

수학 문제 및 해설 모음집

SNarGo Math Solver

2025년 11월 13일 15시 41분 7초

참고: 이것은 SN의 *SNarGo AI* 에이전트가 직접 수능 문제를 풀어본 뒤에 작성한
해설을 바탕으로 작성되었습니다.

Designed by Dr. Ryun

SNar Lab.

2025.11

SN Academy

공통 문항

문항 1 [2 점]

질문: $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은?

선택지

1. ① 1
 2. ② $\sqrt{3}$
 3. ③ 3
 4. ④ $3\sqrt{3}$
 5. ⑤ 9
-

문항 1 해설

정답

정답: 1 번(①).

풀이

같은 밑의 거듭제곱 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 과 지수법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned} 9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} &= (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{2 \cdot \frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

난이도

하

문항 2

문제

배점: 2 점 함수 $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

- ① 7
- ② 9
- ③ 11
- ④ 13
- ⑤ 15

문항 2 해설

해설

주어진 극한은 도함수의 정의에 해당하므로 $f'(1)$ 을 구하면 된다.

1. 도함수의 정의: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. 따라서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$ 이다.
2. 함수 $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 을 미분하면 $f'(x) = 9x^2 + 4$ 이다.
3. 대입: $f'(1) = 9 \cdot 1^2 + 4 = 13$.

추가 확인(직접 전개): $f(1+h) = 3(1+h)^3 + 4(1+h) + 1 = 8 + 13h + 9h^2 + 3h^3$, $f(1) = 8$
 이므로 분자는 $13h + 9h^2 + 3h^3 = h(13 + 9h + 3h^2)$ 이고, 따라서 극한은 13 이다.

정답: 13 (선택지 ④)

난이도: 하

문제 3

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^4 (2a_k - k) = 0$ 일 때, $\sum_{k=1}^4 a_k$ 의 값은? [3 점]

보기

1. 1
 2. 2
 3. 3
 4. 4
 5. 5
-

해설 3

단계별 풀이

1. 주어진 식을 전개하면 $2\sum_{k=1}^4 a_k - \sum_{k=1}^4 k = 0$ 이다.
2. $\sum_{k=1}^4 k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 이므로, $S = \sum_{k=1}^4 a_k$ 라고 두면 $2S - 10 = 0$ 이다.
3. 따라서 $S = 5$ 이다.

최종 정답

정답: 5 (⑤)

난이도

하

문항 4: 함수

정의

함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의한다:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & (x < 1) \\ x^2 - 3x + a, & (x \geq 1) \end{cases}$$

질문

이 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3 점]

선택지

- (1) 1
 - (2) 2
 - (3) 3
 - (4) 4
 - (5) 5
-

문항 4 해설

1. 함수가 전제에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.
2. 왼쪽 극한: $x < 1$ 구간에서 $f(x) = 3x - 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ 이다.
3. 오른쪽 극한과 함수값: $x \geq 1$ 구간에서 $f(x) = x^2 - 3x + a$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + a = a - 2$ 이다.
4. 연속이므로 $a - 2 = 1$ 이고, 따라서 $a = 3$ 이다.

따라서 상수 a 의 값은 **3**이다. (선택지 (3))

난이도: 하

문제 5

지문

함수 $f(x) = (x + 2)(2x^2 - x - 2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

요구

$f'(1)$ 의 값

배점

3 점

선택지

1. 6
 2. 7
 3. 8
 4. 9
 5. 10
-

해설 5

정답

(3) 8

풀이

1. $f(x)$ 를 전개한다:

$$f(x) = (x + 2)(2x^2 - x - 2) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4.$$

2. 미분한다:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 4.$$

3. $x = 1$ 을 대입한다:

$$f'(1) = 6(1)^2 + 6(1) - 4 = 8.$$

난이도

하

문제 6

1 보다 큰 두 실수 a, b 가 다음을 만족시킬 때, $\log_9(ab)$ 의 값은 무엇인가? [3 점]

$$\log_a b = 3, \quad \log_3 \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2}$$

1. $\frac{3}{8}$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{5}{8}$

4. $\frac{3}{4}$

5. $\frac{7}{8}$

난이도: 하

해설 6

정답: (2) $\frac{1}{2}$

풀이

1. $\log_a b = 3$ 이므로 $b = a^3$.

2. $\log_3 \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{b}{a} = 3^{1/2}$.

3. 대입하면 $\frac{a^3}{a} = a^2 = 3^{1/2}$ 이므로 $a = 3^{1/4}$ ($a > 1$ 이므로 양의 해).

4. 따라서 $b = a^3 = 3^{3/4}$, $ab = a \cdot b = a^4 = (3^{1/4})^4 = 3$.

5. 그러므로 $\log_9(ab) = \log_9 3 = \frac{1}{2}$.

따라서 최종 정답은 $\frac{1}{2}$ 이며, 선택지는 (2)이다.

난이도: 하

문제 7

두 곡선 $y = x^2 + 3$, $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 과 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 무엇인가? [3점]

보기

1. $\frac{18}{5}$
2. $\frac{7}{2}$
3. $\frac{17}{5}$
4. $\frac{33}{10}$
5. $\frac{16}{5}$

그림 설명

- 좌표축은 수평 x 축과 수직 y 축으로, 원점 O 에서 교차한다. 축 끝에는 각각 x , y 라벨이 있다.
- 포물선 $y = x^2 + 3$ 은 위로 열린 포물선으로 y 축 대칭이며, 그래프 좌상단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 포물선 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 은 아래로 열린 포물선으로 y 축 대칭이며, 그래프 좌하단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 두 포물선은 y 축 위의 한 점에서 서로 접하며, 그 점은 원점 위쪽에 있다.
- 직선 $x = 2$ 는 y 축의 오른쪽에 있는 수직선이며, 선 아래쪽 근처에 라벨이 있다.
- 음영 영역은 왼쪽 경계가 두 포물선의 접점, 오른쪽 경계가 직선 $x = 2$ 이고, 위쪽 경계는 $y = x^2 + 3$, 아래쪽 경계는 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이다. 위치는 y 축의 오른쪽, $x = 2$ 의 왼쪽에 있다.

해설 7

풀이

- 두 곡선의 교점은 $x^2 + 3 = -\frac{1}{5}x^2 + 3 \Rightarrow \frac{6}{5}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, $y = 3$ 이다. - $x > 0$ 에서 $x^2 + 3 > -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이므로, 구간 $0 \leq x \leq 2$ 에서 위쪽 곡선은 $y = x^2 + 3$, 아래쪽 곡선은 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이다. - 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^2 \left[(x^2 + 3) - \left(-\frac{1}{5}x^2 + 3 \right) \right] dx = \int_0^2 \frac{6}{5}x^2 dx = \frac{6}{5} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{5}.$$

정답

5 번, $\frac{16}{5}$

8. 문제

조건: $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0$, 그리고 $\cos(\pi - \theta) > 0$. 물음: $\sin \theta$ 의 값은? [3 점]

선택지:

1. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. 0

4. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

5. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

난이도: 하

8. 해설

정답: (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

1. $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = -3 \cos \theta$.

2. 항등식 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면 $9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$.

3. 따라서 $|\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $|\sin \theta| = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

4. $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta > 0 \Rightarrow \cos \theta < 0$.

5. $\sin \theta = -3 \cos \theta$ 이므로 $\cos \theta$ 가 음수일 때 $\sin \theta$ 는 양수. 따라서 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

최종 정답: (1)

문항 9

가정

a 는 양수.

함수

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 4.$$

조건

직선 $y = 5$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에 접한다.

질문

$f(2)$ 의 값은?

배점

[4 점]

선택지

1. (1) 11
2. (2) 12
3. (3) 13
4. (4) 14
5. (5) 15

난이도

중

문항 9 해설

정답

선택지 (4), 값은 14.

해설

1. 접선 $y = 5$ 가 $y = f(x)$ 에 접한다는 것은 어떤 c 에 대해 $f(c) = 5$ 이고, 접선의 기울기가 0이므로 $f'(c) = 0$ 임을 뜻한다.
2. $f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 3(x - a)(x + 3a)$ 이므로 임계점은 $x = a, x = -3a$ 이다.
3. 따라서 $f(a) = 5$ 또는 $f(-3a) = 5$ 중 하나여야 한다.
 - $f(a) = a^3 + 3aa^2 - 9a^2a + 4 = 4 - 5a^3$. 만약 $f(a) = 5$ 이면 $4 - 5a^3 = 5 \Rightarrow a^3 = -\frac{1}{5}$ 가 되어 $a > 0$ 와 모순이다.
 - $f(-3a) = -27a^3 + 27a^3 + 27a^3 + 4 = 27a^3 + 4$. $27a^3 + 4 = 5 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ (단, $a > 0$).
4. $a = \frac{1}{3}$ 에서 $f(2)$ 를 계산하면

$$f(2) = 8 + 12a - 18a^2 + 4 = 12 + 12a - 18a^2 = 12 + \frac{12}{3} - 18 \cdot \frac{1}{9} = 12 + 4 - 2 = 14.$$

최종 답

14 (선택지 (4))

문항 10

주어진 정보

- 상수 a 는 $a > 1$ 이다.
- 곡선: $y = a^x - 2$.
- 제 1 사분면의 곡선 위 점 A 를 잡는다. A 의 x 좌표를 t 라 두면 $A = (t, a^t - 2)$ 이며 $t > 0, a^t - 2 > 0$ 이다.
- A 를 지나는 y 축에 평행한 직선: $x = t$.
 - $x = t$ 가 x 축 ($y = 0$)과 만나는 점: $B = (t, 0)$.
 - $x = t$ 가 곡선 $y = a^x - 2$ 의 점근선 $y = -2$ 와 만나는 점: $C = (t, -2)$.
- 길이
 - AB 는 $x = t$ 위의 수직선분이므로 $|AB| = (a^t - 2) - 0 = a^t - 2$.
 - BC 는 $x = t$ 위의 수직선분이므로 $|BC| = 0 - (-2) = 2$.
- 조건: $|AB| = |BC|$.
- 점 O 는 원점 $O = (0, 0)$ 이다.
- 삼각형 AOC 의 넓이는 8이다.
- OB 는 원점에서 B 까지의 거리로, B 가 x 축 위에 있으므로 $|OB| = t$ 이다.

질문

$a \times |OB|$ 의 값, 즉 $a \times t$ 를 구하여라.

선택지

- (1) $2^{13/6}$
- (2) $2^{7/3}$
- (3) $2^{5/2}$
- (4) $2^{8/3}$
- (5) $2^{17/6}$

배점

[4 점]

문항 10 해설

정답

(3) $2^{5/2}$

해설

1. $|AB| = a^t - 2$, $|BC| = 2$ 이고 $|AB| = |BC|$ 이므로 $a^t - 2 = 2 \Rightarrow a^t = 4$ 이다.
2. 삼각형 AOC 의 넓이를 이용한다. $O = (0, 0)$, $a^t = 4$ 이므로 $A = (t, 2)$, $C = (t, -2)$ 이다. 두 벡터 $\overrightarrow{OA} = (t, 2)$, $\overrightarrow{OC} = (t, -2)$ 의 행렬식은 $t \cdot (-2) - 2 \cdot t = -4t$ 이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} |t \cdot (-2) - 2 \cdot t| = \frac{1}{2} \cdot 4t = 2t$$
 이다. 조건에 따라 $2t = 8$ 이므로 $t = 4$ 이다.
3. $a^t = 4$, $t = 4$ 이므로 $a^4 = 4$ 이고 $a = 2^{1/2}$ 이다.
4. 따라서 $a \times |OB| = a \times t = 2^{1/2} \times 4 = 4\sqrt{2} = 2^{5/2}$ 이다.

검증

$a = \sqrt{2} > 1$, $t = 4 > 0$, $A = (4, 2)$ 는 제 1 사분면에 있고 $|AB| = 2 = |BC|$ 로 모든 조건을 만족한다.

11. 문제

시각 $t = 0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 가 있다. 실수 k 에 대하여 시각 t ($t \geq 0$) 일 때 점 P 의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4 점]

보기

- ㄱ. $k = 0$ 이면, 시각 $t = 1$ 일 때 점 P 의 위치는 $\frac{13}{3}$ 이다.
- ㄴ. $k = 3$ 이면, 출발한 후 점 P 의 운동 방향이 한 번 바뀐다.
- ㄷ. $k = 5$ 이면, 시각 $t = 0$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 3이다.

선택지

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 해설

1. 일반식: 위치 함수 $s(t) = \int v(t) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{k}{2}t^2 + 4t$ 이고, 원점 출발이므로 $s(0) = 0$ 이다.
2. (ㄱ) $k = 0$ 이면 $v(t) = t^2 + 4$ 이므로 $s(1) = \frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1 = \frac{13}{3}$ 이다. 따라서 참이다.
3. (ㄴ) $k = 3$ 이면 $v(t) = t^2 - 3t + 4$ 이다. 판별식 $\Delta = 9 - 16 < 0$ 이므로 모든 t 에서 $v(t) > 0$ 이다. 따라서 운동 방향 변화가 없으므로 거짓이다.
4. (ㄷ) $k = 5$ 이면 $v(t) = t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$ 이다. 구간 $[0, 1)$ 에서 는 $v > 0$, 구간 $(1, 2]$ 에서 는 $v < 0$ 이므로 이동 거리는

$$\int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 |v(t)| dt = \int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 (-v(t)) dt = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3$$

이다. 따라서 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이며, 최종 정답은 ③ (ㄱ, ㄷ)이다.

문제 12

등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$2(a_1 + a_4 + a_7) = a_4 + a_7 + a_{10} = 6$$

을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은? [4 점]

1. $\frac{22}{7}$

2. $\frac{24}{7}$

3. $\frac{26}{7}$

4. $\frac{30}{7}$

5. $\frac{32}{7}$

난이도: 중

해설 12

정답: 2 번, $a_{10} = \frac{24}{7}$

1. 등비수열에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = r^3(a_1 + a_4 + a_7)$ 이다.

2. 주어진 조건에서 $a_1 + a_4 + a_7 = 3$, $a_4 + a_7 + a_{10} = 6$ 이므로 $r^3 = \frac{6}{3} = 2$ 이다.

3. $a_1 = \frac{3}{1 + r^3 + r^6} = \frac{3}{1 + 2 + 4} = \frac{3}{7}$ 이다.

4. 따라서 $a_{10} = a_1 r^9 = \frac{3}{7} \cdot 2^3 = \frac{24}{7}$ 이다.

문제 13

함수 $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, -6)$ 에서의 접선을 l 이라 하고, 함수 $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, 6)$ 에서의 접선을 m 이라 하자. 두 직선 l, m 과 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 얼마인가? [4 점]

1. 21
2. 28
3. 35
4. 42
5. 49

해설 13

정답: 5

1. 함수 $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여 $f(1) = -6$, $f'(x) = 2x - 4$ 이므로 $f'(1) = -2$ 이다. 따라서 점 $(1, -6)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$y - (-6) = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x - 4$$

이고, y 절편은 $(0, -4)$ 이다.

2. 함수 $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곱의 미분법을 적용하면

$$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$$

이다. 점 $x = 1$ 에서

$$g(1) = (1^3 - 2 \cdot 1)f(1) = (-1)(-6) = 6,$$

$$g'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2)f(1) + (1^3 - 2 \cdot 1)f'(1) = (1)(-6) + (-1)(-2) = -6 + 2 = -4$$

이므로, 점 $(1, 6)$ 에서의 접선 m 의 방정식은

$$y - 6 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 10$$

이고, y 절편은 $(0, 10)$ 이다.

3. 두 직선 $l : y = -2x - 4$, $m : y = -4x + 10$ 의 교점을 구하면

$$-2x - 4 = -4x + 10 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7,$$

$$y = -2 \cdot 7 - 4 = -18$$

이다. 따라서 세 꼭짓점은 $A(0, -4)$, $B(0, 10)$, $C(7, -18)$ 이다.

4. 넓이는 y 축을 밑변으로 보면 밑변의 길이는 $|10 - (-4)| = 14$, 높이는 점 C 에서 y 축까지의 거리 $|7| = 7$ 이다. 따라서 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49$$

이다. (점산: $\frac{1}{2}|7(-4 - 10)| = 49$)

최종 정답: 49 (선택지 5)
난이도: 중

문항 14

그림 정보(정확한 기하 구성만 기술, 해설/추론 없음)

- 기본 도형과 길이/각
 - 직각삼각형 ABC : $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle B = \pi/2$.
 - 좌표 표현(인식 명확화를 위한 한 가지 일관된 배치): $B = (0, 0)$, $A = (-3, 0)$, $C = (0, 4)$. 그러면 $AC = 5$.
 - 선분 AB 를 2 : 1로 내분하는 점 D : $AD : DB = 2 : 1 \Rightarrow D = (-1, 0)$, $AD = 2$.
 - 원과 교점
 - 원 ω_1 : 중심 A , 반지름 $AD = 2$.
 - * 직선 AB 와의 교점: D 와 F . F 는 D 가 아닌 쪽의 교점 $\Rightarrow F = (-5, 0)$.
 - * 선분 AC 와의 교점(A 가 아닌 점) $E \Rightarrow E = (-\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$.
 - 호 EF 위의 점 G 를 잡되(ω_1 위, D 를 포함하지 않는 EF 호), $CG = 2\sqrt{6}$.
 - 원 Ω : 세 점 C, E, G 를 지나는 원(따라서 $\Omega \cap \omega_1 = \{E, G\}$).
 - 점 H : Ω 위의 점이며 $\angle HCG = \angle BAC$.
 - 그림에 그려진 선/표기
 - AB 는 수평선(그 위에 F, A, D, B 순서). BC 는 수직선(B 에서 위로, 끝점 C). AC 는 A 에서 C 로 향하는 사선이며 E 를 지난다.
 - ω_1 (중심 A , 반지름 2)과 Ω (세 점 C, E, G 를 지나는 원)가 서로 교차하며 교점은 E 와 G .
 - Ω 내부에는 현 HC, HG, GC 가 그려져 있고, 현 CE 도 표시됨.
 - B 에서 의 직각 표시($\angle ABC = 90^\circ$)가 있음.
 - A 에서 작은 호 표시로 $\angle BAC$ 가 표기됨.
 - C 에서 작은 호 표시로 $\angle HCG$ 가 표기되어 $\angle HCG = \angle BAC$ 조건을 시각화.
 - 선택지(길이 GH)
 1. $\frac{6\sqrt{15}}{5}$
 2. $\frac{38\sqrt{10}}{25}$
 3. $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
 4. $\frac{32\sqrt{15}}{25}$
 5. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$
-

해설

1. 좌표 배치: $B = (0, 0)$, $A = (-3, 0)$, $C = (0, 4) \Rightarrow AC = 5$. $D = (-1, 0)$, $AD = 2$. 원 $\omega_1: (x+3)^2 + y^2 = 4$.

2. 점 E : AC 위에서 $AE = 2$ 이므로 매개변수 $t = \frac{2}{5}$. 따라서

$$E = A + \frac{2}{5}(C - A) = \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad CE = \frac{3}{5}|AC| = 3.$$

3. 점 G : ω_1 위이며 $CG = 2\sqrt{6}$. 두 원 $(x+3)^2 + y^2 = 4$ 와 $x^2 + (y-4)^2 = 24$ 의 교점은 직선 $6x + 8y + 13 = 0$ 위에 있다. 해를 구하면

$$x = \frac{-27 \pm 4\sqrt{15}}{10}, \quad y = \frac{-13 - 6x}{8}.$$

호 EF 에 해당하는 점은

$$G = \left(\frac{-27 - 4\sqrt{15}}{10}, \frac{4 + 3\sqrt{15}}{10}\right).$$

4. 중심 A , 반지름 2의 원 위에서 $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{12}{10}, \frac{16}{10}\right)$, $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{3-4\sqrt{15}}{10}, \frac{4+3\sqrt{15}}{10}\right)$. 내적 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$ 이므로

$$\cos \angle EAG = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

따라서 현 EG 의 길이

$$EG = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\angle EAG}{2} = 4\sqrt{\frac{1 - \cos \angle EAG}{2}} = 4\sqrt{\frac{1 - 1/4}{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 삼각형 CEG 의 변 길이: $CE = 3$, $CG = 2\sqrt{6}$, $EG = \sqrt{6}$. 헤론 공식을 사용하면 넓이 Δ 는

$$s = \frac{3 + 2\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{2}, \quad \Delta = \sqrt{s(s-3)(s-2\sqrt{6})(s-\sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

외접반지름 R 은

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{4 \cdot (3\sqrt{15}/4)} = \frac{4\sqrt{15}}{5}.$$

6. 점 H 는 Ω 위에서 $\angle HCG = \angle BAC$. 직각삼각형 ABC 에서 $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$. 원의 성질(현의 길이 공식)로부터

$$GH = 2R \sin \angle HCG = 2 \cdot \frac{4\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}.$$

따라서 정답은 4 번이다. 선택지는 (4)에 해당한다.

문항 15

문제

다음과 같이 정의된 함수들이 주어진다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$a > 0$ 인 양수에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} ax + a, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x < 1 \\ ax - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

또한

$$h(x) = \int_0^x (g(t) - f(t)) dt$$

로 정의한다.

정의: $h(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값을 k 라 한다. $a = k$ 일 때 $k + h(3)$ 의 값을 구하라. [4 점]

선택지

1. $\frac{9}{2}$
2. $\frac{11}{2}$
3. $\frac{13}{2}$
4. $\frac{15}{2}$
5. $\frac{17}{2}$

문항 15

해설

정답: 4 번

1. g 와 f 가 연속이므로 $h'(x) = g(x) - f(x)$ 이다. 극값은 $h'(x) = 0$ 에서 부호가 바뀌는 지점에서만 생긴다.

2. 구간별 $h'(x)$ 는 다음과 같다.

$$h'(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 0, \\ -x^2 + x = x(1-x), & 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + (a+1)x - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

특히 $x \in [-1, 1)$ 에서 $h'(x) \geq 0$ 이고, $x = 0, 1$ 에서 만 0이 된다. $x = 0$ 에서 는 좌우 부호가 모두 양이므로 극값이 없다.

3. $x < -1$ 에서 $h'(x) = x^2 + ax + a$ 의 판별식은 $a^2 - 4a = a(a - 4)$ 이다.

- $a < 4$: 근이 없어서 항상 양이므로 극값이 생기지 않는다.
- $a = 4$: $(x + 2)^2$ 로 중근이 되어 부호 변화가 없으므로 극값이 생기지 않는다.
- $a > 4$: 서로 다른 두 실근이 둘 다 -1 보다 작고 부호가 $+ \rightarrow - \rightarrow +$ 로 바뀌어 이 구간에서 만 극값이 두 개 생긴다.

따라서 극값이 하나만 되려면 반드시 $a \leq 4$ 여야 한다.

4. $x \geq 1$ 에서 $h'(x) = -x^2 + (a + 1)x - a$ 를 본다.

- $0 < a < 1$: $x > 1$ 에서 $h'(x) < 0$ 이므로 $x = 1$ 에서 $+ \rightarrow -$ 로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다.
- $a = 1$: $h'(x) = -(x - 1)^2 \leq 0$ 이므로 역시 $x = 1$ 에서 극값이 한 개 생긴다.
- $1 < a \leq 4$: $h'(x) = -(x - 1)(x - a)$ 이므로 $(1, a)$ 에서 는 양, $x > a$ 에서 는 음이다. 따라서 $x = a$ 에서 만 $+ \rightarrow -$ 로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다. $x = 1$ 에서 는 부호 변화가 없다.

결론적으로 $0 < a \leq 4$ 에서 극값은 정확히 한 개이고, $a > 4$ 에서 는 이미 좌측에서 두 개가 생긴다. 따라서 $k = 4$ 이다.

5. 이제 $a = k = 4$ 일 때 $h(3)$ 을 구한다.

$$\int_0^3 g(t) dt = \int_1^3 (4t - 4) dt = [2t^2 - 4t]_1^3 = 8,$$

$$\int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 (t^2 - t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

따라서 $h(3) = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$ 이고,

$$k + h(3) = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}.$$

최종 정답: 4 번, $\frac{15}{2}$

문항 16

문제

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = n^2 a_n + 1$ 을 만족시킨다. a_3 의 값을 구하시오. [3 점]

주어진 조건

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n^2 a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

문항 16 해설

정답

$$a_3 = 9$$

해설

1. 초기값은 $a_1 = 1$ 이다.
2. $n = 1$ 을 대입하면 $a_2 = 1^2 \cdot a_1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$ 이다.
3. $n = 2$ 를 대입하면 $a_3 = 2^2 \cdot a_2 + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ 이다.

따라서 a_3 의 값은 9이다.

문항 17

문제

함수 $f(x) = 4x^3 - 2x$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 에 대하여 $F(0) = 4$ 일 때, $F(2)$ 의 값을 구하시오.

배점

[3 점]

문항 17 해설

정답

16

해설

1. 함수 $f(x) = 4x^3 - 2x$ 의 한 부정적분은 항별로 적분하여 다음과 같다.

$$F(x) = \int (4x^3 - 2x) dx = x^4 - x^2 + C.$$

2. 조건 $F(0) = 4$ 를 대입하면 $C = 4$ 이다.
3. 따라서 $F(2)$ 는 다음과 같다.

$$F(2) = 2^4 - 2^2 + 4 = 16 - 4 + 4 = 16.$$

최종 정답: 16

문항 18

다음 조건을 만족하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에서 넓이를 구하시오. [3 점]

조건

- $|AB| = 5$
 - $|AC| = 6$
 - $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$
-

문항 18 해설

1. 삼각형의 넓이 공식 $S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle BAC)$ 을 사용한다.
2. $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$ 이고 $\angle BAC$ 는 삼각형의 내부각이므로 $\sin(\angle BAC) > 0$ 이다.
따라서

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

3. 넓이는

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12.$$

따라서 삼각형 $\triangle ABC$ 의 넓이는 **12**이다.
난이도: 하

문제 19

$-2 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 다음 부등식

$$-k \leq 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8 \leq k$$

이 성립하도록 하는 양수 k 의 최솟값을 구하시오. [3 점] 조건: $k > 0$

해설 19

- 함수 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ 에 대하여, $-k \leq f(x) \leq k$ 가 $[-2, 2]$ 의 모든 x 에서 성립하려면 k 의 최솟값은

$$k = \max_{x \in [-2, 2]} |f(x)|$$

이다.

- 도함수는 $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ 이므로 임계점은 $x = -2, 1$ 이고, 끝점 $x = -2, 2$ 와 함께 값을 계산한다.

$$f(-2) = 2(-8) + 3(4) - 12(-2) - 8 = 12,$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 - 8 = -15,$$

$$f(2) = 16 + 12 - 24 - 8 = -4.$$

- 절댓값은 각각 $|f(-2)| = 12$, $|f(1)| = 15$, $|f(2)| = 4$ 이므로 구간 $[-2, 2]$ 에서 최대값은 15이다.

따라서 k 의 최솟값은 15이다. **정답: 15**

문제 20

수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1 = 7$
- 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10$$

다음은 $\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1}$ 의 값을 구하는 과정이다.
2 이상의 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k$ 이므로

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + []$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n + a_{n+1} = 3 \times []$$

(㉠)

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \quad (n \geq 2)$$

에서 양변에 $n = 2$ 를 대입하면

$$a_2 = []$$

(㉡)

(㉠)과 (㉡)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = []$$

위의 [가]에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 하고, [나], [다]에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때,
 $\frac{p \times q}{f(12)}$ 의 값을 구하시오. [4 점]

해설 20

1. 부분합 $S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$ 가 주어졌으므로, $n \geq 2$ 에서

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S(n+1) - S(n) = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \left[\frac{1}{6}((n+1)^2 - n^2) - \frac{1}{6}((n+1) - n) \right] \\ &= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

따라서 $[] = f(n) = \frac{n}{3}$ 이고, 정리하면 $2a_n + a_{n+1} = 3 \cdot \frac{n}{3} = n$ ($n \geq 2$) 이다.

2. $n = 2$ 를 부분합 식에 대입하면

$$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 2 + 10,$$

$$7 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3} + 10,$$

따라서 $a_2 = 10$ 이므로 $[] = p = 10$ 이다.

3. 구하려는 합은

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = 7 + 10 + \sum_{k=1}^5 (2k + 1).$$

위에서 $2a_n + a_{n+1} = n$ 을 $n = 2k + 1$ 에 적용하였다.

$$= 17 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11) = 17 + 35 = 52.$$

따라서 $[] = q = 52$ 이다.

4. $f(12) = \frac{12}{3} = 4$ 이므로

$$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130.$$

정답: 130

문제 21

최고차항의 계수가 양수인 삼차 함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x), & x < t, \\ f(x), & x \geq t \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m 의 집합은 $\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\}$ 이다.

$g(-5)$ 의 값을 구하시오. (단, $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4 점]

해설 21

1. 조건 (가)로부터의 기본 형태

$a = 0, 2$ 에서 우극한이 유한하게 존재하려면 분모 $x(x-2)$ 가 0 이 되는 점에서 분자 $g(x)$ 도 0 이어야 한다. g 는 연속이므로 $g(0) = g(2) = 0$, 따라서 $f(0) = f(2) = 0$ 이다. 최고차항 계수가 양수인 삼차 함수 f 는

$$f(x) = ax(x-2)(x-b) \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}).$$

또한 $x = t$ 에서 g 가 연속이라면 $-f(t) = f(t)$ 이어야 하므로 $f(t) = 0$, 따라서

$$t \in \{0, 2, b\}.$$

아울러 $x \neq 0, 2$ 에서 는

$$\frac{f(x)}{x(x-2)} = a(x-b), \quad \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(x-b), & x < t, \\ a(x-b), & x \geq t. \end{cases}$$

2. 집합 M 의 정의와 경우 나누기

$M := \{m \in \mathbb{N} \mid \lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0\}$ 라고 하자. t 의 값에 따라 M 을 분석한다.

(1) $t = 0$ 인 경우 $m \geq 1$ 에서 $x \rightarrow m+$ 이면 $x \geq t$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b)$ 이다. 따라서

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid m < b\}.$$

M 이 두 원소를 가지려면 $2 < b \leq 3$ 이고 $M = \{1, 2\}$ 이다. 한편 $t = 0$ 이면

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \quad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \quad -\frac{7}{2}g(1) = \frac{7}{2}a(b-1).$$

$\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\} = \{1, 2\}$ 를 만족시키는 배치를 풀어 보면

$$3a(1+b) = 1, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 2 \Rightarrow b = -8 \quad (2 < b \leq 3 \text{ 과 모순}),$$

$$3a(1+b) = 2, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 1 \Rightarrow b = \frac{2}{5} \quad (2 < b \leq 3 \text{ 과 모순}).$$

따라서 $t \neq 0$.

(2) $t = b$ 인 경우 $x \rightarrow m+$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(m-b) = a(b-m) > 0, & m < b, \\ a(m-b) > 0, & m > b, \\ 0, & m = b. \end{cases}$$

즉, 항상 음수가 아니므로 $M = \emptyset$. 이는 (나)와 모순이므로 $t \neq b$.

(3) $t = 2$ 인 경우 이때는

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = -a(1-b) = a(b-1) = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(2-b), \quad \lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b)$$

따라서 부호 조건은

$$m = 1 : a(b-1) < 0 \Leftrightarrow b < 1,$$

$$m = 2 : a(2-b) < 0 \Leftrightarrow b > 2,$$

$$m \geq 3 : a(m-b) < 0 \Leftrightarrow m < b.$$

M 이 두 원소가 되려면 $3 < b \leq 4$ 이고 $M = \{2, 3\}$ 뿐이다.

3. 조건 (나)로부터 매개변수 결정

(나)에 의해 $\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\} = \{2, 3\}$ 이다. $t = 2$ 이므로

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \quad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \quad -\frac{7}{2}g(1) = \frac{7}{2}a(b-1).$$

두 수의 배치를 나누어 풀면

$$3a(1+b) = 3, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{14}, \quad b = \frac{11}{3} \quad (3 < b \leq 4 \text{ 충족}),$$

$$3a(1+b) = 2, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 3 \Rightarrow b = -8 \quad (3 < b \leq 4 \text{ 와 모순}).$$

따라서 $a = \frac{3}{14}$, $b = \frac{11}{3}$, $t = 2$. 또한 $g(-1) = 3$, $-\frac{7}{2}g(1) = 2$ 로 서로 달라 $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$ 을 만족한다.

4. 최종 계산

$-5 < t$ 이므로 $g(-5) = -f(-5)$. 계산하면

$$\begin{aligned} f(-5) &= a \cdot (-5)(-7)\left(-5 - \frac{11}{3}\right) = a \cdot 35 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right), \\ &= \frac{3}{14} \cdot 35 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right) = -65, \quad \therefore g(-5) = 65. \end{aligned}$$

최종 정답: 65

문항 22

다음 조건을 만족하는 두 곡선과 점들에 대하여 $p + q$ 를 구하여라.

- 곡선 1: $y = \log_{16}(8x + 2)$.
- 점 $A = (a, b)$ 는 곡선 1 위의 점이다.
- 곡선 2: $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$.
- 점 B 는 곡선 2 위의 점이다.
- 점 A 와 점 B 는 모두 제 1 사분면에 있다.
- 점 A 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동한 점 $A' = (b, a)$ 가 직선 OB 위에 있다. 여기서 O 는 원점이다.
- 선분 AB 의 중점 M 의 좌표는 $M = \left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$ 이다.
- $a \times b = \frac{q}{p}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.

구하는 것: $p + q$.

해설 22

정답: 457

풀이

- 점 $A(a, b)$ 는 곡선 1 위에 있으므로

$$b = \log_{16}(8a + 2) \iff 16^b = 8a + 2 \iff 4^{2b} = 8a + 2.$$

- 점 $B(x_B, y_B)$ 는 곡선 2 위에 있으므로

$$y_B = 4^{x_B-1} - \frac{1}{2}.$$

- 중점이 $M\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$ 이므로

$$\frac{a + x_B}{2} = \frac{77}{8}, \quad \frac{b + y_B}{2} = \frac{133}{8} \implies x_B = \frac{77}{4} - a, \quad y_B = \frac{133}{4} - b.$$

4. $A' = (b, a)$ 가 직선 OB 위에 있으므로 $\overrightarrow{OA'}$ 와 \overrightarrow{OB} 는 같은 방향의 벡터이다. 따라서 어떤 $\lambda > 0$ 에 대하여

$$(b, a) = \lambda(x_B, y_B).$$

곧 $x_B = \frac{b}{\lambda}, y_B = \frac{a}{\lambda}$ 이고, 중점 조건을 사용하면

$$a + \frac{b}{\lambda} = \frac{77}{4}, \quad b + \frac{a}{\lambda} = \frac{133}{4}. \quad (1)$$

5. 점 B 의 곡선 조건에 $x_B = \frac{b}{\lambda}, y_B = \frac{a}{\lambda}$ 를 대입하면

$$\frac{a}{\lambda} = 4^{\frac{b}{\lambda}-1} - \frac{1}{2} \iff 4^{\frac{b}{\lambda}} = \frac{4a}{\lambda} + 2. \quad (2)$$

점 A 의 조건은

$$4^{2b} = 8a + 2. \quad (3)$$

6. 핵심 관찰: 식 (2)와 식 (3)는 모두

$$4^{(\text{지수})} = (a \text{에 대한 일차식}) + 2$$

의 형태이다. 두 식이 완전히 일치하도록 하려면 지수 $\frac{b}{\lambda}$ 와 $2b$ 가 같고, 우변의 계수도 일치해야 하므로 $\lambda = \frac{1}{2}$ 가 자연스럽다. 실제로 $\lambda = \frac{1}{2}$ 이면

$$\frac{b}{\lambda} = 2b, \quad \frac{4a}{\lambda} + 2 = 8a + 2$$

가 되어 식 (2)와 식 (3)가 정확히 일치한다.

7. 식 (1)에 $\lambda = \frac{1}{2}$ 를 대입하면

$$a + 2b = \frac{77}{4}, \quad 2a + b = \frac{133}{4}.$$

이를 연립하여 풀면

$$b = \frac{7}{4}, \quad a = \frac{63}{4}.$$

8. 검증:

- $A: 8a + 2 = 8 \cdot \frac{63}{4} + 2 = 128 = 2^7$, 따라서 $b = \log_{16}(128) = \frac{7}{4}$ 성립.

- $B: x_B = \frac{77}{4} - \frac{63}{4} = \frac{7}{2}, y_B = \frac{133}{4} - \frac{7}{4} = \frac{63}{2}$. 또한

$$4^{x_B-1} - \frac{1}{2} = 4^{\frac{7}{2}-1} - \frac{1}{2} = 4^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} = 32 - \frac{1}{2} = \frac{63}{2} = y_B.$$

- $A' = (\frac{7}{4}, \frac{63}{4})$ 와 $B = (\frac{7}{2}, \frac{63}{2})$ 는 좌표가 비율 $\frac{1}{2}$ 로 같으므로 A' 는 직선 OB 위에 있다.

9. 따라서

$$ab = \left(\frac{63}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{441}{16} = \frac{q}{p} \quad (\gcd(p, q) = 1),$$

이므로 $p + q = 16 + 441 = \mathbf{457}$.

난이도: 중상

선택과목: 기하

문제 23

문항 23

두 벡터 $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1)$ 에 대하여 $\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2 점]

1. 1
 2. 2
 3. 3
 4. 4
 5. 5
-

해설

문항 23

정답: ③ 3

풀이

1. 성분별로 더하면 $\vec{a} + \vec{b} = (4 + (-1), 1 + (-1)) = (3, 0)$ 이다.
2. 모든 성분의 합은 $3 + 0 = 3$ 이다.

따라서 선택지 ③이 정답이다.

난이도: 하

문항 24

문항 정보

- 배점: 3 점
- 형식: 객관식(단일 정답)
- 난이도: 하

문제

포물선 $y^2 = 12(x - 2)$ 의 초점과 준선 사이의 거리는?

선지

1. 6
2. 7
3. 8
4. 9
5. 10

해설 24

정답

○ 1) 6 (㉠ 6)

풀이

1. 주어진 포물선은 $y^2 = 12(x - 2)$ 이므로 표준형 $y^2 = 4p(x - x_0)$ 와 비교하여 $4p = 12 \Rightarrow p = 3$ 이다.
2. 정점은 $(2, 0)$ 이고, 초점은 $(2 + p, 0) = (5, 0)$, 준선은 $x = 2 - p = -1$ 이다.
3. 초점과 준선 사이의 거리 $= |5 - (-1)| = 6$ 이며, 일반적으로 $2p = 6$ 이다.

따라서 정답은 ㉠ 6이다.

문제 25

좌표공간의 점 $A(3, -\frac{3}{2}, -2)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B , 점 A 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 할 때, 선분 BC 의 길이는 무엇인가? [3 점]

- (1) $\sqrt{21}$
- (2) $\sqrt{22}$
- (3) $\sqrt{23}$
- (4) $2\sqrt{6}$
- (5) 5

해설 25

정답: 5 (선택지 (5))

- yz 평면에 대한 대칭은 x 좌표의 부호만 바뀌므로 점 B 는 다음과 같다.

$$B = (-3, -\frac{3}{2}, -2).$$

- 원점에 대한 대칭은 모든 좌표의 부호가 바뀌므로 점 C 는 다음과 같다.

$$C = (-3, \frac{3}{2}, 2).$$

- 따라서 벡터 BC 는 다음과 같다.

$$C - B = (0, 3, 4).$$

- 선분 BC 의 길이는 다음과 같다.

$$|BC| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

따라서 최종 정답은 5이다.

문항 26

문제

양수 a 에 대하여, 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 위의 점 $(a, \sqrt{2}a)$ 에서 의 접선이 y 축과 만나는 점을 P 라 하자. $|PF| \times |PF'| = 8$ 일 때, a 의 값은? [3 점]

선택지

1. $\sqrt{3}$
2. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
3. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
4. $2\sqrt{3}$
5. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

문항 26 해설

정답: 2

1. 주어진 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 은 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 로 정리된다. 따라서 초점은 $F(0, a\sqrt{2}), F'(0, -a\sqrt{2})$ 이다 ($c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$).
2. 점 $(a, \sqrt{2}a)$ 에서 의 접선: 암시적 미분으로 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ 이므로 기울기 $m = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 접선은 $y - \sqrt{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - a)$ 이므로, y 축과의 교점은 $x = 0$ 에서 $y = \sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 이고, 따라서 $P = (0, \frac{a}{\sqrt{2}})$ 이다.
3. 거리: P 와 F, F' 는 x 좌표가 같으므로 $PF = |a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{a}{\sqrt{2}}, PF' = |-a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 곱은 $PF \cdot PF' = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3a^2}{2}$ 이다.
4. 조건 $\frac{3a^2}{2} = 8$ 을 만족하므로 $a^2 = \frac{16}{3}, a = \frac{4\sqrt{3}}{3} (a > 0)$ 이다.

따라서 최종적으로 $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이며, 정답은 (2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다.
난이도: 중

문항 27

문제

원기둥의 아랫면 원 C_1 과 윗면 원 C_2 의 지름은 모두 5 이다. 점 A, B 는 C_1 위에 있고 $|AB| = 5$ 이다. 점 C, D 는 C_2 위에 있고 $|CD| = 3$ 이다. 또한 $|AD| = |BC|$ 이다. 점 H 는 D 에서 C_1 을 포함하는 평면으로 내린 수선의 발이다. 사각형 $ABCD$ 의 넓이는 삼각형 ABH 의 넓이의 4 배이다. 원기둥의 높이를 구하여라.

선택지

label=(0) $3\sqrt{2}$

lbbel=(0) $\sqrt{19}$

lcbel=(0) $2\sqrt{5}$

ldbel=(0) $\sqrt{21}$

lebel=(0) $\sqrt{22}$

문항 27 해설

정답

(4) $\sqrt{21}$

풀이

- 반지름을 $r = 2.5$ 라고 두고, 아랫면 C_1 을 평면 $z = 0$, 윗면 C_2 를 평면 $z = h$ 에 둔다. 지름 $AB = 5$ 이므로 $A = (r, 0, 0)$, $B = (-r, 0, 0)$ 로 잡는다.

- 윗면의 현 길이가 $|CD| = 3$ 이므로 중심각을 θ 라고 하면

$$2r \sin \frac{\theta}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad 5 \sin \frac{\theta}{2} = 3,$$

따라서 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$, $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ 이다.

- 윗면에서 C, D 의 각도를 $\varphi \mp \frac{\theta}{2}$ 로 두자. 그러면

$$|AD|^2 = 2r^2(1 - \cos(\varphi + \frac{\theta}{2})) + h^2, \quad |BC|^2 = 2r^2(1 + \cos(\varphi - \frac{\theta}{2})) + h^2.$$

조건 $|AD| = |BC|$ 에서

$$\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) = -\cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \cos \varphi \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

여기서 $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} \neq 0$ 이므로 $\cos \varphi = 0$, 즉 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (또는 $\frac{3\pi}{2}$) 이다.

4. 따라서 좌표는

$$x_C = +r \sin \frac{\theta}{2} = 1.5, \quad x_D = -1.5, \quad y_C = y_D = r \cos \frac{\theta}{2} = 2, \quad z_C = z_D = h.$$

점 H 는 D 의 아래평면 수선의 발이므로 $H = (x_D, y_D, 0) = (-1.5, 2, 0)$ 이다.

5. 삼각형 ABH 의 밑변은 $|AB| = 5$, 높이는 $|y_D| = 2$ 이므로

$$S(\triangle ABH) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5.$$

6. 사각형 $ABCD$ 는 평행한 변 AB 와 CD 를 갖는 공간 사다리꼴이다. 두 직선 AB 와 CD 사이의 거리는 $\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{2^2 + h^2} = \sqrt{h^2 + 4}$ 이다. 따라서

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(5 + 3) \cdot \sqrt{h^2 + 4} = 4\sqrt{h^2 + 4}.$$

7. 면적 조건 $S(ABCD) = 4S(\triangle ABH)$ 에서

$$4\sqrt{h^2 + 4} = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow \sqrt{h^2 + 4} = 5 \Rightarrow h^2 = 21 \Rightarrow h = \sqrt{21}.$$

따라서 원기둥의 높이는 $\sqrt{21}$ 이며, 정답은 (4) 이다.

문항 28

조건

사면체 $ABCD$ 에서 다음을 만족한다.

- 길이: $|AB| = |CD| = 4, |BC| = |BD| = 2\sqrt{5}$.
- 점 H : 점 A 에서 직선 CD 에 내린 수선의 발. 즉, $AH \perp CD, H \in CD$, 그리고 $|AH| = 4$.
- 두 평면 ABH 와 BCD 는 서로 수직이다. 즉, $ABH \perp BCD$.
- 점 G : 삼각형 $\triangle ABH$ 의 무게중심.
- 구 S : 중심이 G 이고, 평면 ACD 에 접한다.
- 집합 T : 구 S 위의 점 P 중에서 $\angle APG = \pi/2$ 를 만족하는 모든 점들의 궤적.

물음

도형 T 를 평면 ABC 위로 직교 정사영한 도형의 넓이를 구하시오.

보기

$$\text{label}=(0) \quad \frac{\pi}{7}$$

$$\text{lbbel}=(0) \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\text{lcbel}=(0) \quad \frac{\pi}{5}$$

$$\text{ldbel}=(0) \quad \frac{\pi}{4}$$

$$\text{lebel}=(0) \quad \frac{\pi}{3}$$

문항 28 해설

정답: (4)

- 좌표 설정: 직선 CD 를 x 축으로, 점 H 를 원점으로 둔다. $AH \perp CD, |AH| = 4$ 이므로 $A = (0, 0, 4), H = (0, 0, 0)$. 또한 $|CD| = 4$ 이므로 $C = (c, 0, 0), D = (d, 0, 0), d - c = 4$.
- 점 $B = (x, y, z)$ 라 하자. $|BC| = |BD|$ 이므로 B 는 CD 의 수직 이등분 평면 위에 있어 $x = (c + d)/2 =: M$ 이다.

3. 평면 수직 조건: 평면 ABH 와 BCD 가 수직이므로, 법선 벡터 $(AH \times BH)$ 와 $(\mathbf{e}_x \times BH)$ 가 서로 수직이다. 여기서 $AH = (0, 0, 4)$, $BH = (x, y, z)$, $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$ 이다. 계산하면

$$AH \times BH = (-4y, 4x, 0), \quad \mathbf{e}_x \times BH = (0, -z, y), \quad (AH \times BH) \cdot (\mathbf{e}_x \times BH) = -4xz = 0.$$

따라서 $xz = 0$ 이다. 만약 $z = 0$ 이면, $|AB|^2 = M^2 + y^2 + 16 = 16$ 에서 $M = y = 0$ 가 되어 $|BC|^2 = 4$ 가 되어 모순이다. 그러므로 $z \neq 0$ 이므로 $x = 0$ 이고, $x = M$ 이므로 $M = 0$ 이다. 따라서 H 는 CD 의 중점이며 $C = (-2, 0, 0)$, $D = (2, 0, 0)$ 이다.

4. 거리 조건으로 B 결정:

$$|BC| = 2\sqrt{5} \Rightarrow y^2 + z^2 = 16, \quad |AB| = 4 \Rightarrow y^2 + (z - 4)^2 = 16.$$

두 식의 차로 $z = 2$, 이어서 $y^2 = 12$ 이므로 $B = (0, \pm 2\sqrt{3}, 2)$. 편의상 $B = (0, 2\sqrt{3}, 2)$ 를 취한다.

5. 무게중심 G : $G = \frac{A + B + H}{3} = (0, 2\sqrt{3}/3, 2)$.

6. 구 S : 중심 G , 평면 ACD 에 접한다. 점들 A, C, D 가 모두 $y = 0$ 위에 있으므로 plane $ACD : y = 0$. 반지름은 $r = \text{dist}(G, y = 0) = |G_y| = 2\sqrt{3}/3$.

7. 벡터 AG : $AG = G - A = (0, 2\sqrt{3}/3, -2)$, $|AG|^2 = (2\sqrt{3}/3)^2 + (-2)^2 = 16/3$, 따라서 $|AG| = 4/\sqrt{3}$.

8. 집합 T : $AP \perp GP$ 을 만족하는 구 S 위의 점들의 집합은 A 의 극평면과 S 의 교선인 원이다. 이 원의 평면은 AG 에 수직이고, G 로부터의 거리 $d = \frac{r^2}{|AG|} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 원의 반지름은

$$R^2 = r^2 - d^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow R = 1, \quad |T| = \pi R^2 = \pi.$$

9. 평면 ABC 로의 직교 정사영 넓이: 원의 면적에 두 평면 사이의 각 θ 에 대한 $|\cos \theta|$ 를 곱한다. 평면 T 의 법선은 AG , 평면 ABC 의 법선은 $n_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 이다. 여기서

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2\sqrt{3}, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -4),$$

$$n_{ABC} = (-8\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{3}), \quad n_{ABC} \cdot AG = -\frac{16\sqrt{3}}{3}, \quad |n_{ABC}| = 16, \quad |AG| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

따라서

$$|\cos \theta| = \frac{|n_{ABC} \cdot AG|}{|n_{ABC}| |AG|} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{16 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}.$$

그러므로 정사영 넓이는 $|T| \cdot |\cos \theta| = \pi \cdot \frac{1}{4} = \pi/4$ 이다.

최종 정답: (4) $\pi/4$

문항 29

다음 조건을 만족하는 도형에서 k^2 의 값을 구하라. [4 점]

- 초점이 $F(p, 0)$ ($p > 0$)이고 준선이 $x = -p$ 인 포물선 위의 점 중 제 1 사분면에 있는 점 A 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H 라 한다.
- 두 초점이 x 축 위에 있고 세 점 F, A, H 를 지나는 타원의 x 좌표가 양수인 초점을 B 라 한다.
- 삼각형 AHB 의 둘레 길이는 $p + 27$, 넓이는 $2p + 12$ 이다.
- 선분 HF 의 길이를 k 라 할 때 k^2 의 값을 구하라.

추가 설명:

- 포물선은 오른쪽으로 열리고, $A = (x_A, y_A)$ 는 제 1 사분면에 있다. 수선의 발 H 는 $x = -p$ 위에 있으며 $AH \perp (x = -p)$ 이므로 $H = (-p, y_A)$ 이다.
- 타원의 두 초점은 x 축 위에 있고, $F = (p, 0)$ 또한 타원 위의 점이다. x 좌표가 양수인 초점을 $B = (x_B, 0)$ 라 한다.

문항 29 해설

정답을 구하기 위해 좌표를 $A = (x, y)$ ($x > 0, y > 0$), $H = (-p, y)$ 로 두고 풀이한다.

1. 포물선의 성질과 기본 식

포물선 $y^2 = 4px$ 이므로 $y^2 = 4px$ 이다. 또한 포물선의 정의에 의해 $AF = AH = x + p$ 이다.

2. 넓이 조건

삼각형 AHB 에서 AH 는 수평선이므로 높이는 y 이고, 밑변은 $AH = x + p$ 이다. 넓이가 $2p + 12$ 이므로

$$\frac{1}{2}(x + p)y = 2p + 12 \Rightarrow (x + p)y = 4p + 24.$$

이를 $y^2 = 4px$ 와 합치면

$$px(x + p)^2 = 4(p + 6)^2. \quad (1)$$

3. 둘레 조건과 타원의 반장축

둘레 $AH + AB + HB = p + 27$ 에서 $AH = x + p$ 이므로

$$AB + HB = 27 - x. \quad (2)$$

세 점 A, H 가 타원 위에 있고 y 좌표가 같으므로 타원의 중심을 $(h, 0)$ 라 하면 $x_A + x_H = 2h$ 이어서

$$h = \frac{x-p}{2}.$$

또한 타원에서 임의의 점까지 두 초점까지의 거리 합은 $2a$ 이므로, 식 (2)에서

$$2a = 27 - x. \quad (3)$$

4. 점 F 가 타원 위에 있을 조건

점 $F = (p, 0)$ 가 타원과 x 축에서 만나는 점이어야 하므로 $p = h \pm a$ 이다. 식 $h = \frac{x-p}{2}$, $a = \frac{27-x}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{3p-x}{2} = \pm \frac{27-x}{2}.$$

- +인 경우: $3p - x = 27 - x \Rightarrow p = 9$.
- -인 경우: $x = \frac{3p+27}{2}$. 이때 A 가 타원 위의 점이 되려면 $\frac{(x-h)^2}{a^2} < 1$ 이어야 하나,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{\left(\frac{x+p}{2}\right)^2}{\left(\frac{27-x}{2}\right)^2} = \frac{(x+p)^2}{(27-x)^2} \geq 1 \quad (p > 0),$$

로 모순이므로 불가하다.

따라서 $p = 9$ 이다.

5. x, y 의 결정

식 (1)에 $p = 9$ 를 대입하면

$$9x(x+9)^2 = 900 \Rightarrow x(x+9)^2 = 100.$$

이는 $x^3 + 18x^2 + 81x - 100 = 0 = (x-1)(x^2 + 19x + 100)$ 이므로 $x = 1$ 만 실수 해이다. 따라서

$$y^2 = 4px = 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 \Rightarrow y = 6.$$

6. 구하는 값 k^2

$H = (-p, y)$, $F = (p, 0)$ 이므로

$$HF^2 = (2p)^2 + y^2 = 4p^2 + y^2 = 4 \cdot 9^2 + 36 = 324 + 36 = 360.$$

따라서 최종적으로 $k^2 = 360$ 이다.

문항 30

좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$ 인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q 가

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = 2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PB}| = 14$ 일 때, $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, $|\overrightarrow{QB}| > 0$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4 점]

문항 30 해설

정답: 221

- AB 가 지름이므로 $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$ 이다.
- $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{PQ}$ 를 이용하면

$$0 = \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ}) \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ 이므로 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 이고, 따라서

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

- 주어진 식을 전개하면

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PB}|^2 = 2|\overrightarrow{PQ}|^2.$$

위 식과 비교하여 $|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2$ 이므로 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PB}| = 14$ 이다.

- $AB = 10\sqrt{2}$ 이므로 반지름은 $r = 5\sqrt{2}$ 이다. 또한 $\triangle APB$ 는 직각삼각형이므로 $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = |AB|^2$ 에서 $|\overrightarrow{PA}|^2 = 200 - 196 = 4$, 따라서 $|\overrightarrow{PA}| = 2$ 이다.
- PB 가 만드는 중심각을 θ 라 하자. 현의 길이는 $2r \sin(\theta/2)$ 이므로

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{|PB|}{2r} = \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{49}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$|PQ| = |PB|$ 이므로 PQ 의 중심각도 θ 이고, 따라서 BQ 의 중심각은 2θ 이다. 그러면

$$|QB| = 2r \sin \theta = 2r \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{14\sqrt{2}}{5},$$

$$|QB|^2 = \frac{392}{25}.$$

6. $\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$ 이고 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}$ 이므로

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB}.$$

또한 $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}$, $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PQ}|$ 이므로

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} - |\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{QB}|^2}{2} - |\overrightarrow{PQ}|^2 = -\frac{|\overrightarrow{QB}|^2}{2}.$$

따라서

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \frac{|\overrightarrow{QB}|^2}{2} = \frac{392}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{196}{25} = \frac{q}{p}.$$

그러므로 $p = 25$, $q = 196$ 이고, 최종적으로 $p + q = \mathbf{221}$ 이다.

선택과목: 미분과 적분

문항 번호: 23

문제

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{2x}$ 의 값은?

보기

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

난이도

하

문항 번호: 23

정답

3 (㉓)

해설

1. 극한을 곱의 형태로 분해한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(6x)}{6x} \right) \cdot \left(\frac{6x}{2x} \right).$$

2. 여기서 $u = 6x$ 라 하면 $u \rightarrow 0$ 일 때 $\frac{\tan u}{u} \rightarrow 1$ 이므로 첫 항의 극한은 1이다.
3. 둘째 항은 $\frac{6x}{2x} = 3$ ($x \neq 0$)이므로 극한은 3이다.
4. 따라서 전체 극한값은 $1 \cdot 3 = 3$ 이다.

난이도

하

문항 24

다음을 구하시오:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$$

주의: 제곱근의 범위는 $\sin x - \sin^3 x$ 까지이며, dx 는 루트 밖에 있음.

선택지

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{5}{6}$

문항 24 해설

1. $\sin x - \sin^3 x = \sin x (1 - \sin^2 x) = \sin x \cdot \cos^2 x$.
2. 구간 $[0, \pi/2]$ 에서 $\cos x \geq 0$ 이므로 $\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\sin x \cos^2 x} = \cos x \cdot \sqrt{\sin x}$.
3. 치환 $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ 로 두면

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{\sin x} dx = \int_{u=0}^1 u^{1/2} du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

4. 따라서 정답은 선택지 4 이며, 값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

최종 정답: ④ $\frac{2}{3}$

문항 25

조건

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 만족한다:

$$\sqrt{9n^2 - 5} + 2n < a_n < 5n + 1.$$

질문

다음 극한의 값을 구하시오:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2}.$$

[3 점]

선택지

1. (1) $\frac{1}{2}$
2. (2) $\frac{3}{2}$
3. (3) $\frac{5}{2}$
4. (4) $\frac{7}{2}$
5. (5) $\frac{9}{2}$

난이도

중

문항 25 해설

정답

(3) $\frac{5}{2}$

해설

1. $n > 0$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$\sqrt{9 - \frac{5}{n^2}} + 2 < \frac{a_n}{n} < 5 + \frac{1}{n}.$$

$n \rightarrow \infty$ 에서 좌우가 모두 5로 수렴하므로, 끼워 넣기 정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 5.$$

2. 분자와 분모를 n^2 로 나누면

$$\frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} = \frac{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n} + 5 - \frac{2}{n^2}}.$$

따라서 $n \rightarrow \infty$ 에서 $\frac{a_n}{n} \rightarrow 5$, $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} = \frac{5^2}{5 + 5} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

3. 따라서 정답은 (3) $\frac{5}{2}$ 이다.

난이도

중

문제 26

그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x + x \ln x}$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는 무엇인가? [3 점] 밑면 영역은 다음과 같다.

$$R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x + x \ln x}\}.$$

보기:

1. $\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$
2. $\frac{\sqrt{3}(5+12\ln 2)}{24}$
3. $\frac{\sqrt{3}(1+12\ln 2)}{16}$
4. $\frac{\sqrt{3}(1+2\ln 2)}{4}$
5. $\frac{\sqrt{3}(1+9\ln 2)}{12}$

해설 26

1. 단면이 정삼각형이며, x 가 고정될 때 밑면의 y 방향 길이는 $s(x) = \sqrt{x + x \ln x}$ 이다. 정삼각형의 넓이는 $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} [s(x)]^2$ 이므로

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (x + x \ln x).$$

2. 부피는

$$V = \int_1^2 A(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^2 (x + x \ln x) dx.$$

3. 적분 계산:

$$\int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = (2 \ln 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

따라서

$$\int_1^2 (x + x \ln x) dx = \frac{3}{2} + \left(2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) = 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$

4. 부피는

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2 \ln 2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}(3 + 8 \ln 2)}{16}.$$

최종 정답: (1) $\frac{\sqrt{3}(3 + 8 \ln 2)}{16}$.

문항 27

매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^{4t}(1 + \sin^2(\pi t)), \quad y = e^{4t}(1 - 3\cos^2(\pi t))$$

을 C 라 하자. 곡선 C 가 직선 $y = 3x - 5e$ 와 만나는 점을 P 라 할 때, 곡선 C 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는 무엇인가? [3 점]

(1) $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$

(2) $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$

(3) $\frac{3\pi}{\pi+8}$

(4) $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$

(5) $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

난이도: 중

문항 27 해설

정답: (2)

1. 교점 조건 이용. 직선 $y = 3x - 5e$ 와의 교점에서 는 $y - 3x = -5e$ 이다. 한편 매개변수식에서

$$\begin{aligned} y - 3x &= e^{4t}(1 - 3\cos^2(\pi t)) - 3e^{4t}(1 + \sin^2(\pi t)) \\ &= e^{4t}[(1 - 3) - 3(\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t))] = e^{4t}(-2 - 3) = -5e^{4t}. \end{aligned}$$

따라서 $-5e^{4t} = -5e$ 이므로 $e^{4t} = e$, 곧 $4t = 1$ 이고 $t = \frac{1}{4}$ 이다.

2. 접선의 기울기 계산. 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = e^{4t}[4(1 + \sin^2(\pi t)) + \pi \sin(2\pi t)], \quad \frac{dy}{dt} = e^{4t}[4(1 - 3\cos^2(\pi t)) + 3\pi \sin(2\pi t)].$$

따라서 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4(1 - 3\cos^2(\pi t)) + 3\pi \sin(2\pi t)}{4(1 + \sin^2(\pi t)) + \pi \sin(2\pi t)}.$$

3. $t = \frac{1}{4}$ 에서 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 따라서 $\sin^2 = \cos^2 = \frac{1}{2}$ 이고 $\sin(2\pi \cdot \frac{1}{4}) = 1$ 이다. 대입하면

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1/4} = \frac{4(1 - 3 \cdot \frac{1}{2}) + 3\pi \cdot 1}{4(1 + \frac{1}{2}) + \pi \cdot 1} = \frac{-2 + 3\pi}{6 + \pi} = \frac{3\pi - 2}{\pi + 6}.$$

4. 유효성 확인. $\frac{dx}{dt}\big|_{t=1/4} = e^{4 \cdot (1/4)}(6 + \pi) = e(6 + \pi) > 0$ 이므로 기울기 정의가 가능하다.

따라서 최종 접선의 기울기는 $\frac{3\pi - 2}{\pi + 6}$ 이며, 정답은 (2) 이다.

문제 28

함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$ 가 주어진다.

양수 t 에 대하여, 점 $(s, f(s))$ ($s > 0$) 에서 y 축에 내린 수선의 발과, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점 사이의 거리가 t 가 되도록 하는 s 의 값을 $g(t)$ 라 하자. $\int_{1/2}^{27/4} g(t) dt$ 의 값은 무엇인가? [4 점]

보기:

1. $\frac{161}{12} + \ln 3$
2. $\frac{40}{3} + \ln 3$
3. $\frac{53}{4} + \ln 2$
4. $\frac{79}{6} + \ln 2$
5. $\frac{157}{12} + \ln 2$

난이도: 중상

해설 28

정답: 5) $\frac{157}{12} + \ln 2$

1. 도함수를 구한다.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$ 이므로

$$f'(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

2. 점 $(s, f(s))$ 에서 y 축에 내린 수선의 발은 $(0, f(s))$ 이고, 접선의 방정식은 $y - f(s) = f'(s)(x - s)$ 이므로 y 절편은

$$y = f(s) - sf'(s)$$

이다. 두 점 사이의 거리는

$$t = |f(s) - (f(s) - sf'(s))| = |sf'(s)|.$$

3. $s > 0$ 에서 $f'(s) = \frac{s^2}{1+s} > 0$ 이므로

$$t = sf'(s) = \frac{s^3}{1+s}.$$

이를 $T(s) = \frac{s^3}{1+s}$ 라 두면,

$$T'(s) = \frac{s^2(3+2s)}{(1+s)^2} > 0 \quad (s > 0)$$

이므로 T 는 증가 함수이고 $g(t)$ 는 T 의 역함수로 유일하게 정의된다.

4. 역함수 적분 공식을 적용한다.

$t = T(s)$ 라 할 때

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = [st]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} T(s) ds,$$

여기서 $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{27}{4}, s_1 = g(\frac{1}{2}), s_2 = g(\frac{27}{4})$ 이며 $t = T(s) = \frac{s^3}{1+s}$ 이다.

5. 양 끝에서 의 s 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{s^3}{1+s} \iff 2s^3 = 1+s \Rightarrow s=1, \\ \frac{27}{4} &= \frac{s^3}{1+s} \iff 4s^3 = 27(1+s) \Rightarrow s=3. \end{aligned}$$

따라서 $s_1 = 1, s_2 = 3$ 이다.

6. 각 항을 계산한다.

$$\text{먼저 } st = s \cdot \frac{s^3}{1+s} = \frac{s^4}{1+s} \text{ 이므로}$$

$$[st]_1^3 = \frac{3^4}{1+3} - \frac{1^4}{1+1} = \frac{81}{4} - \frac{1}{2} = \frac{79}{4}.$$

또한

$$\int T(s) ds = \int \frac{s^3}{1+s} ds = \int \left(s^2 - s + 1 - \frac{1}{1+s} \right) ds = \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s - \ln(1+s) + C.$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_1^3 T(s) ds &= \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \ln 4 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 - \ln 2 \right) \\ &= \left(\frac{15}{2} - \ln 4 \right) - \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \\ &= \frac{20}{3} - \ln 2. \end{aligned}$$

7. 결론을 얻는다.

$$\int_{1/2}^{27/4} g(t) dt = ([st]_1^3) - \int_1^3 T(s) ds = \frac{79}{4} - \left(\frac{20}{3} - \ln 2 \right) = \frac{157}{12} + \ln 2.$$

따라서 정답은 5) $\frac{157}{12} + \ln 2$ 이다.

난이도: 중상

문제 29

다음을 만족하는 수열을 생각하자.

- 등차수열 $\{a_n\}$: 첫째항과 공차가 같은 수열이다. 즉 a_1 이 공차와 같고, $a_1 \neq 0$ 이다.
- 등비수열 $\{b_n\}$.

또한 어떤 자연수 k 가 존재하여, $i = 1, 2, 3$ 에 대하여

$$b_{k+i} = \frac{1}{a_i} - 1.$$

다음 부등식을 만족한다.

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30.$$

이때

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{q}{p}$$

(여기서 p, q 는 서로소인 자연수)일 때, $p + q$ 의 값을 구하라.

배점: [4 점]

해설

1. 등차수열의 성질: 첫째항과 공차가 같으므로 $a_n = na_1$ 이다.
2. 등비수열의 공비 r 을 두 가지로 나타내면 다음과 같다.

$$r = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{a_2} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{\frac{1}{2a_1} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)},$$

$$r = \frac{b_{k+3}}{b_{k+2}} = \frac{\frac{1}{a_3} - 1}{\frac{1}{a_2} - 1} = \frac{\frac{1}{3a_1} - 1}{\frac{1}{2a_1} - 1} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)}.$$

이를 같게 두고 정리하면

$$\frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)} \implies 3(1 - 2a_1)^2 = 4(1 - a_1)(1 - 3a_1) \implies 4a_1 - 1 = 0,$$

따라서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 이다. 이때 $r = \frac{1}{3}$, 그리고

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_1} - 1 = 4 - 1 = 3, \quad b_n = b_{k+1} r^{k+1-n} = 3^{k+2-n},$$

특히 $b_1 = 3^{k+1}$ 이다.

3. 주어진 부등식을 위해 두 합을 각각 구한다. 먼저 $a_n = \frac{n}{4}$ 이므로

$$a_n a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{16}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n(n+1)} = 16.$$

또한 $\{b_n\}$ 의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}b_1.$$

따라서

$$0 < \frac{3}{2}b_1 - 16 < 30 \implies \frac{32}{3} < b_1 < \frac{92}{3}.$$

$b_1 = 3^{k+1}$ 이므로 가능한 값은 $k = 2$ 뿐이고 $b_1 = 27$ 이다.

4. 구하는 값은 $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 이다. 여기서 $a_2 = 2a_1 = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$, $b_2 = b_1 r = 27 \cdot \frac{1}{3} = 9$

이다. 짝수항의 합은 공비 $r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{b_2}{1-r^2} = \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{81}{8}.$$

따라서

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{8} = \frac{81}{16} = \frac{q}{p}.$$

$p = 16, q = 81$ 이므로 $p + q = 97$ 이다.

5. 검증:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 16 = \frac{49}{2} \in (0, 30)$$

이므로 조건을 만족한다.

최종 정답: **97**.

문항 30

다음은 실수 전체 \mathbb{R} 에서 증가하는 연속 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 에 대한 조건이다.

역함수의 조건

역함수 $f^{-1}(x)$ 는 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 정의되며 다음을 만족한다.- $|x| \leq 1$ 일 때:

$$4(f^{-1}(x))^2 = x^2(x^2 - 5)^2$$

- $|x| > 1$ 일 때:

$$|f^{-1}(x)| = e^{|x|-1} + 1$$

정의

- 임의의 실수 m 에 대하여, 기울기가 m 이고 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선 L_m :

$$y = m(x - 1).$$

- $g(m)$: 직선 L_m 과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 개수.

추가 조건

함수 $g(m)$ 은 $m = a, m = b$ ($a < b$)에서 불연속이다.

구하는 값

다음 값을 구하여라.

$$g(a) \times \left(\lim_{m \rightarrow a+} g(m) \right) + g(b) \times \left(\frac{\ln b}{b} \right)^2$$

참고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

배점: [4 점]

해설

정답: 11

1. 역함수 $f^{-1}(y)$ 의 결정 f 는 \mathbb{R} 에서 증가 연속이므로 f^{-1} 도 증가 연속이다.- $|y| \leq 1$ 에서 $4(f^{-1}(y))^2 = y^2(y^2 - 5)^2$ 이고 f^{-1} 는 증가, $f^{-1}(0) = 0$ 이므로

$$f^{-1}(y) = \frac{y(5 - y^2)}{2}.$$

- $|y| > 1$ 에서 $|f^{-1}(y)| = e^{|y|-1} + 1$ 이고 증가성을 만족하려면

$$f^{-1}(y) = e^{y-1} + 1 \quad (y > 1), \quad f^{-1}(y) = -(e^{-y-1} + 1) \quad (y < -1).$$

점점 $y = \pm 1$ 에서 도함수도 일치하여 모두 1 이므로 매끄럽다.

2. 교점 개수 $g(m)$ 의 y -방정식화직선 $L_m : y = m(x - 1)$ 와 $y = f(x)$ 의 교점 개수는 $y = m(f^{-1}(y) - 1)$ 의 해의 개수와 같다. $m \neq 0$ 일 때 $s = 1/m$ 으로 두면 $f^{-1}(y) = sy + 1$ 과의 교점 개수와 같다. $m = 0$ 이면 L_0 는 $y = 0$ 이고 $f(x) = 0$ 의 해는 $x = f^{-1}(0) = 0$ 하나이므로 $g(0) = 1$ 이다.
3. 불연속이 일어나는 m 값 찾기- $s < 0$ (즉 $m < 0$) 에서는 $\varphi(y) = f^{-1}(y)$ 가 증가, 직선 $sy + 1$ 은 감소이므로 $\varphi - (sy + 1)$ 은 증가 함수이다. 해는 항상 1 개이므로 $g(m) = 1$ ($m < 0$).- $s > 0$ (즉 $m > 0$) 에서는 접선 발생으로 변화를 판정한다. 접선 조건은

$$\varphi(y) = sy + 1, \quad \varphi'(y) = s, \quad F(y) := \varphi(y) - y\varphi'(y) = 1.$$

조각별로 $F(y)$ 를 계산하면 $|y| \leq 1$ 에서 $\varphi(y) = \frac{y(5-y^2)}{2}$, $\varphi'(y) = \frac{5-3y^2}{2}$ 이므로 $F(y) = y^3$. 따라서 $F(y) = 1$ 의 해는 $y = 1$ 뿐이다. 이때 $s = \varphi'(1) = 1$ (즉 $m = 1$) 이지만, 이 접선은 좌우에서 교점 개수를 바꾸지 않아 g 는 연속(양쪽 모두 1 개) 이다. $y > 1$ 에서는 $\varphi(y) = e^{y-1} + 1$, $\varphi'(y) = e^{y-1}$. 그러면 $F(y) = 1 + e^{y-1}(1-y)$ 이고 $F(y) = 1$ 이면 $y = 1$ 만 가능하다. $y < -1$ 에서는 $\varphi(y) = -(e^{-y-1} + 1)$, $\varphi'(y) = e^{-y-1}$.

$$F(y) = -(e^{-y-1} + 1) - ye^{-y-1}.$$

$F(y) = 1$ 은

$$e^{-y-1}(1+y) = -2$$

와 동치이고, $t = -y > 1$ 로 두면

$$(t-1)e^{t-1} = 2 \Rightarrow t-1 = W(2) \quad (\text{Lambert } W).$$

따라서

$$s = \varphi'(y) = e^{-y-1} = e^{t-1} = e^{W(2)} = \frac{2}{W(2)}, \quad m = \frac{1}{s} = \frac{W(2)}{2}.$$

좌측 지수꼴 조각 ($y < -1$) 에서 의 해 개수는

$$T(y) := e^{-y-1} + sy + 2 = 0$$

의 해로 결정된다. 극값은 $T'(y) = -e^{-y-1} + s = 0$ 에서 발생하고, 그때 $e^{-y-1} = s$, $y = -1 - \ln s$ 이며

$$T_{\min} = 2 - s \ln s.$$

따라서- $s \ln s < 2$ 이면 해가 없다.- $s \ln s = 2$ 이면 접선(중근) 1 개이다.- $s \ln s > 2$ 이면 해 2 개이다. 임계값 $s^* = 2/W(2)$ 에서 $s^* \ln s^* = 2$, 따라서 $b = 1/s^* = W(2)/2$ 이다. 요약하면- $m < 0$: $g(m) = 1$.- $m = 0$: $g(0) = 1$ (우극한은 아래 참조).- $0 < m < b (= W(2)/2)$: $s > s^*$ 이므로 $y < -1$ 에서 2 해, $y > 1$ 에서 1 해 $\rightarrow g(m) = 3$.- $m = b$: 좌측에서 중근 1 개 + 우측 1 개 $\rightarrow g(b) = 2$.- $m > b$: 좌측 해 없음, 우측 1 해 $\rightarrow g(m) = 1$. 따라서 g 는 $m = 0$ 과 $m = b$ 에서 불연속이고, $a = 0$, $b = W(2)/2$ 이다.

4. 요구한 값 계산 $g(a) = g(0) = 1$, $\lim_{m \rightarrow 0+} g(m) = 3$ 이므로 첫 항은 $1 \times 3 = 3$ 이다. 또 $g(b) = 2$. 한편 $b = 1/s^*$, $s^* \ln s^* = 2$ 이므로

$$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln(1/s^*)}{1/s^*} = -s^* \ln s^* = -2, \quad \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = 4.$$

두 번째 항은 $g(b) \times 4 = 2 \times 4 = 8$ 이다. 따라서 전체 값은 $3 + 8 = 11$ 이다.

최종 정답: 11

선택과목: 확률과 통계

문항 23

문제

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3 개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2 점]

선지

1. 56
 2. 60
 3. 64
 4. 68
 5. 72
-

문항 23 해설

정답

③ 64

해설

1. 중복을 허용하고 순서를 고려하므로 각 자리마다 네 문자 $\{a, b, c, d\}$ 중 하나를 택할 수 있다.
2. 따라서 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ 로 계산된다.
3. 주어진 선택지에서 64는 ③에 해당한다.

난이도

하

문항 24

두 사건 A, B 에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B | A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = 1.$$

이때 $P(B)$ 의 값은 무엇인가? [3 점]

1. $\frac{7}{10}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{4}{5}$
4. $\frac{17}{20}$
5. $\frac{9}{10}$

난이도: 하

해설 24

정답: 1

1. 교집합의 확률을 구한다.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

2. 합집합의 공식에 대입한다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이므로

$$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{10} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

3. 검산을 한다. 확률의 범위 $0 \leq P(B) \leq 1$ 를 만족한다.

따라서 최종 정답은 $\frac{7}{10}$ 이며, 선택지 1이다.

문제 25

주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5 개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5 개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2 개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2 개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은?

1. $\frac{7}{15}$
 2. $\frac{8}{15}$
 3. $\frac{3}{5}$
 4. $\frac{2}{3}$
 5. $\frac{11}{15}$
-

문제 25 해설

정답: 2

1. 전체 경우의 수는 ${}^{10}C_2 = 45$ 이다.
2. 같은 색인 경우의 수는 흰 공 ${}^5C_2 = 10$, 검은 공 ${}^5C_2 = 10$ 이므로 합은 20 이다.
3. 같은 수인 경우는 겹치는 숫자 2, 3, 4, 5에 대해 흰 공과 검은 공이 한 쌍씩 있으므로 4가지이다.
4. 같은 수인 경우는 색이 서로 다르므로 두 사건은 서로 배타적이다. 따라서 유리한 경우의 수는 $20 + 4 = 24$ 이다.
5. 확률은 $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ 이다. 따라서 최종 정답은 $\frac{8}{15}$ 이며, 선택지 번호는 2번이다.

문항 26

평균이 m 이고 표준편차가 5 인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36 인 표본을 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$1.2 \leq m \leq a$$

이다. a 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathbb{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [3 점]

1. 5.1
2. 5.2
3. 5.3
4. 5.4
5. 5.5

해설 26

정답: ⑤

1. 신뢰구간 공식은 $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.
2. 표준오차는 $\frac{5}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$ 이다.
3. 마진오차는 $2.58 \cdot \frac{5}{6} = \frac{12.9}{6} = 2.15$ 이다.
4. 하한이 $1.2 = \bar{x} - 2.15$ 이므로 $\bar{x} = 1.2 + 2.15 = 3.35$ 이다.
5. 따라서 상한은 $a = \bar{x} + 2.15 = 3.35 + 2.15 = 5.5$ 이다.

최종 정답은 $a = 5.5$ 이며, 선택지는 ⑤이다.

난이도: 하

문항 27

문제

이산 확률 변수 X 가 가지는 값이 0 부터 4 까지의 정수이고

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{|2x-1|}{12} & (x = 0, 1, 2, 3) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

일 때, $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right)$ 의 값은? (단, a 는 0 이 아닌 상수이다.) [3 점]

보기

1. 36
2. 39
3. 42
4. 45
5. 48

문항 27 해설

정답

4 번

해설

1. $x = 0, 1, 2, 3$ 에서 $P(X = x) = \frac{|2x-1|}{12}$ 이므로 각 확률은 $\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}$ 이고 합은 $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ 이다. 전체 합이 1 이 되어야 하므로 $a = P(X = 4) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} (\neq 0)$ 이다.
2. 기대값: $E[X] = \sum xP(X = x) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{12} = \frac{0 + 1 + 6 + 15 + 8}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$.
3. 제곱의 기대값: $E[X^2] = \sum x^2P(X = x) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 16 \cdot 2}{12} = \frac{0 + 1 + 12 + 45 + 32}{12} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2}$.
4. 분산: $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$.

5. 선형 변환의 분산 성질에 의해 $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \text{Var}(X)$ 이다. 여기서 $a = \frac{1}{6}$
이므로 $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = 36$, 따라서 $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = 36 \cdot \frac{5}{4} = 45$.

최종 정답

정답: 4 번 (45)

문항 28 [4 점]

문제

- 공 16 개.
- 숫자 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 여섯 개의 빈 상자.
- 하나의 6면 주사위를 던지는 시행을 사용한다.

규칙 주사위를 한 번 던져 나온 눈을 k 라 할 때,

- k 가 홀수이면: 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.
- k 가 짝수이면: 1부터 6까지 중 k 의 약수가 적힌 각 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

요구 위 시행을 4번 반복한 후, 여섯 개 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 정확히 1개 더 많을 확률을 구하라.

선택지

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{3}{16}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{5}{16}$
5. $\frac{3}{8}$

문항 28 해설

정답: (2) $\frac{3}{16}$

1. 한 번의 시행에서 들어가는 공의 개수와 2, 3이 적힌 상자에의 기여를 정리하면 다음과 같다.
 - $k \in \{1, 3, 5\}$ 일 때: (2가 적힌 상자 +0, 3이 적힌 상자 +1), 전체 +3개 \rightarrow 홀수.
 - $k = 2$: (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +0), 전체 +2개 \rightarrow 짝수.
 - $k = 4$: (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +0), 전체 +3개 \rightarrow 홀수.

- $k = 6$: (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +1), 전체 +4개 \rightarrow 짝수.

2. 4번의 시행에서 각 유형의 빈도를 $X_0 (= \{1, 3, 5\})$, X_2, X_4, X_6 라 하면 총합은 $X_0 + X_2 + X_4 + X_6 = 4$ 이다. 이때

$$C_2 = X_2 + X_4 + X_6, \quad C_3 = X_0 + X_6.$$

전체 공의 개수의 홀짝은 $X_0 + X_4 \pmod{2}$ 로 결정된다.

3. 사건 A : $C_3 = C_2 + 1 \iff X_0 = X_2 + X_4 + 1$. 또한 $X_0 + X_2 + X_4 + X_6 = 4$ 이므로

$$X_6 = 4 - (X_0 + X_2 + X_4) = 3 - 2(X_2 + X_4) \geq 0 \Rightarrow X_2 + X_4 \in \{0, 1\}.$$

조건 B (전체 합 홀수): $X_0 + X_4$ 가 홀수여야 한다. 가능한 경우는 다음과 같다.

- $X_2 = 0, X_4 = 0 \Rightarrow X_0 = 1, X_6 = 3$, 그리고 $X_0 + X_4 = 1$ (홀수) \Rightarrow 포함.
- $X_2 = 1, X_4 = 0 \Rightarrow X_0 = 2, X_6 = 1, X_0 + X_4 = 2$ (짝수) \Rightarrow 제외.
- $X_2 = 0, X_4 = 1 \Rightarrow X_0 = 2, X_6 = 1, X_0 + X_4 = 3$ (홀수) \Rightarrow 포함.

4. 확률 계산(주사위가 공정하다고 가정하여 각 눈의 확률을 $1/6$ 로 둔다). 한 시행에서 $\{1, 3, 5\}$ 가 나올 확률은 $1/2$ 이므로 다항분포를 사용한다.

$$\mathbb{P}(1, 0, 0, 3) = \frac{4!}{1!0!0!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{108},$$

$$\mathbb{P}(2, 0, 1, 1) = \frac{4!}{2!0!1!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

$$\text{따라서 } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{108} + \frac{1}{12} = \frac{5}{54}.$$

5. 분모 $\mathbb{P}(B)$: 한 시행이 홀수 개의 공을 더하는 확률은 $p = \mathbb{P}(\{1, 3, 5, 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. 4번 중 홀수 번 발생할 확률은

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1 - (1 - 2p)^4}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^4}{2} = \frac{40}{81}.$$

따라서 조건부 확률은

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{5}{54}}{\frac{40}{81}} = \frac{3}{16}.$$

즉, $\frac{3}{16}$ 이며, 선택지는 (2)이다.

문항 29

문제

6 이하의 자연수 a 에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다. 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 a 보다 작거나 같으면 동전을 5 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고, 나온 눈의 수가 a 보다 크면 동전을 3 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다. 이 시행을 19200 번 반복하여 기록한 수가 3 인 횟수를 확률변수 X 라 하자. $E(X) = 4800$ 일 때, $P(X \leq 4800 + 30a)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k 이다. $1000 \times k$ 의 값을 구하시오. [4 점]

다음 표준정규분포표를 사용하라.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

문항 29 해설

정답: 977

해설

1. 한 시행에서 기록된 수가 3 일 확률을 p 라 하자. 그러면

$$p = \frac{a}{6} \cdot P(5 \text{ 번에서 } 3 \text{ 앞}) + \frac{6-a}{6} \cdot P(3 \text{ 번에서 } 3 \text{ 앞}) = \frac{a}{6} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{2^5} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{a}{6} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{a+4}{32}.$$

2. X 는 19200 번 시행 중 기록이 3 인 횟수이므로 $X \sim \text{Bin}(19200, p)$ 이고, $E(X) = 19200p$ 이다. $E(X) = 4800$ 이므로 $p = \frac{4800}{19200} = \frac{1}{4}$. 따라서

$$\frac{a+4}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 4.$$

3. 따라서 $X \sim \text{Bin}(19200, \frac{1}{4})$. 평균은 $\mu = 19200 \cdot \frac{1}{4} = 4800$, 분산은 $\sigma^2 = 19200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3600$, 표준편차는 $\sigma = 60$ 이다. 구하는 값은

$$k = P(X \leq 4800 + 30a) = P(X \leq 4800 + 120) = P(X \leq 4920).$$

4. 정규 근사로 표준화하면

$$z = \frac{4920 - 4800}{60} = 2.0.$$

표에서 $P(0 \leq Z \leq 2.0) = 0.477$ 이므로 $P(Z \leq 2.0) = 0.5 + 0.477 = 0.977$. 따라서 $k \approx 0.977$ 이고, $1000 \times k = \mathbf{977}$.

최종 정답: 977

문항 번호: 30 [4 점]

문제

비어 있는 주머니 10 개가 일렬로 놓여 있고, 공 8 개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

- (가) 들어 있는 공의 개수가 1 인 주머니는 4 개 또는 6 개이다.
- (나) 들어 있는 공의 개수가 2 인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

형식화

- 주머니는 일렬로 10 개이며, 위치는 $i = 1, 2, \dots, 10$ 이다.
- 각 위치 i 에 들어간 공의 개수는 $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이다.
- 총합 조건: $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 8$.
- 1 개 든 주머니의 개수 조건: $\#\{i \mid a_i = 1\} \in \{4, 6\}$.
- 인접 금지 조건: 임의의 i 에 대해 $a_i = 2$ 이면, 가능한 이웃 $j \in \{i-1, i+1\}$ 에 대해 $a_j = 0$ 이다.
- 선형 이웃 관계는 $(i, i+1)$ 만 인접으로 본다.

해설

정답

262

풀이

문제를 변수로 정리하면 각 위치 i 에 대해 $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이고, 총합은 $\sum_{i=1}^{10} a_i = 8$ 이다. 1 이 든 주머니 수를 o , 2 가 든 주머니 수를 t 라 하면 $o + 2t = 8$ 이며, (가) 조건으로 $o \in \{4, 6\}$ 이다. 따라서 가능한 쌍은 $(o, t) = (6, 1)$ 또는 $(4, 2)$ 두 가지이다. 또한 $a_i = 2$ 인 자리의 이웃은 반드시 0 이어야 한다. 2 의 위치를 먼저 정하고, 그 후 1 의 배치를 센다.

- $(o, t) = (6, 1)$ 인 경우
2 가 한 곳에만 들어간다.
 - 2 가 끝자리(1 또는 10)에 있을 때: 강제 0 은 이웃 1 칸, 따라서 1 을 놓을 수 있는 자리는 $10 - 1 - 1 = 8$ 칸이므로 $\binom{8}{6}$. 끝자리는 2 곳이므로 기여는 $2\binom{8}{6}$.
 - 2 가 내부 자리(2 부터 9) 중 한 곳에 있을 때: 강제 0 은 양옆 2 칸, 따라서 1 을 놓을 수 있는 자리는 $10 - 1 - 2 = 7$ 칸이므로 $\binom{7}{6}$. 내부 자리는 8 곳이므로 기여는 $8\binom{7}{6}$.

따라서 합은

$$2\binom{8}{6} + 8\binom{7}{6} = 2 \cdot 28 + 8 \cdot 7 = 56 + 56 = 112.$$

2. $(o, t) = (4, 2)$ 인 경우

2 가 든 두 주머니는 서로 인접할 수 없다. 두 2 의 배치가 주어졌을 때, 그들에 의해 강제되는 0 의 서로 다른 칸 수를 s 라 하자. 그러면 1 을 놓을 수 있는 자리는 $10 - 2 - s = 8 - s$ 칸이므로 경우의 수는 $\binom{8-s}{4}$ 이다. s 에 따라 2 의 배치를 분류하면 다음과 같다.

- $s = 2$: 양 끝 1, 10 에 두는 경우 1 가지, 끝과 거리 2 내부 쌍 1, 3, 8, 10 2 가지. 합 3 가지. 기여: $3\binom{6}{4} = 3 \cdot 15 = 45$.
- $s = 3$: 끝과 내부(겹치지 않음) 쌍 12 가지, 내부끼리 거리가 2 인 쌍 6 가지. 합 18 가지. 기여: $18\binom{5}{4} = 18 \cdot 5 = 90$.
- $s = 4$: 내부끼리 거리가 3 이상인 쌍 15 가지. 기여: $15\binom{4}{4} = 15 \cdot 1 = 15$.

따라서 합은

$$45 + 90 + 15 = 150.$$

최종 합계는 $112 + 150 = 262$ 이므로, 정답은 **262** 이다.

(검증) $t = 2$ 에서 비인접 쌍의 총수는 $\binom{9}{2} = 36$ 이며, 위 분류에서 $3 + 18 + 15 = 36$ 으로 일치한다.