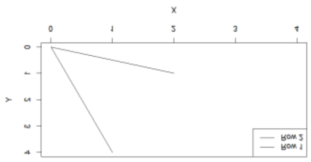
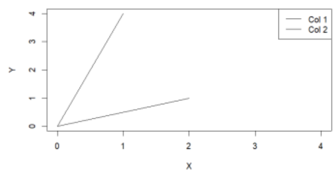
2.3

```r
# 행렬 A 정의
A <- matrix(c(2, 1, 1, 4), nrow = 2, byrow = TRUE)

# (a) 행벡터를 쓰고, 2차원 좌표평면에 나타내기
row1 <- A[1, ]  # 첫 번째 행벡터
row2 <- A[2, ]  # 두 번째 행벡터

# 행벡터 좌표평면에 나타내기
plot(c(0, row1[1]), c(0, row1[2]), type="l", xlim=c(0,4), ylim=c(0,4), xlab="X", ylab="Y")
lines(c(0, row2[1]), c(0, row2[2]))
legend("topright", legend=c("Row 1", "Row 2"), lty=1)
```



```r
# (b) 열벡터를 쓰고, 2차원 좌표평면에 나타내기
col1 <- A[, 1]  # 첫 번째 열벡터
col2 <- A[, 2]  # 두 번째 열벡터

# 열벡터 좌표평면에 나타내기
plot(c(0, col1[1]), c(0, col1[2]), type="l",xlim=c(0,4), ylim=c(0,4), xlab="X", ylab="Y")
lines(c(0, col2[1]), c(0, col2[2]))
legend("topright", legend=c("Col 1", "Col 2"), lty=1)
```



```
> # (c) rank(A)를 구하기
> rankA <- qr(A)$rank
> rankA
[1] 2
>
> # (d) A의 고유값과 고유벡터를 구하기
> eigenA <- eigen(A)
> eigenA$values  # 고유값
[1] 4.414214 1.585786
> eigenA$vectors  # 고유벡터
          [,1]       [,2]
[1,] 0.3826834 -0.9238795
[2,] 0.9238795  0.3826834
>
> # (e) A의 역행렬을 구하기
> invA <- solve(A)
> invA
           [,1]       [,2]
[1,]  0.5714286 -0.1428571
[2,] -0.1428571  0.2857143
>
> # (f) A의 스펙트럼 분해 (spectral decomposition)
> eigenA$vectors %*% diag(eigenA$values) %*% t(eigenA$vectors)
     [,1] [,2]
[1,]    2    1
[2,]    1    4
>
> # (g) A의 역행렬의 고유값과 고유벡터를 구하기
> eigenInvA <- eigen(invA)
> eigenInvA$values  # 고유값
[1] 0.6306019 0.2265409
> eigenInvA$vectors  # 고유벡터
           [,1]       [,2]
[1,] -0.9238795 -0.3826834
[2,]  0.3826834 -0.9238795
>
> # (h) A는 양정치행렬인가?
> is_positive_definite <- all(eigenA$values > 0)
> is_positive_definite
[1] TRUE
```

```
> # (i) A'A를 구하기
> ATA <- t(A) %*% A
> ATA
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    6   17
>
> # (j) A'A의 고유값과 고유벡터를 구하기
> eigenATA <- eigen(ATA)
> eigenATA$values  # 고유값
[1] 19.485281  2.514719
> eigenATA$vectors  # 고유벡터
          [,1]       [,2]
[1,] 0.3826834 -0.9238795
[2,] 0.9238795  0.3826834
>
> # (k) A'A의 역행렬을 구하기
> invATA <- solve(ATA)
> invATA
           [,1]       [,2]
[1,]  0.3469388 -0.1224490
[2,] -0.1224490  0.1020408
>
> # (l) A의 제곱을 구하기
> A_squared <- A %*% A
> A_squared
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    6   17
>
> # (m) A의 제곱의 고유값과 고유벡터를 구하기
> eigenA_squared <- eigen(A_squared)
> eigenA_squared$values  # 고유값
[1] 19.485281  2.514719
> eigenA_squared$vectors  # 고유벡터
          [,1]       [,2]
[1,] 0.3826834 -0.9238795
[2,] 0.9238795  0.3826834

> # (n) A의 제곱을 스펙트럼 분해로 표현하기
> eigenA_squared$vectors %*% diag(eigenA_squared$values) %*% t(eigenA_squared$vectors)
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    6   17
```

2.4

```
> # 2.4 공분산행렬 Σ 정의
> Sigma <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 16), nrow = 3, byrow = TRUE)
>
> # (a) rank(Σ)를 구하시오
> rank_Sigma <- qr(Sigma)$rank
> rank_Sigma
[1] 3
>
> # (b) Σ의 고유값과 고유벡터, 단위 고유벡터 구하기
> eigenSigma <- eigen(Sigma)
> eigenSigma$values  # 고유값
[1] 16  9  1
> eigenSigma$vectors  # 고유벡터
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    1
[2,]    0    1    0
[3,]    1    0    0
>
> # 단위 고유벡터 (단위 벡터로 정규화)
> unit_eigenvectors <- eigenSigma$vectors / sqrt(rowSums(eigenSigma$vectors^2))
> unit_eigenvectors
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    1
[2,]    0    1    0
[3,]    1    0    0
>
> # (c) Σ의 역행렬을 구하시오
> invSigma <- solve(Sigma)
> invSigma
     [,1]      [,2]   [,3]
[1,]    1 0.0000000 0.0000
[2,]    0 0.1111111 0.0000
[3,]    0 0.0000000 0.0625

> # (d) Σ의 스펙트럼 분해로 표현하시오
> eigenSigma$vectors %*% diag(eigenSigma$values) %*% t(eigenSigma$vectors)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    9    0
[3,]    0    0   16
>
> # (e) Σ의 역행렬의 고유값과 고유벡터를 구하시오
> eigenInvSigma <- eigen(invSigma)
> eigenInvSigma$values  # 역행렬의 고유값
[1] 1.0000000 0.1111111 0.0625000
> eigenInvSigma$vectors  # 역행렬의 고유벡터
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
>
> # (f) Σ는 양정치행렬인가?
> is_positive_definite_Sigma <- all(eigenSigma$values > 0)
> is_positive_definite_Sigma
[1] TRUE
>
> # (g) Σ를 이용하여 X의 상관행렬을 구하시오
> correlation_matrix <- cov2cor(Sigma)
> correlation_matrix
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
>
> # (h) |Σ|를 구하고 고유값들의 곱과 일치하는지 알아보시오
> det_Sigma <- det(Sigma)
> det_Sigma
[1] 144
>
> # (i) tr(Σ)를 구하고 고유값들의 합과 일치하는지 알아보시오
> trace_Sigma <- sum(diag(Sigma))
> trace_Sigma
[1] 26
>
> sum_eigenvalues_Sigma <- sum(eigenSigma$values)
> sum_eigenvalues_Sigma
[1] 26
```

2.5

```
> # 2.5 행렬 A 정의
> A <- matrix(c(5, -4, 3, -4, 8, 6, 3, 6, 9), nrow = 3, byrow = TRUE)
>
> # (a) A의 고유값과 고유벡터를 구하시오
> eigenA <- eigen(A)
> eigenA$values  # 고유값
[1] 14.554216  8.844169 -1.398385
> eigenA$vectors  # 고유벡터
            [,1]       [,2]       [,3]
[1,] -0.06655815  0.7859942 -0.6146407
[2,]  0.69553198 -0.4051259 -0.5933871
[3,]  0.71540567  0.4669970  0.5197197
>
> # (b) tr(A)를 구하고 고유값들의 합과 같은지 확인해보시오
> trace_A <- sum(diag(A))
> trace_A
[1] 22
>
> sum_eigenvalues_A <- sum(eigenA$values)
> sum_eigenvalues_A
[1] 22
>
> # (c) |A|를 구하고 고유값들의 곱과 같은지 확인해보시오
> det_A <- det(A)
> det_A
[1] -180
>
> product_eigenvalues_A <- prod(eigenA$values)
> product_eigenvalues_A
[1] -180
>
> # (d) A의 역행렬을 구하시오
> invA <- solve(A)
> invA
```