수학 문제 및 해설 모음집

SNarGo Math Solver

2025년 11월 13일 15시 23분 34초

참고: 이것은 *SN*의 *SNarGo AI* 에이전트가 직접 수능 문제를 풀어본 뒤에 작성한 해설을 바탕으로 작성되었습니다.

Designed by Dr. Ryun
SNar Lab.
2025.11
SN Academy

문항 1 [2 점]

질문: $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은?

선택지

1. ① 1
2. ② $\sqrt{3}$
3. ③ 3
4. ④ $3\sqrt{3}$
5. ⑤ 9

문항 1 해설

정답

정답: 1 번(①).

풀이

같은 밑의 거듭제곱 $\mathrm{a}^m \times a^n = a^{m+n}$ 과 지수법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned} 9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} &= (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{2\cdot\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

난이도

하

문항 2

문제

배점: 2 점 함수 $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$에 대하여 $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$의 값은?

① 7

② 9

③ 11

④ 13

⑤ 15

문항 2 해설

해설

주어진 극한은 도함수의 정의에 해당하므로 $f'(1)$을 구하면 된다.

1. 도함수의 정의: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. 따라서 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$이다.
2. 함수 $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$을 미분하면 $f'(x) = 9x^2 + 4$이다.
3. 대입: $f'(1) = 9 \cdot 1^2 + 4 = 13$.

추가 확인(직접 전개): $f(1+h) = 3(1+h)^3 + 4(1+h) + 1 = 8 + 13h + 9h^2 + 3h^3$, $f(1) = 8$이므로 분자는 $13h + 9h^2 + 3h^3 = h(13 + 9h + 3h^2)$이고, 따라서 극한은 13이다.

정답: 13 (선택지 ④)

난이도: 하

문제 3

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{4}(2a_k - k) = 0$ 일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$ 의 값은? [3 점]

보기

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

해설 3

단계별 풀이

1. 주어진 식을 전개하면 $2\sum_{k=1}^{4} a_k - \sum_{k=1}^{4} k = 0$ 이다.
2. $\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 이므로, $S = \sum_{k=1}^{4} a_k$ 라고 두면 $2S - 10 = 0$ 이다.
3. 따라서 $S = 5$ 이다.

최종 정답

정답: **5 (⑤)**

난이도

하

문항 4: 함수

정의

함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의한다:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & (x < 1) \\ x^2 - 3x + a, & (x \geq 1) \end{cases}$$

질문

이 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3 점]

선택지

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

문항 4 해설

1. 함수가 전제에서 연속이려면 $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.
2. 왼쪽 극한: $x < 1$ 구간에서 $f(x) = 3x - 2$ 이므로 $\lim_{x\to1^-} f(x) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ 이다.
3. 오른쪽 극한과 함수값: $x \geq 1$ 구간에서 $f(x) = x^2 - 3x + a$ 이므로 $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + a = a - 2$ 이다.
4. 연속이므로 $a - 2 = 1$ 이고, 따라서 $a = 3$ 이다.

따라서 상수 a의 값은 **3** 이다. (선택지 **(3)**)
난이도: 하

문제 5

지문

함수 $f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

요구

$f'(1)$ 의 값

배점

3 점

선택지

1. 6
2. 7
3. 8
4. 9
5. 10

해설 5

정답

(3) 8

풀이

1. $f(x)$ 를 전개한다:
$$f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 2) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4.$$
2. 미분한다:
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 4.$$
3. $x = 1$ 을 대입한다:
$$f'(1) = 6(1)^2 + 6(1) - 4 = 8.$$

난이도

하

문제 6

1 보다 큰 두 실수 a, b가 다음을 만족시킬 때, $\log_9(ab)$의 값은 무엇인가? [3 점]

$$\log_a b = 3, \quad \log_3\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}$$

1. $\frac{3}{8}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{5}{8}$
4. $\frac{3}{4}$
5. $\frac{7}{8}$

난이도: 하

해설 6

정답: (2) $\frac{1}{2}$

풀이

1. $\log_a b = 3$ 이므로 $b = a^3$.
2. $\log_3\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{b}{a} = 3^{1/2}$.
3. 대입하면 $\frac{a^3}{a} = a^2 = 3^{1/2}$ 이므로 $a = 3^{1/4}$ ($a > 1$ 이므로 양의 해).
4. 따라서 $b = a^3 = 3^{3/4}$, $ab = a \cdot b = a^4 = \left(3^{1/4}\right)^4 = 3$.
5. 그러므로 $\log_9(ab) = \log_9 3 = \frac{1}{2}$.

따라서 최종 정답은 $\frac{1}{2}$ 이며, 선택지는 **(2)** 이다.

난이도: 하

문제 7

두 곡선 $y = x^2 + 3$, $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$과 직선 $x = 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 무엇인가? [3 점]

보기

1. $\frac{18}{5}$
2. $\frac{7}{2}$
3. $\frac{17}{5}$
4. $\frac{33}{10}$
5. $\frac{16}{5}$

그림 설명

- 좌표축은 수평 x축과 수직 y축으로, 원점 O에서 교차한다. 축 끝에는 각각 x, y 라벨이 있다.
- 포물선 $y = x^2 + 3$은 위로 열린 포물선으로 y축 대칭이며, 그래프 좌상단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 포물선 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$은 아래로 열린 포물선으로 y축 대칭이며, 그래프 좌하단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 두 포물선은 y축 위의 한 점에서 서로 접하며, 그 점은 원점 위쪽에 있다.
- 직선 $x = 2$는 y축의 오른쪽에 있는 수직선이며, 선 아래쪽 근처에 라벨이 있다.
- 음영 영역은 왼쪽 경계가 두 포물선의 접점, 오른쪽 경계가 직선 $x = 2$이고, 위쪽 경계는 $y = x^2 + 3$, 아래쪽 경계는 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$이다. 위치는 y축의 오른쪽, $x = 2$의 왼쪽에 있다.

해설 7

풀이

- 두 곡선의 교점은 $x^2 + 3 = -\frac{1}{5}x^2 + 3 \Rightarrow \frac{6}{5}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 3$이다. - $x > 0$에서 $x^2 + 3 > -\frac{1}{5}x^2 + 3$이므로, 구간 $0 \le x \le 2$에서 위쪽 곡선은 $y = x^2 + 3$, 아래쪽 곡선은 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$이다. - 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^2 \left[(x^2+3) - (-\frac{1}{5}x^2+3)\right] dx = \int_0^2 \frac{6}{5}x^2\, dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{6}{5}\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{5}.$$

정답

5 번, $\frac{16}{5}$

8. 문제

조건: $\sin\theta + 3\cos\theta = 0$, 그리고 $\cos(\pi - \theta) > 0$. 물음: $\sin\theta$의 값은? [3 점]
선택지:

1. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
2. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
3. 0
4. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$
5. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

난이도: 하

---

8. 해설

정답: **(1)** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

1. $\sin\theta + 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = -3\cos\theta$.
2. 항등식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면 $9\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{10}$.
3. 따라서 $|\cos\theta| = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $|\sin\theta| = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
4. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta < 0$.
5. $\sin\theta = -3\cos\theta$이므로 $\cos\theta$가 음수일 때 $\sin\theta$는 양수. 따라서 $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

최종 정답: **(1)**

문항 9

가정

a는 양수.

함수

$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 4$.

조건

직선 $y = 5$가 곡선 $y = f(x)$에 접한다.

질문

$f(2)$의 값은?

배점

[4 점]

선택지

1. (1) 11
2. (2) 12
3. (3) 13
4. (4) 14
5. (5) 15

난이도

중

문항 9 해설

정답

선택지 **(4)**, 값은 **14**.

해설

1. 접선 $y = 5$가 $y = f(x)$에 접한다는 것은 어떤 c에 대해 $f(c) = 5$이고, 접선의 기울기가 0이므로 $f'(c) = 0$임을 뜻한다.

2. $f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 3(x - a)(x + 3a)$이므로 임계점은 $x = a, x = -3a$이다.

3. 따라서 $f(a) = 5$ 또는 $f(-3a) = 5$ 중 하나여야 한다.

   - $f(a) = a^3+3aa^2-9a^2a+4 = 4-5a^3$. 만약 $f(a) = 5$이면 $4-5a^3 = 5 \Rightarrow a^3 = -\frac{1}{5}$가 되어 $a > 0$와 모순이다.
   - $f(-3a) = -27a^3+27a^3+27a^3+4 = 27a^3+4$. $27a^3+4 = 5 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ (단, $a > 0$).

4. $a = \frac{1}{3}$에서 $f(2)$를 계산하면

$$f(2) = 8 + 12a - 18a^2 + 4 = 12 + 12a - 18a^2 = 12 + \frac{12}{3} - 18 \cdot \frac{1}{9} = 12 + 4 - 2 = 14.$$

최종 답

14 (선택지 **(4)**)

문항 10

주어진 정보

- 상수 a는 $a > 1$이다.
- 곡선: $y = a^x - 2$.
- 제 1 사분면의 곡선 위 점 A를 잡는다. A의 x 좌표를 t라 두면 $A = (t, a^t - 2)$이며 $t > 0$, $a^t - 2 > 0$이다.
- A를 지나는 y 축에 평행한 직선: $x = t$.
  - $x = t$가 x 축 $(y = 0)$과 만나는 점: $B = (t, 0)$.
  - $x = t$가 곡선 $y = a^x - 2$의 점근선 $y = -2$와 만나는 점: $C = (t, -2)$.
- 길이
  - AB는 $x = t$ 위의 수직선분이므로 $|AB| = (a^t - 2) - 0 = a^t - 2$.
  - BC는 $x = t$ 위의 수직선분이므로 $|BC| = 0 - (-2) = 2$.
- 조건: $|AB| = |BC|$.
- 점 O는 원점 $O = (0, 0)$이다.
- 삼각형 AOC의 넓이는 8이다.
- OB는 원점에서 B까지의 거리로, B가 x 축 위에 있으므로 $|OB| = t$이다.

질문

$a \times |OB|$의 값, 즉 $a \times t$를 구하여라.

선택지

(1) $2^{13/6}$

(2) $2^{7/3}$

(3) $2^{5/2}$

(4) $2^{8/3}$

(5) $2^{17/6}$

배점

[4 점]

문항 10 해설

정답

(3) $2^{5/2}$

해설

1. $|AB| = a^t - 2$, $|BC| = 2$ 이고 $|AB| = |BC|$ 이므로 $a^t - 2 = 2 \Rightarrow a^t = 4$ 이다.
2. 삼각형 AOC 의 넓이를 이용한다. $O = (0, 0)$, $a^t = 4$ 이므로 $A = (t, 2)$, $C = (t, -2)$ 이다. 두 벡터 $\overrightarrow{OA} = (t, 2)$, $\overrightarrow{OC} = (t, -2)$ 의 행렬식은 $t \cdot (-2) - 2 \cdot t = -4t$ 이므로 넓이는
$$\frac{1}{2}\,|t \cdot (-2) - 2 \cdot t| = \frac{1}{2} \cdot 4t = 2t$$
이다. 조건에 따라 $2t = 8$ 이므로 $t = 4$ 이다.
3. $a^t = 4$, $t = 4$ 이므로 $a^4 = 4$ 이고 $a = 2^{1/2}$ 이다.
4. 따라서 $a \times |OB| = a \times t = 2^{1/2} \times 4 = 4\sqrt{2} = 2^{5/2}$ 이다.

검증

$a = \sqrt{2} > 1$, $t = 4 > 0$, $A = (4, 2)$ 는 제 1 사분면에 있고 $|AB| = 2 = |BC|$ 로 모든 조건을 만족한다.

11. 문제

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각 t $(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4 점]

보기

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{13}{3}$이다.

ㄴ. $k=3$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

ㄷ. $k=5$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

선택지

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

---

11. 해설

1. 일반식: 위치 함수 $s(t) = \int v(t)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{k}{2}t^2 + 4t$이고, 원점 출발이므로 $s(0)=0$이다.

2. (ㄱ) $k=0$이면 $v(t) = t^2+4$이므로 $s(1) = \frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1 = \frac{13}{3}$이다. 따라서 참이다.

3. (ㄴ) $k=3$이면 $v(t) = t^2 - 3t + 4$이다. 판별식 $\Delta = 9 - 16 < 0$이므로 모든 t에서 $v(t) > 0$이다. 따라서 운동 방향 변화가 없으므로 거짓이다.

4. (ㄷ) $k=5$이면 $v(t) = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$이다. 구간 $[0,1)$에서는 $v>0$, 구간 $(1,2]$에서는 $v<0$이므로 이동 거리는
$$\int_0^1 v(t)\,dt + \int_1^2 |v(t)|\,dt = \int_0^1 v(t)\,dt + \int_1^2 \big(-v(t)\big)\,dt = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3$$
이다. 따라서 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이며, 최종 정답은 **③ (ㄱ, ㄷ)**이다.

문제 12

등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$2\left(a_1 + a_4 + a_7\right) = a_4 + a_7 + a_{10} = 6$$

을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은? [4 점]

1. $\dfrac{22}{7}$
2. $\dfrac{24}{7}$
3. $\dfrac{26}{7}$
4. $\dfrac{30}{7}$
5. $\dfrac{32}{7}$

난이도: 중

해설 12

정답: 2 번, $a_{10} = \dfrac{24}{7}$

1. 등비수열에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = r^3\left(a_1 + a_4 + a_7\right)$ 이다.
2. 주어진 조건에서 $a_1 + a_4 + a_7 = 3$, $a_4 + a_7 + a_{10} = 6$ 이므로 $r^3 = \dfrac{6}{3} = 2$ 이다.
3. $a_1 = \dfrac{3}{1 + r^3 + r^6} = \dfrac{3}{1 + 2 + 4} = \dfrac{3}{7}$ 이다.
4. 따라서 $a_{10} = a_1 r^9 = \dfrac{3}{7} \cdot 2^3 = \dfrac{24}{7}$ 이다.

문제 13

함수 $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, -6)$ 에서 의 접선을 l 이라 하고, 함수 $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, 6)$ 에서 의 접선을 m 이라 하자. 두 직선 l, m 과 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 얼마인가? [4 점]

1. 21
2. 28
3. 35
4. 42
5. 49

해설 13

정답: **5**

1. 함수 $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여 $f(1) = -6$, $f'(x) = 2x - 4$ 이므로 $f'(1) = -2$ 이다. 따라서 점 $(1, -6)$ 에서 의 접선 l 의 방정식은

$$y - (-6) = -2(x - 1) \;\Rightarrow\; y = -2x - 4$$

   이고, y 절편은 $(0, -4)$ 이다.

2. 함수 $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곱의 미분법을 적용하면

$$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$$

   이다. 점 $x = 1$ 에서

$$g(1) = (1^3 - 2 \cdot 1)f(1) = (-1)(-6) = 6,$$

$$g'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2)f(1) + (1^3 - 2 \cdot 1)f'(1) = (1)(-6) + (-1)(-2) = -6 + 2 = -4$$

   이므로, 점 $(1, 6)$ 에서 의 접선 m 의 방정식은

$$y - 6 = -4(x - 1) \;\Rightarrow\; y = -4x + 10$$

   이고, y 절편은 $(0, 10)$ 이다.

3. 두 직선 $l : y = -2x - 4$, $m : y = -4x + 10$ 의 교점을 구하면

$$-2x - 4 = -4x + 10 \;\Rightarrow\; 2x = 14 \;\Rightarrow\; x = 7,$$

$$y = -2 \cdot 7 - 4 = -18$$

   이다. 따라서 세 꼭짓점은 $A(0, -4)$, $B(0, 10)$, $C(7, -18)$ 이다.

4. 넓이는 y 축을 밑변으로 보면 밑변의 길이는 $|10-(-4)|=14$, 높이는 점 C 에서 y 축까지의 거리 $|7|=7$ 이다. 따라서 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 14\times 7=49$$

이다. (검산: $\frac{1}{2}|7(-4-10)|=49$)

최종 정답: **49** (선택지 **5**)

난이도: 중

문항 14

그림 정보(정확한 기하 구성만 기술, 해설/추론 없음)

- 기본 도형과 길이/각
  - 직각삼각형 ABC: $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle B = \pi/2$.
  - 좌표 표현(인식 명확화를 위한 한 가지 일관된 배치): $B = (0, 0)$, $A = (-3, 0)$, $C = (0, 4)$. 그러면 $AC = 5$.
  - 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점 D: $AD : DB = 2 : 1 \Rightarrow D = (-1, 0)$, $AD = 2$.
- 원과 교점
  - 원 ω_1: 중심 A, 반지름 $AD = 2$.
    - 직선 AB와의 교점: D와 F. F는 D가 아닌 쪽의 교점 $\Rightarrow F = (-5, 0)$.
    - 선분 AC와의 교점(A가 아닌 점) $E \Rightarrow E = \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$.
  - 호 EF 위의 점 G를 잡되(ω_1 위, D를 포함하지 않는 EF 호), $CG = 2\sqrt{6}$.
  - 원 Ω: 세 점 C, E, G를 지나는 원(따라서 $\Omega \cap \omega_1 = \{E, G\}$).
  - 점 H: Ω 위의 점이며 $\angle HCG = \angle BAC$.
- 그림에 그려진 선/표기
  - AB는 수평선(그 위에 F, A, D, B 순서). BC는 수직선(B에서 위로, 끝점 C). AC는 A에서 C로 향하는 사선이며 E를 지난다.
  - ω_1(중심 A, 반지름 2)과 Ω(세 점 C, E, G를 지나는 원)가 서로 교차하며 교점은 E와 G.
  - Ω 내부에는 현 HC, HG, GC가 그려져 있고, 현 CE도 표시됨.
  - B에서 의 직각 표시($\angle ABC = 90°$)가 있음.
  - A에서 작은 호 표시로 $\angle BAC$가 표기됨.
  - C에서 작은 호 표시로 $\angle HCG$가 표기되어 $\angle HCG = \angle BAC$ 조건을 시각화.
- 선택지(길이 GH)
  1. $\frac{6\sqrt{15}}{5}$
  2. $\frac{38\sqrt{10}}{25}$
  3. $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
  4. $\frac{32\sqrt{15}}{25}$
  5. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

해설

1. 좌표 배치: $B = (0,0)$, $A = (-3,0)$, $C = (0,4) \Rightarrow AC = 5$. $D = (-1,0)$, $AD = 2$. 원 ω_1: $(x+3)^2 + y^2 = 4$.

2. 점 E: AC 위에서 $AE = 2$ 이므로 매개변수 $t = \frac{2}{5}$. 따라서
$$E = A + \tfrac{2}{5}(C - A) = \left(-\tfrac{9}{5}, \tfrac{8}{5}\right), \quad CE = \tfrac{3}{5}|AC| = 3.$$

3. 점 G: ω_1 위이며 $CG = 2\sqrt{6}$. 두 원 $(x+3)^2 + y^2 = 4$ 와 $x^2 + (y-4)^2 = 24$ 의 교점은 직선 $6x + 8y + 13 = 0$ 위에 있다. 해를 구하면
$$x = \frac{-27 \pm 4\sqrt{15}}{10}, \qquad y = \frac{-13 - 6x}{8}.$$
호 EF 에 해당하는 점은
$$G = \left(\frac{-27 - 4\sqrt{15}}{10}, \frac{4 + 3\sqrt{15}}{10}\right).$$

4. 중심 A, 반지름 2의 원 위에서 $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{12}{10}, \frac{16}{10}\right)$, $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{3-4\sqrt{15}}{10}, \frac{4+3\sqrt{15}}{10}\right)$. 내적 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$ 이므로
$$\cos \angle EAG = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$
따라서 현 EG 의 길이
$$EG = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\angle EAG}{2} = 4\sqrt{\frac{1 - \cos \angle EAG}{2}} = 4\sqrt{\frac{1 - 1/4}{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 삼각형 CEG 의 변 길이: $CE = 3$, $CG = 2\sqrt{6}$, $EG = \sqrt{6}$. 헤론 공식을 사용하면 넓이 Δ 는
$$s = \frac{3 + 2\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{2}, \quad \Delta = \sqrt{s(s-3)(s-2\sqrt{6})(s-\sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$
외접반지름 R 은
$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{4 \cdot (3\sqrt{15}/4)} = \frac{4\sqrt{15}}{5}.$$

6. 점 H 는 Ω 위에서 $\angle HCG = \angle BAC$. 직각삼각형 ABC 에서 $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$. 원의 성질(현의 길이 공식)로부터
$$GH = 2R \sin \angle HCG = 2 \cdot \frac{4\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}.$$

따라서 **정답은 4 번**이다. 선택지는 **(4)**에 해당한다.

문항 15

문제

다음과 같이 정의된 함수들이 주어진다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$a > 0$ 인 양수에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} ax + a, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x < 1 \\ ax - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

또한

$$h(x) = \int_0^x \big(g(t) - f(t)\big)\, dt$$

로 정의한다.

정의: $h(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값을 k 라 한다. $a = k$ 일 때 $k + h(3)$ 의 값을 구하라. [4 점]

선택지

1. $\dfrac{9}{2}$
2. $\dfrac{11}{2}$
3. $\dfrac{13}{2}$
4. $\dfrac{15}{2}$
5. $\dfrac{17}{2}$

문항 15

해설

정답: 4 번

1. g 와 f 가 연속이므로 $h'(x) = g(x) - f(x)$ 이다. 극값은 $h'(x) = 0$ 에서 부호가 바뀌는 지점에서 만 생긴다.

2. 구간별 $h'(x)$는 다음과 같다.

$$h'(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a, & x < -1, \\ x^2, & -1 \le x < 0, \\ -x^2 + x = x(1-x), & 0 \le x < 1, \\ -x^2 + (a+1)x - a, & x \ge 1 \end{cases}$$

특히 $x \in [-1, 1)$ 에서 는 $h'(x) \ge 0$ 이고, $x = 0, 1$ 에서 만 0 이 된다. $x = 0$ 에서 는 좌우 부호가 모두 양이므로 극값이 없다.

3. $x < -1$ 에서 $h'(x) = x^2 + ax + a$의 판별식은 $a^2 - 4a = a(a-4)$ 이다.

   - $a < 4$: 근이 없어서 항상 양이므로 극값이 생기지 않는다.
   - $a = 4$: $(x+2)^2$ 로 중근이 되어 부호 변화가 없으므로 극값이 생기지 않는다.
   - $a > 4$: 서로 다른 두 실근이 둘 다 -1 보다 작고 부호가 $+ \to - \to +$로 바뀌어 이 구간에서 만 극값이 두 개 생긴다.

   따라서 극값이 하나만 되려면 반드시 $a \le 4$여야 한다.

4. $x \ge 1$ 에서 $h'(x) = -x^2 + (a+1)x - a$를 본다.

   - $0 < a < 1$: $x > 1$ 에서 $h'(x) < 0$ 이므로 $x = 1$ 에서 $+ \to -$로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다.
   - $a = 1$: $h'(x) = -(x-1)^2 \le 0$ 이므로 역시 $x = 1$ 에서 극값이 한 개 생긴다.
   - $1 < a \le 4$: $h'(x) = -(x-1)(x-a)$ 이므로 $(1, a)$ 에서 는 양, $x > a$ 에서 는 음이다. 따라서 $x = a$ 에서 만 $+ \to -$로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다. $x = 1$ 에서 는 부호 변화가 없다.

   결론적으로 $0 < a \le 4$ 에서 극값은 정확히 한 개이고, $a > 4$ 에서 는 이미 좌측에서 두 개가 생긴다. 따라서 $k = 4$ 이다.

5. 이제 $a = k = 4$ 일 때 $h(3)$ 을 구한다.

$$\int_0^3 g(t)\,dt = \int_1^3 (4t-4)\,dt = \left[2t^2 - 4t\right]_1^3 = 8,$$

$$\int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^3 (t^2 - t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

   따라서 $h(3) = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$ 이고,

$$k + h(3) = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}.$$

최종 정답: 4 번, $\frac{15}{2}$

문항 16

문제

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = n^2 a_n + 1$을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3 점]

주어진 조건

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n^2 a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

문항 16 해설

정답

$a_3 = 9$

해설

1. 초기값은 $a_1 = 1$이다.
2. $n = 1$을 대입하면 $a_2 = 1^2 \cdot a_1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$이다.
3. $n = 2$를 대입하면 $a_3 = 2^2 \cdot a_2 + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$이다.

따라서 a_3의 값은 $\mathbf{9}$이다.

문항 17

문제

함수 $f(x) = 4x^3 - 2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0) = 4$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오.

배점

[3 점]

문항 17 해설

정답

16

해설

1. 함수 $f(x) = 4x^3 - 2x$의 한 부정적분은 항별로 적분하여 다음과 같다.

$$F(x) = \int \left(4x^3 - 2x\right) dx = x^4 - x^2 + C.$$

2. 조건 $F(0) = 4$를 대입하면 $C = 4$이다.

3. 따라서 $F(2)$는 다음과 같다.

$$F(2) = 2^4 - 2^2 + 4 = 16 - 4 + 4 = 16.$$

최종 정답: **16**

문항 18

다음 조건을 만족하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에서 넓이를 구하시오. [3 점]

조건

- $|AB| = 5$
- $|AC| = 6$
- $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$

문항 18 해설

1. 삼각형의 넓이 공식 $S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle BAC)$ 을 사용한다.
2. $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$ 이고 $\angle BAC$ 는 삼각형의 내부각이므로 $\sin(\angle BAC) > 0$ 이다. 따라서

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

3. 넓이는

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12.$$

따라서 삼각형 $\triangle ABC$ 의 넓이는 **12** 이다.

난이도: 하

문제 19

$-2 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 다음 부등식

$$-k \le 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8 \le k$$

이 성립하도록 하는 양수 k 의 최솟값을 구하시오. [3 점]조건: $k > 0$

해설 19

1. 함수 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ 에 대하여, $-k \le f(x) \le k$ 가 $[-2, 2]$ 의 모든 x 에서 성립하려면 k 의 최솟값은
$$k = \max_{x \in [-2,2]} |f(x)|$$
이다.

2. 도함수는 $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ 이므로 임계점은 $x = -2,\ 1$ 이고, 끝점 $x = -2,\ 2$ 와 함께 값을 계산한다.
$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-8) + 3(4) - 12(-2) - 8 = 12, \\ f(1) &= 2 + 3 - 12 - 8 = -15, \\ f(2) &= 16 + 12 - 24 - 8 = -4. \end{aligned}$$

3. 절댓값은 각각 $|f(-2)| = 12$, $|f(1)| = 15$, $|f(2)| = 4$ 이므로 구간 $[-2, 2]$ 에서 의 최대값은 15 이다.

따라서 k 의 최솟값은 **15** 이다. **정답: 15**

문제 20

수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1 = 7$
- 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10$$

다음은 $\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1}$ 의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$ 이므로

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + [\ ]$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n + a_{n+1} = 3 \times [\ ]$$

(ㄱ)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \quad (n \geq 2)$$

에서 양변에 $n = 2$ 를 대입하면

$$a_2 = [\ ]$$

(ㄴ)

(ㄱ)과 (ㄴ)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5} \left(2a_{2k+1} + a_{2k+2}\right) = [\ ]$$

위의 [가]에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 하고, [나], [다]에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, $\dfrac{p \times q}{f(12)}$ 의 값을 구하시오. [4 점]

해설 20

1. 부분합 $S(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 가 주어졌으므로, $n \geq 2$ 에서

$$a_{n+1} = S(n+1) - S(n) = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \left[\frac{1}{6}\left((n+1)^2 - n^2\right) - \frac{1}{6}\left((n+1) - n\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \frac{n}{3}.$$

따라서 $[\ ] = f(n) = \dfrac{n}{3}$ 이고, 정리하면 $2a_n + a_{n+1} = 3 \cdot \dfrac{n}{3} = n \ (n \geq 2)$ 이다.

2. $n = 2$를 부분합 식에 대입하면

$$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 2 + 10,$$

$$7 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3} + 10,$$

   따라서 $a_2 = 10$ 이므로 [ ] $= p = 10$ 이다.

3. 구하려는 합은

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5}\big(2a_{2k+1} + a_{2k+2}\big) = 7 + 10 + \sum_{k=1}^{5}(2k+1).$$

   위에서 $2a_n + a_{n+1} = n$을 $n = 2k+1$에 적용하였다.

$$= 17 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11) = 17 + 35 = 52.$$

   따라서 [ ] $= q = 52$ 이다.

4. $f(12) = \dfrac{12}{3} = 4$ 이므로

$$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130.$$

정답: 130

문제 21

최고차항의 계수가 양수인 삼차 함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x), & x < t, \\ f(x), & x \geq t \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\{\, g(-1), -\frac{7}{2}g(1) \,\}$ 이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4 점]

해설 21

1. 조건 (가)로부터의 기본 형태

$a = 0, 2$에서 우극한이 유한하게 존재하려면 분모 $x(x-2)$ 가 0 이 되는 점에서 분자 $g(x)$ 도 0 이어야 한다. g 는 연속이므로 $g(0) = g(2) = 0$, 따라서 $f(0) = f(2) = 0$ 이다. 최고차항 계수가 양수인 삼차 함수 f 는

$$f(x) = a\,x(x-2)(x-b) \qquad (a > 0,\ b \in \mathbb{R}).$$

또한 $x = t$ 에서 g 가 연속이려면 $-f(t) = f(t)$ 이어야 하므로 $f(t) = 0$, 따라서

$$t \in \{0, 2, b\}.$$

아울러 $x \neq 0, 2$ 에서 는

$$\frac{f(x)}{x(x-2)} = a(x-b), \qquad \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(x-b), & x < t, \\ a(x-b), & x \geq t. \end{cases}$$

2. 집합 M 의 정의와 경우 나누기

$M := \{\, m \in \mathbb{N} \mid \lim_{x\to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0 \,\}$ 라고 하자. t 의 값에 따라 M 을 분석한다.

(1) $t = 0$ 인 경우 $m \geq 1$ 에서 $x \to m+$ 이면 $x \geq t$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b)$ 이다. 따라서

$$M = \{\, m \in \mathbb{N} \mid m < b \,\}.$$

M 이 두 원소를 가지려면 $2 < b \le 3$ 이고 $M = \{1,2\}$ 이다. 한편 $t = 0$ 이면

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \qquad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \qquad -\tfrac{7}{2}g(1) = \tfrac{7}{2}a(b-1).$$

$\{\, g(-1), -\frac{7}{2}g(1) \,\} = \{1,2\}$ 를 만족시키는 배치를 풀어 보면

$$\begin{aligned} &3a(1+b) = 1,\ \tfrac{7}{2}a(b-1) = 2 \ \Rightarrow\ b = -8 \quad (2 < b \le 3 \text{ 과 모순}),\\ &3a(1+b) = 2,\ \tfrac{7}{2}a(b-1) = 1 \ \Rightarrow\ b = \tfrac{2}{5} \quad (2 < b \le 3 \text{ 과 모순}). \end{aligned}$$

따라서 $t \ne 0$.

(2) $t = b$ **인 경우** $\quad x \to m+$ 에서

$$\lim_{x \to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(m-b) = a(b-m) > 0, & m < b,\\ a(m-b) > 0, & m > b,\\ 0, & m = b. \end{cases}$$

즉, 항상 음수가 아니므로 $M = \varnothing$. 이는 (나)와 모순이므로 $t \ne b$.

(3) $t = 2$ **인 경우** $\quad$ 이때는

$$\lim_{x\to 1+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = -a(1-b) = a(b-1) = f(1), \qquad \lim_{x\to 2+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(2-b), \qquad \lim_{x\to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b$$

따라서 부호 조건은

$$\begin{aligned} m = 1 &:\ a(b-1) < 0 \ \Leftrightarrow\ b < 1,\\ m = 2 &:\ a(2-b) < 0 \ \Leftrightarrow\ b > 2,\\ m \ge 3 &:\ a(m-b) < 0 \ \Leftrightarrow\ m < b. \end{aligned}$$

M 이 두 원소가 되려면 $3 < b \le 4$ 이고 $M = \{2,3\}$ 뿐이다.

3. 조건 (나)로부터 매개변수 결정

(나)에 의해 $\{\, g(-1), -\frac{7}{2}g(1) \,\} = \{2,3\}$ 이다. $t = 2$ 이므로

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \qquad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \qquad -\tfrac{7}{2}g(1) = \tfrac{7}{2}a(b-1).$$

두 수의 배치를 나누어 풀면

$$\begin{aligned} &3a(1+b) = 3,\ \tfrac{7}{2}a(b-1) = 2 \ \Rightarrow\ a = \tfrac{3}{14},\ b = \tfrac{11}{3} \quad (3 < b \le 4 \text{ 충족}),\\ &3a(1+b) = 2,\ \tfrac{7}{2}a(b-1) = 3 \ \Rightarrow\ b = -8 \quad (3 < b \le 4 \text{ 와 모순}). \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{3}{14}$, $b = \frac{11}{3}$, $t = 2$. 또한 $g(-1) = 3$, $-\frac{7}{2}g(1) = 2$ 로 서로 달라 $g(-1) \ne -\frac{7}{2}g(1)$ 을 만족한다.

4. 최종 계산

$-5 < t$ 이므로 $g(-5) = -f(-5)$. 계산하면

$$\begin{aligned} f(-5) &= a \cdot (-5)(-7)\left(-5 - \tfrac{11}{3}\right) = a \cdot 35 \cdot \left(-\tfrac{26}{3}\right),\\ &= \tfrac{3}{14} \cdot 35 \cdot \left(-\tfrac{26}{3}\right) = -65, \qquad \therefore\ g(-5) = 65. \end{aligned}$$

최종 정답: 65

문항 22

다음 조건을 만족하는 두 곡선과 점들에 대하여 $p+q$를 구하여라.

1. 곡선 1: $y = \log_{16}(8x+2)$.
2. 점 $A = (a, b)$는 곡선 1 위의 점이다.
3. 곡선 2: $y = 4^{x-1} - \dfrac{1}{2}$.
4. 점 B는 곡선 2 위의 점이다.
5. 점 A와 점 B는 모두 제 1 사분면에 있다.
6. 점 A를 직선 $y = x$에 대하여 대칭 이동한 점 $A' = (b, a)$가 직선 OB 위에 있다. 여기서 O는 원점이다.
7. 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $M = \left(\dfrac{77}{8}, \dfrac{133}{8}\right)$이다.
8. $a \times b = \dfrac{q}{p}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.

구하는 것: $p+q$.

해설 22

정답: **457**

풀이

1. 점 $A(a, b)$는 곡선 1 위에 있으므로

$$b = \log_{16}(8a+2) \quad \Longleftrightarrow \quad 16^b = 8a+2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4^{2b} = 8a+2.$$

2. 점 $B(x_B, y_B)$는 곡선 2 위에 있으므로

$$y_B = 4^{x_B - 1} - \frac{1}{2}.$$

3. 중점이 $M\left(\dfrac{77}{8}, \dfrac{133}{8}\right)$이므로

$$\frac{a+x_B}{2} = \frac{77}{8}, \quad \frac{b+y_B}{2} = \frac{133}{8} \quad \Longrightarrow \quad x_B = \frac{77}{4} - a,\ y_B = \frac{133}{4} - b.$$

4. $A' = (b, a)$가 직선 OB 위에 있으므로 $\overrightarrow{OA'}$와 $\overrightarrow{OB}$는 같은 방향의 벡터이다. 따라서 어떤 $\lambda > 0$에 대하여
$$(b, a) = \lambda(x_B, y_B).$$
곧 $x_B = \dfrac{b}{\lambda}$, $y_B = \dfrac{a}{\lambda}$이고, 중점 조건을 사용하면
$$a + \frac{b}{\lambda} = \frac{77}{4}, \quad b + \frac{a}{\lambda} = \frac{133}{4}. \tag{1}$$

5. 점 B의 곡선 조건에 $x_B = \dfrac{b}{\lambda}$, $y_B = \dfrac{a}{\lambda}$를 대입하면
$$\frac{a}{\lambda} = 4^{\frac{b}{\lambda}-1} - \frac{1}{2} \iff 4^{\frac{b}{\lambda}} = \frac{4a}{\lambda} + 2. \tag{2}$$
점 A의 조건은
$$4^{2b} = 8a + 2. \tag{3}$$

6. 핵심 관찰: 식 (2)와 식 (3)는 모두
$$4^{(\text{지수})} = (a\text{에 대한 일차식}) + 2$$
의 형태이다. 두 식이 완전히 일치하도록 하려면 지수 $\dfrac{b}{\lambda}$와 $2b$가 같고, 우변의 계수도 일치해야 하므로 $\lambda = \dfrac{1}{2}$가 자연스럽다. 실제로 $\lambda = \dfrac{1}{2}$이면
$$\frac{b}{\lambda} = 2b, \qquad \frac{4a}{\lambda} + 2 = 8a + 2$$
가 되어 식 (2)와 식 (3)가 정확히 일치한다.

7. 식 (1)에 $\lambda = \dfrac{1}{2}$를 대입하면
$$a + 2b = \frac{77}{4}, \qquad 2a + b = \frac{133}{4}.$$
이를 연립하여 풀면
$$b = \frac{7}{4}, \qquad a = \frac{63}{4}.$$

8. 검증:
   - A: $8a + 2 = 8 \cdot \dfrac{63}{4} + 2 = 128 = 2^7$, 따라서 $b = \log_{16}(128) = \dfrac{7}{4}$ 성립.
   - B: $x_B = \dfrac{77}{4} - \dfrac{63}{4} = \dfrac{7}{2}$, $y_B = \dfrac{133}{4} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{63}{2}$. 또한
   $$4^{x_B-1} - \frac{1}{2} = 4^{\frac{7}{2}-1} - \frac{1}{2} = 4^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} = 32 - \frac{1}{2} = \frac{63}{2} = y_B.$$
   - $A' = (\frac{7}{4}, \frac{63}{4})$와 $B = (\frac{7}{2}, \frac{63}{2})$는 좌표가 비율 $\dfrac{1}{2}$로 같으므로 A'는 직선 OB 위에 있다.

9. 따라서
$$ab = \left(\frac{63}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{441}{16} = \frac{q}{p} \quad (\gcd(p, q) = 1),$$
이므로 $p + q = 16 + 441 = \mathbf{457}$.

난이도: 중상

문제

문항 23

두 벡터 $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1)$ 에 대하여 $\vec{a} + \vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2 점]

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

해설

문항 23

정답: ③ 3

풀이

1. 성분별로 더하면 $\vec{a} + \vec{b} = (4 + (-1),\ 1 + (-1)) = (3, 0)$ 이다.
2. 모든 성분의 합은 $3 + 0 = 3$ 이다.

따라서 선택지 ③이 정답이다.
난이도: 하

문항 24

문항 정보

- 배점: 3 점
- 형식: 객관식(단일 정답)
- 난이도: 하

문제

포물선 $y^2 = 12(x-2)$ 의 초점과 준선 사이의 거리는?

선지

1. 6
2. 7
3. 8
4. 9
5. 10

해설 24

정답

◯ **1) 6** (**① 6**)

풀이

1. 주어진 포물선은 $y^2 = 12(x-2)$ 이므로 표준형 $y^2 = 4p\,(x-x_0)$ 와 비교하여 $4p = 12 \Rightarrow p = 3$ 이다.
2. 정점은 $(2,0)$ 이고, 초점은 $(2+p,0) = (5,0)$, 준선은 $x = 2-p = -1$ 이다.
3. 초점과 준선 사이의 거리 $= |5-(-1)| = 6$ 이며, 일반적으로 $2p = 6$ 이다.

따라서 정답은 **① 6** 이다.

문제 25

좌표공간의 점 $A\left(3, -\frac{3}{2}, -2\right)$를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는 무엇인가? [3 점]

(1) $\sqrt{21}$

(2) $\sqrt{22}$

(3) $\sqrt{23}$

(4) $2\sqrt{6}$

(5) 5

해설 25

정답: **5** (선택지 **(5)**)

1. yz 평면에 대한 대칭은 x 좌표의 부호만 바뀌므로 점 B는 다음과 같다.
$$B = \left(-3, -\tfrac{3}{2}, -2\right).$$
2. 원점에 대한 대칭은 모든 좌표의 부호가 바뀌므로 점 C는 다음과 같다.
$$C = \left(-3, \tfrac{3}{2}, 2\right).$$
3. 따라서 벡터 BC는 다음과 같다.
$$C - B = (0, 3, 4).$$
4. 선분 BC의 길이는 다음과 같다.
$$|BC| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

따라서 최종 정답은 **5**이다.

문항 26

문제

양수 a에 대하여, 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 위의 점 $\left(a, \sqrt{2}\,a\right)$에서 의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 하자. $|PF| \times |PF'| = 8$일 때, a의 값은? [3 점]

선택지

1. $\sqrt{3}$
2. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
3. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
4. $2\sqrt{3}$
5. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

문항 26 해설

정답: 2

1. 주어진 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$은 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$로 정리된다. 따라서 초점은 $F(0, a\sqrt{2})$, $F'(0, -a\sqrt{2})$이다 ($c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$).
2. 점 $\left(a, \sqrt{2}\,a\right)$에서 의 접선: 암시적 미분으로 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$이므로 기울기 $m = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 접선은 $y - \sqrt{2}\,a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - a)$이므로, y축과의 교점은 $x = 0$에서 $y = \sqrt{2}\,a - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$이고, 따라서 $P = \left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$이다.
3. 거리: P와 F, F'는 x좌표가 같으므로 $PF = |a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $PF' = |-a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{3a}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 곱은 $PF \cdot PF' = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3a^2}{2}$이다.
4. 조건 $\frac{3a^2}{2} = 8$을 만족하므로 $a^2 = \frac{16}{3}$, $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ $(a > 0)$이다.

따라서 최종적으로 $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$이며, 정답은 **(2)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.
난이도: 중

문항 1

문제

원기둥의 아랫면 원 C_1 과 윗면 원 C_2 의 지름은 모두 5 이다. 점 A, B 는 C_1 위에 있고 $|AB| = 5$ 이다. 점 C, D 는 C_2 위에 있고 $|CD| = 3$ 이다. 또한 $|AD| = |BC|$ 이다. 점 H 는 D 에서 C_1 을 포함하는 평면으로 내린 수선의 발이다. 사각형 $ABCD$ 의 넓이는 삼각형 ABH 의 넓이의 4 배이다. 원기둥의 높이를 구하여라.

선택지

label=(0) $3\sqrt{2}$

lbbel=(0) $\sqrt{19}$

lcbel=(0) $2\sqrt{5}$

ldbel=(0) $\sqrt{21}$

lebel=(0) $\sqrt{22}$

문항 1 해설

정답

(4) $\sqrt{21}$

풀이

1. 반지름을 $r = 2.5$ 라고 두고, 아랫면 C_1 을 평면 $z = 0$, 윗면 C_2 를 평면 $z = h$ 에 둔다. 지름 $AB = 5$ 이므로 $A = (r, 0, 0)$, $B = (-r, 0, 0)$ 로 잡는다.

2. 윗면의 현 길이가 $|CD| = 3$ 이므로 중심각을 θ 라고 하면

$$2r \sin\frac{\theta}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad 5 \sin\frac{\theta}{2} = 3,$$

   따라서 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ 이다.

3. 윗면에서 C, D 의 각도를 $\varphi \mp \frac{\theta}{2}$ 로 두자. 그러면

$$|AD|^2 = 2r^2\big(1 - \cos(\varphi + \tfrac{\theta}{2})\big) + h^2, \quad |BC|^2 = 2r^2\big(1 + \cos(\varphi - \tfrac{\theta}{2})\big) + h^2.$$

   조건 $|AD| = |BC|$ 에서

$$\cos\Big(\varphi - \tfrac{\theta}{2}\Big) = -\cos\Big(\varphi + \tfrac{\theta}{2}\Big) \;\Rightarrow\; \cos\varphi\,\cos\tfrac{\theta}{2} = 0.$$

   여기서 $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} \neq 0$ 이므로 $\cos\varphi = 0$, 즉 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (또는 $\frac{3\pi}{2}$) 이다.

4. 따라서 좌표는

$$x_C = +r\sin\tfrac{\theta}{2} = 1.5,\ x_D = -1.5, \quad y_C = y_D = r\cos\tfrac{\theta}{2} = 2, \quad z_C = z_D = h.$$

   점 H 는 D 의 아래평면 수선의 발이므로 $H = (x_D, y_D, 0) = (-1.5, 2, 0)$ 이다.

5. 삼각형 ABH 의 밑변은 $|AB| = 5$, 높이는 $|y_D| = 2$ 이므로

$$S(\triangle ABH) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2 = 5.$$

6. 사각형 $ABCD$ 는 평행한 변 AB 와 CD 를 갖는 공간 사다리꼴이다. 두 직선 AB 와 CD 사이의 거리는 $\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{2^2 + h^2} = \sqrt{h^2+4}$ 이다. 따라서

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(5+3)\cdot\sqrt{h^2+4} = 4\sqrt{h^2+4}.$$

7. 면적 조건 $S(ABCD) = 4\,S(\triangle ABH)$ 에서

$$4\sqrt{h^2+4} = 4\cdot 5 = 20 \;\Rightarrow\; \sqrt{h^2+4} = 5 \;\Rightarrow\; h^2 = 21 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{21}.$$

따라서 원기둥의 높이는 $\sqrt{21}$ 이며, 정답은 **(4)** 이다.

문항 28

조건

사면체 $ABCD$ 에서 다음을 만족한다.

- 길이: $|AB| = |CD| = 4$, $|BC| = |BD| = 2\sqrt{5}$.
- 점 H: 점 A 에서 직선 CD 에 내린 수선의 발. 즉, $AH \perp CD$, $H \in CD$, 그리고 $|AH| = 4$.
- 두 평면 ABH 와 BCD 는 서로 수직이다. 즉, $ABH \perp BCD$.
- 점 G: 삼각형 $\triangle ABH$ 의 무게중심.
- 구 S: 중심이 G 이고, 평면 ACD 에 접한다.
- 집합 T: 구 S 위의 점 P 중에서 $\angle APG = \pi/2$ 를 만족하는 모든 점들의 궤적.

물음

도형 T 를 평면 ABC 위로 직교 정사영한 도형의 넓이를 구하시오.

보기

label=(0) $\frac{\pi}{7}$

lbbel=(0) $\frac{\pi}{6}$

lcbel=(0) $\frac{\pi}{5}$

ldbel=(0) $\frac{\pi}{4}$

lebel=(0) $\frac{\pi}{3}$

문항 28 해설

정답: (4)

1. 좌표 설정: 직선 CD 를 x 축으로, 점 H 를 원점으로 둔다. $AH \perp CD$, $|AH| = 4$ 이므로 $A = (0, 0, 4)$, $H = (0, 0, 0)$. 또한 $|CD| = 4$ 이므로 $C = (c, 0, 0)$, $D = (d, 0, 0)$, $d - c = 4$.
2. 점 $B = (x, y, z)$ 라 하자. $|BC| = |BD|$ 이므로 B 는 CD 의 수직 이등분 평면 위에 있어 $x = (c + d)/2 =: M$ 이다.

3. 평면 수직 조건: 평면 ABH 와 BCD 가 수직이므로, 법선 벡터 $(AH \times BH)$ 와 $(\mathbf{e}_x \times BH)$ 가 서로 수직이다. 여기서 $AH = (0,0,4)$, $BH = (x,y,z)$, $\mathbf{e}_x = (1,0,0)$ 이다. 계산하면

$$AH \times BH = (-4y,\ 4x,\ 0), \quad \mathbf{e}_x \times BH = (0,\ -z,\ y), \quad (AH \times BH) \cdot (\mathbf{e}_x \times BH) = -4xz = 0.$$

따라서 $xz = 0$ 이다. 만약 $z = 0$ 이면, $|AB|^2 = M^2 + y^2 + 16 = 16$ 에서 $M = y = 0$ 가 되어 $|BC|^2 = 4$ 가 되어 모순이다. 그러므로 $z \neq 0$ 이므로 $x = 0$ 이고, $x = M$ 이므로 $M = 0$ 이다. 따라서 H 는 CD 의 중점이며 $C = (-2,0,0)$, $D = (2,0,0)$ 이다.

4. 거리 조건으로 B 결정:

$$|BC| = 2\sqrt{5} \Rightarrow y^2 + z^2 = 16, \quad |AB| = 4 \Rightarrow y^2 + (z-4)^2 = 16.$$

두 식의 차로 $z = 2$, 이어서 $y^2 = 12$ 이므로 $B = (0, \pm 2\sqrt{3}, 2)$. 편의상 $B = (0, 2\sqrt{3}, 2)$ 를 취한다.

5. 무게중심 G: $G = \dfrac{A+B+H}{3} = (0,\ 2\sqrt{3}/3,\ 2)$.

6. 구 S: 중심 G, 평면 ACD 에 접한다. 점들 A, C, D 가 모두 $y = 0$ 위에 있으므로 plane $ACD : y = 0$. 반지름은 $r = \mathrm{dist}(G,\ y = 0) = |G_y| = 2\sqrt{3}/3$.

7. 벡터 AG: $AG = G - A = (0,\ 2\sqrt{3}/3,\ -2)$, $|AG|^2 = (2\sqrt{3}/3)^2 + (-2)^2 = 16/3$, 따라서 $|AG| = 4/\sqrt{3}$.

8. 집합 T: $AP \perp GP$ 을 만족하는 구 S 위의 점들의 집합은 A 의 극평면과 S 의 교선인 원이다. 이 원의 평면은 AG 에 수직이고, G 로부터의 거리 $d = \dfrac{r^2}{|AG|} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 원의 반지름은

$$R^2 = r^2 - d^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow R = 1, \quad |T| = \pi R^2 = \pi.$$

9. 평면 ABC 로의 직교 정사영 넓이: 원의 면적에 두 평면 사이의 각 θ 에 대한 $|\cos\theta|$ 를 곱한다. 평면 T 의 법선은 AG, 평면 ABC 의 법선은 $n_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 이다. 여기서

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2\sqrt{3}, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -4),$$

$$n_{ABC} = (-8\sqrt{3},\ 4,\ 4\sqrt{3}), \quad n_{ABC} \cdot AG = -\frac{16\sqrt{3}}{3}, \quad |n_{ABC}| = 16, \quad |AG| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

따라서

$$|\cos\theta| = \frac{|n_{ABC} \cdot AG|}{|n_{ABC}|\,|AG|} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{16 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}.$$

그러므로 정사영 넓이는 $|T| \cdot |\cos\theta| = \pi \cdot \frac{1}{4} = \pi/4$ 이다.

최종 정답: (4) $\pi/4$

문항 1

다음 조건을 만족하는 도형에서 k^2 의 값을 구하라. [4 점]

- 초점이 $F(p, 0)$ $(p > 0)$ 이고 준선이 $x = -p$ 인 포물선 위의 점 중 제 1 사분면에 있는 점 A 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H 라 한다.
- 두 초점이 x 축 위에 있고 세 점 F, A, H 를 지나는 타원의 x 좌표가 양수인 초점을 B 라 한다.
- 삼각형 AHB 의 둘레 길이는 $p + 27$, 넓이는 $2p + 12$ 이다.
- 선분 HF 의 길이를 k 라 할 때 k^2 의 값을 구하라.

추가 설명:

- 포물선은 오른쪽으로 열리고, $A = (x_A, y_A)$ 는 제 1 사분면에 있다. 수선의 발 H 는 $x = -p$ 위에 있으며 $AH \perp (x = -p)$ 이므로 $H = (-p, y_A)$ 이다.
- 타원의 두 초점은 x 축 위에 있고, $F = (p, 0)$ 또한 타원 위의 점이다. x 좌표가 양수인 초점을 $B = (x_B, 0)$ 라 한다.

문항 1 해설

정답을 구하기 위해 좌표를 $A = (x, y)$ $(x > 0,\ y > 0)$, $H = (-p, y)$ 로 두고 풀이한다.

1. 포물선의 성질과 기본 식

포물선 $y^2 = 4px$ 이므로 $y^2 = 4px$ 이다. 또한 포물선의 정의에 의해 $AF = AH = x + p$ 이다.

2. 넓이 조건

삼각형 AHB 에서 AH 는 수평선이므로 높이는 y 이고, 밑변은 $AH = x + p$ 이다. 넓이가 $2p + 12$ 이므로

$$\frac{1}{2}(x + p)y = 2p + 12 \quad \Rightarrow \quad (x + p)y = 4p + 24.$$

이를 $y^2 = 4px$ 와 합치면

$$px(x + p)^2 = 4(p + 6)^2. \tag{1}$$

3. 둘레 조건과 타원의 반장축

둘레 $AH + AB + HB = p + 27$ 에서 $AH = x + p$ 이므로

$$AB + HB = 27 - x. \tag{2}$$

세 점 A, H가 타원 위에 있고 y좌표가 같으므로 타원의 중심을 $(h, 0)$라 하면 $x_A + x_H = 2h$ 이어서

$$h = \frac{x-p}{2}.$$

또한 타원에서 임의의 점까지 두 초점까지의 거리 합은 $2a$이므로, 식 (2)에서

$$2a = 27 - x. \tag{3}$$

4. 점 F가 타원 위에 있을 조건

점 $F = (p, 0)$가 타원과 x축에서 만나는 점이어야 하므로 $p = h \pm a$이다. 식 $h = \frac{x-p}{2}$, $a = \frac{27-x}{2}$를 대입하면

$$\frac{3p-x}{2} = \pm\frac{27-x}{2}.$$

- $+$인 경우: $3p - x = 27 - x \Rightarrow p = 9$.
- $-$인 경우: $x = \frac{3p+27}{2}$. 이때 A가 타원 위의 점이 되려면 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} < 1$이어야 하나,

  $$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{\left(\frac{x+p}{2}\right)^2}{\left(\frac{27-x}{2}\right)^2} = \frac{(x+p)^2}{(27-x)^2} \geq 1 \quad (p > 0)\,,$$

  로 모순이므로 불가하다.

따라서 $p = 9$이다.

5. x, y의 결정

식 (1)에 $p = 9$를 대입하면

$$9x(x+9)^2 = 900 \quad \Rightarrow \quad x(x+9)^2 = 100.$$

이는 $x^3 + 18x^2 + 81x - 100 = 0 = (x-1)(x^2 + 19x + 100)$이므로 $x = 1$만 실수 해이다. 따라서

$$y^2 = 4px = 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 \Rightarrow y = 6.$$

6. 구하는 값 k^2

$H = (-p, y)$, $F = (p, 0)$이므로

$$HF^2 = (2p)^2 + y^2 = 4p^2 + y^2 = 4 \cdot 9^2 + 36 = 324 + 36 = 360.$$

따라서 최종적으로 $k^2 = 360$이다.

문항 30

좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$ 인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q 가

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$$

을 만족시킨다. $\left|\overrightarrow{PB}\right|=14$ 일 때, $\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}\right|=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $\left|\overrightarrow{QB}\right|>0$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4 점]

문항 30 해설

정답: **221**

1. AB 가 지름이므로 $\angle APB=\angle AQB=90^\circ$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QA}\perp\overrightarrow{QB}$ 이다.
2. $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{PQ}$ 를 이용하면

   $$0=\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PQ})\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}+\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2.$$

   $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$ 이므로 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 이고, 따라서

   $$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2.$$

3. 주어진 식을 전개하면

   $$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2=2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2.$$

   위 식과 비교하여 $\left|\overrightarrow{PB}\right|^2=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$ 이므로 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{PB}\right|=14$ 이다.

4. $AB=10\sqrt{2}$ 이므로 반지름은 $r=5\sqrt{2}$ 이다. 또한 $\triangle APB$ 는 직각삼각형이므로 $\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2=|AB|^2$ 에서 $\left|\overrightarrow{PA}\right|^2=200-196=4$, 따라서 $\left|\overrightarrow{PA}\right|=2$ 이다.
5. PB 가 만드는 중심각을 θ 라 하자. 현의 길이는 $2r\sin(\theta/2)$ 이므로

   $$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{|PB|}{2r}=\frac{14}{10\sqrt{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}},\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{1-\frac{49}{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

   $|PQ|=|PB|$ 이므로 PQ 의 중심각도 θ 이고, 따라서 BQ 의 중심각은 2θ 이다. 그러면

   $$|QB|=2r\sin\theta=2r\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot5\sqrt{2}\cdot2\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{14\sqrt{2}}{5},$$

   $$|QB|^2=\frac{392}{25}.$$

6. $\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$ 이고 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}$ 이므로

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB}.$$

또한 $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}$, $\left|\overrightarrow{PB}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 이므로

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} - \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \frac{\left|\overrightarrow{PB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QB}\right|^2}{2} - \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = -\frac{\left|\overrightarrow{QB}\right|^2}{2}.$$

따라서

$$\left|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{QB}\right|^2}{2} = \frac{392}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{196}{25} = \frac{q}{p}.$$

그러므로 $p = 25$, $q = 196$ 이고, 최종적으로 $p + q = \mathbf{221}$ 이다.

문항 번호: 23

문제

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(6x)}{2x}$ 의 값은?

보기

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

난이도

하

문항 번호: 23

정답

3 (③)

해설

1. 극한을 곱의 형태로 분해한다.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(6x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan(6x)}{6x}\right) \cdot \left(\frac{6x}{2x}\right).$$
2. 여기서 $u = 6x$ 라 하면 $u \to 0$ 일 때 $\dfrac{\tan u}{u} \to 1$ 이므로 첫 항의 극한은 1 이다.
3. 둘째 항은 $\dfrac{6x}{2x} = 3$ $(x \neq 0)$ 이므로 극한은 3 이다.
4. 따라서 전체 극한값은 $1 \cdot 3 = 3$ 이다.

난이도

하

문항 24

다음을 구하시오:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$$

주의: 제곱근의 범위는 $\sin x - \sin^3 x$ 까지이며, dx 는 루트 밖에 있음.

선택지

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{5}{6}$

문항 24 해설

1. $\sin x - \sin^3 x = \sin x\,(1 - \sin^2 x) = \sin x \cdot \cos^2 x$.
2. 구간 $[0, \pi/2]$ 에서 $\cos x \geq 0$ 이므로 $\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\sin x \cos^2 x} = \cos x \cdot \sqrt{\sin x}$.
3. 치환 $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$ 로 두면
$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx = \int_{u=0}^{1} u^{1/2}\, du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$
4. 따라서 정답은 선택지 4 이며, 값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

최종 정답: ④ $\frac{2}{3}$

문항 25

조건

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 만족한다:

$$\sqrt{9n^2-5}+2n < a_n < 5n+1.$$

질문

다음 극한의 값을 구하시오:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}.$$

[3 점]

선택지

1. (1) $\frac{1}{2}$
2. (2) $\frac{3}{2}$
3. (3) $\frac{5}{2}$
4. (4) $\frac{7}{2}$
5. (5) $\frac{9}{2}$

난이도

중

문항 25 해설

정답

(3) $\dfrac{5}{2}$

해설

1. $n>0$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

   $$\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2 < \frac{a_n}{n} < 5+\frac{1}{n}.$$

   $n\to\infty$ 에서 좌우가 모두 5로 수렴하므로, 끼워 넣기 정리에 의해

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 5.$$

2. 분자와 분모를 n^2로 나누면

$$\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2} = \frac{\left(\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{2}{n}\right)^2}{\dfrac{a_n}{n}+5-\dfrac{2}{n^2}}.$$

따라서 $n \to \infty$에서 $\dfrac{a_n}{n} \to 5$, $\dfrac{2}{n} \to 0$, $\dfrac{2}{n^2} \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2} = \frac{5^2}{5+5} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

3. 따라서 정답은 **(3)** $\dfrac{5}{2}$이다.

난이도

중

문제 26

그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x + x\ln x}$ 와 x축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는 무엇인가? [3 점] 밑면 영역은 다음과 같다.

$$R = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{x + x\ln x}\}.$$

보기:

1. $\frac{\sqrt{3}\,(3+8\ln 2)}{16}$
2. $\frac{\sqrt{3}\,(5+12\ln 2)}{24}$
3. $\frac{\sqrt{3}\,(1+12\ln 2)}{16}$
4. $\frac{\sqrt{3}\,(1+2\ln 2)}{4}$
5. $\frac{\sqrt{3}\,(1+9\ln 2)}{12}$

해설 26

1. 단면이 정삼각형이며, x가 고정될 때 밑면의 y 방향 길이는 $s(x) = \sqrt{x + x\ln x}$ 이다. 정삼각형의 넓이는 $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,[s(x)]^2$ 이므로
$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(x + x\ln x).$$
2. 부피는
$$V = \int_1^2 A(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 \big(x + x\ln x\big)\,dx.$$
3. 적분 계산:
$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2},$$
$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2\ln 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$
따라서
$$\int_1^2 (x + x\ln x)\,dx = \frac{3}{2} + \left(2\ln 2 - \frac{3}{4}\right) = 2\ln 2 + \frac{3}{4}.$$
4. 부피는
$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\ln 2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}\,(3 + 8\ln 2)}{16}.$$

최종 정답: **(1)** $\dfrac{\sqrt{3}\,(3 + 8\ln 2)}{16}$.

문항 27

매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^{4t}\big(1+\sin^2(\pi t)\big), \quad y = e^{4t}\big(1-3\cos^2(\pi t)\big)$$

을 C 라 하자. 곡선 C 가 직선 $y = 3x - 5e$ 와 만나는 점을 P 라 할 때, 곡선 C 위의 점 P 에서 의 접선의 기울기는 무엇인가? [3 점]

(1) $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$

(2) $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$

(3) $\frac{3\pi}{\pi+8}$

(4) $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$

(5) $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

난이도: 중

문항 27 해설

정답: (2)

1. 교점 조건 이용. 직선 $y = 3x - 5e$ 와의 교점에서 는 $y - 3x = -5e$ 이다. 한편 매개변수식에서
$$y - 3x = e^{4t}\big(1-3\cos^2(\pi t)\big) - 3e^{4t}\big(1+\sin^2(\pi t)\big)$$
$$= e^{4t}\Big[(1-3) - 3\big(\cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t)\big)\Big] = e^{4t}(-2-3) = -5e^{4t}.$$
따라서 $-5e^{4t} = -5e$ 이므로 $e^{4t} = e$, 곧 $4t = 1$ 이고 $t = \dfrac{1}{4}$ 이다.

2. 접선의 기울기 계산. 미분하면
$$\frac{dx}{dt} = e^{4t}\Big[4\big(1+\sin^2(\pi t)\big) + \pi\sin(2\pi t)\Big], \quad \frac{dy}{dt} = e^{4t}\Big[4\big(1-3\cos^2(\pi t)\big) + 3\pi\sin(2\pi t)\Big].$$
따라서 접선의 기울기는
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\big(1-3\cos^2(\pi t)\big) + 3\pi\sin(2\pi t)}{4\big(1+\sin^2(\pi t)\big) + \pi\sin(2\pi t)}.$$

3. $t = \dfrac{1}{4}$ 에서 $\sin\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = \cos\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 따라서 $\sin^2 = \cos^2 = \dfrac{1}{2}$ 이고 $\sin(2\pi\cdot\frac{1}{4}) = 1$ 이다. 대입하면
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1/4} = \frac{4\big(1-3\cdot\frac{1}{2}\big) + 3\pi\cdot 1}{4\big(1+\frac{1}{2}\big) + \pi\cdot 1} = \frac{-2+3\pi}{6+\pi} = \frac{3\pi-2}{\pi+6}.$$

4. 유효성 확인. $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1/4} = e^{4\cdot(1/4)}(6+\pi) = e(6+\pi) > 0$ 이므로 기울기 정의가 가능하다.

따라서 최종 접선의 기울기는 $\frac{3\pi - 2}{\pi + 6}$ 이며, 정답은 (2) 이다.

문제 28

함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$가 주어진다.
양수 t에 대하여, 점 $(s, f(s))$ $(s > 0)$에서 y축에 내린 수선의 발과, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$에서 의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\int_{1/2}^{27/4} g(t)\,dt$의 값은 무엇인가? **[4 점]**

보기:

1. $\dfrac{161}{12} + \ln 3$
2. $\dfrac{40}{3} + \ln 3$
3. $\dfrac{53}{4} + \ln 2$
4. $\dfrac{79}{6} + \ln 2$
5. $\dfrac{157}{12} + \ln 2$

난이도: 중상

해설 28

정답: 5) $\dfrac{157}{12} + \ln 2$

1. 도함수를 구한다.
   $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$이므로
   $$f'(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$
2. 점 $(s, f(s))$에서 y축에 내린 수선의 발은 $(0, f(s))$이고, 접선의 방정식은 $y - f(s) = f'(s)(x-s)$이므로 y절편은
   $$y = f(s) - sf'(s)$$
   이다. 두 점 사이의 거리는
   $$t = \big|f(s) - (f(s) - sf'(s))\big| = |sf'(s)|.$$
3. $s > 0$에서 $f'(s) = \dfrac{s^2}{1+s} > 0$이므로
   $$t = sf'(s) = \frac{s^3}{1+s}.$$

이를 $T(s) = \dfrac{s^3}{1+s}$ 라 두면,

$$T'(s) = \frac{s^2(3+2s)}{(1+s)^2} > 0 \quad (s > 0)$$

이므로 T 는 증가 함수이고 $g(t)$ 는 T 의 역함수로 유일하게 정의된다.

4. 역함수 적분 공식을 적용한다.
   $t = T(s)$ 라 할 때
   $$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt = [s\,t]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} T(s)\,ds,$$
   여기서 $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{27}{4}$, $s_1 = g\big(\frac{1}{2}\big)$, $s_2 = g\big(\frac{27}{4}\big)$ 이며 $t = T(s) = \dfrac{s^3}{1+s}$ 이다.

5. 양 끝에서 의 s 값을 구한다.
   $\dfrac{1}{2} = \dfrac{s^3}{1+s} \iff 2s^3 = 1 + s \Rightarrow s = 1,$
   $\dfrac{27}{4} = \dfrac{s^3}{1+s} \iff 4s^3 = 27(1+s) \Rightarrow s = 3.$
   따라서 $s_1 = 1$, $s_2 = 3$ 이다.

6. 각 항을 계산한다.
   먼저 $s\,t = s \cdot \dfrac{s^3}{1+s} = \dfrac{s^4}{1+s}$ 이므로
   $$[s\,t]_1^3 = \frac{3^4}{1+3} - \frac{1^4}{1+1} = \frac{81}{4} - \frac{1}{2} = \frac{79}{4}.$$
   또한
   $$\int T(s)\,ds = \int \frac{s^3}{1+s}\,ds = \int \Big(s^2 - s + 1 - \frac{1}{1+s}\Big) ds = \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s - \ln(1+s) + C.$$
   따라서
   $$\begin{aligned}\int_1^3 T(s)\,ds &= \Big(\tfrac{1}{3}\cdot 27 - \tfrac{1}{2}\cdot 9 + 3 - \ln 4\Big) - \Big(\tfrac{1}{3}\cdot 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 1 + 1 - \ln 2\Big)\\ &= \Big(\tfrac{15}{2} - \ln 4\Big) - \Big(\tfrac{5}{6} - \ln 2\Big)\\ &= \frac{20}{3} - \ln 2.\end{aligned}$$

7. 결론을 얻는다.
   $$\int_{1/2}^{27/4} g(t)\,dt = \Big([s\,t]_1^3\Big) - \int_1^3 T(s)\,ds = \frac{79}{4} - \Big(\frac{20}{3} - \ln 2\Big) = \frac{157}{12} + \ln 2.$$

따라서 **정답은 5)** $\dfrac{157}{12} + \ln 2$ 이다.
난이도: 중상

문제 29

다음을 만족하는 수열을 생각하자.

- 등차수열 $\{a_n\}$: 첫째항과 공차가 같은 수열이다. 즉 a_1 이 공차와 같고, $a_1 \neq 0$ 이다.
- 등비수열 $\{b_n\}$.

또한 어떤 자연수 k 가 존재하여, $i = 1, 2, 3$ 에 대하여

$$b_{k+i} = \frac{1}{a_i} - 1.$$

다음 부등식을 만족한다.

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30.$$

이때

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{q}{p}$$

(여기서 p, q 는 서로소인 자연수) 일 때, $p + q$ 의 값을 구하라.
배점: [4 점]

해설

1. 등차수열의 성질: 첫째항과 공차가 같으므로 $a_n = na_1$ 이다.
2. 등비수열의 공비 r 을 두 가지로 나타내면 다음과 같다.

$$r = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{a_2} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{\frac{1}{2a_1} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)},$$

$$r = \frac{b_{k+3}}{b_{k+2}} = \frac{\frac{1}{a_3} - 1}{\frac{1}{a_2} - 1} = \frac{\frac{1}{3a_1} - 1}{\frac{1}{2a_1} - 1} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)}.$$

이를 같게 두고 정리하면

$$\frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)} \Longrightarrow 3(1 - 2a_1)^2 = 4(1 - a_1)(1 - 3a_1) \Longrightarrow 4a_1 - 1 = 0,$$

따라서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 이다. 이때 $r = \frac{1}{3}$, 그리고

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_1} - 1 = 4 - 1 = 3, \quad b_n = b_{k+1} r^{k+1-n} = 3^{k+2-n},$$

특히 $b_1 = 3^{k+1}$ 이다.

3. 주어진 부등식을 위해 두 합을 각각 구한다. 먼저 $a_n = \frac{n}{4}$ 이므로

$$a_n a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{16}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n(n+1)} = 16.$$

또한 $\{b_n\}$의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}b_1.$$

따라서

$$0 < \frac{3}{2}b_1 - 16 < 30 \Longrightarrow \frac{32}{3} < b_1 < \frac{92}{3}.$$

$b_1 = 3^{k+1}$ 이므로 가능한 값은 $k = 2$ 뿐이고 $b_1 = 27$ 이다.

4. 구하는 값은 $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 이다. 여기서 $a_2 = 2a_1 = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$, $b_2 = b_1 r = 27 \cdot \frac{1}{3} = 9$ 이다. 짝수항의 합은 공비 $r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{b_2}{1-r^2} = \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{81}{8}.$$

따라서

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{8} = \frac{81}{16} = \frac{q}{p}.$$

$p = 16$, $q = 81$ 이므로 $p + q = 97$ 이다.

5. 검증:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 16 = \frac{49}{2} \in (0, 30)$$

이므로 조건을 만족한다.

최종 정답: **97.**

문항 30

다음은 실수 전체 $\mathbb{R}$ 에서 증가하는 연속 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 에 대한 조건이다.

역함수의 조건

역함수 $f^{-1}(x)$ 는 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 정의되며 다음을 만족한다.- $|x| \le 1$ 일 때:

$$4\big(f^{-1}(x)\big)^2 = x^2(x^2-5)^2$$

- $|x| > 1$ 일 때:

$$|f^{-1}(x)| = e^{|x|-1} + 1$$

정의

- 임의의 실수 m 에 대하여, 기울기가 m 이고 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선 L_m:

$$y = m(x-1).$$

- $g(m)$: 직선 L_m 과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 개수.

추가 조건

함수 $g(m)$ 은 $m = a$, $m = b$ $(a < b)$ 에서 불연속이다.

구하는 값

다음 값을 구하여라.

$$g(a) \times \Big(\lim_{m \to a+} g(m)\Big) + g(b) \times \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2$$

참고

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

배점: [4 점]

해설

정답: 11

1. 역함수 $f^{-1}(y)$ 의 결정f 는 $\mathbb{R}$ 에서 증가 연속이므로 f^{-1} 도 증가 연속이다.- $|y| \le 1$ 에서 $4\big(f^{-1}(y)\big)^2 = y^2(y^2-5)^2$ 이고 f^{-1} 는 증가, $f^{-1}(0) = 0$ 이므로

$$f^{-1}(y) = \frac{y(5-y^2)}{2}.$$

- $|y|>1$ 에서 $|f^{-1}(y)|=e^{|y|-1}+1$ 이고 증가성을 만족하려면

$$f^{-1}(y)=e^{y-1}+1 \quad (y>1), \qquad f^{-1}(y)=-\big(e^{-y-1}+1\big) \quad (y<-1).$$

접점 $y=\pm 1$ 에서 도함수도 일치하여 모두 1 이므로 매끄럽다.

2. 교점 개수 $g(m)$ 의 y-방정식화직선 $L_m : y = m(x-1)$ 와 $y = f(x)$ 의 교점 개수는 $y = m\big(f^{-1}(y)-1\big)$ 의 해의 개수와 같다.$m \neq 0$ 일 때 $s = 1/m$ 으로 두면 $f^{-1}(y) = sy+1$ 과의 교점 개수와 같다.$m = 0$ 이면 L_0 는 $y = 0$ 이고 $f(x) = 0$ 의 해는 $x = f^{-1}(0) = 0$ 하나이므로 $g(0) = 1$ 이다.

3. 불연속이 일어나는 m 값 찾기- $s<0$ (즉 $m<0$) 에서 는 $\varphi(y)=f^{-1}(y)$ 가 증가, 직선 $sy+1$ 은 감소이므로 $\varphi-(sy+1)$ 은 증가 함수이다. 해는 항상 1 개이므로 $g(m)=1$ $(m<0)$.- $s>0$ (즉 $m>0$) 에서 는 접선 발생으로 변화를 판정한다. 접선 조건은

$$\varphi(y)=sy+1, \qquad \varphi'(y)=s, \qquad F(y):=\varphi(y)-y\varphi'(y)=1.$$

조각별로 $F(y)$ 를 계산하면 $|y|\le 1$ 에서 $\varphi(y)=\dfrac{y(5-y^2)}{2}$, $\varphi'(y)=\dfrac{5-3y^2}{2}$ 이므로 $F(y)=y^3$. 따라서 $F(y)=1$ 의 해는 $y=1$ 뿐이다. 이때 $s=\varphi'(1)=1$ (즉 $m=1$) 이지만, 이 접선은 좌우에서 교점 개수를 바꾸지 않아 g 는 연속(양쪽 모두 1 개) 이다. $y>1$ 에서 는 $\varphi(y)=e^{y-1}+1$, $\varphi'(y)=e^{y-1}$. 그러면 $F(y)=1+e^{y-1}(1-y)$ 이고 $F(y)=1$ 이면 $y=1$ 만 가능하다. $y<-1$ 에서 는 $\varphi(y)=-\big(e^{-y-1}+1\big)$, $\varphi'(y)=e^{-y-1}$.

$$F(y)=-\big(e^{-y-1}+1\big)-ye^{-y-1}.$$

$F(y)=1$ 은

$$e^{-y-1}(1+y)=-2$$

와 동치이고, $t=-y>1$ 로 두면

$$(t-1)e^{t-1}=2 \quad\Rightarrow\quad t-1=\mathrm{W}(2) \ \ \text{(Lambert W)}.$$

따라서

$$s=\varphi'(y)=e^{-y-1}=e^{t-1}=e^{\mathrm{W}(2)}=\frac{2}{\mathrm{W}(2)}, \quad m=\frac{1}{s}=\frac{\mathrm{W}(2)}{2}.$$

좌측 지수꼴 조각 $(y<-1)$ 에서 의 해 개수는

$$T(y):=e^{-y-1}+sy+2=0$$

의 해로 결정된다. 극값은 $T'(y)=-e^{-y-1}+s=0$ 에서 발생하고, 그때 $e^{-y-1}=s$, $y=-1-\ln s$ 이며

$$T_{\min}=2-s\ln s.$$

따라서- $s\ln s<2$ 이면 해가 없다.- $s\ln s=2$ 이면 접선(중근) 1 개이다.- $s\ln s>2$ 이면 해 2 개이다.임계값 $s^*=2/\mathrm{W}(2)$ 에서 $s^*\ln s^*=2$, 따라서 $b=1/s^*=\mathrm{W}(2)/2$ 이다.요약하면- $m<0$: $g(m)=1$.- $m=0$: $g(0)=1$ (우극한은 아래 참조).- $0<m<b(=\mathrm{W}(2)/2)$: $s>s^*$ 이므로 $y<-1$ 에서 2 해, $y>1$ 에서 1 해 → $g(m)=3$.- $m=b$: 좌측에서 중근 1 개 + 우측 1 개 → $g(b)=2$.- $m>b$: 좌측 해 없음, 우측 1 해 → $g(m)=1$.따라서 g 는 $m=0$ 과 $m=b$ 에서 불연속이고, $a=0$, $b=\mathrm{W}(2)/2$ 이다.

4. 요구한 값 계산$g(a) = g(0) = 1$, $\lim_{m \to 0+} g(m) = 3$이므로 첫 항은 $1 \times 3 = 3$이다. 또 $g(b) = 2$. 한편 $b = 1/s^*$, $s^* \ln s^* = 2$이므로

$$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln(1/s^*)}{1/s^*} = -s^* \ln s^* = -2, \qquad \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = 4.$$

두 번째 항은 $g(b) \times 4 = 2 \times 4 = 8$이다. 따라서 전체 값은 $3 + 8 = 11$이다.

최종 정답: 11

문항 23

문제

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2 점]

선지

1. 56
2. 60
3. 64
4. 68
5. 72

문항 23 해설

정답

③ 64

해설

1. 중복을 허용하고 순서를 고려하므로 각 자리마다 네 문자 $\{a, b, c, d\}$ 중 하나를 택할 수 있다.
2. 따라서 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ 로 계산된다.
3. 주어진 선택지에서 64는 ③에 해당한다.

난이도

하

문항 24

두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B \mid A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = 1.$$

이때 $P(B)$의 값은 무엇인가? [3 점]

1. $\frac{7}{10}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{4}{5}$
4. $\frac{17}{20}$
5. $\frac{9}{10}$

난이도: 하

해설 24

정답: **1**

1. 교집합의 확률을 구한다.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

2. 합집합의 공식에 대입한다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이므로

$$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{10} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

3. 검산을 한다. 확률의 범위 $0 \leq P(B) \leq 1$를 만족한다.

따라서 최종 정답은 $\frac{7}{10}$이며, 선택지 **1**이다.

문제 25

주머니에 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5 개와 숫자 $2, 3, 4, 5, 6$ 이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5 개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2 개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2 개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은?

1. $\frac{7}{15}$
2. $\frac{8}{15}$
3. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{11}{15}$

문제 25 해설

정답: 2

1. 전체 경우의 수는 ${}^{10}C_2 = 45$ 이다.
2. 같은 색인 경우의 수는 흰 공 ${}^{5}C_2 = 10$, 검은 공 ${}^{5}C_2 = 10$ 이므로 합은 20 이다.
3. 같은 수인 경우는 겹치는 숫자 $2, 3, 4, 5$ 에 대해 흰 공과 검은 공이 한 쌍씩 있으므로 4 가지이다.
4. 같은 수인 경우는 색이 서로 다르므로 두 사건은 서로 배타적이다. 따라서 유리한 경우의 수는 $20 + 4 = 24$ 이다.
5. 확률은 $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ 이다. 따라서 최종 정답은 $\frac{8}{15}$ 이며, 선택지 번호는 **2** 번이다.

문항 26

평균이 m 이고 표준편차가 5 인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36 인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 99% 의 신뢰구간이

$$1.2 \leq m \leq a$$

이다. a 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathbb{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [3 점]

1. 5.1
2. 5.2
3. 5.3
4. 5.4
5. 5.5

해설 26

정답: ⑤

1. 신뢰구간 공식은 $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.
2. 표준오차는 $\dfrac{5}{\sqrt{36}} = \dfrac{5}{6}$ 이다.
3. 마진오차는 $2.58 \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{12.9}{6} = 2.15$ 이다.
4. 하한이 $1.2 = \bar{x} - 2.15$ 이므로 $\bar{x} = 1.2 + 2.15 = 3.35$ 이다.
5. 따라서 상한은 $a = \bar{x} + 2.15 = 3.35 + 2.15 = 5.5$ 이다.

최종 정답은 $a = 5.5$ 이며, 선택지는 ⑤이다.
난이도: 하

문항 27

문제

이산 확률 변수 X 가 가지는 값이 0 부터 4 까지의 정수이고

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{|2x-1|}{12} & (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ a & (x=4)\end{cases}$$

일 때, $\mathrm{Var}\big(\left(\frac{1}{a}\right)X\big)$ 의 값은? (단, a 는 0 이 아닌 상수이다.) [3 점]

보기

1. 36
2. 39
3. 42
4. 45
5. 48

문항 27 해설

정답

4 번

해설

1. $x=0,1,2,3$ 에서 $P(X=x)=\frac{|2x-1|}{12}$ 이므로 각 확률은 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$ 이고 합은 $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ 이다. 전체 합이 1 이 되어야 하므로 $a=P(X=4)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\,(\neq 0)$ 이다.
2. 기대값: $\mathrm{E}[X]=\sum xP(X=x)=\dfrac{0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 2}{12}=\dfrac{0+1+6+15+8}{12}=\dfrac{30}{12}=\dfrac{5}{2}$.
3. 제곱의 기대값: $\mathrm{E}[X^2]=\sum x^2P(X=x)=\dfrac{0\cdot 1+1\cdot 1+4\cdot 3+9\cdot 5+16\cdot 2}{12}=\dfrac{0+1+12+45+32}{12}=\dfrac{90}{12}=\dfrac{15}{2}$.
4. 분산: $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2=\dfrac{15}{2}-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{15}{2}-\dfrac{25}{4}=\dfrac{5}{4}$.

5. 선형 변환의 분산 성질에 의해 $\mathrm{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \mathrm{Var}(X)$ 이다. 여기서 $a = \frac{1}{6}$ 이므로 $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = 36$, 따라서 $\mathrm{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = 36 \cdot \frac{5}{4} = 45$.

최종 정답

정답: 4 번 (45)

문항 28 [4 점]

문제

- 공 16 개.
- 숫자 1 부터 6 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 여섯 개의 빈 상자.
- 하나의 6 면 주사위를 던지는 시행을 사용한다.

규칙 주사위를 한 번 던져 나온 눈을 k 라 할 때,

- k 가 홀수이면: 1, 3, 5 가 적힌 상자에 공을 각각 1 개씩 넣는다.
- k 가 짝수이면: 1 부터 6 까지 중 k 의 약수가 적힌 각 상자에 공을 각각 1 개씩 넣는다.

요구 위 시행을 4 번 반복한 후, 여섯 개 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2 가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 정확히 1 개 더 많을 확률을 구하라.

선택지

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{3}{16}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{5}{16}$
5. $\frac{3}{8}$

문항 28 해설

정답: (2) $\frac{3}{16}$

1. 한 번의 시행에서 들어가는 공의 개수와 2, 3 이 적힌 상자에의 기여를 정리하면 다음과 같다.
   - $k \in \{1, 3, 5\}$ 일 때: (2 가 적힌 상자 $+0$, 3 이 적힌 상자 $+1$), 전체 $+3$ 개 $\to$ 홀수.
   - $k = 2$: (2 가 적힌 상자 $+1$, 3 이 적힌 상자 $+0$), 전체 $+2$ 개 $\to$ 짝수.
   - $k = 4$: (2 가 적힌 상자 $+1$, 3 이 적힌 상자 $+0$), 전체 $+3$ 개 $\to$ 홀수.

- $k=6$: (2 가 적힌 상자 $+1$, 3 이 적힌 상자 $+1$), 전체 $+4$ 개 $\to$ 짝수.

2. 4 번의 시행에서 각 유형의 빈도를 $X_{\rm O}\,(=\{1,3,5\}), X_2, X_4, X_6$ 라 하면 총합은 $X_{\rm O}+X_2+X_4+X_6=4$ 이다. 이때

$$C_2=X_2+X_4+X_6,\qquad C_3=X_{\rm O}+X_6.$$

전체 공의 개수의 홀짝은 $X_{\rm O}+X_4 \pmod 2$ 로 결정된다.

3. 사건 A: $C_3=C_2+1 \iff X_{\rm O}=X_2+X_4+1$. 또한 $X_{\rm O}+X_2+X_4+X_6=4$ 이므로

$$X_6=4-(X_{\rm O}+X_2+X_4)=3-2(X_2+X_4)\ge 0 \Rightarrow X_2+X_4\in\{0,1\}.$$

조건 B(전체 합 홀수): $X_{\rm O}+X_4$ 가 홀수여야 한다. 가능한 경우는 다음과 같다.

- $X_2=0, X_4=0 \Rightarrow X_{\rm O}=1, X_6=3$, 그리고 $X_{\rm O}+X_4=1$(홀수) $\Rightarrow$ 포함.
- $X_2=1, X_4=0 \Rightarrow X_{\rm O}=2, X_6=1, X_{\rm O}+X_4=2$(짝수) $\Rightarrow$ 제외.
- $X_2=0, X_4=1 \Rightarrow X_{\rm O}=2, X_6=1, X_{\rm O}+X_4=3$(홀수) $\Rightarrow$ 포함.

4. 확률 계산(주사위가 공정하다고 가정하여 각 눈의 확률을 $1/6$ 로 둔다). 한 시행에서 $\{1,3,5\}$ 가 나올 확률은 $1/2$ 이므로 다항분포를 사용한다.

$$\mathbb{P}(1,0,0,3)=\frac{4!}{1!\,0!\,0!\,3!}\left(\frac12\right)^1\left(\frac16\right)^3=\frac{1}{108},$$
$$\mathbb{P}(2,0,1,1)=\frac{4!}{2!\,0!\,1!\,1!}\left(\frac12\right)^2\left(\frac16\right)^2=\frac{1}{12}.$$

따라서 $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{108}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{54}$.

5. 분모 $\mathbb{P}(B)$: 한 시행이 홀수 개의 공을 더하는 확률은 $p=\mathbb{P}(\{1,3,5,4\})=\dfrac46=\dfrac23$. 4 번 중 홀수 번 발생할 확률은

$$\mathbb{P}(B)=\frac{1-(1-2p)^4}{2}=\frac{1-\left(-\frac13\right)^4}{2}=\frac{40}{81}.$$

따라서 조건부 확률은

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{5}{54}}{\frac{40}{81}}=\frac{3}{16}.$$

즉, $\dfrac{3}{16}$ 이며, 선택지는 **(2)** 이다.

문항 29

문제

6 이하의 자연수 a에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다. 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같으면 동전을 5 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고, 나온 눈의 수가 a보다 크면 동전을 3 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다. 이 시행을 19200 번 반복하여 기록한 수가 3 인 횟수를 확률변수 X 라 하자. $E(X) = 4800$ 일 때, $P(X \le 4800 + 30a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k 이다. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4 점]

다음 표준정규분포표를 사용하라.

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

문항 29 해설

정답: 977

해설

1. 한 시행에서 기록된 수가 3 일 확률을 p라 하자. 그러면

$$p = \frac{a}{6} \cdot P(5 \text{ 번에서 } 3 \text{ 앞}) + \frac{6-a}{6} \cdot P(3 \text{ 번에서 } 3 \text{ 앞}) = \frac{a}{6} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{2^5} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{a}{6} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{a+4}{32}.$$

2. X 는 19200 번 시행 중 기록이 3 인 횟수이므로 $X \sim \mathrm{Bin}(19200, p)$ 이고, $E(X) = 19200p$ 이다. $E(X) = 4800$ 이므로 $p = \frac{4800}{19200} = \frac{1}{4}$. 따라서

$$\frac{a+4}{32} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

3. 따라서 $X \sim \mathrm{Bin}(19200, \frac{1}{4})$. 평균은 $\mu = 19200 \cdot \frac{1}{4} = 4800$, 분산은 $\sigma^2 = 19200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3600$, 표준편차는 $\sigma = 60$ 이다. 구하는 값은

$$k = P\big(X \le 4800 + 30a\big) = P(X \le 4800 + 120) = P(X \le 4920).$$

4. 정규 근사로 표준화하면

$$z = \frac{4920 - 4800}{60} = 2.0.$$

표에서 $P(0 \le Z \le 2.0) = 0.477$ 이므로 $P(Z \le 2.0) = 0.5 + 0.477 = 0.977$. 따라서 $k \approx 0.977$ 이고, $1000 \times k = \mathbf{977}$.

최종 정답: 977

문항 번호: 30 [4 점]

문제

비어 있는 주머니 10 개가 일렬로 놓여 있고, 공 8 개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

1. (가) 들어 있는 공의 개수가 1 인 주머니는 4 개 또는 6 개이다.
2. (나) 들어 있는 공의 개수가 2 인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

형식화

- 주머니는 일렬로 10 개이며, 위치는 $i = 1, 2, \ldots, 10$ 이다.
- 각 위치 i에 들어간 공의 개수는 $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이다.
- 총합 조건: $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 8$.
- 1 개 든 주머니의 개수 조건: $\#\{\, i \mid a_i = 1 \,\} \in \{4, 6\}$.
- 인접 금지 조건: 임의의 i에 대해 $a_i = 2$ 이면, 가능한 이웃 $j \in \{i-1, i+1\}$ 에 대해 $a_j = 0$ 이다.
- 선형 이웃 관계는 $(i, i+1)$ 만 인접으로 본다.

해설

정답

262

풀이

문제를 변수로 정리하면 각 위치 i에 대해 $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이고, 총합은 $\sum_{i=1}^{10} a_i = 8$ 이다. 1 이 든 주머니 수를 o, 2 가 든 주머니 수를 t 라 하면 $o + 2t = 8$ 이며, (가) 조건으로 $o \in \{4, 6\}$ 이다. 따라서 가능한 쌍은 $(o, t) = (6, 1)$ 또는 $(4, 2)$ 두 가지이다. 또한 $a_i = 2$ 인 자리의 이웃은 반드시 0 이어야 한다. 2 의 위치를 먼저 정하고, 그 후 1 의 배치를 센다.

1. $(o, t) = (6, 1)$ 인 경우
   2 가 한 곳에만 들어간다.

   - 2 가 끝자리(1 또는 10)에 있을 때: 강제 0 은 이웃 1 칸, 따라서 1 을 놓을 수 있는 자리는 $10 - 1 - 1 = 8$ 칸이므로 $\binom{8}{6}$. 끝자리는 2 곳이므로 기여는 $2\binom{8}{6}$.
   - 2 가 내부 자리(2 부터 9) 중 한 곳에 있을 때: 강제 0 은 양옆 2 칸, 따라서 1 을 놓을 수 있는 자리는 $10 - 1 - 2 = 7$ 칸이므로 $\binom{7}{6}$. 내부 자리는 8 곳이므로 기여는 $8\binom{7}{6}$.

따라서 합은

$$2\binom{8}{6}+8\binom{7}{6}=2\cdot 28+8\cdot 7=56+56=112.$$

2. $(o,t)=(4,2)$ 인 경우
   2 가 든 두 주머니는 서로 인접할 수 없다. 두 2 의 배치가 주어졌을 때, 그들에 의해 강제되는 0 의 서로 다른 칸 수를 s 라 하자. 그러면 1 을 놓을 수 있는 자리는 $10-2-s=8-s$ 칸이므로 경우의 수는 $\binom{8-s}{4}$ 이다. s 에 따라 2 의 배치를 분류하면 다음과 같다.

   - $s=2$: 양 끝 $1,10$ 에 두는 경우 1 가지, 끝과 거리 2 내부 쌍 $1,3$, $8,10$ 2 가지. 합 3 가지. 기여: $3\binom{6}{4}=3\cdot 15=45$.
   - $s=3$: 끝과 내부(겹치지 않음) 쌍 12 가지, 내부끼리 거리가 2 인 쌍 6 가지. 합 18 가지. 기여: $18\binom{5}{4}=18\cdot 5=90$.
   - $s=4$: 내부끼리 거리가 3 이상인 쌍 15 가지. 기여: $15\binom{4}{4}=15\cdot 1=15$.

   따라서 합은

$$45+90+15=150.$$

최종 합계는 $112+150=262$ 이므로, **정답은 262** 이다.
(검증) $t=2$ 에서 비인접 쌍의 총수는 $\binom{9}{2}=36$ 이며, 위 분류에서 $3+18+15=36$ 으로 일치한다.