1. 극한과 관련하여 다음을 구해보자.
(1) 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+h}} \right) \tag{1}$$

이 때, $f(1/4)$의 값을 구해보자. (0.5점)

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{x+h-x}}{(\sqrt{x}\sqrt{x+h})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

(2) 서로 다른 두 실수 α, β가 $\alpha + \beta = 3$을 만족시킬 때, 다음을 구해보자. (0.5점)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}} \tag{2}$$

분자·분모에

$\times (\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta})$
$(\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2})$ $\rightarrow$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\cancel{x}+\alpha^2 - (\cancel{x}+\beta^2))(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(\cancel{4x}+\alpha) - (\cancel{4x}+\beta)(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta})}$$

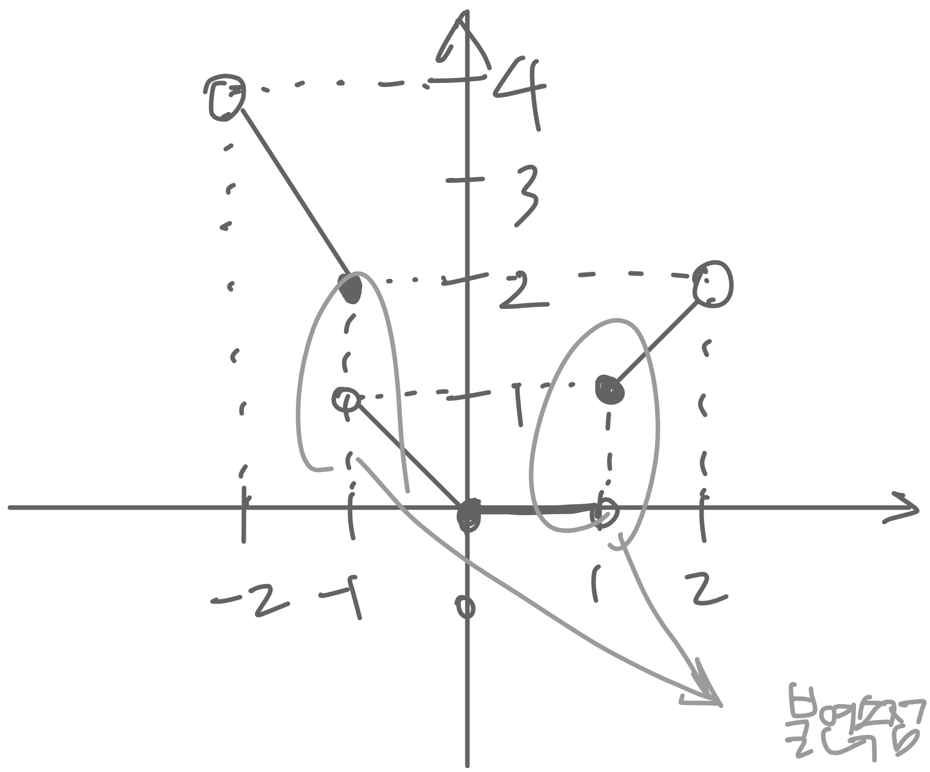
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(\alpha-\beta)(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\alpha+\beta)(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2}}$$

$$= 3 \cdot \frac{2+2}{1+1} = 3 \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}} = 6$$

2. $-2 < x < 2$의 구간에서 함수 $f(x) = x\lceil x \rceil$ 의 불연속점의 개수를 구해보자. (단, $\lceil x \rceil$는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$f(x) = x\lceil x \rceil$



불연속점 개수 = 2

3. 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 6$ 일 때, 다음을 구해보자.

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(-2)} \right)$$

$$= f'(4) \times \lim_{x\to 2} \frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)} \times (x-2))$$

$f(x)$: y축 대칭이므로

$f(-2) = f(2)$

$$\longrightarrow = 6 \times \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{f(x)-f(2)} \times (x+2) \right)$$

$$= 6 \times \frac{1}{f'(2)} \times 4$$

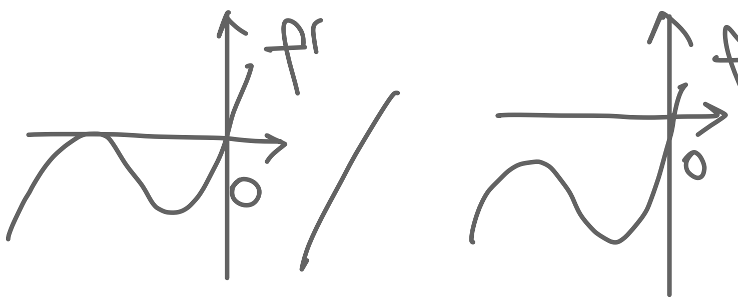
$$= 6 \times \frac{1}{-3} \times 4 = -8$$

4. 사차함수 $f(x) = 2x^4 - px^3 + x^2$ 이 $x < 0$에서는 감소하고, $x > 0$ 에서는 증가할 때, 실수 p의 값의 범위를 구해보자.

$f'(x) = 8x^3 - 3px^2 + 2x$

$= x(8x^2 - 3px + 2)$

$f(x)$: $x<0$ 감소 , $x>0$ 증가에 의해..



$8x^2 - 3px + 2$ 의 $D \le 0$

$D = (3p)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2 = 9p^2 - 64 \le 0$

$p^2 \le \frac{64}{9}$

$-\frac{8}{3} \le p \le \frac{8}{3}$

5. 함수 $f(x) = |x-1|(x+a)$가 $x = 1$ 에서 미분가능하도록 하는 실수 a의 값을 구해보자.

$$f(x) \begin{cases} x \geq 1 : (x-1)(x+a) \\ x < 1 : -(x-1)(x+a) \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} x > 1 : 2x+a-1 \\ x < 1 : -2x-a+1 \end{cases}$$

$x=1$ 에서 미분계수 존재 $\rightarrow \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$

$$-2-a+1 = 2+a-1$$

$$a = -1$$

6. 남학생과 여학생 각각 75명을 대상으로 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는지를 조사하였더니 조사 대상 학생 중 72%, 남학생의 64% 가 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 것으로 조사되었다. 조사 대상 학생 150명 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 학생이었을 때, 그 학생이 여학생일 확률을 구해보자.

	O	X
남 : 75명	64%	36%
	$\cancel{75}^{3} \times \frac{\cancel{64}^{16}}{\cancel{100}_{25}} = 48$	27
여 : 75명	$108 - 48 = 60$	15

$\cancel{150}^{3} \times \frac{\cancel{72}^{36}}{\cancel{100}_{2}} = 108$

수강경험 있는 학생이었을때. 여학생일 확률?

$$\frac{60}{48+60} = \frac{\cancel{60}^{10}}{\cancel{108}_{18}} = \frac{5}{9}$$

7. 두 함수 $f(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 + k$, $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 열린구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구해보자.

$f(x) - g(x) = h(x)$

$h(x) = x^5 + \cancel{x^3} - 3x^2 + k - \cancel{x^3} + 5x^2 - 3$

$= x^5 + 2x^2 + k - 3$

→ $h(x)$가 (1.2)에서 적어도 하나의 실근을 가질때 정수 k 개수.

⇒ $h(1)h(2) < 0$ (사잇값 정리)

$h(1) = k$

$h(2) = 32 + 8 + k - 3 = 37 + k$

$k(37 + k) < 0$

$-37 < k < 0$ $(k = -36, -35, \cdots, -1)$

k의 개수: 36

8. $\{1,2,3,4\}$에서 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) \geq f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 f의 개수를 구해보자.

1.2.3.4.5.6.7 중

중복 상관 없이 4개를 택하여

큰순으로 나누어 줌

$$\rightarrow {}_{7}H_{4} = {}_{10}C_{4} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 210$$

9. 책상 서랍 속에 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개가 들어 있다. 이 동전들 중 임의로 6개의 동전을 가지고 나와 500원짜리 아이스크림을 사려고 할 때, 아이스크림을 살 수 있을 확률을 구해보자. (단, 각각의 동전이 뽑힐 확률은 같다.)

12개 동전 중 6개를 뽑는 경우의 수 $= {}_{12}C_6$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}$$

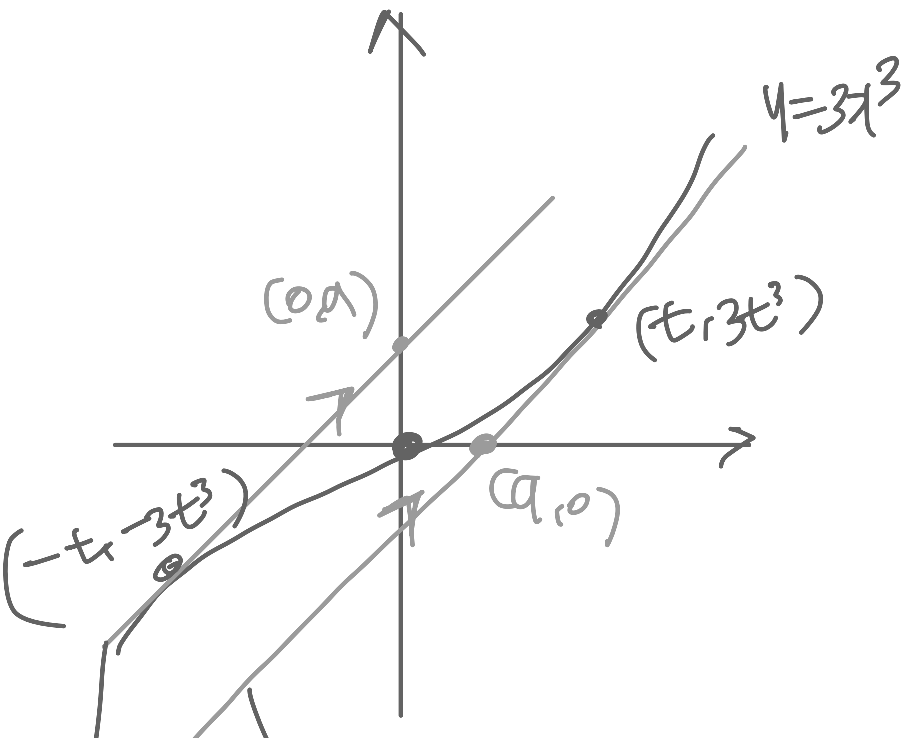
$$= 7 \cdot 11 \cdot 12 = 924$$

아이스크림을 살 확률 $= \dfrac{1 + 36 + 90}{924} = \dfrac{127}{924}$

- $100 \times 6 \to {}_6C_6 = 1$
- $100 \times 5 + 50/10 \times 1 \to {}_6C_5 \times {}_6C_1 = 36$
- $100 \times 4 + 50 \times 2 \to {}_6C_4 \times {}_4C_2 = \dfrac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{2}}$

$$= 15 \cdot 6 = 90$$

10. 양의 정수 a에 대하여 점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = 3x^3$에 그은 접선과 점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y = 3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구해보자.



접선의 방정식

$y = 9t^2(x - t) + 3t^3 = 9t^2x - 6t^3$

(a,0)

$0 = 9t^2a - 6t^3$

접선의 방정식

$y = 9t^2(x + t) - 3t^3 = 9t^2x + 6t^3$

(0,a)

$a = 6t^3$

$t = \frac{1}{3}$. $a = \frac{2}{9}$ $90a = 90 \cdot \frac{2}{9} = 20$

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr