는  $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$  이므로 임계점은  $x = -2, 1$  이고, 끝점  $x = -2, 2$  와 함께 값을 계산한다.

$$f(-2) = 2(-8) + 3(4) - 12(-2) - 8 = 12,$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 - 8 = -15,$$

$$f(2) = 16 + 12 - 24 - 8 = -4.$$

3. 절댓값은 각각  $|f(-2)| = 12$ ,  $|f(1)| = 15$ ,  $|f(2)| = 4$  이므로 구간  $[-2, 2]$ 에서의 최대값은 15이다.

따라서  $k$ 의 최솟값은 15이다. 정답: 15

## 문제 20

수열  $\{a_n\}$  이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1 = 7$
- 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10$$

다음은  $\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1}$  의 값을 구하는 과정이다.  
2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k$  이므로

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + [ ]$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n + a_{n+1} = 3 \times [ ]$$

(ㄱ)

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \quad (n \geq 2)$$

에서 양변에  $n = 2$ 를 대입하면

$$a_2 = [ ]$$

(ㄴ)

(ㄱ)과 (ㄴ)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = [ ]$$

위의 [가]에 알맞은 식을  $f(n)$  이라 하고, [나], [다]에 알맞은 수를 각각  $p, q$  라 할 때,  
 $\frac{p \times q}{f(12)}$ 의 값을 구하시오. [4 점]

## 해설 20

1. 부분합  $S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$  가 주어졌으므로,  $n \geq 2$ 에서

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S(n+1) - S(n) = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \left[ \frac{1}{6}((n+1)^2 - n^2) - \frac{1}{6}((n+1) - n) \right] \\ &= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

따라서  $[ ] = f(n) = \frac{n}{3}$  이고, 정리하면  $2a_n + a_{n+1} = 3 \cdot \frac{n}{3} = n$  ( $n \geq 2$ ) 이다.

2.  $n = 2$  를 부분합 식에 대입하면

$$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 2 + 10,$$

$$7 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3} + 10,$$

따라서  $a_2 = 10$  이므로  $[ ] = p = 10$ 이다.

3. 구하려는 합은

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = 7 + 10 + \sum_{k=1}^5 (2k + 1).$$

위에서  $2a_n + a_{n+1} = n$  을  $n = 2k + 1$ 에 적용하였다.

$$= 17 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11) = 17 + 35 = 52.$$

따라서  $[ ] = q = 52$ 이다.

4.  $f(12) = \frac{12}{3} = 4$  이므로

$$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130.$$

정답: 130

## 문제 21

최고차항의 계수가 양수인 삼차 함수  $f(x)$  와 실수  $t$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x), & x < t, \\ f(x), & x \geq t \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $a$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$  의 값이 존재한다.

(나)  $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$  의 값이 음수가 되도록 하는 자연수  $m$ 의 집합은  $\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\}$  이다.

$g(-5)$ 의 값을 구하시오. (단,  $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$ ) [4 점]

---

## 해설 21

### 1. 조건 (가)로부터의 기본 형태

$a = 0, 2$ 에서 우극한이 유한하게 존재하려면 분모  $x(x-2)$  가 0 이 되는 점에서 분자  $g(x)$  도 0 이어야 한다.  $g$ 는 연속이므로  $g(0) = g(2) = 0$ , 따라서  $f(0) = f(2) = 0$  이다. 최고차항 계수가 양수인 삼차 함수  $f$ 는

$$f(x) = a x(x-2)(x-b) \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}).$$

또한  $x = t$ 에서  $g$ 가 연속이려면  $-f(t) = f(t)$  이어야 하므로  $f(t) = 0$ , 따라서

$$t \in \{0, 2, b\}.$$

아울러  $x \neq 0, 2$ 에서는

$$\frac{f(x)}{x(x-2)} = a(x-b), \quad \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(x-b), & x < t, \\ a(x-b), & x \geq t. \end{cases}$$

### 2. 집합 $M$ 의 정의와 경우 나누기

$M := \{m \in \mathbb{N} \mid \lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0\}$  라고 하자.  $t$ 의 값에 따라  $M$ 을 분석한다.

(1)  $t = 0$ 인 경우  $m \geq 1$ 에서  $x \rightarrow m^+$ 이면  $x \geq t$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b)$ 이다. 따라서

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid m < b\}.$$

$M$  이 두 원소를 가지려면  $2 < b \leq 3$  이고  $M = \{1, 2\}$  이다. 한편  $t = 0$  이면

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \quad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \quad -\frac{7}{2}g(1) = \frac{7}{2}a(b-1).$$

$\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\} = \{1, 2\}$  를 만족시키는 배치를 풀어 보면

$$3a(1+b) = 1, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 2 \Rightarrow b = -8 \quad (2 < b \leq 3 \text{ 과 모순}),$$

$$3a(1+b) = 2, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 1 \Rightarrow b = \frac{2}{5} \quad (2 < b \leq 3 \text{ 과 모순}).$$

따라서  $t \neq 0$ .

(2)  $t = b$  인 경우  $x \rightarrow m+$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(m-b) = a(b-m) > 0, & m < b, \\ a(m-b) > 0, & m > b, \\ 0, & m = b. \end{cases}$$

즉, 항상 음수가 아니므로  $M = \emptyset$ . 이는 (나)와 모순이므로  $t \neq b$ .

(3)  $t = 2$  인 경우 이때는

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = -a(1-b) = a(b-1) = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(2-b),$$

$$\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b)$$

따라서 부호 조건은

$$m = 1 : a(b-1) < 0 \Leftrightarrow b < 1,$$

$$m = 2 : a(2-b) < 0 \Leftrightarrow b > 2,$$

$$m \geq 3 : a(m-b) < 0 \Leftrightarrow m < b.$$

$M$  이 두 원소가 되려면  $3 < b \leq 4$  이고  $M = \{2, 3\}$  뿐이다.

### 3. 조건 (나)로부터 매개변수 결정

(나)에 의해  $\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\} = \{2, 3\}$  이다.  $t = 2$  이므로

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \quad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \quad -\frac{7}{2}g(1) = \frac{7}{2}a(b-1).$$

두 수의 배치를 나누어 풀면

$$3a(1+b) = 3, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{14}, \quad b = \frac{11}{3} \quad (3 < b \leq 4 \text{ 충족}),$$

$$3a(1+b) = 2, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 3 \Rightarrow b = -8 \quad (3 < b \leq 4 \text{ 와 모순}).$$

따라서  $a = \frac{3}{14}$ ,  $b = \frac{11}{3}$ ,  $t = 2$ . 또한  $g(-1) = 3$ ,  $-\frac{7}{2}g(1) = 2$ 로 서로 달라  $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$  을 만족한다.

### 4. 최종 계산

$-5 < t$  이므로  $g(-5) = -f(-5)$ . 계산하면

$$\begin{aligned} f(-5) &= a \cdot (-5)(-7)\left(-5 - \frac{11}{3}\right) = a \cdot 35 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right), \\ &= \frac{3}{14} \cdot 35 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right) = -65, \quad \therefore g(-5) = 65. \end{aligned}$$

최종 정답: 65

## 문항 22

다음 조건을 만족하는 두 곡선과 점들에 대하여  $p + q$ 를 구하여라.

1. 곡선 1:  $y = \log_{16}(8x + 2)$ .
2. 점  $A = (a, b)$ 는 곡선 1 위의 점이다.
3. 곡선 2:  $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ .
4. 점  $B$ 는 곡선 2 위의 점이다.
5. 점  $A$ 와 점  $B$ 는 모두 제 1 사분면에 있다.
6. 점  $A$ 를 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭 이동한 점  $A' = (b, a)$ 가 직선  $OB$  위에 있다. 여기서  $O$ 는 원점이다.
7. 선분  $AB$ 의 중점  $M$ 의 좌표는  $M = \left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$ 이다.
8.  $a \times b = \frac{q}{p}$ 이고,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.

구하는 것:  $p + q$ .

---

## 해설 22

정답: 457

### 풀이

1. 점  $A(a, b)$ 는 곡선 1 위에 있으므로

$$b = \log_{16}(8a + 2) \iff 16^b = 8a + 2 \iff 4^{2b} = 8a + 2.$$

2. 점  $B(x_B, y_B)$ 는 곡선 2 위에 있으므로

$$y_B = 4^{x_B-1} - \frac{1}{2}.$$

3. 중점이  $M\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$ 이므로

$$\frac{a + x_B}{2} = \frac{77}{8}, \quad \frac{b + y_B}{2} = \frac{133}{8} \implies x_B = \frac{77}{4} - a, \quad y_B = \frac{133}{4} - b.$$

4.  $A' = (b, a)$  가 직선  $OB$  위에 있으므로  $\overrightarrow{OA'}$  와  $\overrightarrow{OB}$  는 같은 방향의 벡터이다. 따라서 어떤  $\lambda > 0$  에 대하여

$$(b, a) = \lambda(x_B, y_B).$$

곧  $x_B = \frac{b}{\lambda}, y_B = \frac{a}{\lambda}$  이고, 중점 조건을 사용하면

$$a + \frac{b}{\lambda} = \frac{77}{4}, \quad b + \frac{a}{\lambda} = \frac{133}{4}. \quad (1)$$

5. 점  $B$ 의 곡선 조건에  $x_B = \frac{b}{\lambda}, y_B = \frac{a}{\lambda}$  를 대입하면

$$\frac{a}{\lambda} = 4^{\frac{b}{\lambda}-1} - \frac{1}{2} \iff 4^{\frac{b}{\lambda}} = \frac{4a}{\lambda} + 2. \quad (2)$$

점  $A$ 의 조건은

$$4^{2b} = 8a + 2. \quad (3)$$

6. 핵심 관찰: 식 (2)와 식 (3)는 모두

$$4^{(\text{지수})} = (a \text{에 대한 일차식}) + 2$$

의 형태이다. 두 식이 완전히 일치하도록 하려면 지수  $\frac{b}{\lambda}$  와  $2b$  가 같고, 우변의 계수도 일치해야 하므로  $\lambda = \frac{1}{2}$  가 자연스럽다. 실제로  $\lambda = \frac{1}{2}$  이면

$$\frac{b}{\lambda} = 2b, \quad \frac{4a}{\lambda} + 2 = 8a + 2$$

가 되어 식 (2)와 식 (3)가 정확히 일치한다.

7. 식 (1)에  $\lambda = \frac{1}{2}$  를 대입하면

$$a + 2b = \frac{77}{4}, \quad 2a + b = \frac{133}{4}.$$

이를 연립하여 풀면

$$b = \frac{7}{4}, \quad a = \frac{63}{4}.$$

8. 검증:

- $A: 8a + 2 = 8 \cdot \frac{63}{4} + 2 = 128 = 2^7$ , 따라서  $b = \log_{16}(128) = \frac{7}{4}$  성립.

- $B: x_B = \frac{77}{4} - \frac{63}{4} = \frac{7}{2}, y_B = \frac{133}{4} - \frac{7}{4} = \frac{63}{2}$ . 또한

$$4^{x_B-1} - \frac{1}{2} = 4^{\frac{7}{2}-1} - \frac{1}{2} = 4^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} = 32 - \frac{1}{2} = \frac{63}{2} = y_B.$$

- $A' = (\frac{7}{4}, \frac{63}{4})$  와  $B = (\frac{7}{2}, \frac{63}{2})$  는 좌표가 비율  $\frac{1}{2}$  로 같으므로  $A'$  는 직선  $OB$  위에 있다.

9. 따라서

$$ab = \left(\frac{63}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{441}{16} = \frac{q}{p} \quad (\gcd(p, q) = 1),$$

이므로  $p + q = 16 + 441 = 457$ .

난이도: 중상

## 선택과목: 기하

### 문제 23

#### 문항 23

두 벡터  $\vec{a} = (4, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, -1)$ 에 대하여  $\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2 점]

1. 1
  2. 2
  3. 3
  4. 4
  5. 5
- 

### 해설

#### 문항 23

정답: ③ 3

#### 풀이

1. 성분별로 더하면  $\vec{a} + \vec{b} = (4 + (-1), 1 + (-1)) = (3, 0)$ 이다.
2. 모든 성분의 합은  $3 + 0 = 3$ 이다.

따라서 선택지 ③이 정답이다.

난이도: 하

## 문항 24

### 문항 정보

- 배점: 3 점
- 형식: 객관식(단일 정답)
- 난이도: 하

### 문제

포물선  $y^2 = 12(x - 2)$ 의 초점과 준선 사이의 거리는?

### 선지

1. 6
  2. 7
  3. 8
  4. 9
  5. 10
- 

## 해설 24

### 정답

1) 6    (① 6)

### 풀이

1. 주어진 포물선은  $y^2 = 12(x - 2)$  이므로 표준형  $y^2 = 4p(x - x_0)$  와 비교하여  $4p = 12 \Rightarrow p = 3$  이다.
2. 정점은  $(2, 0)$ 이고, 초점은  $(2 + p, 0) = (5, 0)$ , 준선은  $x = 2 - p = -1$ 이다.
3. 초점과 준선 사이의 거리 =  $|5 - (-1)| = 6$ 이며, 일반적으로  $2p = 6$ 이다.

따라서 정답은 ① 6이다.

## 문제 25

좌표공간의 점  $A(3, -\frac{3}{2}, -2)$ 를  $yz$  평면에 대하여 대칭이동한 점을  $B$ , 점  $A$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을  $C$ 라 할 때, 선분  $BC$ 의 길이는 무엇인가? [3 점]

- (1)  $\sqrt{21}$
  - (2)  $\sqrt{22}$
  - (3)  $\sqrt{23}$
  - (4)  $2\sqrt{6}$
  - (5) 5
- 

## 해설 25

정답: 5 (선택지 (5))

1.  $yz$  평면에 대한 대칭은  $x$  좌표의 부호만 바꿔므로 점  $B$ 는 다음과 같다.

$$B = \left(-3, -\frac{3}{2}, -2\right).$$

2. 원점에 대한 대칭은 모든 좌표의 부호가 바뀌므로 점  $C$ 는 다음과 같다.

$$C = \left(-3, \frac{3}{2}, 2\right).$$

3. 따라서 벡터  $BC$ 는 다음과 같다.

$$C - B = (0, 3, 4).$$

4. 선분  $BC$ 의 길이는 다음과 같다.

$$|BC| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

따라서 최종 정답은 5이다.

## 문항 26

### 문제

양수  $a$ 에 대하여, 두 초점이  $F, F'$ 인 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$  위의 점  $(a, \sqrt{2}a)$ 에서의 접선이  $y$ 축과 만나는 점을  $P$ 라 하자.  $|PF| \times |PF'| = 8$  일 때,  $a$ 의 값은? [3 점]

### 선택지

1.  $\sqrt{3}$
  2.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
  3.  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
  4.  $2\sqrt{3}$
  5.  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
- 

## 문항 26 해설

정답: 2

1. 주어진 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$  은  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 로 정리된다. 따라서 초점은  $F(0, a\sqrt{2})$ ,  $F'(0, -a\sqrt{2})$ 이다 ( $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ ).
2. 점  $(a, \sqrt{2}a)$ 에서의 접선: 암시적 미분으로  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$  이므로 기울기  $m = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 접선은  $y - \sqrt{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - a)$  이므로,  $y$ 축과의 교점은  $x = 0$ 에서  $y = \sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 이고, 따라서  $P = \left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 이다.
3. 거리:  $P$ 와  $F, F'$ 는  $x$ 좌표가 같으므로  $PF = |a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ,  $PF' = |-a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 곱은  $PF \cdot PF' = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3a^2}{2}$ 이다.
4. 조건  $\frac{3a^2}{2} = 8$ 을 만족하므로  $a^2 = \frac{16}{3}$ ,  $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  ( $a > 0$ )이다.

따라서 최종적으로  $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이며, 정답은 (2)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다.  
난이도: 중

## 문항 27

### 문제

원기둥의 아랫면 원  $C_1$  과 윗면 원  $C_2$  의 지름은 모두 5이다. 점  $A, B$ 는  $C_1$  위에 있고  $|AB| = 5$ 이다. 점  $C, D$ 는  $C_2$  위에 있고  $|CD| = 3$ 이다. 또한  $|AD| = |BC|$ 이다. 점  $H$ 는  $D$ 에서  $C_1$ 을 포함하는 평면으로 내린 수선의 발이다. 사각형  $ABCD$ 의 넓이는 삼각형  $ABH$ 의 넓이의 4배이다. 원기둥의 높이를 구하여라.

### 선택지

label=(0)  $3\sqrt{2}$

lbbel=(0)  $\sqrt{19}$

lcbel=(0)  $2\sqrt{5}$

ldbel=(0)  $\sqrt{21}$

lebel=(0)  $\sqrt{22}$

## 문항 27 해설

### 정답

(4)  $\sqrt{21}$

### 풀이

- 반지름을  $r = 2.5$ 라고 두고, 아랫면  $C_1$ 을 평면  $z = 0$ , 윗면  $C_2$ 를 평면  $z = h$ 에 둔다. 지름  $AB = 5$ 이므로  $A = (r, 0, 0), B = (-r, 0, 0)$ 로 잡는다.

- 윗면의 현 길이가  $|CD| = 3$ 이므로 중심각을  $\theta$ 라고 하면

$$2r \sin \frac{\theta}{2} = 3 \Rightarrow 5 \sin \frac{\theta}{2} = 3,$$

따라서  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ 이다.

- 윗면에서  $C, D$ 의 각도를  $\varphi \mp \frac{\theta}{2}$ 로 두자. 그러면

$$|AD|^2 = 2r^2 \left(1 - \cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\right) + h^2, \quad |BC|^2 = 2r^2 \left(1 + \cos\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)\right) + h^2.$$

조건  $|AD| = |BC|$ 에서

$$\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) = -\cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \cos \varphi \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

여기서  $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} \neq 0$ 이므로  $\cos \varphi = 0$ , 즉  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (또는  $\frac{3\pi}{2}$ )이다.

## 4. 따라서 좌표는

$$x_C = +r \sin \frac{\theta}{2} = 1.5, \quad x_D = -1.5, \quad y_C = y_D = r \cos \frac{\theta}{2} = 2, \quad z_C = z_D = h.$$

점  $H$ 는  $D$ 의 아래평면 수선의 발이므로  $H = (x_D, y_D, 0) = (-1.5, 2, 0)$ 이다.

5. 삼각형  $ABH$ 의 밑변은  $|AB| = 5$ , 높이는  $|y_D| = 2$  이므로

$$S(\triangle ABH) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5.$$

6. 사각형  $ABCD$ 는 평행한 변  $AB$ 와  $CD$ 를 갖는 공간 사다리꼴이다. 두 직선  $AB$ 와  $CD$  사이의 거리는  $\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{2^2 + h^2} = \sqrt{h^2 + 4}$ 이다. 따라서

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(5+3) \cdot \sqrt{h^2 + 4} = 4\sqrt{h^2 + 4}.$$

7. 면적 조건  $S(ABCD) = 4S(\triangle ABH)$ 에서

$$4\sqrt{h^2 + 4} = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow \sqrt{h^2 + 4} = 5 \Rightarrow h^2 = 21 \Rightarrow h = \sqrt{21}.$$

따라서 원기둥의 높이는  $\sqrt{21}$ 이며, 정답은 (4)이다.

## 문항 28

### 조건

사면체  $ABCD$ 에서 다음을 만족한다.

- 길이:  $|AB| = |CD| = 4$ ,  $|BC| = |BD| = 2\sqrt{5}$ .
- 점  $H$ : 점  $A$ 에서 직선  $CD$ 에 내린 수선의 발. 즉,  $AH \perp CD$ ,  $H \in CD$ , 그리고  $|AH| = 4$ .
- 두 평면  $ABH$ 와  $BCD$ 는 서로 수직이다. 즉,  $ABH \perp BCD$ .
- 점  $G$ : 삼각형  $\triangle ABH$ 의 무게중심.
- 구  $S$ : 중심이  $G$ 이고, 평면  $ACD$ 에 접한다.
- 집합  $T$ : 구  $S$  위의 점  $P$  중에서  $\angle APC = \pi/2$ 를 만족하는 모든 점들의 궤적.

### 물음

도형  $T$ 를 평면  $ABC$  위로 직교 정사영한 도형의 넓이를 구하시오.

### 보기

$$\text{label}=(0) \frac{\pi}{7}$$

$$\text{lbbel}=(0) \frac{\pi}{6}$$

$$\text{lcbel}=(0) \frac{\pi}{5}$$

$$\text{ldbel}=(0) \frac{\pi}{4}$$

$$\text{lebel}=(0) \frac{\pi}{3}$$

## 문항 28 해설

정답: (4)

1. 좌표 설정: 직선  $CD$ 를  $x$  축으로, 점  $H$ 를 원점으로 둔다.  $AH \perp CD$ ,  $|AH| = 4$  이므로  $A = (0, 0, 4)$ ,  $H = (0, 0, 0)$ . 또한  $|CD| = 4$  이므로  $C = (c, 0, 0)$ ,  $D = (d, 0, 0)$ ,  $d - c = 4$ .
2. 점  $B = (x, y, z)$  라 하자.  $|BC| = |BD|$  이므로  $B$ 는  $CD$ 의 수직 이등분 평면 위에 있어  $x = (c + d)/2 =: M$  이다.

3. 평면 수직 조건: 평면  $ABH$  와  $BCD$  가 수직이므로, 법선 벡터  $(AH \times BH)$  와  $(\mathbf{e}_x \times BH)$  가 서로 수직이다. 여기서  $AH = (0, 0, 4)$ ,  $BH = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$  이다. 계산하면

$$AH \times BH = (-4y, 4x, 0), \quad \mathbf{e}_x \times BH = (0, -z, y), \quad (AH \times BH) \cdot (\mathbf{e}_x \times BH) = -4xz = 0.$$

따라서  $xz = 0$  이다. 만약  $z = 0$  이면,  $|AB|^2 = M^2 + y^2 + 16 = 16$ 에서  $M = y = 0$  가 되어  $|BC|^2 = 4$ 가 되어 모순이다. 그러므로  $z \neq 0$  이므로  $x = 0$  이고,  $x = M$  이므로  $M = 0$  이다. 따라서  $H$ 는  $CD$ 의 중점이며  $C = (-2, 0, 0)$ ,  $D = (2, 0, 0)$  이다.

4. 거리 조건으로  $B$  결정:

$$|BC| = 2\sqrt{5} \Rightarrow y^2 + z^2 = 16, \quad |AB| = 4 \Rightarrow y^2 + (z - 4)^2 = 16.$$

두 식의 차로  $z = 2$ , 이어서  $y^2 = 12$  이므로  $B = (0, \pm 2\sqrt{3}, 2)$ . 편의상  $B = (0, 2\sqrt{3}, 2)$  를 취한다.

5. 무게중심  $G$ :  $G = \frac{A+B+H}{3} = (0, 2\sqrt{3}/3, 2)$ .
6. 구  $S$ : 중심  $G$ , 평면  $ACD$ 에 접한다. 점들  $A, C, D$ 가 모두  $y = 0$  위에 있으므로 plane  $ACD : y = 0$ . 반지름은  $r = \text{dist}(G, y = 0) = |G_y| = 2\sqrt{3}/3$ .
7. 벡터  $AG$ :  $AG = G - A = (0, 2\sqrt{3}/3, -2)$ ,  $|AG|^2 = (2\sqrt{3}/3)^2 + (-2)^2 = 16/3$ , 따라서  $|AG| = 4/\sqrt{3}$ .
8. 집합  $T$ :  $AP \perp GP$ 을 만족하는 구  $S$  위의 점들의 집합은  $A$ 의 극평면과  $S$ 의 교선인 원이다. 이 원의 평면은  $AG$ 에 수직이고,  $G$ 로부터의 거리  $d = \frac{r^2}{|AG|} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  이다. 원의 반지름은

$$R^2 = r^2 - d^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow R = 1, \quad |T| = \pi R^2 = \pi.$$

9. 평면  $ABC$ 로의 직교 정사영 넓이: 원의 면적에 두 평면 사이의 각  $\theta$ 에 대한  $|\cos \theta|$  를 곱한다. 평면  $T$ 의 법선은  $AG$ , 평면  $ABC$ 의 법선은  $n_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  이다. 여기서

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2\sqrt{3}, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -4),$$

$$n_{ABC} = (-8\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{3}), \quad n_{ABC} \cdot AG = -\frac{16\sqrt{3}}{3}, \quad |n_{ABC}| = 16, \quad |AG| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

따라서

$$|\cos \theta| = \frac{|n_{ABC} \cdot AG|}{|n_{ABC}| |AG|} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{16 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}.$$

그러므로 정사영 넓이는  $|T| \cdot |\cos \theta| = \pi \cdot \frac{1}{4} = \pi/4$  이다.

**최종 정답: (4)  $\pi/4$**

## 문항 29

다음 조건을 만족하는 도형에서  $k^2$ 의 값을 구하라. [4 점]

- 초점이  $F(p, 0)$  ( $p > 0$ )이고 준선이  $x = -p$ 인 포물선 위의 점 중 제 1 사분면에 있는 점  $A$ 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을  $H$ 라 한다.
- 두 초점이  $x$ 축 위에 있고 세 점  $F, A, H$ 를 지나는 타원의  $x$ 좌표가 양수인 초점을  $B$ 라 한다.
- 삼각형  $AHB$ 의 둘레 길이는  $p + 27$ , 넓이는  $2p + 12$ 이다.
- 선분  $HF$ 의 길이를  $k$ 라 할 때  $k^2$ 의 값을 구하라.

추가 설명:

- 포물선은 오른쪽으로 열리고,  $A = (x_A, y_A)$ 는 제 1 사분면에 있다. 수선의 발  $H$ 는  $x = -p$  위에 있으며  $AH \perp (x = -p)$  이므로  $H = (-p, y_A)$ 이다.
- 타원의 두 초점은  $x$ 축 위에 있고,  $F = (p, 0)$  또한 타원 위의 점이다.  $x$ 좌표가 양수인 초점을  $B = (x_B, 0)$ 라 한다.

## 문항 29 해설

정답을 구하기 위해 좌표를  $A = (x, y)$  ( $x > 0, y > 0$ ),  $H = (-p, y)$ 로 두고 풀이한다.

### 1. 포물선의 성질과 기본 식

포물선  $y^2 = 4px$  이므로  $y^2 = 4px$ 이다. 또한 포물선의 정의에 의해  $AF = AH = x + p$ 이다.

### 2. 넓이 조건

삼각형  $AHB$ 에서  $AH$ 는 수평선이므로 높이는  $y$ 이고, 밑변은  $AH = x + p$ 이다. 넓이가  $2p + 12$  이므로

$$\frac{1}{2}(x + p)y = 2p + 12 \Rightarrow (x + p)y = 4p + 24.$$

이를  $y^2 = 4px$ 와 합치면

$$px(x + p)^2 = 4(p + 6)^2. \quad (1)$$

### 3. 둘레 조건과 타원의 반장축

둘레  $AH + AB + HB = p + 27$ 에서  $AH = x + p$  이므로

$$AB + HB = 27 - x. \quad (2)$$

세 점  $A, H$  가 타원 위에 있고  $y$  좌표가 같으므로 타원의 중심을  $(h, 0)$  라 하면  $x_A + x_H = 2h$  이어서

$$h = \frac{x - p}{2}.$$

또한 타원에서 임의의 점까지 두 초점까지의 거리 합은  $2a$  이므로, 식 (2)에서

$$2a = 27 - x. \quad (3)$$

#### 4. 점 $F$ 가 타원 위에 있을 조건

점  $F = (p, 0)$  가 타원과  $x$  축에서 만나는 점이어야 하므로  $p = h \pm a$  이다. 식  $h = \frac{x-p}{2}$ ,  $a = \frac{27-x}{2}$  를 대입하면

$$\frac{3p - x}{2} = \pm \frac{27 - x}{2}.$$

- + 인 경우:  $3p - x = 27 - x \Rightarrow p = 9.$
- - 인 경우:  $x = \frac{3p+27}{2}$ . 이 때  $A$  가 타원 위의 점이 되려면  $\frac{(x-h)^2}{a^2} < 1$  이어야 하나,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{\left(\frac{x+p}{2}\right)^2}{\left(\frac{27-x}{2}\right)^2} = \frac{(x+p)^2}{(27-x)^2} \geq 1 \quad (p > 0),$$

로 모순이므로 불가하다.

따라서  $p = 9$  이다.

#### 5. $x, y$ 의 결정

식 (1)에  $p = 9$  를 대입하면

$$9x(x+9)^2 = 900 \quad \Rightarrow \quad x(x+9)^2 = 100.$$

이는  $x^3 + 18x^2 + 81x - 100 = 0 = (x-1)(x^2 + 19x + 100)$  이므로  $x = 1$  만 실수 해이다.  
따라서

$$y^2 = 4px = 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 \Rightarrow y = 6.$$

#### 6. 구하는 값 $k^2$

$H = (-p, y), F = (p, 0)$  이므로

$$HF^2 = (2p)^2 + y^2 = 4p^2 + y^2 = 4 \cdot 9^2 + 36 = 324 + 36 = 360.$$

따라서 최종적으로  $k^2 = 360$  이다.

## 문항 30

좌표평면에서 길이가  $10\sqrt{2}$ 인 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 원 위의 두 점  $P, Q$ 가

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = 2 |\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다.  $|\overrightarrow{PB}| = 14$  일 때,  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \frac{q}{p}$  이다.  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단,  $|\overrightarrow{QB}| > 0$ 이고,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4 점]

---

## 문항 30 해설

정답: 221

1.  $AB$  가지름이므로  $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ 이다. 따라서  $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$ 이다.
2.  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{PQ}$ 를 이용하면

$$0 = \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ}) \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ 이므로  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 이고, 따라서

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

3. 주어진 식을 전개하면

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PB}|^2 = 2 |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

위 식과 비교하여  $|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2$ 이므로  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PB}| = 14$ 이다.

4.  $AB = 10\sqrt{2}$ 이므로 반지름은  $r = 5\sqrt{2}$ 이다. 또한  $\triangle APB$ 는 직각삼각형이므로  $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = |AB|^2$ 에서  $|\overrightarrow{PA}|^2 = 200 - 196 = 4$ , 따라서  $|\overrightarrow{PA}| = 2$ 이다.
5.  $PB$ 가 만드는 중심각을  $\theta$ 라 하자. 현의 길이는  $2r \sin(\theta/2)$ 이므로

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{|PB|}{2r} = \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{49}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$|PQ| = |PB|$ 이므로  $PQ$ 의 중심각도  $\theta$ 이고, 따라서  $BQ$ 의 중심각은  $2\theta$ 이다. 그러면

$$|QB| = 2r \sin \theta = 2r \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{14\sqrt{2}}{5},$$

$$|QB|^2 = \frac{392}{25}.$$

6.  $\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$  이고  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}$  이므로

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB}.$$

또한  $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}$ ,  $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PQ}|$  이므로

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} - |\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{QB}|^2}{2} - |\overrightarrow{PQ}|^2 = -\frac{|\overrightarrow{QB}|^2}{2}.$$

따라서

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \frac{|\overrightarrow{QB}|^2}{2} = \frac{392}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{196}{25} = \frac{q}{p}.$$

그러므로  $p = 25$ ,  $q = 196$  이고, 최종적으로  $p+q = 221$  이다.

## 선택과목: 미분과 적분

### 문항 번호: 23

#### 문제

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{2x}$  의 값은?

#### 보기

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

#### 난이도

하

---

### 문항 번호: 23

#### 정답

3 (③)

#### 해설

1. 극한을 곱의 형태로 분해한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan(6x)}{6x} \right) \cdot \left( \frac{6x}{2x} \right).$$

2. 여기서  $u = 6x$  라 하면  $u \rightarrow 0$  일 때  $\frac{\tan u}{u} \rightarrow 1$  이므로 첫 항의 극한은 1이다.
3. 둘째 항은  $\frac{6x}{2x} = 3$  ( $x \neq 0$ ) 이므로 극한은 3이다.
4. 따라서 전체 극한값은  $1 \cdot 3 = 3$ 이다.

#### 난이도

하

## 문항 24

다음을 구하시오:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$$

주의: 제곱근의 범위는  $\sin x - \sin^3 x \geq 0$  이며,  $dx$ 는 루트 밖에 있음.

### 선택지

1.  $\frac{1}{6}$
  2.  $\frac{1}{3}$
  3.  $\frac{1}{2}$
  4.  $\frac{2}{3}$
  5.  $\frac{5}{6}$
- 

## 문항 24 해설

1.  $\sin x - \sin^3 x = \sin x (1 - \sin^2 x) = \sin x \cdot \cos^2 x.$
2. 구간  $[0, \pi/2]$ 에서  $\cos x \geq 0$ 이므로  $\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\sin x \cos^2 x} = \cos x \cdot \sqrt{\sin x}.$
3. 치환  $u = \sin x, du = \cos x dx$ 로 두면

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{\sin x} dx = \int_{u=0}^1 u^{1/2} du = \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

4. 따라서 정답은 선택지 4이며, 값은  $\frac{2}{3}$ 이다.

최종 정답: ④  $\frac{2}{3}$

## 문항 25

### 조건

수열  $\{a_n\}$  이 모든 자연수  $n$ 에 대하여 다음을 만족한다:

$$\sqrt{9n^2 - 5} + 2n < a_n < 5n + 1.$$

### 질문

다음 극한의 값을 구하시오:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2}.$$

[3 점]

### 선택지

1. (1)  $\frac{1}{2}$
2. (2)  $\frac{3}{2}$
3. (3)  $\frac{5}{2}$
4. (4)  $\frac{7}{2}$
5. (5)  $\frac{9}{2}$

### 난이도

중

## 문항 25 해설

### 정답

(3)  $\frac{5}{2}$

### 해설

1.  $n > 0$  이므로 양변을  $n$ 으로 나누면

$$\sqrt{9 - \frac{5}{n^2}} + 2 < \frac{a_n}{n} < 5 + \frac{1}{n}.$$

$n \rightarrow \infty$ 에서 좌우가 모두 5로 수렴하므로, 끼워 넣기 정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 5.$$

2. 분자와 분모를  $n^2$ 로 나누면

$$\frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} = \frac{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n} + 5 - \frac{2}{n^2}}.$$

따라서  $n \rightarrow \infty$ 에서  $\frac{a_n}{n} \rightarrow 5$ ,  $\frac{2}{n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} = \frac{5^2}{5+5} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

3. 따라서 정답은 (3)  $\frac{5}{2}$ 이다.

난이도

중

## 문제 26

그림과 같이 곡선  $y = \sqrt{x + x \ln x}$  와  $x$  축 및 두 직선  $x = 1, x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$  축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는 무엇인가? [3 점] 밑면 영역은 다음과 같다.

$$R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x + x \ln x}\}.$$

보기:

1.  $\frac{\sqrt{3}(3+8 \ln 2)}{16}$

2.  $\frac{\sqrt{3}(5+12 \ln 2)}{24}$

3.  $\frac{\sqrt{3}(1+12 \ln 2)}{16}$

4.  $\frac{\sqrt{3}(1+2 \ln 2)}{4}$

5.  $\frac{\sqrt{3}(1+9 \ln 2)}{12}$

## 해설 26

1. 단면이 정삼각형이며,  $x$  가 고정될 때 밑면의  $y$  방향 길이는  $s(x) = \sqrt{x + x \ln x}$  이다.

정삼각형의 넓이는  $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} [s(x)]^2$  이므로

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (x + x \ln x).$$

2. 부피는

$$V = \int_1^2 A(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^2 (x + x \ln x) dx.$$

3. 적분 계산:

$$\int_1^2 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = (2 \ln 2 - 1) - \left( 0 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

따라서

$$\int_1^2 (x + x \ln x) dx = \frac{3}{2} + \left( 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) = 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$

4. 부피는

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 2 \ln 2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}(3+8 \ln 2)}{16}.$$

최종 정답: (1)  $\frac{\sqrt{3}(3+8 \ln 2)}{16}$ .

## 문항 27

매개변수  $t$ 로 나타내어진 곡선

$$x = e^{4t}(1 + \sin^2(\pi t)), \quad y = e^{4t}(1 - 3\cos^2(\pi t))$$

을  $C$ 라 하자. 곡선  $C$ 가 직선  $y = 3x - 5e$ 와 만나는 점을  $P$ 라 할 때, 곡선  $C$  위의 점  $P$ 에서의 접선의 기울기는 무엇인가? [3 점]

(1)  $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$

(2)  $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$

(3)  $\frac{3\pi}{\pi+8}$

(4)  $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$

(5)  $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

난이도: 중

## 문항 27 해설

정답: (2)

1. 교점 조건 이용. 직선  $y = 3x - 5e$ 와의 교점에서  $y - 3x = -5e$ 이다. 한편 매개변수식에서

$$\begin{aligned} y - 3x &= e^{4t}(1 - 3\cos^2(\pi t)) - 3e^{4t}(1 + \sin^2(\pi t)) \\ &= e^{4t}[(1 - 3) - 3(\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t))] = e^{4t}(-2 - 3) = -5e^{4t}. \end{aligned}$$

따라서  $-5e^{4t} = -5e$ 이므로  $e^{4t} = e$ , 곧  $4t = 1$ 이고  $t = \frac{1}{4}$ 이다.

2. 접선의 기울기 계산. 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = e^{4t}[4(1 + \sin^2(\pi t)) + \pi \sin(2\pi t)], \quad \frac{dy}{dt} = e^{4t}[4(1 - 3\cos^2(\pi t)) + 3\pi \sin(2\pi t)].$$

따라서 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4(1 - 3\cos^2(\pi t)) + 3\pi \sin(2\pi t)}{4(1 + \sin^2(\pi t)) + \pi \sin(2\pi t)}.$$

3.  $t = \frac{1}{4}$ 에서  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 따라서  $\sin^2 = \cos^2 = \frac{1}{2}$ 이고  $\sin(2\pi \cdot \frac{1}{4}) = 1$ 이다. 대입하면

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=1/4} = \frac{4\left(1 - 3 \cdot \frac{1}{2}\right) + 3\pi \cdot 1}{4\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \pi \cdot 1} = \frac{-2 + 3\pi}{6 + \pi} = \frac{3\pi - 2}{\pi + 6}.$$

4. 유효성 확인.  $\frac{dx}{dt} \Big|_{t=1/4} = e^{4 \cdot (1/4)}(6 + \pi) = e(6 + \pi) > 0$  이므로 기울기 정의가 가능하다.

따라서 최종 접선의 기울기는  $\frac{3\pi - 2}{\pi + 6}$ 이며, 정답은 (2)이다.

## 문제 28

함수  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$  가 주어진다.

양수  $t$ 에 대하여, 점  $(s, f(s))$  ( $s > 0$ )에서  $y$ 축에 내린 수선의 발과, 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(s, f(s))$ 에서의 접선이  $y$ 축과 만나는 점 사이의 거리가  $t$ 가 되도록 하는  $s$ 의 값을  $g(t)$ 라 하자.  $\int_{1/2}^{27/4} g(t) dt$ 의 값은 무엇인가? [4 점]

보기:

1.  $\frac{161}{12} + \ln 3$

2.  $\frac{40}{3} + \ln 3$

3.  $\frac{53}{4} + \ln 2$

4.  $\frac{79}{6} + \ln 2$

5.  $\frac{157}{12} + \ln 2$

난이도: 중상

## 해설 28

정답: 5)  $\frac{157}{12} + \ln 2$

1. 도함수를 구한다.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

2. 점  $(s, f(s))$ 에서  $y$ 축에 내린 수선의 발은  $(0, f(s))$ 이고, 접선의 방정식은  $y - f(s) = f'(s)(x - s)$  이므로  $y$  절편은

$$y = f(s) - sf'(s)$$

이다. 두 점 사이의 거리는

$$t = |f(s) - (f(s) - sf'(s))| = |sf'(s)|.$$

3.  $s > 0$ 에서  $f'(s) = \frac{s^2}{1+s} > 0$  이므로

$$t = sf'(s) = \frac{s^3}{1+s}.$$

이를  $T(s) = \frac{s^3}{1+s}$  라 두면,

$$T'(s) = \frac{s^2(3+2s)}{(1+s)^2} > 0 \quad (s > 0)$$

이므로  $T$ 는 증가 함수이고  $g(t)$ 는  $T$ 의 역함수로 유일하게 정의된다.

4. 역함수 적분 공식을 적용한다.

$t = T(s)$  라 할 때

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = [st]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} T(s) ds,$$

여기서  $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{27}{4}, s_1 = g\left(\frac{1}{2}\right), s_2 = g\left(\frac{27}{4}\right)$ 이며  $t = T(s) = \frac{s^3}{1+s}$ 이다.

5. 양 끝에서의  $s$  값을 구한다.

$$\frac{1}{2} = \frac{s^3}{1+s} \iff 2s^3 = 1 + s \Rightarrow s = 1,$$

$$\frac{27}{4} = \frac{s^3}{1+s} \iff 4s^3 = 27(1+s) \Rightarrow s = 3.$$

따라서  $s_1 = 1, s_2 = 3$ 이다.

6. 각 항을 계산한다.

먼저  $st = s \cdot \frac{s^3}{1+s} = \frac{s^4}{1+s}$ 이므로

$$[st]_1^3 = \frac{3^4}{1+3} - \frac{1^4}{1+1} = \frac{81}{4} - \frac{1}{2} = \frac{79}{4}.$$

또한

$$\int T(s) ds = \int \frac{s^3}{1+s} ds = \int \left(s^2 - s + 1 - \frac{1}{1+s}\right) ds = \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s - \ln(1+s) + C.$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_1^3 T(s) ds &= \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \ln 4\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 - \ln 2\right) \\ &= \left(\frac{15}{2} - \ln 4\right) - \left(\frac{5}{6} - \ln 2\right) \\ &= \frac{20}{3} - \ln 2. \end{aligned}$$

7. 결론을 얻는다.

$$\int_{1/2}^{27/4} g(t) dt = ([st]_1^3) - \int_1^3 T(s) ds = \frac{79}{4} - \left(\frac{20}{3} - \ln 2\right) = \frac{157}{12} + \ln 2.$$

따라서 정답은 5)  $\frac{157}{12} + \ln 2$ 이다.

난이도: 중상

## 문제 29

다음을 만족하는 수열을 생각하자.

- 등차수열  $\{a_n\}$ : 첫째항과 공차가 같은 수열이다. 즉  $a_1$  이 공차와 같고,  $a_1 \neq 0$  이다.
- 등비수열  $\{b_n\}$ .

또한 어떤 자연수  $k$ 가 존재하여,  $i = 1, 2, 3$ 에 대하여

$$b_{k+i} = \frac{1}{a_i} - 1.$$

다음 부등식을 만족한다.

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30.$$

이때

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{q}{p}$$

(여기서  $p, q$ 는 서로소인 자연수) 일 때,  $p + q$ 의 값을 구하라.

배점: [4 점]

## 해설

1. 등차수열의 성질: 첫째항과 공차가 같으므로  $a_n = n a_1$  이다.
2. 등비수열의 공비  $r$ 을 두 가지로 나타내면 다음과 같다.

$$r = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{a_2} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{\frac{1}{2a_1} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)},$$

$$r = \frac{b_{k+3}}{b_{k+2}} = \frac{\frac{1}{a_3} - 1}{\frac{1}{a_2} - 1} = \frac{\frac{1}{3a_1} - 1}{\frac{1}{2a_1} - 1} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)}.$$

이를 같게 두고 정리하면

$$\frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)} \implies 3(1 - 2a_1)^2 = 4(1 - a_1)(1 - 3a_1) \implies 4a_1 - 1 = 0,$$

따라서  $a_1 = \frac{1}{4}$  이다. 이때  $r = \frac{1}{3}$ , 그리고

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_1} - 1 = 4 - 1 = 3, \quad b_n = b_{k+1} r^{k+1-n} = 3^{k+2-n},$$

특히  $b_1 = 3^{k+1}$  이다.

3. 주어진 부등식을 위해 두 합을 각각 구한다. 먼저  $a_n = \frac{n}{4}$  이므로

$$a_n a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{16}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n(n+1)} = 16.$$

또한  $\{b_n\}$ 의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}b_1.$$

따라서

$$0 < \frac{3}{2}b_1 - 16 < 30 \implies \frac{32}{3} < b_1 < \frac{92}{3}.$$

$b_1 = 3^{k+1}$  이므로 가능한 값은  $k = 2$ 뿐이고  $b_1 = 27$ 이다.

4. 구하는 값은  $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 이다. 여기서  $a_2 = 2a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ,  $b_2 = b_1 r = 27 \cdot \frac{1}{3} = 9$

이다. 짝수항의 합은 공비  $r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{b_2}{1-r^2} = \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{81}{8}.$$

따라서

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{8} = \frac{81}{16} = \frac{q}{p}.$$

$p = 16$ ,  $q = 81$  이므로  $p + q = 97$ 이다.

5. 검증:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 16 = \frac{49}{2} \in (0, 30)$$

이므로 조건을 만족한다.

최종 정답: 97.

## 문항 30

다음은 실수 전체  $\mathbb{R}$ 에서 증가하는 연속 함수  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(x)$ 에 대한 조건이다.

### 역함수의 조건

역함수  $f^{-1}(x)$ 는 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서 정의되며 다음을 만족한다.-  $|x| \leq 1$  일 때:

$$4(f^{-1}(x))^2 = x^2(x^2 - 5)^2$$

-  $|x| > 1$  일 때:

$$|f^{-1}(x)| = e^{|x|-1} + 1$$

### 정의

- 임의의 실수  $m$ 에 대하여, 기울기가  $m$ 이고 점  $(1, 0)$ 을 지나는 직선  $L_m$ :

$$y = m(x - 1).$$

-  $g(m)$ : 직선  $L_m$ 과 곡선  $y = f(x)$ 의 교점의 개수.

### 추가 조건

함수  $g(m)$ 은  $m = a, m = b$  ( $a < b$ )에서 불연속이다.

### 구하는 값

다음 값을 구하여라.

$$g(a) \times \left( \lim_{m \rightarrow a+} g(m) \right) + g(b) \times \left( \frac{\ln b}{b} \right)^2$$

### 참고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

배점: [4 점]

### 해설

#### 정답: 11

- 역함수  $f^{-1}(y)$ 의 결정  $f$ 는  $\mathbb{R}$ 에서 증가 연속이므로  $f^{-1}$ 도 증가 연속이다.-  $|y| \leq 1$ 에서  $4(f^{-1}(y))^2 = y^2(y^2 - 5)^2$  이고  $f^{-1}$ 는 증가,  $f^{-1}(0) = 0$  이므로

$$f^{-1}(y) = \frac{y(5 - y^2)}{2}.$$

-  $|y| > 1$ 에서  $|f^{-1}(y)| = e^{|y|-1} + 1$ 이고 증가성을 만족하려면

$$f^{-1}(y) = e^{y-1} + 1 \quad (y > 1), \quad f^{-1}(y) = -(e^{-y-1} + 1) \quad (y < -1).$$

겹점  $y = \pm 1$ 에서 도함수도 일치하여 모두 1이므로 매끄럽다.

2. 교점 개수  $g(m)$ 의  $y$ -방정식화직선  $L_m : y = m(x-1)$ 과  $y = f(x)$ 의 교점 개수는  $y = m(f^{-1}(y) - 1)$ 의 해의 개수와 같다.  $m \neq 0$ 일 때  $s = 1/m$ 으로 두면  $f^{-1}(y) = sy + 1$ 과의 교점 개수와 같다.  $m = 0$ 이면  $L_0$ 는  $y = 0$ 이고  $f(x) = 0$ 의 해는  $x = f^{-1}(0) = 0$  하나이므로  $g(0) = 1$ 이다.
3. 불연속이 일어나는  $m$  값 찾기-  $s < 0$  ( $\equiv m < 0$ )에서 는  $\varphi(y) = f^{-1}(y)$ 가 증가, 직선  $sy + 1$ 은 감소이므로  $\varphi - (sy + 1)$ 은 증가 함수이다. 해는 항상 1개이므로  $g(m) = 1$  ( $m < 0$ ).-  $s > 0$  ( $\equiv m > 0$ )에서 는 접선 발생으로 변화를 판정한다. 접선 조건은

$$\varphi(y) = sy + 1, \quad \varphi'(y) = s, \quad F(y) := \varphi(y) - y\varphi'(y) = 1.$$

조각별로  $F(y)$ 를 계산하면  $|y| \leq 1$ 에서  $\varphi(y) = \frac{y(5-y^2)}{2}$ ,  $\varphi'(y) = \frac{5-3y^2}{2}$ 이므로  $F(y) = y^3$ . 따라서  $F(y) = 1$ 의 해는  $y = 1$ 뿐이다. 이때  $s = \varphi'(1) = 1$  ( $\equiv m = 1$ ) 이지만, 이 접선은 좌우에서 교점 개수를 바꾸지 않아  $g$ 는 연속(양쪽 모두 1개)이다.  $y > 1$ 에서 는  $\varphi(y) = e^{y-1} + 1$ ,  $\varphi'(y) = e^{y-1}$ . 그러면  $F(y) = 1 + e^{y-1}(1-y)$ 이고  $F(y) = 1$ 이면  $y = 1$ 만 가능하다.  $y < -1$ 에서 는  $\varphi(y) = -(e^{-y-1} + 1)$ ,  $\varphi'(y) = e^{-y-1}$ .

$$F(y) = -(e^{-y-1} + 1) - ye^{-y-1}.$$

$$F(y) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-y-1}(1+y) = -2$$

와 동치이고,  $t = -y > 1$ 로 두면

$$(t-1)e^{t-1} = 2 \Rightarrow t-1 = W(2) \text{ (Lambert W).}$$

따라서

$$s = \varphi'(y) = e^{-y-1} = e^{t-1} = e^{W(2)} = \frac{2}{W(2)}, \quad m = \frac{1}{s} = \frac{W(2)}{2}.$$

좌측 지수꼴 조각 ( $y < -1$ )에서의 해 개수는

$$T(y) := e^{-y-1} + sy + 2 = 0$$

의 해로 결정된다. 극값은  $T'(y) = -e^{-y-1} + s = 0$ 에서 발생하고, 그때  $e^{-y-1} = s$ ,  $y = -1 - \ln s$ 이며

$$T_{\min} = 2 - s \ln s.$$

따라서-  $s \ln s < 2$ 이면 해가 없다.-  $s \ln s = 2$ 이면 접선(중근) 1개이다.-  $s \ln s > 2$ 이면 해 2개이다. 임계값  $s^* = 2/W(2)$ 에서  $s^* \ln s^* = 2$ , 따라서  $b = 1/s^* = W(2)/2$ 이다. 요약하면-  $m < 0$ :  $g(m) = 1$ .-  $m = 0$ :  $g(0) = 1$  (우극한은 아래 참조).-  $0 < m < b (= W(2)/2)$ :  $s > s^*$ 이므로  $y < -1$ 에서 2 해,  $y > 1$ 에서 1 해  $\rightarrow g(m) = 3$ .-  $m = b$ : 좌측에서 중근 1개 + 우측 1개  $\rightarrow g(b) = 2$ .-  $m > b$ : 좌측 해 없음, 우측 1 해  $\rightarrow g(m) = 1$ . 따라서  $g$ 는  $m = 0$ 과  $m = b$ 에서 불연속이고,  $a = 0$ ,  $b = W(2)/2$ 이다.

4. 요구한 값 계산  $g(a) = g(0) = 1, \lim_{m \rightarrow 0^+} g(m) = 3$  이므로 첫 항은  $1 \times 3 = 3$ 이다. 또  $g(b) = 2$ . 한편  $b = 1/s^*, s^* \ln s^* = 2$  이므로

$$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln(1/s^*)}{1/s^*} = -s^* \ln s^* = -2, \quad \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = 4.$$

두 번째 항은  $g(b) \times 4 = 2 \times 4 = 8$ 이다. 따라서 전체 값은  $3 + 8 = 11$ 이다.

최종 정답: 11

## 선택과목: 확률과 통계

### 문항 23

#### 문제

네 문자  $a, b, c, d$  중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2 점]

#### 선지

1. 56
  2. 60
  3. 64
  4. 68
  5. 72
- 

### 문항 23 해설

#### 정답

③ 64

#### 해설

1. 중복을 허용하고 순서를 고려하므로 각 자리마다 네 문자  $\{a, b, c, d\}$  중 하나를 택할 수 있다.
2. 따라서 경우의 수는  $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$  로 계산된다.
3. 주어진 선택지에서 64는 ③에 해당한다.

#### 난이도

하

## 문항 24

두 사건  $A, B$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B | A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = 1.$$

○|때  $P(B)$ 의 값은 무엇인가? [3 점]

1.  $\frac{7}{10}$
2.  $\frac{3}{4}$
3.  $\frac{4}{5}$
4.  $\frac{17}{20}$
5.  $\frac{9}{10}$

난이도: 하

---

## 해설 24

정답: 1

1. 교집합의 확률을 구한다.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

2. 합집합의 공식에 대입한다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이므로

$$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{10} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

3. 검산을 한다. 확률의 범위  $0 \leq P(B) \leq 1$ 를 만족한다.

따라서 최종 정답은  $\frac{7}{10}$ 이며, 선택지 1이다.

## 문제 25

주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5 개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5 개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2 개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2 개의 공에 적힌 수가 서로 같은 확률은?

1.  $\frac{7}{15}$
  2.  $\frac{8}{15}$
  3.  $\frac{3}{5}$
  4.  $\frac{2}{3}$
  5.  $\frac{11}{15}$
- 

## 문제 25 해설

정답: 2

1. 전체 경우의 수는  ${}^{10}C_2 = 45$  이다.
2. 같은 색인 경우의 수는 흰 공  ${}^5C_2 = 10$ , 검은 공  ${}^5C_2 = 10$  이므로 합은 20이다.
3. 같은 수인 경우는 겹치는 숫자 2, 3, 4, 5에 대해 흰 공과 검은 공이 한 쌍씩 있으므로 4 가지이다.
4. 같은 수인 경우는 색이 서로 다르므로 두 사건은 서로 배타적이다. 따라서 유리한 경우의 수는  $20 + 4 = 24$  이다.
5. 확률은  $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$  이다. 따라서 최종 정답은  $\frac{8}{15}$ 이며, 선택지 번호는 2번이다.

## 문항 26

평균이  $m$ 이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$1.2 \leq m \leq a$$

이다.  $a$ 의 값은? (단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $\mathbb{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [3 점]

- 1. 5.1
  - 2. 5.2
  - 3. 5.3
  - 4. 5.4
  - 5. 5.5
- 

## 해설 26

정답: ⑤

- 1. 신뢰구간 공식은  $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  이다.
- 2. 표준오차는  $\frac{5}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$  이다.
- 3. 마진오차는  $2.58 \cdot \frac{5}{6} = \frac{12.9}{6} = 2.15$  이다.
- 4. 하한이  $1.2 = \bar{x} - 2.15$  이므로  $\bar{x} = 1.2 + 2.15 = 3.35$  이다.
- 5. 따라서 상한은  $a = \bar{x} + 2.15 = 3.35 + 2.15 = 5.5$  이다.

최종 정답은  $a = 5.5$ 이며, 선택지는 ⑤이다.

난이도: 하

## 문항 27

### 문제

이산 확률 변수  $X$  가 가지는 값이 0 부터 4 까지의 정수이고

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{|2x-1|}{12} & (x = 0, 1, 2, 3) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

일 때,  $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right)$  의 값은? (단,  $a$  는 0 이 아닌 상수이다.) [3 점]

### 보기

1. 36
  2. 39
  3. 42
  4. 45
  5. 48
- 

## 문항 27 해설

### 정답

4 번

### 해설

1.  $x = 0, 1, 2, 3$  에서  $P(X = x) = \frac{|2x-1|}{12}$  이므로 각 확률은  $\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}$  이고 합은  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$  이다. 전체 합이 1 이 되어야 하므로  $a = P(X = 4) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} (\neq 0)$  이다.
2. 기대값:  $E[X] = \sum xP(X = x) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{12} = \frac{0 + 1 + 6 + 15 + 8}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ .
3. 제곱의 기대값:  $E[X^2] = \sum x^2P(X = x) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 16 \cdot 2}{12} = \frac{0 + 1 + 12 + 45 + 32}{12} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2}$ .
4. 분산:  $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$ .

5. 선형 변환의 분산 성질에 의해  $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \text{Var}(X)$  이다. 여기서  $a = \frac{1}{6}$  이므로  $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = 36$ , 따라서  $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = 36 \cdot \frac{5}{4} = 45$ .

최종 정답

정답: 4 번 (45)

## 문항 28 [4 점]

### 문제

- 공 16개.
- 숫자 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 여섯 개의 빈 상자.
- 하나의 6면 주사위를 던지는 시행을 사용한다.

규칙 주사위를 한 번 던져 나온 눈을  $k$ 라 할 때,

- $k$ 가 홀수이면: 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.
- $k$ 가 짝수이면: 1부터 6까지 중  $k$ 의 약수가 적힌 각 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

요구 위 시행을 4번 반복한 후, 여섯 개 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 정확히 1개 더 많을 확률을 구하라.

### 선택지

1.  $\frac{1}{8}$
2.  $\frac{3}{16}$
3.  $\frac{1}{4}$
4.  $\frac{5}{16}$
5.  $\frac{3}{8}$

## 문항 28 해설

정답: (2)  $\frac{3}{16}$

1. 한 번의 시행에서 들어가는 공의 개수와 2, 3이 적힌 상자에의 기여를 정리하면 다음과 같다.

- $k \in \{1, 3, 5\}$  일 때: (2가 적힌 상자 +0, 3이 적힌 상자 +1), 전체 +3개  $\rightarrow$  홀수.
- $k = 2$ : (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +0), 전체 +2개  $\rightarrow$  짝수.
- $k = 4$ : (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +0), 전체 +3개  $\rightarrow$  홀수.

- $k = 6$ : (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +1), 전체 +4개  $\rightarrow$  짝수.
2. 4번의 시행에서 각 유형의 빈도를  $X_O (= \{1, 3, 5\})$ ,  $X_2$ ,  $X_4$ ,  $X_6$ 라 하면 총합은  $X_O + X_2 + X_4 + X_6 = 4$ 이다. 이때
- $$C_2 = X_2 + X_4 + X_6, \quad C_3 = X_O + X_6.$$
- 전체 공의 개수의 홀짝은  $X_O + X_4 \pmod{2}$ 로 결정된다.
3. 사건  $A$ :  $C_3 = C_2 + 1 \iff X_O = X_2 + X_4 + 1$ . 또한  $X_O + X_2 + X_4 + X_6 = 4$ 이므로
- $$X_6 = 4 - (X_O + X_2 + X_4) = 3 - 2(X_2 + X_4) \geq 0 \Rightarrow X_2 + X_4 \in \{0, 1\}.$$
- 조건  $B$ (전체 합 홀수):  $X_O + X_4$ 가 홀수여야 한다. 가능한 경우는 다음과 같다.
- $X_2 = 0, X_4 = 0 \Rightarrow X_O = 1, X_6 = 3$ , 그리고  $X_O + X_4 = 1$ (홀수)  $\Rightarrow$  포함.
  - $X_2 = 1, X_4 = 0 \Rightarrow X_O = 2, X_6 = 1$ ,  $X_O + X_4 = 2$ (짝수)  $\Rightarrow$  제외.
  - $X_2 = 0, X_4 = 1 \Rightarrow X_O = 2, X_6 = 1$ ,  $X_O + X_4 = 3$ (홀수)  $\Rightarrow$  포함.
4. 확률 계산(주사위가 공정하다고 가정하여 각 눈의 확률을 1/6로 둔다). 한 시행에서  $\{1, 3, 5\}$ 가 나올 확률은 1/2이므로 다항분포를 사용한다.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1, 0, 0, 3) &= \frac{4!}{1! 0! 0! 3!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{108}, \\ \mathbb{P}(2, 0, 1, 1) &= \frac{4!}{2! 0! 1! 1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

따라서  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{108} + \frac{1}{12} = \frac{5}{54}$ .

5. 분모  $\mathbb{P}(B)$ : 한 시행이 홀수 개의 공을 더하는 확률은  $p = \mathbb{P}(\{1, 3, 5, 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . 4번 중 홀수 번 발생할 확률은

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1 - (1 - 2p)^4}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^4}{2} = \frac{40}{81}.$$

따라서 조건부 확률은

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{5}{54}}{\frac{40}{81}} = \frac{3}{16}.$$

즉,  $\frac{3}{16}$ 이며, 선택지는 (2)이다.

## 문항 29

### 문제

6 이하의 자연수  $a$ 에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다. 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가  $a$ 보다 작거나 같으면 동전을 5 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고, 나온 눈의 수가  $a$ 보다 크면 동전을 3 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다. 이 시행을 19200 번 반복하여 기록한 수가 3인 횟수를 확률 변수  $X$ 라 하자.  $E(X) = 4800$  일 때,  $P(X \leq 4800 + 30a)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이  $k$ 이다.  $1000 \times k$ 의 값을 구하시오. [4 점]

다음 표준정규분포표를 사용하라.

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

## 문항 29 해설

정답: 977

### 해설

- 한 시행에서 기록된 수가 3 일 확률을  $p$ 라 하자. 그러면

$$p = \frac{a}{6} \cdot P(\text{5 번에서 } 3 \text{ 앞}) + \frac{6-a}{6} \cdot P(\text{3 번에서 } 3 \text{ 앞}) = \frac{a}{6} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{2^5} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{a}{6} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{a+4}{32}.$$

- $X$ 는 19200 번 시행 중 기록이 3 인 횟수이므로  $X \sim \text{Bin}(19200, p)$  이고,  $E(X) = 19200p$  이다.  $E(X) = 4800$  이므로  $p = \frac{4800}{19200} = \frac{1}{4}$ . 따라서

$$\frac{a+4}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 4.$$

- 따라서  $X \sim \text{Bin}(19200, \frac{1}{4})$ . 평균은  $\mu = 19200 \cdot \frac{1}{4} = 4800$ , 분산은  $\sigma^2 = 19200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3600$ , 표준편차는  $\sigma = 60$ 이다. 구하는 값은

$$k = P(X \leq 4800 + 30a) = P(X \leq 4800 + 120) = P(X \leq 4920).$$

- 정규 근사로 표준화하면

$$z = \frac{4920 - 4800}{60} = 2.0.$$

표에서  $P(0 \leq Z \leq 2.0) = 0.477$  이므로  $P(Z \leq 2.0) = 0.5 + 0.477 = 0.977$ . 따라서  $k \approx 0.977$  이고,  $1000 \times k = 977$ .

최종 정답: 977

## 문항 번호: 30 [4 점]

### 문제

비어 있는 주머니 10 개가 일렬로 놓여 있고, 공 8 개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김 없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

1. (가) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.
2. (나) 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

### 형식화

- 주머니는 일렬로 10개이며, 위치는  $i = 1, 2, \dots, 10$ 이다.
- 각 위치  $i$ 에 들어간 공의 개수는  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이다.
- 총합 조건:  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 8$ .
- 1개 든 주머니의 개수 조건:  $\#\{i \mid a_i = 1\} \in \{4, 6\}$ .
- 인접 금지 조건: 임의의  $i$ 에 대해  $a_i = 2$ 이면, 가능한 이웃  $j \in \{i-1, i+1\}$ 에 대해  $a_j = 0$ 이다.
- 선형 이웃 관계는  $(i, i+1)$ 만 인접으로 본다.

### 해설

#### 정답

262

### 풀이

문제를 변수로 정리하면 각 위치  $i$ 에 대해  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이고, 총합은  $\sum_{i=1}^{10} a_i = 8$ 이다. 1이 든 주머니 수를  $o$ , 2가 든 주머니 수를  $t$ 라 하면  $o + 2t = 8$ 이며, (가) 조건으로  $o \in \{4, 6\}$ 이다. 따라서 가능한 쌍은  $(o, t) = (6, 1)$  또는  $(4, 2)$  두 가지이다. 또한  $a_i = 2$ 인 자리의 이웃은 반드시 0이어야 한다. 2의 위치를 먼저 정하고, 그 후 1의 배치를 센다.

1.  $(o, t) = (6, 1)$ 인 경우  
2가 한 곳에만 들어간다.
  - 2가 끝자리(1 또는 10)에 있을 때: 강제 0은 이웃 1칸, 따라서 1을 놓을 수 있는 자리는  $10 - 1 - 1 = 8$  칸이므로  $\binom{8}{6}$ . 끝자리는 2곳이므로 기여는  $2\binom{8}{6}$ .
  - 2가 내부 자리(2부터 9) 중 한 곳에 있을 때: 강제 0은 양옆 2칸, 따라서 1을 놓을 수 있는 자리는  $10 - 1 - 2 = 7$  칸이므로  $\binom{7}{6}$ . 내부 자리는 8곳이므로 기여는  $8\binom{7}{6}$ .

따라서 합은

$$2\binom{8}{6} + 8\binom{7}{6} = 2 \cdot 28 + 8 \cdot 7 = 56 + 56 = 112.$$

2.  $(o, t) = (4, 2)$  인 경우

2 가 든 두 주머니는 서로 인접할 수 없다. 두 2 의 배치가 주어졌을 때, 그들에 의해 강제되는 0 의 서로 다른 칸 수를  $s$  라 하자. 그러면 1 을 놓을 수 있는 자리는  $10 - 2 - s = 8 - s$  칸이므로 경우의 수는  $\binom{8-s}{4}$  이다.  $s$ 에 따라 2 의 배치를 분류하면 다음과 같다.

- $s = 2$ : 양 끝 1, 10에 두는 경우 1 가지, 끝과 거리 2 내부 쌍 1, 3, 8, 10 2 가지. 합 3 가지. 기여:  $3\binom{6}{4} = 3 \cdot 15 = 45$ .
- $s = 3$ : 끝과 내부(겹치지 않음) 쌍 12 가지, 내부끼리 거리가 2 인 쌍 6 가지. 합 18 가지. 기여:  $18\binom{5}{4} = 18 \cdot 5 = 90$ .
- $s = 4$ : 내부끼리 거리가 3 이상인 쌍 15 가지. 기여:  $15\binom{4}{4} = 15 \cdot 1 = 15$ .

따라서 합은

$$45 + 90 + 15 = 150.$$

최종 합계는  $112 + 150 = 262$  이므로, 정답은 **262**이다.

(검증)  $t = 2$ 에서 비인접 쌍의 총수는  $\binom{9}{2} = 36$ 이며, 위 분류에서  $3 + 18 + 15 = 36$  으로 일치한다.