# Quantitative Issue

2017. 3. 8

# Volatility Drag

## 레버리지 투자 수익과 변동성 손실의 관계

김동영, CFA
Analyst
dy76.kim@samsung.com
02 2020 7839

### 변동성과 복리 수익률

모든 투자에 있어서, 일별 투자수익률의 변동성이 크면 클수록 누적복리수익률은 하락하게 됨.

**Volatility drag 공식 - 다기간 투자 시, 기하평균 수익률과 산술평균 수익률의 차이**

C= 기하평균수익률
R= 산술평균수익률
$\sigma^2$= 일별 수익률의 분산값

$$C \approx R - \frac{1}{2}\sigma^2$$

(일별수익률 분산값이 클수록 복리수익률은 더 하락하게 됨)

### 레버리지, 인버스 투자

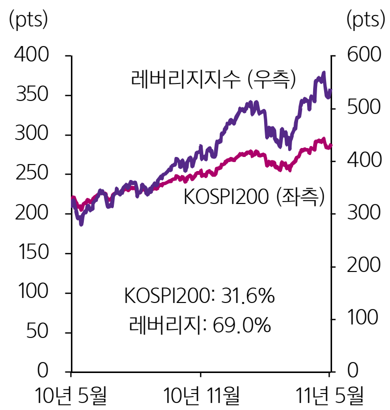
2배 레버리지 ETF는, ETF의 일일수익률이 기초자산의 일일수익률의 2배가 되도록 만들어진 상품임. 시장 상황에 따라, 2배 레버리지 ETF의 장기수익률은 기초자산의 장기수익률의 2배 이상이 될 수도 있고, 2배 이하가 될 수도 있음.

**레버리지, 인버스 ETF의 장기수익률 공식**

레버리지 2배일 때: ETF 1년 log 수익률 = 2 × 기초자산 1년 log 수익률 – $\sigma^2$
레버리지 -1배일 때: ETF 1년 log 수익률 = -1 × 기초자산 1년 log 수익률 – $\sigma^2$

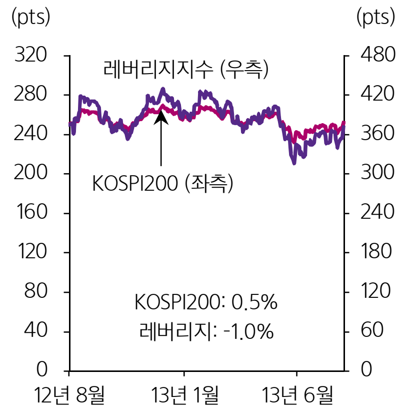
레버리지 ETF 등은 양면성을 가지고 있음. 과도한 관성 투자 시에는 변동성 손실이 커질 리스크를 주의해야 함. 시장 전망에 따라 효율성을 극대화하는 매매전략이 필요함.

**레버리지 수익률 > KOSPI200 수익률×2배 case**




자료: 삼성증권

**레버리지 수익률 < KOSPI200 수익률×2배 case**




자료: 삼성증권

Contents



# I. Volatility drag

현재 시장에는 다양한 레버리지, 인버스 투자상품들이 나와 있다. 모든 레버리지 ETF의 투자설명서에는 현재, 복리효과로 인해 레버리지 상품의 장기수익률이 의도치 않게 괴리가 벌어질 수 있다고 명시가 되어있다. 하지만, 많은 투자자들은 변동성이 장기수익률에 끼치는 영향에 대해서 크게 고민하지 않는 것이 현실이다.

이번 자료에서는 개별 수익률의 변동성이 장기복리수익률에 끼치는 영향에 대해서 자세히 알아보고, 또한 이와 관련한 레버리지 혹은 인버스 투자상품의 특성을 자세히 점검하고자 한다.

### 변동성과 복리 수익률

주식에 여러 기간 동안 투자할 때, 일별 수익률의 변동성이 크면 클수록 누적복리수익률은 산술평균수익률보다 하락하게 된다. 이 원리의 출발은 중학교에서 배우는 '산술평균-기하평균 부등식' 공식이다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

두 수 a, b에 대하여 산술평균은 기하평균보다 항상 크거나 같다. ($(a-b)^2 \geq 0$ 이므로)

여기서 a를 주식 투자에서 기간1의 수익률 수준 $(1+r_1)$ 로 두고, b를 기간2의 수익률 수준 $(1+r_2)$로 둔다면, 여러 기간 동안의 복리수익률은 단위기간 수익률들의 산술 평균값보다 항상 작거나 같음을 알 수 있다.

$$\frac{(1+r_1)+(1+r_2)}{2} \geq \sqrt{(1+r_1)(1+r_2)}$$

$$\frac{r_1+r_2}{2}+1 \geq \sqrt{(1+r_1)(1+r_2)}$$

$$\frac{r_1+r_2}{2} \geq \sqrt{(1+r_1)(1+r_2)}-1$$

여기서, $r_1$과 $r_2$가 똑같을 때만(변동성이 0일때만) 복리수익률이 산술수익률과 일치한다. $r_1$과 $r_2$가 벌어지면 벌어질수록(일별 수익률 간 변동성이 커질수록), 복리수익률은 산술수익률보다 점점 더 낮아지게 된다.

복리 수익률 항목인 $(1+r_1)(1+r_2)$을 생각해 보자. 이 수치는 실의 길이가 고정되어 있을 때 해당 실로 만들 수 있는 직사각형의 면적으로 볼 수 있다 - 실의 길이는 $((1+r_1)+(1+r_2)) \times 2 = C(상수)$이고, 직사각형 가로 길이가 $(1+r_1)$, 세로 길이가 $(1+r_2)$임. 고정된 실 길이에서 최대의 면적이 나오는 것은 정사각형일 때이다. 고정된 실을 사각형이 아닌 직선 형태로 늘리면 면적은 최소값 0이 된다. 2기간 복리수익률에서 수익률 편차가 클수록 수익률은 작아진다.

수식을 통해서 설명하면 다음과 같다.

2기간 복리수익률은 $\sqrt{(1+r_1)(1+r_2)} = \sqrt{1+r_1+r_2+r_1r_2}$ 이다.

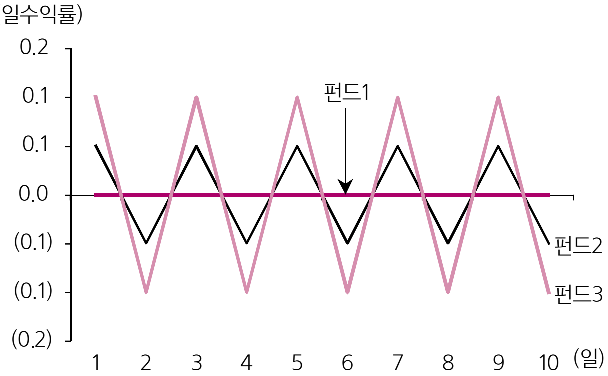
산술평균 수익률 $\frac{r_1+r_2}{2} = \bar{r}$이 일정하다고 할 때, 복리수익률 $\sqrt{1+2\bar{r}+r_1r_2}$은 interaction 항목인 "$r_1r_2$"에 의해서 영향을 받게 된다. 이 때 $r_1r_2 = r_1(2\bar{r}-r_1)$이 극대화 되는 구간은 $r_1 = \bar{r}$일 때다. $r_1$이 평균값 $\bar{r}$에서 멀어질수록 최종 복리수익률은 점점 낮아지게 된다.

간단한 예를 통해, 확인해보자.

**[예제1]**

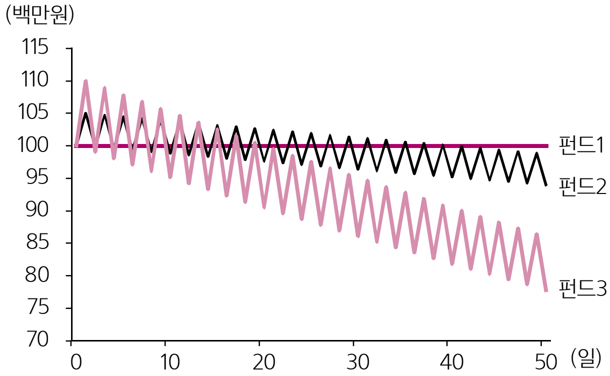
펀드1: 일별 수익률이 항상 0%임. 일별 수익률 50일치의 단순평균은 0%임
펀드2: 일별 수익률이 +5%, -5%를 반복함. 일별 수익률의 단순평균은 0%임 (표준편차 5%)
펀드3: 일별 수익률이 +10%, -10%를 반복함. 일별 수익률의 단순평균은 0%임 (표준편차 10%)
모든 펀드의 자산은 100만원에서 출발

**예제1 - 펀드별 일별수익률 추이**




자료: 삼성증권

**예제1 - 펀드별 자산 추이 (복리 수익률 결과)**




자료: 삼성증권

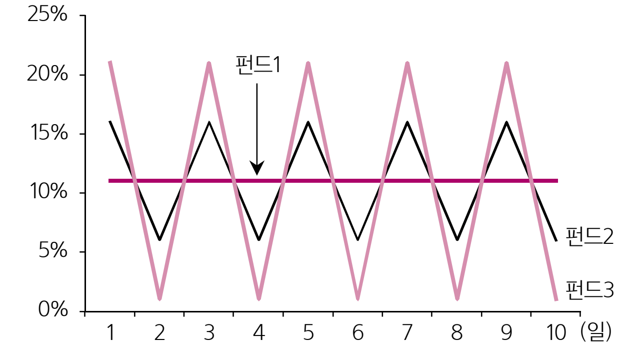
펀드1, 2, 3의 일수익률 산술평균은 모두 똑같다. 하지만 수익률의 변동성은 펀드2, 3으로 갈수록 커진다. 펀드1의 일별 수익률은 항상 0%로 모두 같다. 변동성(표준편차)도 0%다. 따라서 산술평균과 기하평균값이 같아지며, 50일후의 복리수익률에 따른 잔고도 시작시점 100만원과 동일한 값이 된다. 일별 수익률 +/-5%를 반복한 펀드는 50일 후의 자산이 93.9만원으로 줄었다. 일별 수익률 +/-10%를 반복한 펀드는 50일 후의 자산이 77.8만원으로 줄었다. 수익률들의 편차가 클수록(변동성이 클수록), 기하평균 수익률은 떨어지게 된다.

여기서 중요한 포인트는, 변동성이 클수록 복리수익률이 떨어진다는 점이다. 예제1를 보고, 혹자는 -10% 하락이 +10% 상승보다 더 큰 효과를 낸다는 점이, 장기수익률 하락의 원인이라고 생각할 수도 있다. 하지만, 마이너스 수익률의 존재 유무는, 변동성의 수익률 감소 현상과 관계가 없다. 아래 예제에서 플러스 수익률로만 이루어진 펀드들의 성과를 비교해 보자.

**[예제2]**

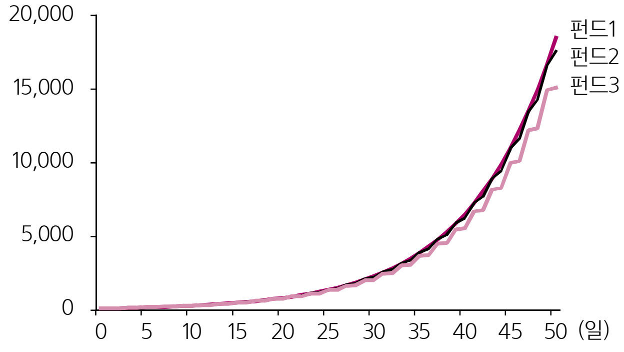
펀드1: 일별 수익률이 항상 11%임. 일별 수익률 50일치의 단순평균은 11%임
펀드2: 일별 수익률이 16%, 6%를 반복함. 일별 수익률의 단순평균은 11%임 (표준편차 5%)
펀드3: 일별 수익률이 21%, 1%를 반복함. 일별 수익률의 단순평균은 11%임 (표준편차 10%)
모든 펀드의 자산은 100만원에서 출발

**예제2 - 펀드별 일별수익률 추이**




자료: 삼성증권

**예제2 - 펀드별 자산 추이 (복리 수익률 결과)**




자료: 삼성증권

예제2에서도 변동성의 장기 수익률 감소 현상은 동일하게 나타난다. 펀드1, 2, 3의 일별수익률 산술평균은 모두 11%로 동일하다. 변동성이 0%로 가장 작은 펀드1은 50일 이후 펀드자산이 18,456만원이 되었다. 기간 변동성이 5%인 펀드2는 50일 이후 펀드자산이 17,543만원이 되었다. 기간 변동성이 10%인 펀드3은 50일 이후 펀드자산이 15,055만원이 되었다.

중요한 건 변동성의 수준이다. 산술평균 수익률이 같다고 할 때, 변동성이 크면 클수록 포트폴리오의 장기수익률은 떨어진다.

## Volatility drag

변동성으로 인한 손실을 전문용어로 volatility drag 혹은 variance drain이라고 한다. 변동성 손실을 계산하는 근사식 공식은 다음과 같다.

$$C \approx R - \frac{1}{2}\sigma^2$$

C= 기하평균수익률
R= 산술평균수익률
$\sigma^2$= 일별 수익률의 분산값
(일별수익률 분산값이 클수록 복리수익률은 더 하락하게 됨)

자료: Tom Messmore (1995) Variance Drain

공식에 따르면 기하수익률은 산술수익률에서 분산값의 1/2만큼 뺀 수치와 같다. 여기서 $\frac{1}{2}\sigma^2$ 수치가 변동성에 따른 손실분에 해당한다.

volatility drag 근사식을 유도하는 방법에 대해서, Tom Messmore의 1995년도 논문을 인용하면 다음과 같다.

**Volatility drag 공식 유도 (자료: Tom Messmore (1995) Variance Drain)**

산술수익률: $R$

$$R = \sum_{i=1}^{N} r_i \,/N$$

기하수익률: $C$

$$(1+C)^N = (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_N) = \prod_i (1+r_i)$$

$$C = \sqrt[N]{\prod_i (1+r_i)} - 1$$

수익률의 분산값: $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum (r_i - R)^2/N$$

$$= \sum ({r_i}^2 - 2r_iR + R^2)/N$$

$$\sigma^2 = \sum {r_i}^2/N - R^2$$

**[테일러 급수를 사용한 $\log(1+x)$의 근사식]**

테일러 급수 공식 ($x = 0$에서의):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$\log(1+x)$의 테일러 급수:

$$f(x) = log(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1},\ f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},\ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

테일러 공식에 위 식을 대입하면,

$$log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

이때, $x$ 가 일반적인 수익률 수치를 의미한다면, $x^3$부터는 미미한 값에 불과하다.
따라서 $\log(1+x)$의 근사식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$log(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

기하수익률 정의에서 출발하자.

$$(1+C)^N = (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_N)$$

양변에 log를 적용하면, $\mathrm{N}\log(1+C) = \sum(1+r_i)$

위의 $\log(1+x)$ 근사식을 양변에 대입하면, $\mathrm{N}(\mathrm{C}-C^2/2) \approx \sum(r_i - {r_i}^2/2)$

$$(\mathrm{C}-C^2/2) \approx [\sum(r_i - {r_i}^2/2)]/N = \sum r_i/N - \sum {r_i}^2/2\mathrm{N} = R - \sum {r_i}^2/2\mathrm{N}$$

앞의 $\sigma^2$ 수식을 사용하여, 우변을 $\sigma^2$의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$C - C^2/2 \approx R - \sum {r_i}^2/2N = R - (\sigma^2 + R^2)/2$$

$$C - C^2/2 \approx R - \sigma^2/2 - R^2/2$$

$$C \approx R - \sigma^2/2 + (C^2/2 - R^2/2)$$

여기서, C와 R이 모두 수익률 수치이므로, 우변 괄호 안에 있는 수익률 제곱의 차이 값은 무시할 수 있는 수준이라고 볼 수 있다. 따라서 최종적인 산술수익률과 기하수익률 차이 공식은 다음과 같다.

$$C \approx R - \sigma^2/2$$

volatility drag 공식이 어느 정도 들어 맞는지, 예제를 통해 확인해보자.

**[예제1의 실제 수익률]**

펀드1: 50일후 펀드자산 100만원. 전기간수익률 0%. 일평균복리수익률 0%. 표준편차 0%
펀드2: 사후 펀드자산 93.9만원. 전기간수익률 -6.1%. 일평균복리수익률 **-0.13%**. 표준편차 5%
펀드3: 사후 펀드자산 77.8만원. 전기간수익률 -22.2%. 일평균복리수익률 **-0.50%**. 표준편차 10%

**[volatility drag 근사식을 통한 약식 계산]**

펀드2 근사 일평균복리수익률: $0\% - \frac{1}{2}5\%^2$ =**-0.13%** 거의 동일
펀드3 근사 일평균복리수익률: $0\% - \frac{1}{2}10\%^2$ =**-0.50%** 거의 동일

펀드2의 일간수익률 표준편차는 5%였다. volatility drag 공식을 이용하여 대략적인 일평균복리수익률을 계산하면, $0\% - \frac{1}{2}5\%^2 = -0.13\%(-0.125\%)$로 근사값이 나온다. 실제로 계산된 정확한 일평균복리수익률 -0.13%(-0.1250782…%)과 거의 같다. 펀드3에서도 volatility drag 공식을 이용한 수익률 근사치가 실제 수익률과 거의 동일하게 나왔다.

예제2에서도 volatility drag 근사식이 유사하게 들어맞음을 확인할 수 있다.

**[예제2의 실제 수익률]**

펀드1: 50일후 펀드자산 18,456만원. 전기간수익률 18,356%. 일평균복리수익률 11%. 표준편차 0%
펀드2: 사후 펀드자산 17,543만원. 전기간수익률 17,443%. 일평균복리수익률 **10.89%**. 표준편차 5%
펀드3: 사후 펀드자산 15,055만원. 전기간수익률 14,955%. 일평균복리수익률 **10.55%**. 표준편차 10%

**[volatility drag 근사식을 통한 약식 계산]**

펀드2 근사 일평균복리수익률: 11% − $\frac{1}{2}5\%^2$ =**10.88%** 거의 동일
펀드3 근사 일평균복리수익률: 11% − $\frac{1}{2}10\%^2$ =**10.50%** 거의 동일

여기서의 결론은 하나다. 비슷해 보이는 투자 전략(산술평균이 유사한)이라도, 변동성이 클수록 복리수익률은 하락한다.

최근 퀀트 전략으로 많이 이야기되는 전략 중 하나가 Low-volatility 전략이다. 로우볼 전략은 변동성이 낮은 종목에 장기투자할 경우 시장 대비 초과성과를 거둘 수 있다는 Anomaly에 해당한다. CAPM 가정과 배치되는 로우볼 전략의 성공 근거에는, 가격 변동성이 클수록 장기투자 시에 변동성 손실 규모가 커지는 Volatility drag 효과가 일정 부분 영향을 끼쳤다고 볼 수도 있다.

Contents



# II. 레버리지, 인버스 투자

한국인의 특성에 맞춰서, 한국 증시에는 다양한 레버리지 ETF와 인버스 ETF 들이 상장 및 거래되고 있다.

이전 챕터에서 우리는 투자의 변동성이 증가할수록 복리수익률이 하락한다는 점을 확인하였다. 이번 챕터에서는 흔히들 사용하는 레버리지 및 인버스 ETF에서 변동성 변화가 어떤 영향을 끼치는지 분석해 보자고 한다.

잘 알다시피, 2배 레버리지 ETF는, ETF의 일일수익률이 기초자산의 일일수익률의 2배가 되도록 만들어진 상품이다. 매일매일의 수익률은 2배가 되도록 맞추지만, 이것이 장기 기간수익률의 2배를 의미하지는 않는다. 시장 상황에 따라, 2배 레버리지 ETF의 장기수익률은 기초자산의 장기수익률의 2배 이상이 될 수도 있고, 2배 이하가 될 수도 있다.

다음의 예를 보자.

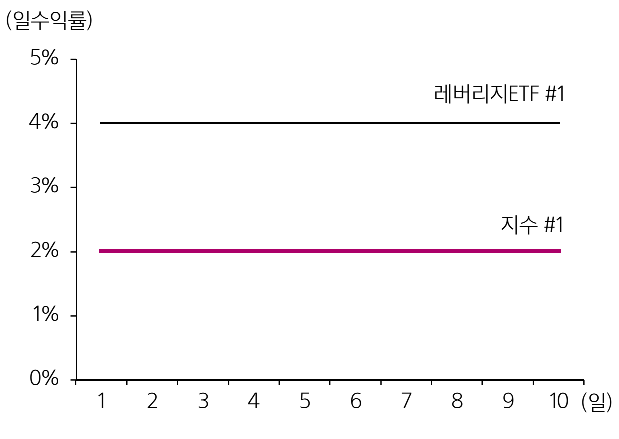
**[예제3]**

지수 #1: 일별수익률이 항상 2%임
레버리지 ETF #1: 일별수익률이 지수 일별수익률의 2배임

**(50일 투자결과)**

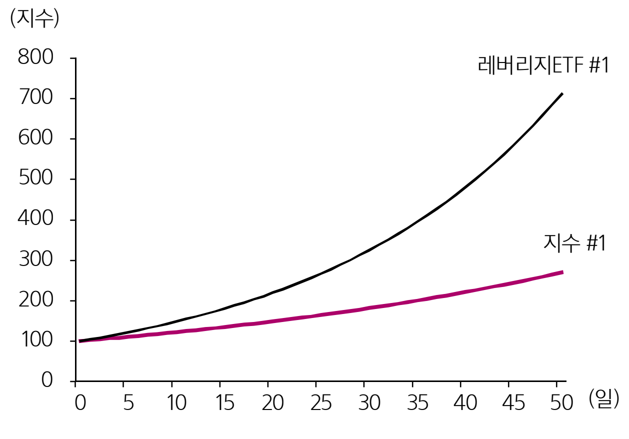
지수 #1: 100포인트에서 269.2포인트로 증가. 기간수익률 169.2%
레버리지 ETF #1: 100포인트에서 710.7포인트로 증가. 기간수익률 610.7%
레버리지 ETF #1 기간수익률 > 지수 #1의 기간수익률 × 2

**예제3 - 일별수익률 추이**




자료: 삼성증권

**예제3 - 지수 추이**

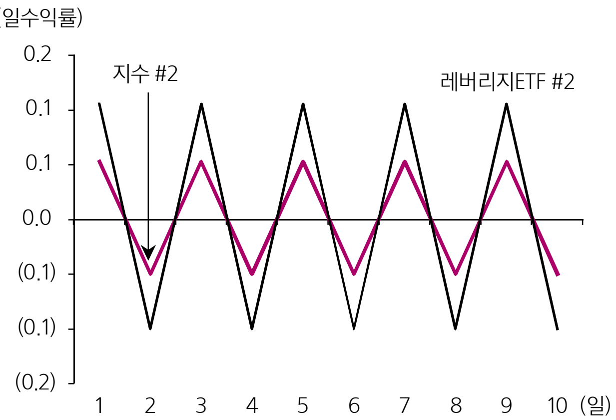



자료: 삼성증권

**[예제4]**
지수 #2: 일별 수익률이 +5.263%, -5%를 반복함 (이틀간 복리수익률이 0%임)
레버리지 ETF #2: 일별수익률이 지수 일별수익률의 2배임

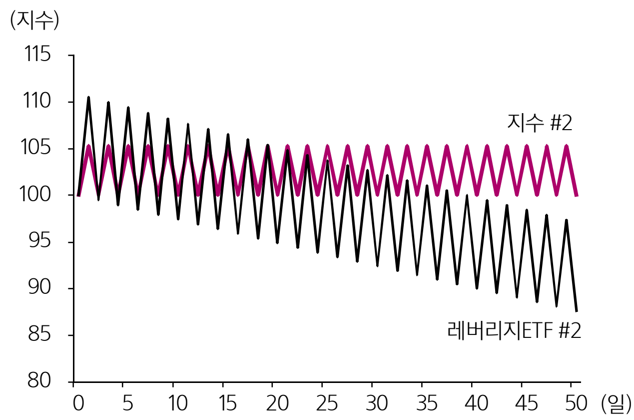
**(50일 투자결과)**
지수 #2: 100포인트에서 100포인트로 유지. 기간수익률 0%
레버리지 ETF #2: 100포인트에서 87.6포인트로 감소. 기간수익률 -22.4%
레버리지 ETF #2 기간수익률 < 지수 #2의 기간수익률 × 2

**예제4 - 일별수익률 추이**




자료: 삼성증권

**예제4 - 지수 추이**




자료: 삼성증권

예제3에서 기초지수는 매일 2%의 플러스 수익률을 꾸준히 기록했다. 여기서 레버리지 ETF는 이의 2배인 4% 수익률을 매일 기록했다. 양의 수익률이 계속 이어지면서 복리효과가 극대화되어 레버리지 ETF의 순자산은 가파르게 상승했다. 50일 후에 기초지수는 169% 상승한 반면, 레버리지 ETF는 611% 상승했다. 레버리지 ETF가 기초지수 기간수익률의 2배가 아닌 3배 이상의 수익률을 기록한 것이다.

반면, 예제4에서는 레버리지 ETF 장기수익률이 더 부진한 케이스를 볼 수 있다. 예제4에서 기초지수는 +5.263%, -5%의 수익률을 계속 반복했다. 기초지수의 지수값이 105.263포인트, 100포인트를 반복한 것이다. 결국 50일 후 기초지수의 지수값은 100포인트에서 끝났다. 여기서 레버리지 ETF는 +10.526%, -10%의 수익률을 반복했다. 50일 후의 레버리지 ETF는 -22.4%의 누적수익률을 기록했다. 단순히 생각하면, 누적수익률도 기초지수의 2배인 0%*2=0%가 아닐까 하지만, 실제로는 훨씬 더 부진한 수익률을 기록한 것이다.

이렇듯, 레버리지 ETF의 장기수익률은 시장 상황에 따라 기초자산의 장기수익률에 레버리지 배수를 곱한 수치보다 더 클 수도 더 작을 수도 있다.

레버리지 ETF의 수익률 구조를 수식으로 확인해 보자.

$r_t$ = 기초지수 S의 t시점 일별수익률
기초지수의 2일치 수익률: $(1+r_t)(1+r_{t+1})-1 = r_t + r_{t+1} + r_t r_{t+1}$
2배 레버리지 ETF의 2일치 수익률: $(1+2r_t)(1+2r_{t+1})-1 = 2(r_t + r_{t+1} + r_t r_{t+1}) + 2r_t r_{t+1}$
2배 레버리지 ETF의 2일치 수익률 - 기초지수의 2일치 수익률 × 2 = $2r_t r_{t+1}$

2배 레버리지 ETF가 기초지수의 일별수익률을 2배로 좇아간다고 해도, 이틀만 지나면 '레버리지 ETF의 수익률'과 '기초지수 수익률의 2배 수치'는 바로 격차가 생겨난다. $2r_t r_{t+1}$가 그 차이에 해당하는 수치다.

예를 들어, $r_t$와 $r_{t+1}$의 부호가 같은 방향이면, 레버리지 ETF는 더 높은 수익률을 내게 된다. 반대로, $r_t$와 $r_{t+1}$의 부호가 반대라면, 레버리지 ETF는 기초지수 수익률 2배보다 작은 수치를 보이게 된다. 즉, Intersection 항목에 해당하는 $2r_t r_{t+1}$ 수치가 매일매일 어떻게 되느냐에 따라, 레버리지 ETF의 장기 수익률은 다양한 결과를 가질 수 있다.

### 레버리지, 인버스 ETF의 장기수익률 공식

레버리지 혹은 인버스 ETF의 장기수익률이 기초자산의 장기수익률과 어떤 연관성이 있는지, 기존에 연구된 자료가 많이 있다.

Barclays 자료에서 나온 레버리지/인버스 ETF의 장기수익률 공식은 다음과 같다. 다만, 모든 공식들이 그렇듯, 이 공식에서도 모델에 대한 기본 가정이 들어있다. 기초자산이 Geometric Brownian Motion을 따른다는 가정이 그 것이다. 옵션 pricing에서 사용되는 블랙 숄즈 모델도 동일하게 Geometric Brownian Motion을 가정한 것이므로, 해당 가정이 실제 주식시장의 모습과 크게 다르지는 않다고 볼 수 있다.

**레버리지, 인버스 ETF의 장기수익률 공식**

$S_n$ = n일의 기초자산 지수

$r_{n-1,n}$ = n − 1일과 n일 사이의 기초자산 수익률

$\sigma$ = 기초자산의 변동성

$A_n$ = n일의 레버리지 ETF NAV

x = 레버리지 승수 (x = −2, −1, 2, 3)

$S_{n+1} = S_n(1 + r_{n,n+1}), \qquad A_{n+1} = A_n(1 + x \cdot r_{n,n+1})$

기초자산 S가 Geometric Brownian Motion을 따른다고 가정할 때,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

(레버리지 ETF의 장기수익률 공식)

$$\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = \left(\frac{S_n}{S_0}\right)^x e^{\frac{-(x^2-x)\sigma^2 t_N}{2}}$$

$$\text{즉, } \log\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = x\log\left(\frac{S_n}{S_0}\right) - \frac{(x^2-x)\sigma^2 t_N}{2}$$

자료: Barclays

GBM 가정을 하고, 확률미분방정식을 풀면 위의 공식이 나온다. 레버리지 ETF의 장기 log수익률은, 기초자산 log수익률에 레버리지 승수를 곱한 다음에 레버리지 승수와 변동성으로 이루어진 volatility drag 항목만큼이 차감되어서 수익률이 결정된다. 뒤의 volatility drag 항목이 존재하는 것은, 레버리지 승수에 의해 레버리지 ETF의 변동성이 더 커지게 되어 volatility drag가 더 크게 발생하기 때문이다.[1]

위 식에서 레버리지 승수가 커질수록 변동성 손실은 커지게 된다. 또한 기초자산 변동성이 커질수록 변동성 손실 또한 커지게 된다. 위의 식을 이용하면, 실제 사용되는 레버리지/인버스 ETF 들의 장기수익률을 대략적으로 추산할 수 있다.

레버리지 승수가 2배, 3배, -1배일 때의 1년 기준 ETF 장기수익률은 각각 다음과 같이 나타난다.

레버리지 2배일 때: ETF 1년 log 수익률 = 2 × 기초자산 1년 log 수익률 - $\sigma^2$
레버리지 3배일 때: ETF 1년 log 수익률 = 3 × 기초자산 1년 log 수익률 - $3\sigma^2$
레버리지 -1배일 때: ETF 1년 log 수익률 = -1 × 기초자산 1년 log 수익률 - $\sigma^2$

러프하게 얘기해서, KOSPI200의 1년 수익률이 1%이고 KOSPI200의 연변동성이 20%라고 하면, KOSPI200 레버리지 ETF의 1년 수익률은 -2%가 된다(2*1% - 20%^2 = -2%). 레버리지의 기본 작동에 따라 1% 수익률이 2%로 2배 증가하나, 변동성이 커지게 되는 효과로 인해 변동성 손실 4%가 발생하여, 결과적으로는 -2% 수익률에 그치게 된다.

혹자는 레버리지 -1배, 즉 인버스 ETF에서조차 수익률 공식에서 [-1 × 기초자산 1년 log 수익률 - $\sigma^2$]와 같이 변동성 손실 파트가 존재하는 것에 의문을 가질 수도 있다. 인버스 ETF는 기초자산과 비교했을 때, 단순히 일별 수익률 부호만 반대로 바뀌었을 뿐, 변동성 규모 자체는 안늘어나는 구조이기 때문이다.

인버스 ETF 공식에서 $-\sigma^2$이 존재하는 이유는, ETF의 장기수익률을 μ와 같은 다른 변수가 아닌, '기초자산'의 장기수익률 base로 표시했기 때문이다. 기초자산의 장기수익률에는 기본적으로 일정 규모의 volatility drag($1/2\sigma^2$)로 인해 수익률 손실이 들어가 있다. -1배 레버리지를 적용할 때 기초자산의 기본 volatility drag 부분까지 플러스 수익률로 바뀌지면, $-\sigma^2$이 이를 다시 보정해 주는 역할을 한다. 따라서 인버스 ETF 수익률 공식에도 volatility drag 항목이 존재하는 것이다.[2]

---

[1] log수익률과 산술수익률의 관계는 다음과 같다
log수익률 $l = \log(\frac{A_n}{A_0})$, 산술수익률 $a = {A_n}/{A_0} - 1$, $l = \log(a+1)$, $a = e^l - 1$

[2] 인버스 레버리지가 변동성 손실을 더 키우는 것인가? 라고 질문한다면, 답은 아니다 라고 볼 수 있다
인버스 레버리지 수익률 공식에 있는 시그마 제곱항은, 원지수가 가지고 있는 변동성 손실을 그냥 보존한 것에 지나지 않는다

다음의 예를 보면, 더 쉬운 이해가 가능하다.

기초자산: 1년치 일일수익률의 '산술평균'이 0%를 기록. 변동성은 20%를 기록
기초자산의 1년 복리 수익률 $\approx 0\% - \frac{1}{2}20\%^2 = -2\%$ (섹션1의 volatility drag 공식 참고)

**인버스 ETF의 수익률 계산 1:**
인버스 ETF는 기초자산 일일수익률의 항상 -1배 움직임을 나타냄
즉, 인버스 ETF도, 1년치 일일수익률의 산술평균 0%, 변동성 20%를 기록하게 됨
인버스ETF의 1년 수익률 $\approx 0\% - \frac{1}{2}20\%^2 = -2\%$

**인버스 ETF의 수익률 계산 2:**
레버리지, 인버스 ETF의 장기수익률 공식을 사용하면,
ETF 1년 수익률 = -1 × 기초자산 1년 수익률 - $\sigma^2 = -1 \times -2\% - 20\%^2 = 2\% - 4\% = -2\%$

2가지의 수익률 계산 결과가 동일하게 나온다
기초자산의 누적수익률이 -2%이지만, 여기서의 -2% 수치는 모두 변동성 손실에서만 발생한 것이다. 그렇다면, 인버스 ETF에서도 해당 변동성 손실은 그대로 유지해줘야 하는 것이 맞다. 따라서 $-\sigma^2$와 같은 조정항목이 존재하는 것이다. (기초자산 수익률 -2%라고, 인버스 ETF 수익률이 단순히 $-1 \times -2\% = 2\%$가 되는 것이 아니다. 세상에 공짜점심은 잘 없다)

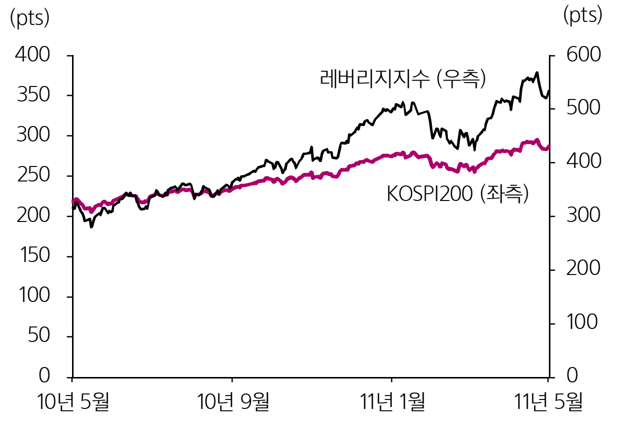
## 레버리지, 인버스 ETF의 장기수익률 실례

지금까지 레버리지, 인버스 ETF의 장기수익률에 대해 이론적인 접근을 해보았다. 여기서는 실제 한국시장 데이터를 통해서, 레버리지/인버스 ETF의 장기수익률 결과에 대해 확인해 보았다.

우선 KODEX 레버리지나 TIGER 레버리지 ETF의 경우에는 벤치마크가 KOSPI200 일별 수익률의 2배라고 명시되어 있다. 따라서 개별 ETF 자체의 가격 노이즈를 제거하기 위해, KOSPI200 일별 수익률의 2배 수익률을 기록하는 레버리지 지수를 별도로 만들어서 수익률 계산에 사용하였다.

**사례1. 2010/5/11~2011/5/11 기간**

**KOSPI200과 레버리지 지수 추이**




자료: 삼성증권

**KOSPI200과 레버리지 지수 수익률**

| 항목 | KOSPI200 | KOSPI200 레버리지 |
|---|---|---|
| 실현산술수익률 (%) | 31.55 | 69.01 |
| 실현log수익률 (%) | 27.42 | 52.48 |
| 실현변동성 (%) | 15.34 | |
| 공식기반 추정산술수익률 (%) | | 69.04 |
| 공식기반 추정log수익률 (%) | | 52.50 |

참고: 공식기반 추정log수익률 = 0.2742*2 - 0.1534^2 = 0.5250
공식기반 추정산술수익률 = e^0.5250-1 = 0.6904
자료: 삼성증권

각 지수 일별 수익률 샘플

| 일자 | KOSPI200 수익률 (%) | 레버리지지수 수익률 (%) |
|---|---|---|
| 2010-05-11 | -0.67 | -1.34 |
| 2010-05-12 | -0.39 | -0.78 |
| 2010-05-13 | 1.85 | 3.71 |
| 2010-05-14 | 0.13 | 0.25 |
| 2010-05-17 | -2.59 | -5.17 |
| 2010-05-18 | -0.44 | -0.87 |
| 2010-05-19 | -0.93 | -1.86 |
| 2010-05-20 | -1.72 | -3.44 |
| 2010-05-24 | 0.71 | 1.43 |
| | … | |

자료: 삼성증권

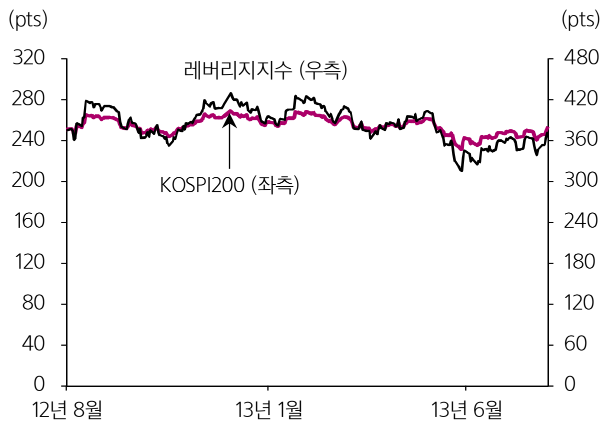
2010년 5월 11일부터 2011년 5월 11일까지 1년간 KOSPI200은 31.55%의 상승률을 기록했다. 이 동안의 지수변동성은 연간기준 15.34%를 기록했다.

이 기간 동안 항상 KOSPI200 일별수익률의 2배 수익률을 달성하도록 KOSPI200 레버리지 지수를 만든 다음, 장기 수익률을 측정해보면 1년 수익률이 69.01%를 달성한 것으로 나온다. 단순히 KOSPI200의 1년 수익률을 2배한 것(31.55%*2=63.1%)보다 6%p 정도 수익률이 높다. 해당 기간 동안 레버리지 지수에서 복리효과가 발생했다고 볼 수 있는 대목이다.

한편, 일별 수익률 2배를 매번 계산하지 않고, 레버리지 ETF 장기수익률 공식을 사용하여, 근사치로 ETF 장기수익률을 추정해낼 수 있다. [레버리지 2배일 때: ETF 1년 log 수익률 = 2 × 기초자산 1년 log 수익률 – $\sigma^2$ ] 공식을 사용한 결과, 레버리지 지수에 대한 추정 산출수익률은 69.04%로 계산된다. 일별 수익률을 이용해 실제 계산해서 나온 결과 69.01%와 매우 근접한 결과가 나왔음을 알 수 있다.

**사례2. 2012/8/31~2013/8/30 기간**

KOSPI200과 레버리지 지수 추이




자료: 삼성증권

KOSPI200과 레버리지 지수 수익률

| 항목 | KOSPI200 | KOSPI200 레버리지 |
|---|---|---|
| 실현산술수익률 (%) | 0.47 | -1.03 |
| 실현log수익률 (%) | 0.47 | -1.04 |
| 실현변동성 (%) | 14.18 | |
| 공식기반 추정산술수익률 (%) | | -1.07 |
| 공식기반 추정log수익률 (%) | | -1.07 |

참고: 공식기반 추정log수익률 = 0.0047*2 - 0.1418^2 = -0.0107
공식기반 추정산술수익률 = e^-0.0107-1 = -0.0107
자료: 삼성증권

2012년 8월말부터 2013년 8월말까지는 KOSPI200 지수가 장기횡보했던 구간이다. 해당 1년간 KOSPI200 지수는 0.45%의 상승률을 기록했다. 이 기간 동안 지수 변동성은 14.18%를 기록했다.

해당 기간에 2배 레버리지 지수를 만들어서 일별 수익률을 누적한 기간수익률을 계산해보면, 1년 수익률이 -1.03%로 확인된다. 원지수는 소폭 플러스 수익을 기록했지만, 레버리지 지수는 변동성 손실에 의해서 플러스가 아닌 마이너스 수익률을 기록한 사례에 해당한다. 변동성 손실분은, 변동성의 분산값인 14.18%^2= 2%와 거의 일치하는 것이 확인된다.

1번, 2번 사례에서 보듯이, 2배 레버리지 ETF의 장기수익률은 주식시장 흐름에 따라 기초자산 장기수익률의 2배 이상이 될 수도 있고, 2배 이하가 될 수도 있다.

2배 레버리지 ETF에 한정해서, 앞서 나왔던 공식을 다시 한번 정리해보자.

A. 2배 레버리지 ETF 장기투자 NAV 공식: $\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = \left(\frac{S_n}{S_0}\right)^2 e^{-\sigma^2 t_N}$

B. 기초자산 산술수익률의 2배에 해당하는 NAV (심리적인 기준점): $\frac{S_0+(S_n-S_0)\times 2}{S_0}$

위의 박스에서 A수치가 B수치를 상회하게 될 때, 일반 투자자들은 레버리지 ETF가 정상적이라고 느낄 것이다(만약 기초자산의 장기수익률이 10%라고 하면, 레버리지 ETF 장기수익률이 20%가 나와야 한다고 생각한다).

하지만, 실상은 A수치는 B수치보다 높게 나올 수도 있고, 낮게 나올 수도 있다. 수익률을 결정하는 각 변수의 움직임에 따라 결과는 다르게 나온다. 기초자산의 장기수익률이 높을수록, 변동성 수치가 낮을수록, 투자기간이 짧을수록, 실제 2배 레버리지 ETF의 수익률이 심리적인 기준점보다 더 높게 나온다. 반대로 투자기간이 길수록 volatility drag 현상으로 레버리지 ETF의 수익률은 조금씩 하락하게 된다.

$$\text{레버리지 2배일 때: ETF 1년 log 수익률} = 2 \times \text{기초자산 1년 log 수익률} - \sigma^2$$

2배 레버리지 ETF 보유 시 1년 동안 발생하는 변동성 손실은 '변동성의 분산값' 만큼이다. 즉, 시장변동성이 14%라고 하면, 2배 레버리지 ETF를 1년 보유 시 변동성 손실로 약 2%의 수익률 감소가 발생하게 된다. 변동성이 30%라고 하면, 1년 기준 변동성 손실은 9%까지 확대된다.

이런 이유로 해서, 레버리지 ETF의 투자 시에는 단기투자가 권장된다. 시장이 상승하는 정확한 단기 구간 동안 레버리지 ETF를 투자한다면, 투자 수익률을 극대화할 수 있다. 이 것은 레버리지 ETF가 가지는 고유의 특성이자 장점이다.

하지만, 관성적인 레버리지 ETF의 장기 보유 패턴은, 변동성 손실에 의해 최종 수익률이 생각보다 낮아질 가능성이 높다.

레버리지, 인버스 ETF는 양면성을 가지고 있다. 잘 사용한다면 약이 되지만, 잘못 사용한다면 독이 될 수 있다. 투자자들은 레버리지, 인버스 ETF의 이런 특성에 대해 좀 더 주의를 기울일 필요가 있다.

### 0.5배 디레버리지 상품의 가능성

레버리지 ETF 상품은 기초자산의 수익률을 2, 3배 증폭시키면서, 변동성 손실도 같이 확대되는 결과를 보인다. 변동성이 아주 큰 기초자산인 경우에는(원유 등의 경우) 변동성 손실 확대가 치명적으로 작용할 수도 있다.

이를 반대로 생각해보면, 레버리지가 아닌 deleverage를 통해서 변동성 손실을 낮추는 전략도 한번 생각해 볼 수 있다. 앞의 레버리지 ETF 공식을 다시 상기해 보자.

$S_n$ = n일의 기초자산 지수
$\sigma$ = 기초자산의 변동성
$A_n$ = n일의 레버리지 ETF NAV
x = 레버리지 승수

$$\log\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = x\log\left(\frac{S_n}{S_0}\right) - \frac{(x^2 - x)\sigma^2 t_N}{2}$$

여기서 x = 0.5면,

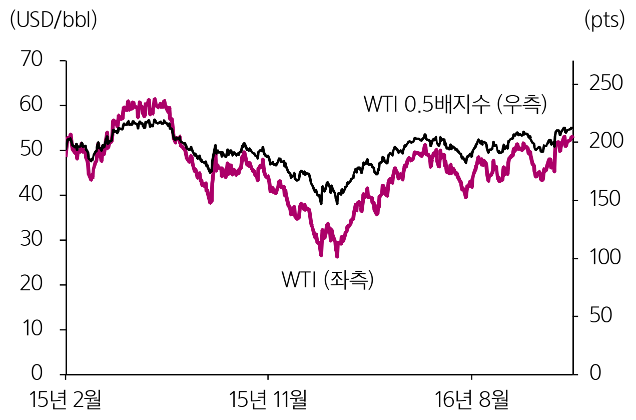
$$\log\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = 0.5\log\left(\frac{S_n}{S_0}\right) + \frac{\sigma^2 t_N}{8}$$

레버리지 승수에 0.5를 대입해보면, 0.5배 디레버리지 ETF의 장기수익률은 기초자산 수익률의 0.5배 수치에, 변동성 손실이 아닌 변동성 이익이 추가되는 것을 확인할 수 있다. 변동성이 매우 큰 자산의 경우에는, 변동성을 줄임으로써 발생하는 변동성 감소 이익을 체감할 수 있다.

**사례3. WTI자산, 2015/2/11~2016/12/22 기간**

다음의 사례를 보자. WTI는 가격 변동성이 큰 대표적인 자산이다.

**WTI와 WTI 0.5배 지수 추이**




자료: 삼성증권

**WTI와 WTI 0.5배 지수 수익률**

| 항목 | WTI | WTI 0.5배 지수 |
|---|---|---|
| 실현산술수익률 (%) | 8.56 | 9.42 |
| 실현log수익률 (%) | 8.21 | 9.00 |
| 실현변동성 (%) | 45.17 | 22.58 |
| 공식기반 추정산술수익률 (%) | | 9.27 |
| 공식기반 추정log수익률 (%) | | 8.86 |
| **Sharpe ratio (%, Rf=0가정)** | **0.19** | **0.42** |

참고: 공식기반 추정log수익률 = 0.0821*0.5 + 0.4517^2*(681/365)/8 = 0.0886
공식기반 추정산술수익률 = e^0.0886-1 = 0.0927
자료: 삼성증권

WTI 가격은 2015년 2월 11일에 48.84달러, 2016년 12월 23일에 53.02달러를 기록하여 기간수익률 8.56%를 기록했다. 해당기간 WTI 0.5배 지수를 만들어서 수익률을 계산해보니 9.42%를 기록하였다. 기초자산 수익률의 0.5배를 추종하도록 되어있는데 더 높은 수익률을 기록한 것이다. 이는 기초자산의 0.5배만을 추종하지만, 변동성을 크게 낮춘 효과로 인해 장기 투자 시 변동성 감소에 따른 이익이 추가 발생했기 때문이다.

기초자산의 가격변동성이 매우 높고, 장기수익률이 아주 높지 않고, 장기투자가 이루어질 경우에는 0.5배 지수의 가격 역전이 발생할 수 있다. 그리고 그래프에서 확인할 수 있듯이, 0.5배 지수 투자는 WTI의 급격한 수익률 변동을 낮춰주기 때문에 안정적인 투자가 가능하다. 이는 Sharpe ratio에서 확인이 가능하다. WTI 원지수의 Sharpe ratio는 0.19이지만, WTI 0.5배 지수의 Sharpe ratio는 0.42를 기록했다. 2배 이상 높은 수치를 기록한 것이다.

그렇다면 여기서, 0.5배 디레버리지 상품이, '가진 돈의 절반은 WTI에 투자하고, 절반은 현금으로 들고 있는 전략'과 다른 점은 무엇인가? 0.5배 디레버리지 상품이, '가진 돈의 절반만 투자하는 전략'보다 수익률을 더 올릴 수 있는 이유는 무엇인가?

그 해답은, 0.5배 디레버리지 상품은 매일매일 리밸런싱 활동을 하기 때문이다. 0.5배 ETF에 WTI가 절반, 현금이 절반 들어있다고 가정해보자. WTI의 당일 가격이 상승하게 되면 전체자산에서 WTI 비중이 50% 이상으로 커지게 된다. 따라서 WTI가 상승하는 날에는 WTI를 일부 매도해서 기초자산 비중을 50%로 재조정하게 된다. 동일한 방식으로 WTI가 하락하는 날에는 WTI를 일부 매수해서 기초자산 비중을 50%로 재조정하게 된다. 0.5배 ETF에서는 기초자산이 상승하면 일부 매도, 하락하면 일부 매수하는 리밸런싱을 매일매일 진행하게 된다. 저가매수 고가매도의 이런 리밸런싱 작업이, 초기 절반만 WTI에 투자하는 투자 Scheme과 다른 수익률을 만드는 원천이 된다. 만약 가격 변동성이 크고 수익률이 일정 범위 내에서 수렴하게 된다면 이런 리밸런싱 방식은 Buy-and-Hold 전략보다 높은 수익률을 거두게 된다.

1배 이상의 레버리지 ETF는 기초자산 가격이 오르면 exposure를 더 늘리고, 기초자산 가격이 내리면 exposure를 더 줄이는 리밸런싱 패턴을 보인다. 이는 흡사 CPPI(Constant proportion portfolio insurance) 전략과 유사한 방식이다. 1배 미만의 디레버리지 ETF는 기초자산 가격이 오르면 exposure를 줄이고, 기초자산 가격이 내리면 exposure를 늘리는 리밸런싱을 하므로 Constant Mix 전략이라고 볼 수 있다. 자산가격의 등락이 심할 경우에는 Constant Mix 전략이 유용하다.

0.5배 디레버리지 상품이 실제로 현실화되기에는 아직 여러 난관이 존재한다. Sharpe ratio에서의 장점은 뚜렷하다. 하지만, 수익률 측면에서만 경쟁한다면 여러 조건이 필요하다. 기초자산의 변동성은 매우 커야 하고, 장기기대수익률은 그리 높지 않지만 그 자산에 꼭 투자해야 할 이유가 존재하고, 투자기간도 기존의 주식과 달리 매우 장기간 투자가 이루어져야 한다. 그래야만 디레버리지 상품 투자의 성공 가능성이 높아진다. 하지만 2배, 3배 레버리지/인버스 상품이 새로운 시장을 개척한 것처럼, 장기적으로는 0.5배와 같은 디레버리지 상품도 나름의 니치 마켓을 만들 수 있을 것으로 조심스레 예상해본다.

## Compliance notice

- 본 보고서는 철저히 계량적 분석에 근거한 의견을 제시합니다. 따라서 당사의 대표 투자의견과 다를 수 있습니다.
- 본 조사분석자료의 애널리스트는 3월 7일 현재 위 조사분석자료에 언급된 종목의 지분을 보유하고 있지 않습니다.
- 당사는 3월 7일 현재 위 조사분석자료에 언급된 종목의 지분을 1% 이상 보유하고 있지 않습니다.
- 본 조사분석자료에는 외부의 부당한 압력이나 간섭없이 애널리스트의 의견이 정확하게 반영되었음을 확인합니다.
- 본 조사분석자료는 당사의 저작물로서 모든 저작권은 당사에게 있습니다.
- 본 조사분석자료는 당사의 동의없이 어떠한 경우에도 어떠한 형태로든 복제, 배포, 전송, 변형, 대여할 수 없습니다.
- 본 조사분석자료에 수록된 내용은 당사 리서치센터가 신뢰할 만한 자료 및 정보로부터 얻어진 것이나, 당사는 그 정확성이나 완전성을 보장할 수 없습니다. 따라서 어떠한 경우에도 본 자료는 고객의 주식투자의 결과에 대한 법적 책임소재에 대한 증빙자료로 사용될 수 없습니다.
- 본 조사분석자료는 기관투자가 등 제 3자에게 사전 제공된 사실이 없습니다.

삼성증권

**삼성증권주식회사**
06620 서울특별시 서초구 서초대로 74길 11 10층 리서치센터
02 2020 8000

**지점 대표번호**
1588 2323 / 1544 1544

**고객 불편사항 접수**
080 911 0900

samsung POP.com