

컴퓨터 그래픽스

5. 3차원 그래픽스의 기하변환

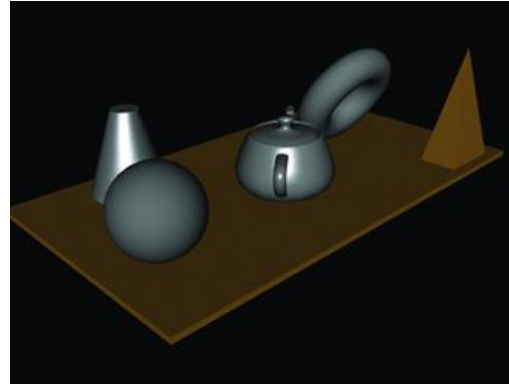
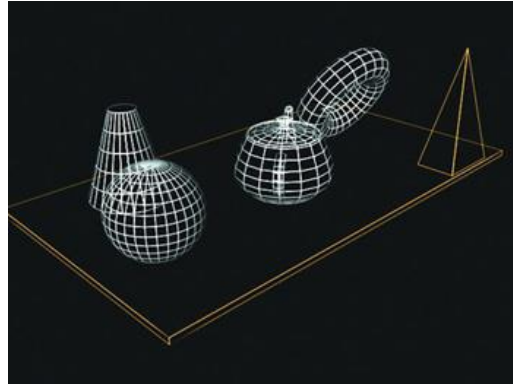
2023년 2학기

학습 내용

- 3차원 그래픽스 기하 변환과 뷰잉
 - 3차원 그래픽스의 처리 과정
 - 3차원 기하 변환

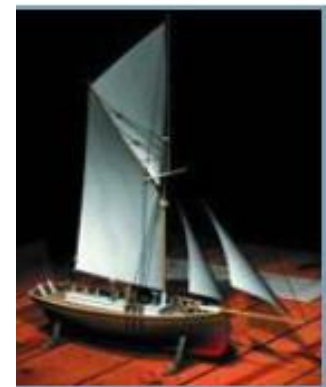
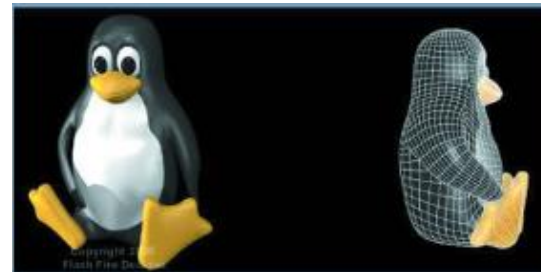
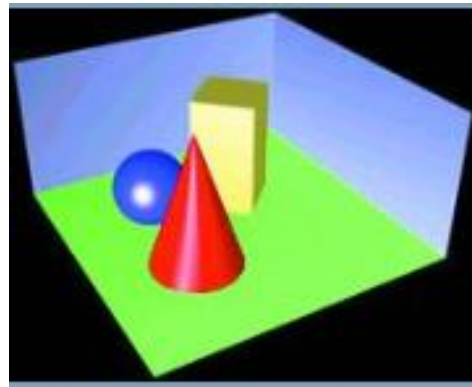
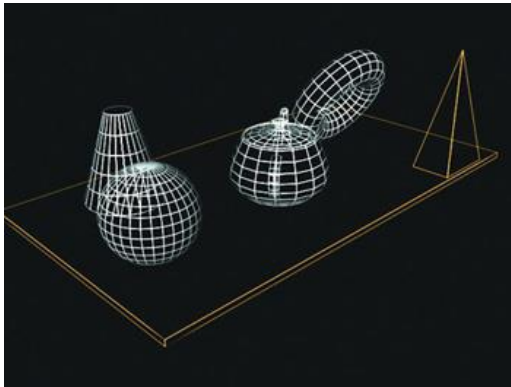
3차원 그래픽스의 처리과정

- 3차원 그래픽스
 - 모델링 과정 (Modeling): 3차원 객체들을 형상화
 - 투영 과정 (Projection): 모델링한 객체들을 모니터와 같은 2차원 평면에 투영
 - 렌더링 과정 (Rendering): 객체에 현실감을 부여



3차원 그래픽스의 처리과정

- 모델링 (Modeling)
 - 3차원 객체들을 3차원 좌표계를 사용하여 표현하는 것
 - 모델링 방법:
 - 다각형 표면 모델링 (Polygon Surface Modeling)
 - 매개변수를 이용한 곡면 모델링 (Parametric Surface Modeling)
 - 와이어 프레임 (Wire-frame)
 - 솔리드 모델링 (Solid Modeling)
 - 스위핑 (Sweeping)
 - 프랙털 기하학 (Fractal Geometry)
 - 입자 시스템 (Particle System)



3차원 그래픽스의 처리과정

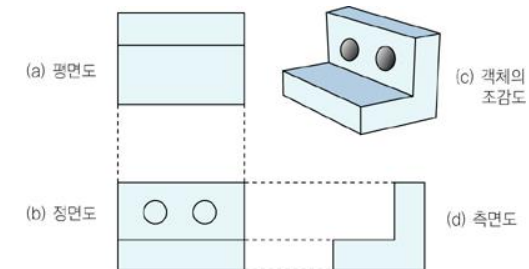
- Projection (투영)

- 3차원 객체를 2차원 출력장치에 출력
 - 예) 3차원 공간의 원뿔 → 2차원의 삼각형 모양

- 투영 종류:

- Parallel Projection (평행투영)

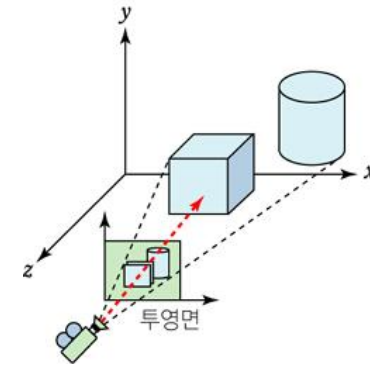
- 객체를 구성하는 각 요소들간의 상대적인 크기가 보존된다
- 기계 설계, 건축 설계



평행 투영

- Perspective Projection (원근투영)

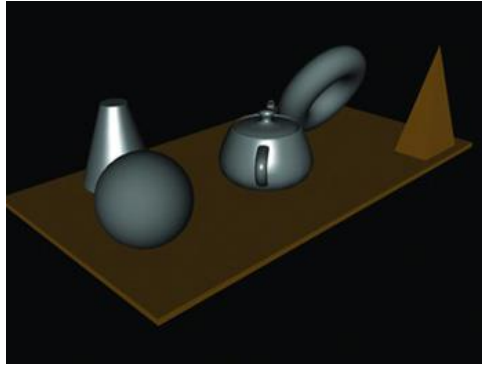
- 객체의 원근감이 잘 나타난다
- 투영면에 보이는 2차원 객체의 크기는 3차원 객체와 투영면과의 거리에 반비례한다.
- 건물의 조감도



원근 투영

3차원 그래픽스의 처리과정

- Rendering (렌더링)
 - 투영된 그림을 렌더링하고 그림자나 색상의 변화를 표현하여 현실감 있는 그림을 만들어내는 과정
 - 렌더링 과정:
 - Hidden Surface Removal (은면제거): 보이지 않는 면 제거
 - Shading (쉐이딩): 객체의 색상과 명암 표현
 - Texture Mapping (텍스처 매핑): 객체에 이미지 매핑하기

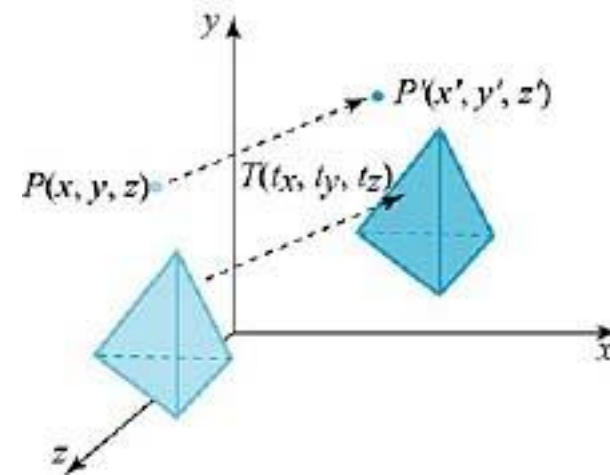


3차원 기하변환: 이동

- Translation (이동)

- 공간상의 한 점에 이동거리를 더하여 이동한다.
- $x' = t_x + x$ $y' = t_y + y$ $z' = t_z + z$
- $P' = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$ (t_x, t_y, t_z) : 이동 벡터

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$$



3차원 기하변환: 신축

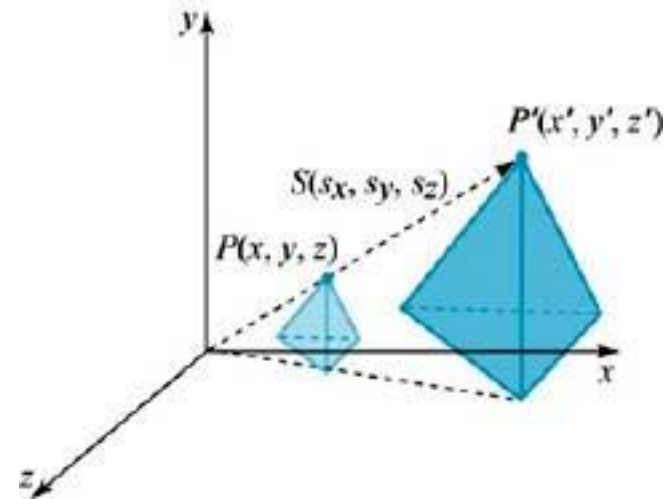
- Scaling (신축)

- 객체의 크기를 확대 또는 축소, 비율 변화

- $x' = s_x \cdot x$ $y' = s_y \cdot y$ $z' = s_z \cdot z$

- $P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$ (s_x, s_y, s_z) : 신축률

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$

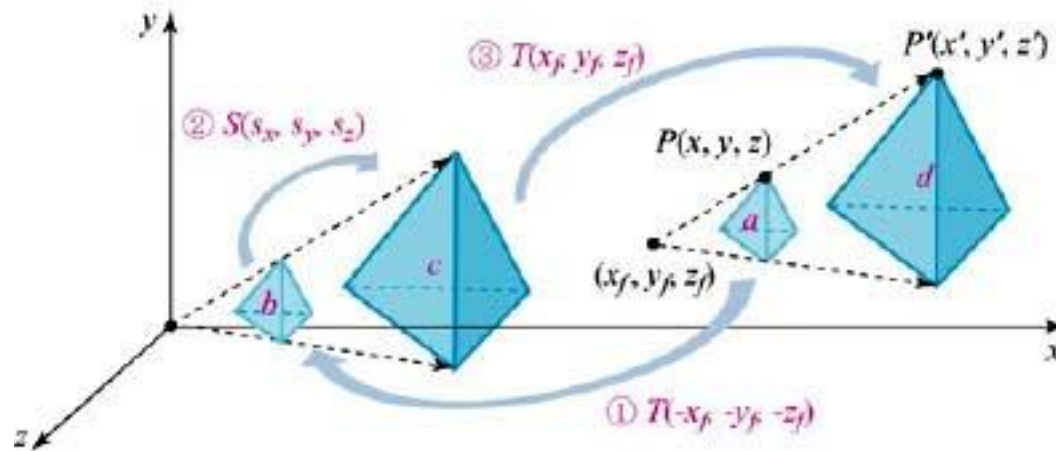


3차원 기하변환: 신축

- 임의의 점에 대한 신축 행렬 T

- Translation: $P' = (-x_f, -y_f, -z_f) \cdot P$
- Scaling: $P'' = (s_x, s_y, s_z) \cdot P'$
- Translation: $P''' = (x_f, y_f, z_f) \cdot P''$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 1 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 & -z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3차원 기하변환: 회전

- Rotation (회전)

- 객체를 기준 축 주위로 회전시킨다.

- z-축 회전: $P' = R_z(\theta) \cdot P$

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

- x-축 회전 : $P' = R_x(\theta) \cdot P$

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \theta - z \sin \theta$$

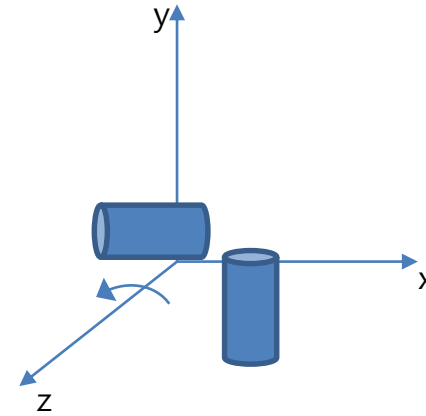
$$z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

- y-축 회전 : $P' = R_y(\theta) \cdot P$

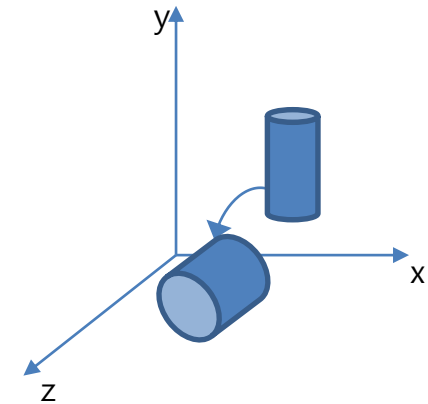
$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta$$

$$y' = y$$

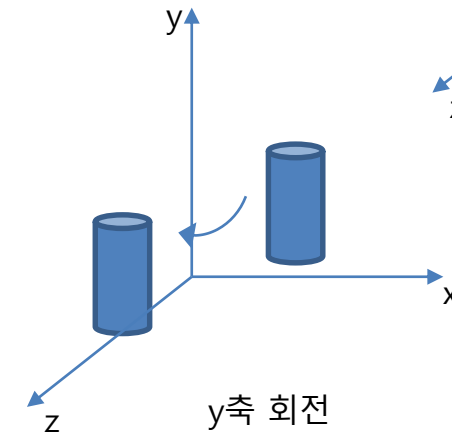
$$z' = -x \sin \theta + z \cos \theta$$



z축 회전



x축 회전



y축 회전

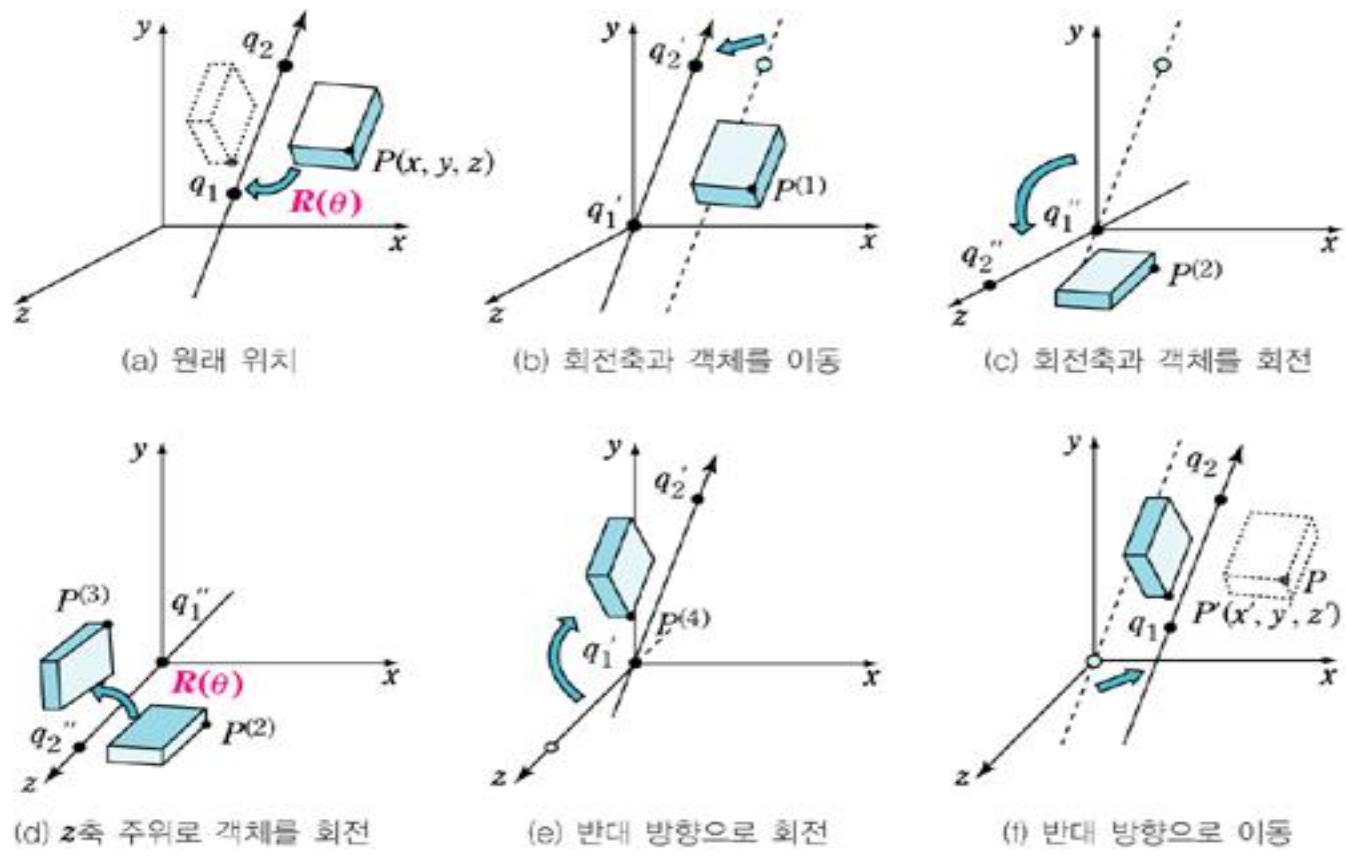
3차원 기하변환: 회전

- 임의의 축과 평행한 직선에 대한 회전
 - 회전축이 한 축이 되도록 이동
 - 그 축에 대해서 회전
 - 제자리로 역 이동

예) x축에 평행한 회전축에 대하여 회전하려면: $R = T^{-1} \cdot R_x \cdot T$

- 축과 평행하지 않은 일반적인 직선에 대한 회전
 - 회전축이 원점을 지나도록 이동시킨다.
 - 회전축을 좌표축 가운데 하나와 일치하도록 회전시킨다.
 - 일치된 좌표축을 중심으로 회전시킨다.
 - 2단계의 반대방향으로 회전한다.
 - 1단계의 반대방향으로 이동시킨다.

3차원 기하변환: 회전



$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta) R_y(\theta_y) R_x(\theta_x) T(-P_0)$$

3차원 기하변환: 회전

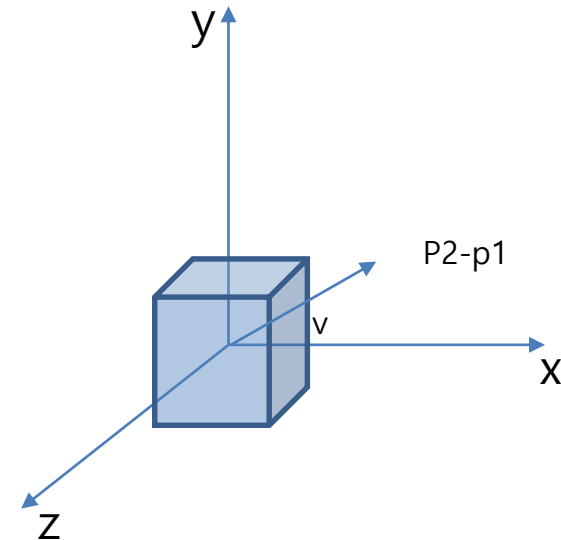
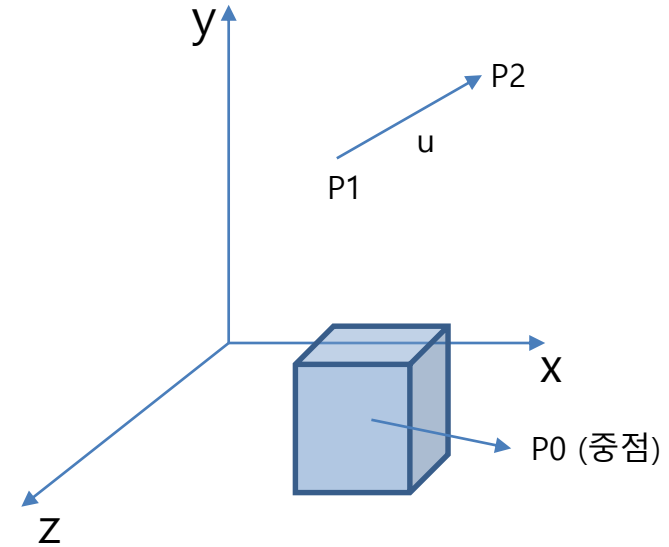
- 임의의 축에 대하여 회전하기 위하여
 - 회전축이 원점을 지나가도록 이동: $T(-P1)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 회전축 벡터: $u = P2 - P1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
- u 를 정규화 하기

$$v = \frac{u}{|u|} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

- $v = (a_x, a_y, a_z), \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$



3차원 기하변환: 회전

회전축이 xz평면에 놓이도록 x축 회전

- v' 와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 내적: $v' \cdot v_z = |v'| |v_z| \cos \theta_x$
 - $v' = \sqrt{a_y^2 + a_z^2}$ 이 값을 d라고 하면, $v_z = (0, 0, 1)$ 이고 $|v_z| = 1$
수학적으로, $v' \cdot v_z = (0, a_y, a_z) \cdot (0, 0, 1) = a_z$

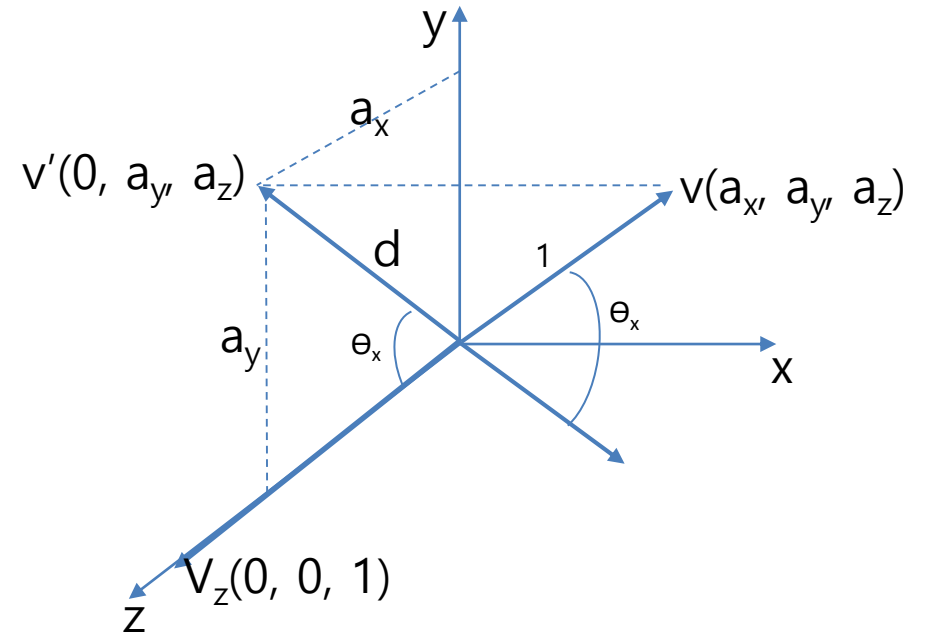
$$\text{따라서, } \cos \theta_x = \frac{v' \cdot v_z}{|v'| |v_z|} = \frac{a_z}{d}$$

- v' 와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 외적: $v' \times v_z = |v'| |v_z| v_x \sin \theta_x$
 - 직교좌표 형식으로,
 $v' \times v_z = (0, a_y, a_z) \times (0, 0, 1) = (a_y, 0, 0) = a_y(1, 0, 0) = a_y \cdot v_x$

$$\text{따라서, } \sin \theta_x = \frac{v' \times v_z}{|v'| |v_z| v_x} = \frac{a_y}{d}$$

- 따라서, x축에 대한 θ_x 의 회전 행렬은

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_z}{d} & -\frac{a_y}{d} & 0 \\ 0 & \frac{a_y}{d} & \frac{a_z}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3차원 기하변환: 회전

- 회전축이 z축이 되도록 y축 회전

- v'' 와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 내적: $v'' \cdot v_z = |v''| |v_z| \cos\theta_y$

- $|v_z| = 1, |v''| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$

- 수학적으로, $v'' \cdot v_z = (a_x, 0, d) \cdot (0, 0, 1) = d$ ($d = \sqrt{a_y^2 + a_z^2}$)

따라서, $\cos\theta_y = \frac{v'' \cdot v_z}{|v''| |v_z|} = d$

- v'' 와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 외적: $v'' \times v_z = |v''| |v_z| v_y \sin\theta_y$

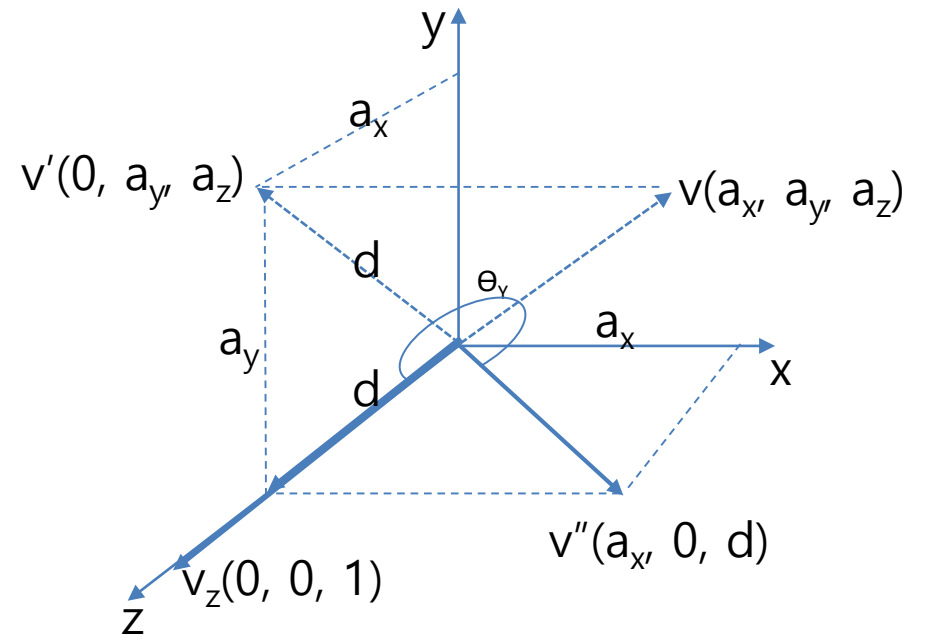
- 직교좌표 형식으로,

- $v'' \times v_z = (a_x, 0, d) \times (0, 0, 1) = (0, -a_x, 0) = -a_x(0, 1, 0)$

따라서, $\sin\theta_y = \frac{v'' \times v_z}{|v''| |v_z| v_y} = -a_x$

- 따라서, y축에 대한 θ_y 의 회전 행렬은

- $$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} d & 0 & -a_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3차원 기하변환: 회전

- z축 회전

$$- R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 회전 후 제자리로 가기 위하여 역회전과 역 이동

- 역회전 $R_x(-\theta_x), R_y(-\theta_y)$
- 역이동 $T(P_0)$

- 최종적으로,

$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta) R_y(\theta_y) R_x(\theta_x) T(-P_0)$$

기타 3차원 기하변환: 반사

- Reflection (반사)

- xy 평면에 반사

- z축 값의 부호가 바뀐다.

$$x' = x, y' = y, z' = -z$$

- yz 평면에 반사

- x축 값의 부호가 바뀐다.

$$x' = -x, y' = y, z' = z$$

- xz 평면에 반사

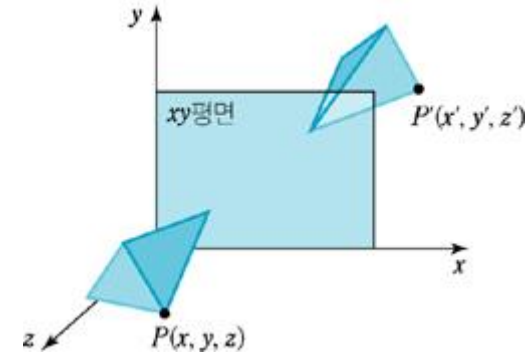
- y축 값의 부호가 바뀐다.

$$x' = x, y' = -y, z' = z$$

- 원점에 반사

- 모든 좌표값의 부호가 바뀐다.

$$x' = -x, y' = -y, z' = -z$$



기타 3차원 기하변환: 밀림

- Shearing (밀림)

- x축을 기준으로 밀림 변환

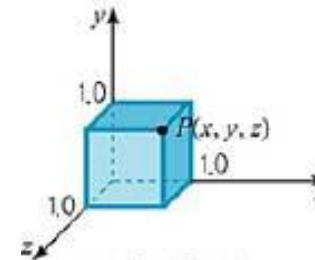
- $x' = x$
 - $y' = y + h_y x$
 - $z' = z + h_z x$
 - h_y, h_z : 각각 y축과 z축 방향으로 밀리는 정도
 - x축을 기준으로 한 밀림이므로 x값은 변함이 없다.

- y축을 기준으로 밀림 변환

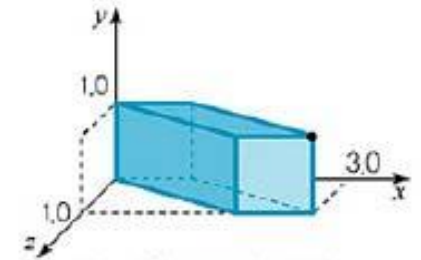
- $x' = x + h_x y$
 - $y' = y$
 - $z' = z + h_z y$
 - h_x, h_z : 각각 x축과 z축 방향으로 밀리는 정도
 - y축을 기준으로 한 밀림이므로 y값은 변함이 없다.

- z축을 기준으로 밀림 변환

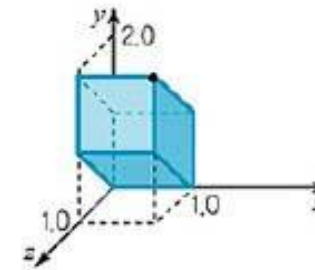
- $x' = x + h_x z$
 - $y' = y + h_y z$
 - $z' = z$
 - h_x, h_y : 각각 x축과 y축 방향으로 밀리는 정도
 - z축을 기준으로 한 밀림이므로 z값은 변함이 없다.



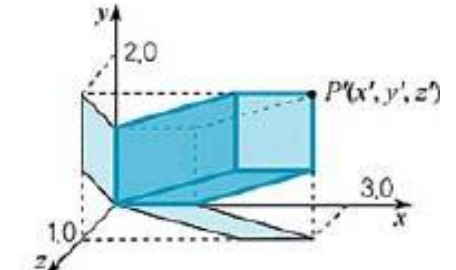
(a) 원 정육면체



(b) x방향으로 2만큼 밀림



(c) y방향으로 1만큼 밀림



(d) x방향으로 2, y방향으로 1만큼 밀림

z축을 기준으로 하는 밀림 변환

이번 주에는

- 3차원 기하 변환
 - 이동, 회전, 신축, 반사, 밀림
- 다음 주에는
 - 투영
 - 뷰잉 변환