2019/01/11

2. 베이시언 결정 이론

보편적인 인식법칙 : '가장 그럴듯한' 쪽으로 인식

↓ 컴퓨터는 이를 수학틀에 넣어야 함

패턴 7 → 특징 추출 $x=(1.58, 0.12)^T$ → 분류 $P(w_1|x)=0.01$ ⋮ $P(w_{10}|x)=0.09$ → 부류 w_8 (숫자 7)

특징벡터 x 추출

x라는 조건하에 그것이 $w_i (1 \le i \le 10)$일 확률 $P(w_i|x)$를 구한다 (사후확률)

가장 큰 확률을 가진 부류로 분류

2.1 확률과 통계

'그럴듯한' 을 표현하는 수학적인 도구는 확률과 통계

2.1.1 확률 기초

- 주사위

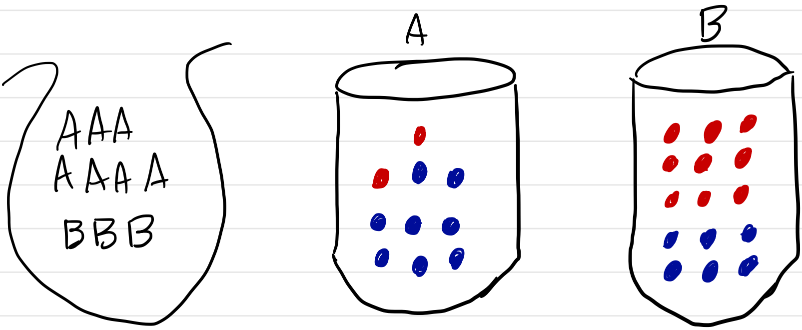
  던졌을 때 3이 나올 확률 $P(\underbrace{X}_{\text{랜덤변수}}=3)=\underbrace{1/6}_{\text{확률}}$

  이산 값을 가짐

- 사람키

  연속 값 → 확률 밀도 함수

패턴인식에서는 개별 특징 x_i 가 랜덤변수이다.



$X \in \{A, B\}$　　$Y \in \{빨강, 파랑\}$

1. 상자 A가 선택될 확률?

$$P(X=A) = P(A) = \frac{7}{10}$$

2. 상자 A에서 빨간 공이 뽑힐 확률은? conditional probability 조건부 확률

$$P(Y=빨강 \mid X=A) = P(빨강 \mid A) = \frac{2}{10}$$

3. 상자는 A이고, 공은 빨강이 뽑힐 확률은? joint probability 결합확률

$$P(A, 빨강) = P(빨강 \mid A) \cdot P(A) = \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{50}$$

4. 빨간 공이 나올 확률은? marginal Probability 주변 확률

$$P(빨강) = P(빨강 \mid A) \cdot P(A) + P(빨강 \mid B) \cdot P(B)$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{9}{15} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{50} + \frac{9}{50} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

· $P(X, Y) = P(X) \cdot P(Y)$ 이면 X와 Y는 독립

· P(A)와 P(B)를 사전 확률(prior probability)라고 한다.

* 빨간 공이 뽑혔는데 어느 상자에서 나왔는지 맞추어라.

→ 상자 A와 B에서 나왔을 가능성 각각을 구하고 큰 가능성을 보인 상자를 답으로 취한다.

생각 1.

- 상자 A의 빨간 공 확률과 상자 B의 빨간 공 확률을 비교하여 큰 쪽을 취한다.
- P(빨강|B) = 9/15 > P(빨강|A) = 2/10 이므로 '상자 B에서 나왔다' 고 말함
- 조건부 확률 $P(Y|X)$를 사용한 셈이다. 타당한가?
- 이 조건부 확률을 우도(likelihood)라고 부름

생각 2.

상자 A와 상자 B의 선택 가능성을 비교하여 큰 쪽을 취한다.

P(A) = 7/10 > P(B) = 3/10 이므로 '상자 A에서 나왔다' 고 말함

올바른 생각

생각 1과 생각 2의 한계

극단적으로 $P(A)=0.999$라면 생각 1이 틀린 것이 확실하다.

극단적으로 $P(빨강|A)=0.999$라면 생각 2가 틀린 것이 확실하다.

우도와 사전 확률을 모두 고려함이 타당해 보임

→ 조건부 확률 $P(A|빨강)$과 $P(B|빨강)$을 비교하여 큰 쪽을 취한다. 즉, $P(X|Y)$를 사용하겠다는 생각이 타당하다.

$P(X|Y)$를 사후 확률 (Posterior Probability)이라 함.

$P(X|Y)$는 어떻게 구할까?

$$P(X,Y) = P(Y,X)$$

$$P(Y|X)\cdot P(X) = P(X|Y)\cdot P(Y)$$ 베이스 정리

$$\boxed{P(X|Y) = \frac{P(Y|X)\cdot P(X)}{P(Y)} = \frac{우도 \times 사전확률}{P(Y)}}$$

$$P(A|빨강) = \frac{P(빨강|A)\cdot P(A)}{P(빨강)} = \frac{(2/10)(7/10)}{8/25} = 0.4375$$

$$P(B|빨강) = \frac{P(빨강|B)\cdot P(B)}{P(빨강)} = \frac{(9/15)(3/10)}{8/25} = 0.5625$$

2.1.2 평균과 분산

① 이산확률분포가 주어진 경우

이산 확률 분포

$$\begin{cases} \text{평균} = \sum_{x} x \cdot P(x) \\ \text{분산}(\sigma^2) = \sum_{x} (x - \text{평균})^2 \cdot P(x) \end{cases}$$

기댓값으로부터 얼마나 떨어져 있는지

연속 확률 분포

$$\text{평균} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx$$

$$\text{분산} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \text{평균})^2 \cdot p(x)\, dx$$

② 샘플 집합만 주어진 경우

$$\text{평균} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\text{분산}(\sigma^2) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \text{평균})^2$$

바이어스 때문에

현실에서는 여러 랜덤 변수가 랜덤 벡터를 구성하는 경우가 많다.

랜덤 벡터를 d차원 벡터 $x = (x_1, \cdots, x_d)^T$로 표기하자.

분산에 대해 생각해보면, 랜덤 벡터 i번째 요소 x_i의 분산 σ_i^2도 필요하나, x_i와 x_j 사이의 공분산 (covariance) σ_{ij}도 중요한 통계적 특성이 된다. 확률변수들의 관계를 보여주는 값

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & & \sigma_{dd} \end{pmatrix}$$

이산 확률 분포 $\Sigma = \sum_x (x-\mu)(x-\mu)^T \cdot p(x)$

연속 〃 〃 $\Sigma \int_{R^d} (x-\mu)(x-\mu)^T \cdot p(x)\,dx$

샘플 집합 $\Sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)(x_i - \mu)^T$

두 랜덤변수 x_i와 x_j가 크면 x_j도 커지고, x_i가 작아지면 x_j도 작아지는 경향을 가졌다면, 둘의 공분산 σ_{ij}는 양수를 갖는다. 그런 경향이 강할수록 값은 더 커진다. 공분산이 0에 가까우면 상관관계가 적은 것. 0이면 서로 독립!

- 예제 2.3
  - 8개 샘플이 주어진 상황에서 평균 벡터와 공분산 행렬 구함

학생	$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ (x_1:키, x_2:몸무게, x_3:학점)
1	$\mathbf{x}_1 = (170, 60, 4.1)^T$
2	$\mathbf{x}_2 = (165, 55, 3.0)^T$
3	$\mathbf{x}_3 = (174, 75, 2.8)^T$
4	$\mathbf{x}_4 = (169, 67, 2.9)^T$
5	$\mathbf{x}_5 = (155, 49, 3.1)^T$
6	$\mathbf{x}_6 = (172, 63, 3.6)^T$
7	$\mathbf{x}_7 = (166, 58, 3.7)^T$
8	$\mathbf{x}_8 = (168, 61, 4.0)^T$

$$\boldsymbol{\mu} = (167.375,\ 61.0,\ 3.4)^T$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 33.696 & 39.429 & 0.371 \\ 39.429 & 60.857 & -0.943 \\ 0.371 & -0.943 & 0.263 \end{pmatrix}$$

2.1.3 확률 분포의 표현과 추정

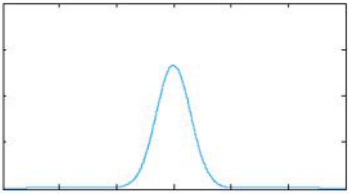
- 이산인 경우

변수의 수가 d개로 늘어나고 각 변수의 구간이 q개라면 d차원 배열을 사용해야 하고, q^d에 비례하는 메모리가 필요 (차원의 저주)

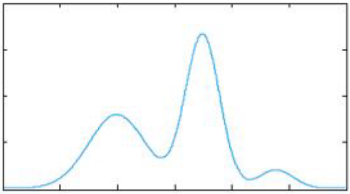
- 연속인 경우

정규 분포(normal distribution)로 근사 가능

힘듦 → 3장에서



(a) 정규 분포



(b) 세 개의 모드를 가진 분포

그림 2.4 다양한 확률 분포

2019/1/12

2.2 베이시언 분류기

이진 분류기와 M진 분류기로 나눠서 살펴보겠음

훈련 집합 $X = \{(x_1,t_1),(x_2,t_2),\cdots,(x_N,t_N)\}$

x_i는 i번째 샘플의 특징 벡터, t_i는 x_i가 속하는 class label
(분류표지)

이진 분류에서는 $t_i \in \{w_1, w_2\}$ → 주로 -1, +1 or +1, 0

M 부류 $t_i \in \{w_1, w_2, \cdots, w_M\}$

2.2.1 최소 오류 베이시언 분류기

분류 문제의 해결 → 주어진 특징 벡터 x에 대해 가장 그럴듯한 부류를 찾아내면 됨 → 분류기가 이 문제를 해결해줌

($P(w_1|x) > P(w_2|x)$ 이면, x를 w_1로 분류하고,
$P(w_1|x) < P(w_2|x)$ 이면, x를 w_2로 분류하라)

but, x가 만드는 공간, 특징 공간이 무수히 많은 점을 가지므로, 이들 모든 점에 대해 확률을 표현할 수 없다.

따라서 베이스 정리를 이용한다

예) 필기 숫자

$\mathbf{x}_1=(13/11,12/12)^T$, $t_1=\omega_1$ (숫자 0)

$\mathbf{x}_2=(12/7,14/5)^T$, $t_2=\omega_2$ (숫자 1)

$\mathbf{x}_3=(6/11,13/4)^T$, $t_3=\omega_3$ (숫자 2)

$\mathbf{x}_4=(13/11,10/14)^T$, $t_4=\omega_4$ (숫자 3)

……

$\mathbf{x}_{40}=(15/13,11/17)^T$, $t_{40}=\omega_{10}$ (숫자 9)

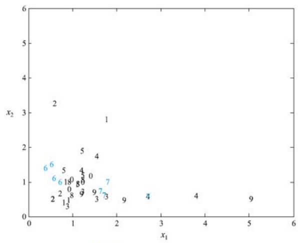


그림 1.6 특징 공간에서 샘플의 분포

$$P(w_i|x) = \frac{P(x|w_i)\cdot P(w_i)}{P(x)} = \frac{\text{우도} * \text{사전확률}}{P(x)}$$

사후 확률 $P(w_i|x)$ 와 사전확률 $P(w_i)$는 매개 변수가 부류를 나타내는 w_i, 반면 우도 $P(x|w_i)$ 는 부류가 주어진 조건부 확률이고, 매개변수가 특징 벡터 x.

* 사전 확률 $P(w_i)$ 불이날 확률

훈련 집합에 있는 샘플 중에 w_i에 속하는 샘플의 개수를 n_i라 하면, $P(w_1) = n_1/N$, $P(w_2) = n_2/N$ 로 추정
(N이 충분히 크면 이 값은 실제 확률 값에 아주 가깝게 됨)

* 우도 $P(x|w_i)$ 불이났는데 연기날 확률

$P(x|w_i)$는 훈련 집합에서 w_i에 속하는 샘플들을 이용하여 추정
우도는 부류가 주어진 조건하의 조건부 확률이므로 부류조건부 확률 (class conditional probability) 라고 부름. → 이미 구해 놓았다 가정 하자.

* $P(x)$

사후 확률 값 자체가 필요한 게 아니라 두 사후 확률 중 어느것이 더 큰지 판별하면 되므로 생략 가능

결정규칙(decision rule) : 특징 벡터를 여러 개 부류 중의 하나로 분류하는 규칙

Minimum error Bayesian classifier(최소 오류 베이시언 분류기): 결정규칙을 사용하는 분류기

- 결정규칙

$P(x|w_1)P(w_1) > P(x|w_2)P(w_2)$ 이면, x를 w_1로 분류하고
$P(x|w_1)P(w_1) < P(x|w_2)P(w_2)$ 이면, x를 w_2로 분류하라

사전 확률이 0.5인 경우 우도만으로 분류
$P(w_1) >> P(w_2)$ 인 경우 사전 확률이 의사결정 주도

- 오류확률

$$E = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{t} p(x|w_2)\,dx + \int_{t}^{\infty} p(x|w_1)\,dx\right)$$

W1의 사전확률

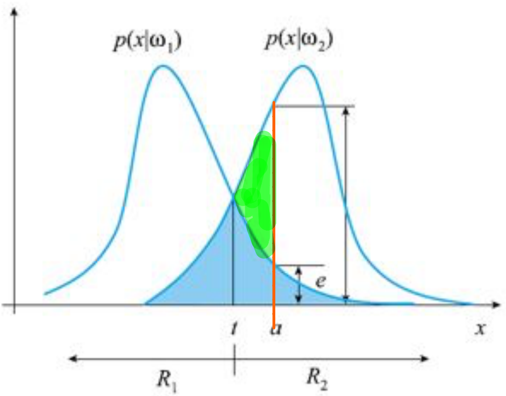


그림 2.5 베이시언 분류기의 오류 확률 (사전 확률은 같다고 가정)

t를 오, 왼으로 옮기면, 오류율 증가, 그러므로 베이시언 분류기는 '오류율 기준으로 최적'

2.2.2 최소 위험 베이시언 분류기

오류 확률이라는 기준은 적절하지 않은 상황도 있다.

ex) 암환자와 정상인 분류

손실 행렬 (loss matrix)

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$d_1 = C_{11} \int_{R1} P(x|w_1)dx + C_{12} \int_{R2} P(x|w_1)dx$$

$$d_2 = C_{21} \int_{R1} P(x|w_2)dx + C_{22} \int_{R2} P(x|w_2)dx$$

두 부류를 모두 고려한 평균 손실 D는 d_i에 w_i의 사전 확률을 곱한 값을 더하면 된다.

$$D = d_1 P(w_1) + d_2 P(w_2) = \sum_{i=1}^{2} d_i P(w_i)$$

$$= \left(C_{11} \int_{R_1} P(x|w_1) P(w_1) dx + C_{12} \int_{R2} P(x|w_1) P(w_1) dx\right)$$

$$+ \left(C_{21} \int_{R_1} P(x|w_2) P(w_2) dx + C_{22} \int_{R2} P(x|w_2) P(w_2) dx\right)$$

$$= \int_{R1} \Big(\underbrace{C_{11} P(x|w_1) P(w_1) + C_{21} P(x|w_2) P(w_2)}_{q_1}\Big) dx$$

$$+ \int_{R2} \Big(\underbrace{C_{12} P(x|w_1) P(w_1) + C_{22} P(x|w_2) P(w_2)}_{q_2}\Big) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{Ri} \left(\sum_{j=1}^{2} C_{ji} P(x|w_j) P(w_j) \right) dx$$

x를 R_1에 소속시키면 q_1만큼의 손실이 발생하고,
R_2에 소속시키면 q_2만큼의 손실이 발생한다.

D를 최소화시키는 결정 규칙은 다음과 같다.

x를 $q_2 > q_1$이면 w_1로 분류하고, $q_1 > q_2$이면 w_2로 분류하라.

이때, $q_1 = C_{11} P(x|w_1) P(w_1) + C_{21} P(x|w_2) P(w_2)$
$q_2 = C_{12} P(x|w_1) P(w_1) + C_{22} P(x|w_2) P(w_2)$

최소 위험 베이시언 분류기

정상인이라고 분류했을 때의 손실과 암환자로 분류했을 때의 손실 비교

위의 식은 x와 무관하여 미리 계산이 가능한 항들이 있다.
미리 모아보자

$q_2 > q_1 \quad (C_{ij} > C_{ii},\ i \neq j)$

$(C_{12} - C_{11}) P(x|w_1) P(w_1) > (C_{21} - C_{22}) P(x|w_2) P(w_2)$

$$\frac{P(x|w_1)}{P(x|w_2)} > \frac{(C_{21} - C_{22}) P(w_2)}{(C_{12} - C_{11}) P(w_1)}$$

우도비 (두 우도의 비율)　　x와 무관한 임계값

x를 $\dfrac{P(x|w_1)}{P(x|w_2)} > T$ 이면 w_1로 분류하고,

$\dfrac{P(x|w_1)}{P(x|w_2)} < T$ 이면 w_2로 분류하라.

$$T = \frac{(C_{21} - C_{22}) P(w_2)}{(C_{12} - C_{11}) P(w_1)}$$

우도비 결정 규칙

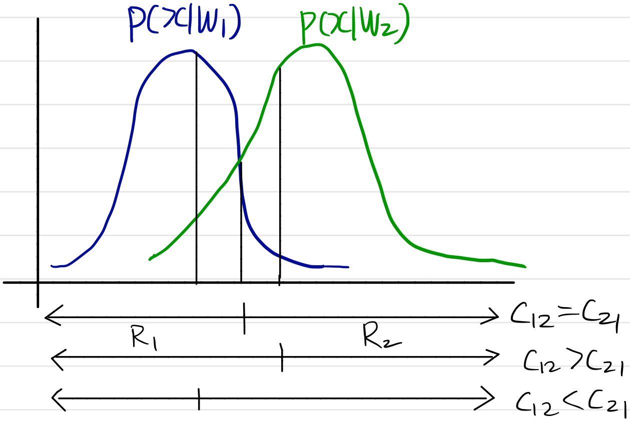
만약, $C_{ii}=0$으로 놓고, 사전 확률도 같다고 하면,

x를 $p(x|w_1) > p(x|w_2)\frac{C_{21}}{C_{12}}$ 이면 w_1로 분류하고,

$p(x|w_1) < p(x|w_2)\frac{C_{21}}{C_{12}}$ 이면 w_2로 분류하라.

만약, 암 환자(w_1)와 정상인(w_2)을 구별하는 경우라면,

$C_{12} > C_{21}$일 테고, 결정 경계 t를 오른쪽으로 옮기라는 것이다



2.2.3 M 부류로 확장

M부류 최소 오류 베이시언 분류기

x를 $k = \arg\max p(w_i|x)$일 때, w_k로 분류하라.

$\arg\max p(x|w_i)P(w_i)$

$$D = \sum_{i=1}^{M} \int_{R_i} \left(\sum_{j=1}^{M} C_{ji}\, p(x|w_j)\, p(w_j) \right) dx$$

$$= \int_{R_1} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{M} C_{j1}\, P(x|w_j)\, P(w_j) \right)}_{q_1} dx + \cdots + \int_{R_M} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{M} C_{jM}\, P(x|w_j)\, P(w_j) \right)}_{q_M} dx$$

평균손실 D를 최소화하기 위해 x를 $R_1, R_2, \cdots, R_M$ 중 어디에 소속 시킬 지를 결정.

M부류 최소 위험 베이시언 분류기

$$g_i = \sum_{j=1}^{M} C_{ji} P(x|w_j) P(w_j)$$

2.3 분별함수

x를 $k = \arg\max g_i(x)$일 때 w_k로 분류하라

$$g_i(x) = P(x|w_i) P(w_i) \quad \text{(최소 오류 베이시언 분류기)}$$

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{M} C_{ji} P(x|w_j) P(w_j)} \quad \text{(최소 위험 베이시언 분류기)}$$

가장 큰 값을 갖는 것을 찾아내어 해당 부류로 분류해 주는 기능

입력: 특징 벡터 x / 출력: 부류

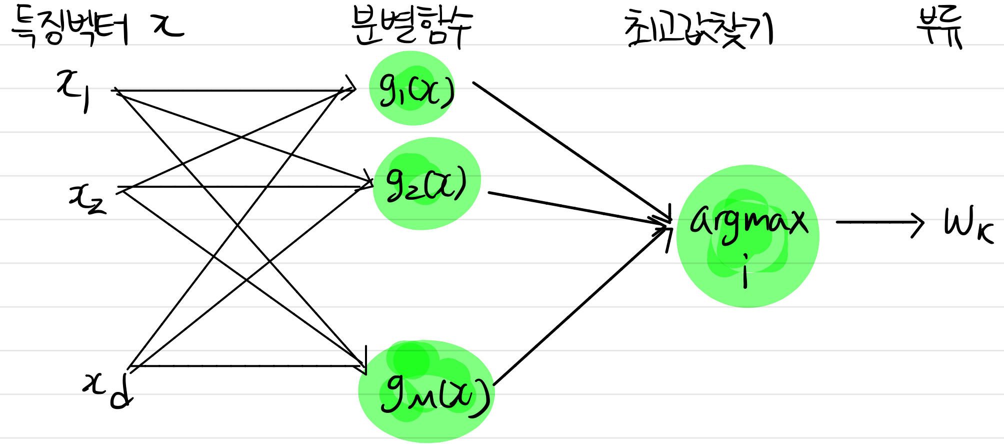
for(i=1 to M)

if(최소 오류) $g_i(x) = P(x|w_i) P(w_i)$;

else if(최소 위험) $g_i(x) = 1 / \sum_{j=1}^{M} C_{ji} P(x|w_j) P(w_j)$;

$g_i(x)$, $1 \le i \le M$ 중 가장 큰 것을 찾아 그것의 첨자를 k라 하자.

return w_k;



* 분별 함수의 장점

- 여러 분류기를 하나로 표현
- $f(.)$가 단조 증가라면 $P(x|w_i)\cdot P(w_i)$ 대신
  $g(x)=f(P(x|w_i)P(w_i))$ 사용해도 같은 결과
- 패턴 인식에서 가장 많이 사용하는 $f(.)$ 함수는 log이다.
  (log 함수는 곱하기 연산을 더하기로 바꾸어 주므로 수식을 간단히 정리하는데 도움, 값의 규모가 커져 수치 오류에 둔감한 이점
- $M=2$ 인 이진 분류 경우에는 분별함수 하나만 사용!
  x를 $g_{12}(x)>0$ 이면 w_1로, $g_{12}(x)<0$이면 w_2로 분류
  $g_{12}(x)=g_1(x)-g_2(x)$

2019/1/13

2.4 정규분포에서 베이시언 분류기

사후확률 계산을 위해 사전확률 $P(w_i)$와 우도 $P(x|w_i)$의 곱으로 대치해 계산한다. 이제 training set을 이용해 사전 확률과 우도를 알아내야 한다.

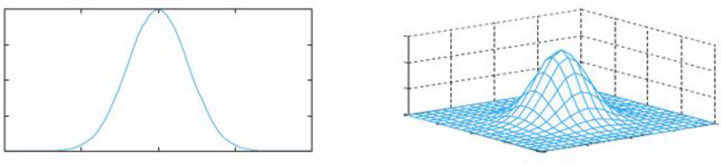
training set이 정규분포로 모델링이 가능한 형태라는 전제하에 베이시언 분류기를 만들어 본다.

- 정규분포 (가우시언 분포)

- 현실 세계에 맞는 경우가 있음
- 평균과 분산이라는 두 종류의 매개 변수만으로 표현 가능

$$\left.\begin{aligned} N(\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.32)$$

d차원에서의 μ는 평균벡터이고, Σ는 $d*d$ 크기의 공분산 행렬이다



(a) 1 차원 정규 분포 (b) 2 차원 정규 분포

그림 2.9 정규 분포의 예

· 유도를 다시 쓰면,

$$e^{\square}$$

$$p(x|w_i) = N(\mu_i, \Sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (x-\mu_i)\right)$$

· 로그를 취하여 분별함수를 만들어 보면,

$$g_i(x) = \ln(p(x|w_i)P(w_i))$$

$$= \ln N(\mu_i, \Sigma_i) + \ln P(w_i)$$

$$= -\frac{1}{2}(x-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (x-\mu_i) - \frac{d}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln P(w_i)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^T \cdot \Sigma_i^{-1} \cdot x - x \cdot \Sigma_i^{-1} \cdot \mu_i - \mu_i^T \Sigma_i^{-1} x + \mu_i^T \Sigma_i^{-1} \cdot \mu_i\right) - \frac{d}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln P(w_i)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^T \Sigma_i^{-1} x - 2\mu_i^T \Sigma_i^{-1} x + \mu_i^T \Sigma_i^{-1} \mu_i) - \frac{d}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln P(w_i)$$

$g_i(x)$는 변수 x에 대한 2차식!

예제 2.4

- d=2이고 아래와 같다고 가정

  부류 ω_i의 정규 분포가 $\boldsymbol{\mu}_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$와 $\boldsymbol{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 분별 함수를 유도해 보면,

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - \frac{2}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| + \ln P(\omega_i)$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1 - 3 \quad x_2 - 1)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln 4 + \ln P(\omega_i)$$

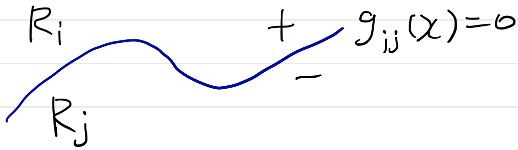
$$= -\frac{1}{4}\underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{2\text{차 식}} + \frac{1}{2}\underbrace{(3x_1 + x_2)}_{1\text{차 식}} - \frac{1}{2}\underbrace{(5 + 2\ln 2\pi + \ln 4 - 2\ln P(\omega_i))}_{\text{상수}}$$

결정 경계

- 두 부류가 차지하는 영역의 경계

$g_i(x) = g_j(x)$ 인 점, 즉 $g_{ij}(x) = 0$ 인 점

$g_{ij}(x) = g_i(x) - g_j(x)$



2.4.2 선형분별

모든 부류의 공분산 행렬이 같은 경우, $\Sigma_i = \Sigma$ 로 표기

$$g_i(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(2\mu_i^T\Sigma^{-1}x - \mu_i^T\Sigma^{-1}\mu_i + 2\ln P(w_i)\right)}_{i\text{에 따라 다름}} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^T\Sigma^{-1}x + d\ln 2\pi + \ln|\Sigma|\right)}_{i\text{에 무관함}}$$

변수 x에 대한 1차식이 됨!

$$= (\Sigma^{-1}\mu_i)^T x + \left(\ln P(w_i) - \frac{1}{2}\mu_i^T\Sigma^{-1}\mu_i\right.$$

$$= w_i^T x + b_i$$

$$g_{ij}(x) = g_i(x) - g_j(x)$$

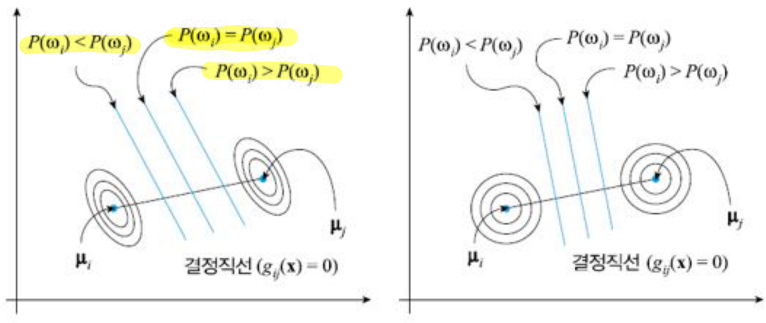
$$= \left(\Sigma^{-1}(\mu_i - \mu_j)\right)^T x + \left(\ln P(w_i) - \ln P(w_j) - \frac{1}{2}\mu_i^T\Sigma^{-1}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_j^T\Sigma^{-1}\mu_j\right.$$

$$= \underbrace{\left(\Sigma^{-1}(\mu_i - \mu_j)\right)^T}_{w}\left(x - \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\mu_i + \mu_j) - \frac{\mu_i - \mu_j}{(\mu_i - \mu_j)^T\Sigma^{-1}(\mu_i - \mu_j)}\ln\frac{P(w_i)}{P(w_j)}\right.}_{x_0}\right.$$

$$= w^T(w - w_0)$$

결정 경계상의 점 x는 $g_{ij}(x)=0$ 이어야 하는데, $g_{ij}(x)$가 1차식이므로 결정 경계가 초평면이라는 사실을 알 수 있다.

두 부류 w_i와 w_j가 공분산이 같아서 모양이 같은 타원으로 표현했다. 앞의 수식에 따르면 결정직선은 x_0를 지나며, $\Sigma^{-1}(\mu_i-\mu_j)$에 수직이어야 한다.



(a) 공분산이 같은 경우 (b) 공분산이 같고 $\sigma^2\mathbf{I}$인 경우

그림 2.11 선형 분류기

* 두 부류의 사전확률 같다면 $\ln P(w_i)/P(w_j)=0$

$x_0=\frac{1}{2}(\mu_i+\mu_j)$, 즉 결정 직선은 두 평균 벡터 μ_i와 μ_j의 중점을 지나야 한다.

LDA
(linear discriminant analysis)

이러한 과정을 거쳐 선형 분류기를 만드는 방법: 선형 분별 분석

공분산 행렬이 $\Sigma = \sigma^2 I$ 인 경우, 대각선 요소는 σ^2을 갖고, 나머지 요소는 0을 갖는 행렬.

$\Sigma^{-1} = (1/\sigma^2) I$, 이 상황에서는 정규분포의 등고선이 타원이 아닌 원을 만든다. 이제 결정 직선은 $\mu_i - \mu_j$에 수직이다.

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_i - \mu_j)^T \left(x - \left(\frac{1}{2}(\mu_i + \mu_j) - \frac{\sigma^2(\mu_i - \mu_j)}{\|\mu_i - \mu_j\|^2} \ln \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} \right) \right)$$

$$= W^T(x - x_0)$$

- 예제 2.5

ω_1: $(1,2)^T$, $(3,1)^T$, $(5,2)^T$, $(3,3)^T$

ω_2: $(6,6)^T$, $(8,5)^T$, $(10,6)^T$, $(8,7)^T$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix}8/3 & 0\\ 0 & 2/3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix}8/3 & 0\\ 0 & 2/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{12}(\mathbf{x}) &= \left(\begin{pmatrix}3/8 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-8\\2-6\end{pmatrix}\right)^T \mathbf{x} \\ &\quad + \left(\ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}(3 \quad 2)\begin{pmatrix}3/8 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(8 \quad 6)\begin{pmatrix}3/8 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}\right) \\ &= (-15/8 \quad -6)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + (\ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2) + 34.3125) \\ &= -15/8x_1 - 6x_2 + (\ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2) + 34.3125) \end{aligned}$$

$P(\omega_1) = 0.5, P(\omega_2) = 0.5$인 경우: $5x_1 + 16x_2 - 91.5 = 0$

$P(\omega_1) = 0.8, P(\omega_2) = 0.2$인 경우: $5x_1 + 16x_2 - 95.197 = 0$

$P(\omega_1) = 0.2, P(\omega_2) = 0.8$인 경우: $5x_1 + 16x_2 - 87.803 = 0$

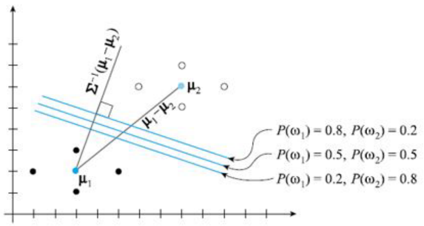


그림 2.12 선형 분별 분석 (LDA) 사례

2019/11/14

2.4.3 2차 분별

공분산 제약없을 때

$g_{ij}(x) = g_i(x) - g_j(x)$

2차식 = 2차식 - 2차식

결정곡선은 쌍곡선도 타원도 된다.

$$g_i(\mathbf{x}) = \underbrace{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\mathbf{x}}_{\text{2차 항}} + \underbrace{\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\mathbf{x}}_{\text{1차 항}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{\mu}_i - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| + \ln P(\omega_i)\right)}_{\text{상수 항}} \tag{2.40}$$

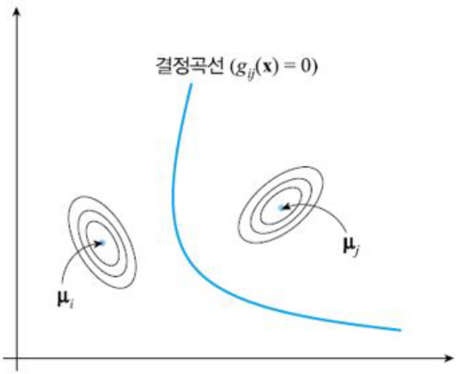


그림 2.13 2차 분별 분석으로 만든 2차 분류기

예제 2.6

ω_1: $(1,2)^T$, $(3,1)^T$, $(5,2)^T$, $(3,3)^T$ $\quad \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

ω_2: $(7,6)^T$, $(8,4)^T$, $(9,6)^T$, $(8,8)^T$ $\quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}$

$$g_{12}(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) = \frac{9}{16}x_1^2 - \frac{9}{16}x_2^2 - \frac{87}{8}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{801}{16} + \ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2)$$

$P(\omega_1) = 0.8, P(\omega_2) = 0.2$인 경우: $3x_1^2 - 3x_2^2 - 58x_1 + 4x_2 + 274.3936 = 0$

$P(\omega_1) = 0.5, P(\omega_2) = 0.5$인 경우: $3x_1^2 - 3x_2^2 - 58x_1 + 4x_2 - 267 = 0$

$P(\omega_1) = 0.2, P(\omega_2) = 0.8$인 경우: $3x_1^2 - 3x_2^2 - 58x_1 + 4x_2 + 259.6064 = 0$

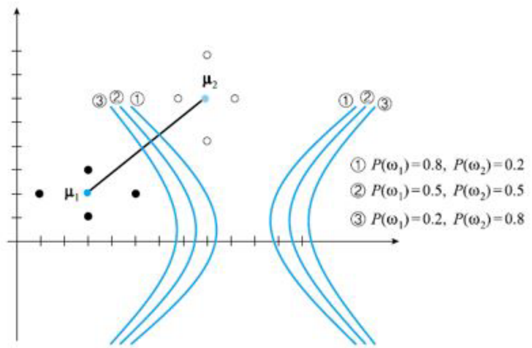


그림 2.14 2차 분별 분석 (QDA) 사례

2.4.4 최소 거리 분류기

• 최소거리 분류기로 다시 해석해 보자

수식 유도 편의를 위해 두 부류의 사전 확률과 공분산 행렬 같다고 가정.

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu_i)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_i)$$

• 최소 거리 분류기

기준 $k = \arg\min \left((x-\mu_i)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_i) \right)^{\frac{1}{2}}$

* 거리 척도

마할라노비스 거리: $\left((x-\mu_i)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_i)\right)^{\frac{1}{2}}$

유클리디언 거리 $\left((x-\mu_i)^T (x-\mu_i)\right)^{\frac{1}{2}} = \|x-\mu_i\|$

($\Sigma = \sigma^2 I$)인 경우

예제 2.7 ω_1: $(1,2)^T$, $(3,1)^T$, $(5,2)^T$, $(3,3)^T$

ω_2: $(6,6)^T$, $(8,5)^T$, $(10,6)^T$, $(8,7)^T$

$\mathbf{x} = (8,2)^T$

$\boldsymbol{\mu}_1$까지의 마할라노비스 거리 $= \left(\begin{pmatrix} 8-3 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} \right)^{1/2} = 3.062$

$\boldsymbol{\mu}_2$까지의 마할라노비스 거리 $= \left(\begin{pmatrix} 8-8 & 2-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8-8 \\ 2-6 \end{pmatrix} \right)^{1/2} = 4.899$

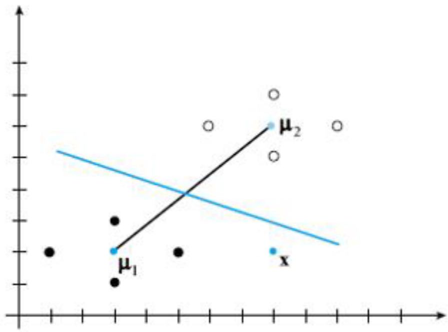


그림 2.15 두 통계 분포까지의 마할라노비스 거리

2.5 베이시언 분류의 특성

1. 비현실성을 내포 : 일반적인 확률 분포를 사용하려면 차원의 저주 발생, 정규분포를 가정하려면 실제 확률분포와 차이 발생

2. 실제 확률 분포를 안다고 가정하면 오류율 측면에서 최적!

3. M개 부류 각각에 대해 그에 속할 확률 출력, 즉, $g_i(x)$를 확률로 해석할 수 있다. 따라서 이 확률을 신뢰도 값으로 삼아 후처리 등에 활용할 수 있다.

특징들이 모두 "독립"이라는 가정을 하고, 차원의 저주를 피하는 방법

$$P(x|w_i) = \prod_{j=1}^{d} P(x_j | w_i)$$ 나이브 베이시언 분류기

- 우도 계산을 $\Uparrow$로 함

차원의 저주를 피했으나, 성능 저하

2.6 기각처리

· 신뢰도가 충분하지 않은 경우는 의사결정 포기

그림에서 두 부류의 확률 차이가 Δ보다 작으면 기각

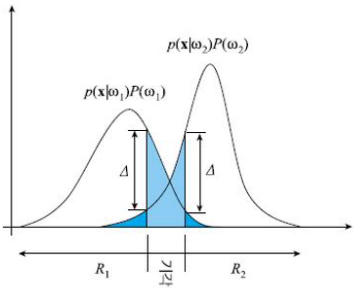


그림 2.16 기각 처리