بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی برق

گزارش پروژه درس آمار و احتمال

سپهر کاظمی رنجبر ۹۹۱۰۶۵۹۹
امیرحسین توکّلی ۹۹۱۰۹۱۴۴

۲ درخت دوستی بنشان !

پرسش تئوری ۱

برای اینکه تمام روابط را درست مشخص کند باید همه‌ی m رابطه را درست تعیین و هیچ رابطه‌ی دیگری را تعیین نکند همچنین هر یال را برابر با دو رابطه دوستی درنظر می‌گیریم، در نتیجه تعداد یال‌ها باید برابر با $\frac{m}{2}$ شود، پس داریم :

$$\mathbb{P}\left[\text{درست مشخص کردن تمام روابط دوستی}\right] = p^{\frac{m}{2}}\,(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m}{2}}$$

پرسش تئوری ۲

از آنجایی در این قسمت مقدار دقیق m را می‌دانیم به صورت تصادفی و یکنواخت m رابطه برقرار می‌کنیم و فقط به ازای ۱ حالت روابط درست می‌شود پس داریم :

$$\mathbb{P}\left[\text{درست تشخیص دادن تمام روابط دوستی}\right] = \frac{1}{\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{m}{2}}}$$

پرسش تئوری ۳

از آنجایی که معلوم نیست $0.2 \times \frac{m}{2}$ عدد طبیعی شود یا نه، حدّ بالای آن را درنظر می‌گیریم، حال برای حساب کردن آن باید $\lceil \frac{m}{10} \rceil$ از $\frac{m}{2}$ یال را انتخاب کرده و رسم می‌کنیم و مابقی آن $\frac{m}{2}$ یال را رسم نمی‌کنیم ، این که یال‌های دیگر وجود دارند یا نه، اهمیت ندارد.

$$\mathbb{P}\left[\text{درست تشخیص دادن ۲۰ درصد روابط}\right] = \binom{\frac{m}{2}}{\lceil \frac{m}{10} \rceil} p^{\lceil \frac{m}{10} \rceil}\,(1-p)^{\frac{m}{2}-\lceil \frac{m}{10} \rceil}$$

پرسش شبیه‌سازی ۱

با استفاده از کتابخانه networkx و تابع fast_gnp_random_graph می‌توان گراف تصادفی با تعداد رئوس n و احتمال هر یال p ایجاد کرد، سپس با دستور len(edge) می توان تعداد یال‌های گراف را فهمید.
حال این کار ۱۰ بار تکرار می‌کنیم و داریم :

```python
n = 1000
m = 3000
p = 0.0034
graph_length = lambda : len(nx.fast_gnp_random_graph(n,p).edges)
X = np.array([graph_length() for i in range(0,10)])
E = np.mean(X)
E
```

```
1705.0
```

شکل ۱: کد پایتون میانگین یال‌های گراف تصادفی

مشاهده می‌کنیم :

$$\mathbb{E}\left[\text{تعداد یال‌های گراف}\right] = ۱۷۰۵ \rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[\text{تعداد روابط دوستی}\right] = ۳۴۱۰}$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم میانگین تعداد روابط دوستی گراف با m خطایی به اندازه‌ی $\frac{۳۴۱۰-۳۰۰۰}{۳۰۰۰} \approx ۱۳/۶۷\%$ دارد که از ۵٪ بزرگتر است پس نمی‌توان گفت که با m برابر است.

پرسش تئوری ۴

اگر تعداد یال‌های گراف را با متغیر تصادفی X نشان دهیم آنگاه متغیر تصادفی X_{ij} که نشان دهنده وجود یال بین دو راس i, j است را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$X_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{with probability} \quad p \\ ۰ & \text{with probability} \quad ۱ - p \end{cases}$$

که :

$$X = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} X_{ij}$$

حال داریم :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i} \sum_{j>i} X_{ij}\right] \\ &= \sum_{i} \sum_{j>i} \mathbb{E}\left[X_{ij}\right] \\ &= \sum_{i} \sum_{j>i} \left(۱ \times p + ۰ \times (۱ - p)\right) \\ &= \frac{n\left(n-۱\right)}{۲} p = ۱۶۹۸/۳ \rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[\text{تعداد روابط دوستی گراف}\right] = n\left(n-۱\right)p = ۳۳۹۶/۶} \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که با شبیه‌سازی همخوانی دارد. در نتیجه مقدار m باید برابر باشد با :

$$\boxed{m = n\left(n-۱\right)p \approx ۳۳۹۷}$$

در این صورت آنگاه خطای جواب پرسش اول شبیه‌سازی برابر است با :

$$\text{خطا} = \frac{۳۴۱۰ - ۳۳۹۷}{۳۳۹۷} \approx ۰/۳۸\%$$

که بسیار کمتر از ٪۵ است.

۳ خلوت گزیده را به تماشا چه حاجت است؟

پرسش شبیه‌سازی ۲

در گراف این مجموعه دوستی ها، تعداد دوست یک فرد برابر است با درجهٔ آن راس که از G.dgree[i] بدست می‌آید همینطور برای استفاده از list رئوس از G.nodes استفاده می‌کنیم. با یک for با ۱۰ بار تکرار هربار گراف تصادفی با generators.random_graphs.binomial_graph(p،n) می‌سازیم، در هر مرحله برای پیدا کردن L درجات رئوس را باهم جمع کرده تقسیم بر تعداد رئوس میکنیم. سپس در یک for دیگر درجه هر راس را با L مقایسه می‌کنیم و طبق تعریف اگر درجه از L بیشتر بود به تعداد افراد اجتماعی اضافه می‌کنیم. در اخر تعداد افراد اجتماعی را تقسیم بر ۱۰ یعنی تعداد شبیه سازی ها می‌کنیم تا متوسط آن بدست بیاید. برای بدست آوردن نمودار یک بردار n تایی تعریف می‌کنیم که درایه i اُم آن برابر تعداد افرادی است که i دوست دارند و در یک for روی رئوس اگر یک راس i درجه داشته باشد به درایه i اُم بردار یکی اضافه می‌کنیم. در آخر مولفه های این بردار را بر ۱۰ تقسیم کرده و با matplotlib می‌کشیم:

```
n=1000
p=0.00016
socis=0 #sum of social people
y=[0]*n #number of people with same friends number in 10 simulation
for i in range (0,10):
    s=0 #sum of graph degrees
    G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
    for j in G.nodes:
        s+=G.degree[j]
        for k in range (0,n):
            if(G.degree[j]==k):
                y[k]+=1
    L=s/n #average of a perosn's friends
    soci=0 #social people
    for l in G.nodes:
        if(G.degree[l]>L):
            soci+=1
    socis+=soci
print(socis/10) #mean of social people from 10 simulation
```

✓ 19.8s

```
148.0
```

شکل ۲: کد پایتون میانگین افراد اجتماعی

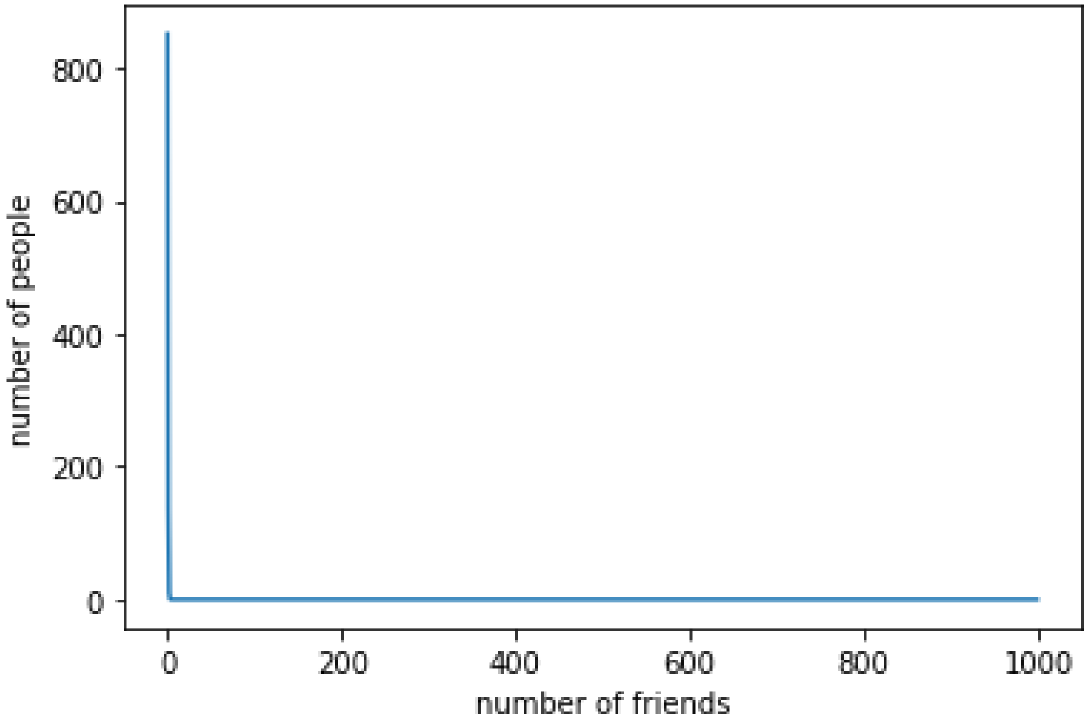
پس داریم:

$$\mathbb{E}\left[\text{تعداد افراد اجتماعی}\right] = ۱۴۸/۰$$

```
for i in range (0,1000):
    y[i]/=10 #mean number of people with same friends number
plt.figure()
plt.plot(y)
plt.show()
```

شکل ۳: کد پایتون رسم نمودار فراوانی تعداد دوست

نمودار به شکل زیر در می‌آید:



شکل ۴: نمودار فراوانی تعداد دوست

چون p بسیار کوچک است اکثر رئوس منفرد هستند یعنی اکثر افراد دوستی ندارند که با نمودار همخوانی دارد.

پرسش تئوری ۵

هر راس با احتمال(میانگین) p با راس کنار خودش همسایه است(با هم دوست اند) و درکل $n-۱$ راس همسایه وجود دارد در نتیجه میانگین تعداد دوستی های یک فرد (میانگین درجه یک راس) برابر است با:

$$\boxed{L=(n-۱)\,p=۰/۱۵۹۸۴}$$

یعنی فردی با تعداد دوست بزرگتر مساوی ۱، اجتماعی محسوب می‌شود که بدلیل کوچکی p و کم بودن تعداد روابط دوستی است.

پرسش تئوری ۶

می‌دانیم تعداد درجات یک راس برابر با مجموع n-۱ متغیر برنولی با احتمال p است پس توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n-۱ دارد و احتمال اجتماعی بودن یک فرد به اینصورت است (میدانیم L بین ۰ و ۱ است):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\text{اجتماعی بودن فرد}\right] &= \mathbb{P}\left[X>L\right]\\
&= ۱-\mathbb{P}\left[X=۰\right]\\
&= ۱-\binom{n-۱}{۰}p^{۰}\left(۱-p\right)^{n-۱}\\
&= ۱-\left(۱-p\right)^{n-۱} \rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left[\text{اجتماعی بودن فرد}\right]\approx ۰/۱۴۷۷۳۱} = \mathbb{E}\left[\text{اجتماعی بودن فرد}\right]
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم:

$$Y_i=\begin{cases} ۱ & \text{soical} \quad p_{۰}=۰/۱۴۷۷۳۱\\ ۰ & \text{unsocial} \quad ۱-p_{۰}\end{cases}$$

پس Y یعنی تعداد افراد اجتماعی برابر است با:

$$Y=\sum_{i=۱}^{n}Y_i$$

حال:

$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}[Y_i]\rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[\text{افراد اجتماعی}\right]=np_{۰}\approx ۱۴۷/۷۳۱}$$

۴ هواداران کویش را چو جان خویشتن دارم؟

پرسش شبیه‌سازی ۳

مطابق شکل زیر کد را می‌زنیم :

```python
n = 3000
p = 0.01
def simulation3 (n,p) :
    path = 0
    cyc = 0
    G = nx.fast_gnp_random_graph(n,p)
    for i in range(0,n):
        path = path + nx.degree(G,i)*(nx.degree(G,i)-1)/2
    for i in range(0,n):
        help1 = np.array(sorted([key for key in (G[i])]))
        help1 = help1[help1>i]
        for j in help1:
            help2 = np.array(sorted([key for key in (G[j])]))
            help2 = help2[help2>j]
            for k in help2:
                if i in G[k] :
                    cyc = cyc+1
    return [path-3*cyc,cyc]
test = np.array([simulation3(n,p) for i in range(0,5)])
Ep = np.mean(test[:,0])
Ec = np.mean(test[:,1])
[Ep,Ec]
```
```
✓ 4.6s                                                    Python
[1337257.6, 4482.4]
```

شکل ۵: کد پایتون قسمت پرسش شبیه‌سازی ۳

در کد بالا، ابتدا تابعی به نام simulation3 تعریف می‌کنیم، سپس دو متغیر path و cyc که به ترتیب بیانگر تعداد روابط رقابت و تراگذری هستند رو تعریف می‌کنیم، حال ابتدا تعداد مسیرهای به طول دو را در گراف پیدا می‌کنیم، برای این کار باید به این نکته توجه کنیم که اگر راسی به درجه d داشته باشیم تعداد $\frac{d(d-۱)}{۲}$ مسیر به طول ۲ به مرکزیّت آن راس می‌توانیم داشته باشیم حال با حلقه فور روی تمام راس تعداد مسیرها را به دست می‌آوریم، نکته مهم این است که در این محاسبه مسیرهای رو حلقه‌ها را هم شمردیم در آخر باید آن هارا کم بکنیم. حال تعداد حلقه‌های به طول ۳ را پیدا می‌کنیم، برای اینکه حلقه‌های تکراری را نشمریم آن‌ها را به ترتیب صعودی می‌شمریم با این کار هر حلقه فقط یک‌بار شمرده می‌شود. حال دو حلقه فور روی راس اول و رئوس مجاور راس اول یا راس دوم پیاده سازی می‌کنیم و در حلقه فور سوم چک می‌کنیم که راس اول جزو رئوس مجاور راس سوم هست یا نه، در صورت وقوع این یکی به حلقه‌های ما اضافه می‌شود، در نهایت از آنجایی که در شمارش تعداد مسیرها، مسیر های رو حلقه را هم حساب کردیم باید آن ها را کم کنیم، چون می‌دانیم که روی هر حلقه به طول سه، سه مسیر به طول دو وجود دارد پس باید از تعداد مسیرهایی که به دست آوردیم باید به اندازه‌ی (۳ × تعداد حلقه‌ها) کم کنیم. در نهایت این دو مقدار را از تابع ریترن می‌کنیم. و سپس پنج بار این تابع را فرا می‌خوانیم و در نهایت میانگین مقادیر را بهدست می‌آوریم.

حال مشاهده می‌کنیم که میانگین روابط ترگذاری و رقابت برابر است با :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\text{روابط رقابت}\right] = ۱۳۳۷۲۵۷/۶} \quad , \quad \boxed{\mathbb{E}\left[\text{روابط ترگذری}\right] = ۴۴۸۲/۴}$$

پرسش شبیه‌سازی ۴

با توجه به توضیحات قسمت قبل، صرفاً کد قسمت قبل را به ازای $p = ۰/۴$ ران می‌کنیم و داریم :

```python
p = 0.4
test = np.array([simulation3(n,p) for i in range(0,5)])
Ep = np.mean(test[:,0])
Ec = np.mean(test[:,1])
[Ep,Ec]
```

```
[16]  ✓ 73m 46.1s                                                        Python
...   [1295869181.2, 288313060.2]
```

شکل ۶: کد پایتون قسمت پرسش شبیه‌سازی ۴

با توجه به کد بالا داریم :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\text{روابط رقابت}\right] = ۱۲۹۵۸۶۹۱۸۱/۲} \quad , \quad \boxed{\mathbb{E}\left[\text{روابط تراگذری}\right] = ۲۸۸۳۱۳۰۶۰/۲}$$

پرسش تئوری ۷

ابتدا میانگین روابط دوستی دارای خاصیت تراگذری را حساب می‌کنیم :

$$X_{ijk} = \begin{cases} ۱ & \text{سه راس } i,j,k \text{ تشکیل مثلث بدهند} \\ ۰ & \text{سه راس } i,j,k \text{ تشکیل مثلث ندهند} \end{cases}$$

که :

$$\text{تعداد کل مثلث‌ها} = X = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} X_{ijk}$$

همچنین به علّت استقلال یال‌ها داریم :

$$\mathbb{P}\left[X_{ijk} = ۱\right] = p^{۳} \quad , \quad \mathbb{P}\left[X_{ijk} = ۰\right] = ۱ - p^{۳}$$

حال با توجّه به خاصیت خطی میانگین نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\right] &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} \mathbb{E}\left[X_{ijk}\right] \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} p^{۳} \\ &= \binom{n}{۳} p^{۳} \\ &= \boxed{\frac{n\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)}{۶} p^{۳}} \end{aligned}$$

حال میانگین روابط رقابت را به دست می‌آوریم، برای این کار اگر سه راس i, j, k بخواهند تشکیل مسیری به طول ۲ و بدون حلقه بدهند به سه ترتیب ijk و ikj و jik می توانند قرار گیرند، جایگشت‌های هر کدام از این سه حالت مسیر جدیدی به ما نمی‌دهد. حال تعریف می‌کنیم :

$$X_{ijk} = \begin{cases} ۱ & \text{سه راس } i,j,k \text{ تشکیل مسیر بدون حلقه به طول ۲ بدهند} \\ ۰ & \text{سه راس } i,j,k \text{ تشکیل مسیر بدون حلقه به طول ۲ ندهند} \end{cases}$$

که :

$$\text{تعداد کل مسیرهای بدون حلقه به طول ۲} = X = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} X_{ijk}$$

به علّت استقلال یال‌ها داریم :

$$\mathbb{P}\left[X_{ijk} = ۱\right] = ۳p^{۲}\left(۱ - p\right) \quad , \quad \mathbb{P}\left[X_{ijk} = ۰\right] = ۱ - ۳p^{۲}\left(۱ - p\right)$$

در نهایت با توّجه به خاصّت خطی میانگین داریم :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\right] &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} \mathbb{E}\left[X_{ijk}\right] \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} ۳p^{۲}\left(۱ - p\right) \\ &= \binom{n}{۳} ۳p^{۲}\left(۱ - p\right) \\ &= \boxed{\frac{n\left(n - ۱\right)\left(n - ۲\right)}{۲} p^{۲}\left(۱ - p\right)} \end{aligned}$$

پرسش تئوری ۸

در این قسمت عملاً سوال از ما می‌خواهد، احتمال وقوع رابطه تراگذری به شرط رابطه رقابت را برای هر سه نفر دلخواه محاسبه کنیم یا به عبارتی نسبت میانگین روابط تراگذری به میانگین روابط رقابت را دست بیاوریم :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\text{ترگذاری} \mid \text{رقابت + تراگذری}\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[\text{تراگذری} \cap \text{رقابت + تراگذری}\right]}{\mathbb{P}\left[\text{رقابت + تراگذری}\right]} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left[\text{تراگذری}\right]}{\mathbb{P}\left[\text{رقابت + تراگذری}\right]} \\ &= \frac{p^{۳}}{\binom{۳}{۲} p^{۲}\left(۱ - p\right) + p^{۳}} \\ &= \boxed{\frac{p}{۳p\left(۱ - p\right) + p}} \end{aligned}$$

حال نتایج شبیه‌سازی را چک می‌کنیم، در شبیه سازی نسبت روابط تراگذاری به مجموع روابط ترگاذری و رقابت کسر مورد نظر را به ما می‌دهد. ابتدا شبیه‌سازی ۳ را بررسی می‌کنیم : $(n = ۳۰۰۰ \, , \, p = ۰/۰۱)$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbb{E}\left[\text{روابط تراگذری}\right]}{\mathbb{E}\left[\text{رقابت + تراگذری}\right]} = \dfrac{۴۴۸۲/۴}{۱۳۳۷۲۵۷/۶+۴۴۸۲/۴} \approx ۳/۳۴ \times ۱۰^{-۳} & \text{شبیه‌سازی} \\ \frac{p}{۳(۱-p)+p} \approx ۳/۳۶ \times ۱۰^{-۳} & \text{تئوری} \end{cases}$$

حال با شبیه‌سازی ۴ مقایسه می‌کنیم : $(n = ۳۰۰۰ \, , \, p = ۰/۴)$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbb{E}\left[\text{روابط تراگذری}\right]}{\mathbb{E}\left[\text{رقابت + تراگذری}\right]} = \dfrac{۲۸۸۳۱۳۰۶۰/۲}{۱۲۹۵۸۶۹۱۸۱/۲} \approx ۱/۸۲ \times ۱۰^{-۱} & \text{شبیه‌سازی} \\ \frac{p}{۳(۱-p)} \approx ۱/۸۱ \times ۱۰^{-۱} & \text{تئوری} \end{cases}$$

پرسش شبیه‌سازی ۵

برای محاسبه‌ی میانگین تعداد روابط دوستی میان دوستان یک شخص، در یک حلقه فور برای هر شخص باید تعداد روابط دوستی میان دوستان او را حساب کنیم در در نهایت بین همه مقادیر میانگین بگیریم. در نتیجه داریم :

```python
n = 1000
p = 0.003
G = nx.fast_gnp_random_graph(n,p)
sum = 0
for i in range(0,n):
    neighbor = np.array([key for key in G[i]])
    sum += G.subgraph(neighbor).number_of_edges()
friend_relation = sum*2/n
friend_relation
```
```
✓ 0.8s                                                  Python
0.024
```

شکل ۷: کد پایتون پرسش شبیه‌سازی ۵

با توجه به کد بالا مشاهده می‌کنیم :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\text{تعداد روابط دوستی میان دوستان یک شخص}\right] = ۰/۰۲۴}$$

پرسش تئوری ۹

مطابق شکل صورت سوال در دنیای واقعی دوستی‌ها کاملاً رندم نیست یعنی به نوعی وزن‌دار هستند مثلاً دوستان دانشگاه شخص احتمالاً باهم دوست هستند ولی دوستان دانشگاه شخص با دوستان محله‌ی او رندوم ممکن است دوست باشند به همین جهت وزن احتمالی بین همه یال‌های گراف یکسان نیست در نتیجه با بررسی داده‌های واقعی، تعداد روابط دوستی از پرسش شبیه‌سازی ۵ بیشتر می‌شود چون در آن پرسش ما همه دوستی ها را رندم با احتمال پایین گرفتیم در صورتی بعضی از دوستی‌ها احتمالشان خیلی زیاد است به عبارتی ما بدترین حالت را درنظر گرفتیم به همین جهت دوستی‌های بیشتری در دنیای واقعی وجود دارد.

پرسش تئوری ۱۰

متغیر تصادفی N را تعداد درجه‌ها یک راس یا دوستان یک فرد تعریف می‌کنیم، همچنین متغیر تصادفی X را هم تعداد یال‌های بین دوستان فرد تعریف می‌کنیم، حال متغیر تصادفی X_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$X_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر بین راس } i,j \text{ از زیرگراف دوستان یک فرد یال وجود داشته باشد} \\ ۰ & \text{اگر بین راس } i,j \text{ از زیرگراف دوستان یک فرد یال وجود نداشته باشد} \end{cases}$$

که :

$$X = \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j>i} X_{ij}$$

برای اینکه امید ریاضی X را حساب کنیم روی N شرطی می‌کنیم :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid N\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=۱}^{N} \sum_{j>i} \mathbb{E}\left[X_{ij}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{N\left(N-۱\right)}{۲} p\right] \end{aligned}$$

حال باید میانگین $N, N^{۲}$ را حساب کنیم، برای این کار متغیر تصادفی Y_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$Y_k = \begin{cases} ۱ & \text{اگر فرد دلخواه با نفر } k \text{ اُم دوست باشد} \\ ۰ & \text{اگر فرد دلخواه با نفر } k \text{ اُم دوست نباشد} \end{cases}$$

که :

$$N = \sum_{k=۱}^{n-۱} Y_k$$

حال ابتدا میانگین N را حساب می‌کنیم :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[N\right] &= \sum_{k=۰}^{n-۱} \mathbb{E}\left[Y_k\right] \\ &= \sum_{k=۰}^{n-۱} p \\ &= \left(n-۱\right) p \end{aligned}$$

حال میانگین $N^{۲}$ را حساب می‌کنیم :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N^{۲}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=۱}^{n-۱} Y_k\right)^{۲}\right] \\ &= \sum_{k=۱}^{n-۱} \mathbb{E}\left[Y_k^{۲}\right] + ۲\sum_{k=۱}^{n-۱}\sum_{l>k} \mathbb{E}\left[Y_k Y_l\right]\end{aligned}$$

متغیر تصادفی Y_{kl} تنها زمانی برابر با ۱ است که ۱ $= Y_l$, ۱ $= Y_k$ باشد در غیر این صورت صفر است در نتیجه به علّت استقلال یال‌ها با احتمال $p^{۲}$ ، یک و با احتمال $۱ - p^{۲}$ ، صفر است. همچنین متغیر تصادفی $Y_K^{۲}$ نیز، اگر ۱ $= Y_k$ باشد برابر با ۱ و اگر ۰ $= Y_k$ باشد برابر با ۰ است در نتیجه به احتمال p ، یک و به احتمال $۱ - p$ ، صفر است.
حال داریم :

$$\mathbb{E}\left[N^{۲}\right] = (n-۱)\,p + ۲ \times \frac{n\,(n-۱)}{۲} p^{۲}$$

در نهایت می توان گفت :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= \frac{p}{۲}\left(\mathbb{E}\left[N^{۲}\right] - \mathbb{E}\left[N\right]\right) \\ &= \frac{n\,(n-۱)}{۲} p^{۳} \rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[\text{تعداد روابط دوستی میان دوستان یک شخص}\right] = n\,(n-۱)\,p^{۳}}\end{aligned}$$

با جاگذاری اعداد پرسش شبیه‌سازی ۵، می‌بینیم که :

$$\mathbb{E}\left[\text{تعداد روابط دوستی میان دوستان یک شخص}\right] \approx ۰/۰۲۷$$

پس شبیه‌سازی با تئوری همخوانی دارد.

۵ من از دیار حبیبم نه از بلاد غریب!

پرسش شبیه‌سازی ۶

فاصلهٔ دو شخص یعنی طول کوتاه ترین مسیر بین دو رأس را با تابع shortest_path_length(G،i،j) پیدا می‌کنیم(در صورت نبود مسیر از expection استفاده میکنیم). با یک for تو در تو اگر دو راس i،j مسیری داشتند، فاصله بین آنها را پیدا کرده و با یکدیگر جمع می‌کنیم حال تقسیم بر تعداد این فاصله های پیدا شده می‌کنیم تا میانگین فاصله افراد بدست بیاید:

```
n=1000
p=0.0033
G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
s=0 #sum of distances
m=0 #number of pair people who have path between them
for i in range (1,n):
    for j in range (0,n-1):
        if(i>j):
            try:
                s+=shortest_path_length(G,i,j)
                m+=1
            except NetworkXNoPath:
                pass
print(s/m)

5.625811414039019
```

شکل ۸: کد میانگین فاصله افراد

طبق شبیه سازی داریم:

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\text{فاصله افراد}\right] \approx \text{۵٫۶۳}}$$

در مقابل ۱۰۰۰ نفر عدد خیلی کوچکی‌ست که بخاطر مقدار بسیار کم p رخ می‌دهد.

پرسش شبیه‌سازی ۷

در یک for با صد بار تکرار هر مرحله گراف binomial ایجاد می‌کنیم و با یک for تو در تو، ماکسیمم را با فاصله رئوس از یکدیگر را مقایسه می‌کنیم تا بیشترین فاصله بدست بیاید اگر هم گراف یالی نداشته باشد بیشترین فاصله را صفر در نظر می‌گیریم. سپس ماکسیمم ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم و در اخر تقسیم بر صد می‌کنیم تا میانگین بیشترین فاصله بین دو کاربر بدست آید:

```python
n=50
p=0.34
d=0  #sum of maximum distance
for i in range (0,100):
    G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
    max=0   #maximum distance
    l=[0,0] #indexes of two person with maximum distance
    for j in range (1,n):
        for k in range (0,n-1):
            if(j>k):
                try:
                    l=[k,j] if max<shortest_path_length(G,j,k) else l
                    max=shortest_path_length(G,j,k) if max<shortest_path_length(G,j,k) else max
                except NetworkXNoPath:
                    pass
    d+=max
print(d/100)
```

```
2.81
```

شکل ۹: کد ماکسیمم فاصله افراد

طبق شبیه سازی:

$$\boxed{\mathbb{E}\,[\text{بیشترین فاصله افراد}] \approx ۲/۸۱}$$

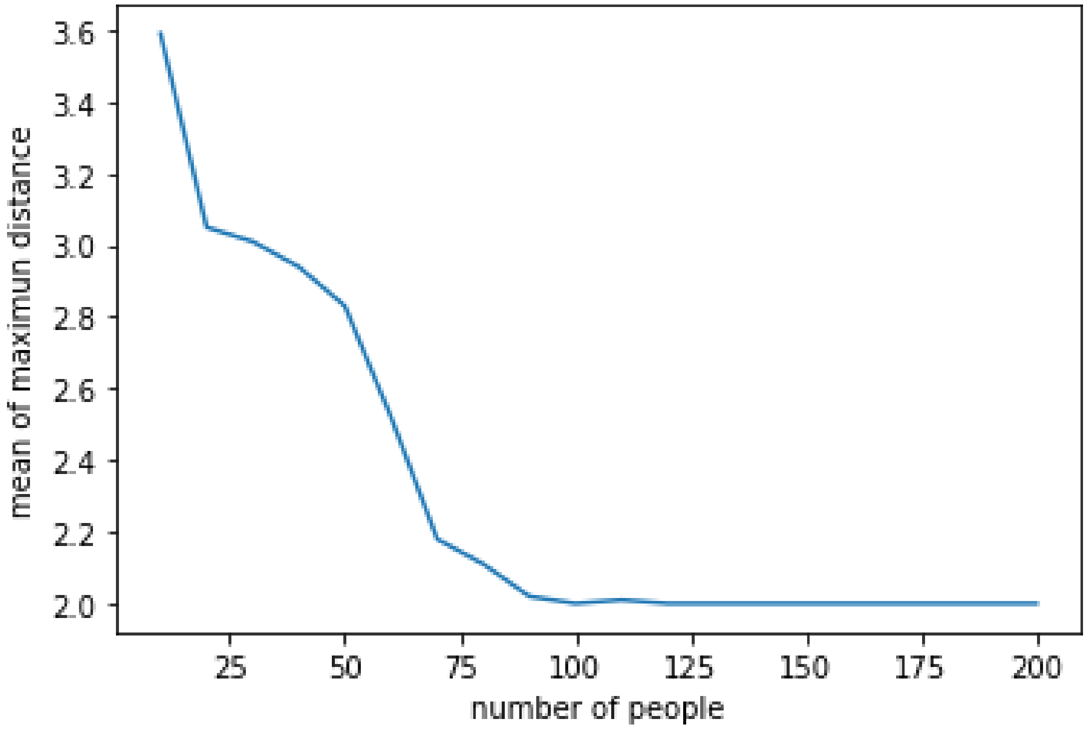
پرسش شبیه‌سازی ۸

کد قسمت قبل را به صورت تابعی برحسب n می‌نویسیم که خروجی آن بیشترین فاصله در گراف است. برای n های گفته شده f را حساب می‌کنیم و در یک list ذخیره می‌کنیم در اخر با matplotlib نمودار آن را می‌کشیم:

```python
def f(n): #mean of maximum distance in graph as a fucnction of n
    a,d=0,0
    for i in range (0,100):
        G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
        max=0
        for j in range (1,n):
            for k in range (0,n-1):
                if(j>k):
                    try:
                        max=shortest_path_length(G,j,k) if max<shortest_path_length(G,j,k) else max
                    except NetworkXNoPath:
                        pass
        d+=max
    return(d/100)
B=[]
x=[10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120,130,140,150,160,170,180,190,200]
for i in x:
    B.append(f(i))
plt.figure()
plt.plot(x,B)
plt.show()
```

شکل ۱۰: کد رسم نمودار بیشترین فاصله در گراف برحسب تعداد رئوس

نمودار به شکل زیر در خواهد آمد:



شکل ۱۱: نمودار بیشترین فاصله برحسب تعداد افراد

نمودار نزولی است. در ابتدا با شیب زیاد کاهش پیدا می‌کند سپس این شیب نرم تر می‌شود و از جایی به بعد برای n های زیاد به مقدار ثابت ۲ می‌رسد.

پرسش تئوری ۱۱

رئوس u, v را قرار می‌دهیم و $n - ۲$ راس دیگر یعنی w_i ها را بین این دو بصورت عمودی در نظر می‌گیریم. حال تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} ۱ & u \text{ and } w_i \text{ are friends} \quad p \\ ۰ & o.w. \qquad\qquad\qquad ۱ - p \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} ۱ & v \text{ and } w_i \text{ are friends} \quad p \\ ۰ & o.w. \qquad\qquad\qquad ۱ - p \end{cases}$$

حال $Z_i = X_i + Y_i$ توزیع دوجمله‌ای با پارامتر ۲ دارد و میدانیم اگر همه Z_i ها کوچکتر از ۲ باشند u, v همسایه مشترکی نخواهند داشت پس:

$$\mathbb{P}\left[I_{u,v}=۱\right]=\mathbb{P}\left[Z_۱<۲, Z_۲<۲, ..., Z_{n-۲}<۲\right]=(\mathbb{P}[Z_i<۲])^{n-۲}$$
$$=(۱-\mathbb{P}[Z_i=۲])^{n-۲}=(۱-\binom{۲}{۲}p^۲(۱-p)^{۰})^{n-۲}$$
$$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left[I_{u,v}=۱\right]=(۱-p^۲)^{n-۲}}=\mathbb{E}\left[I_{u,v}=۱\right]$$

پرسش تئوری ۱۲

طبق تعریف می‌دانیم:

$$X_n=\sum_{u=۱}^{n}\sum_{v>u} I_{u,v}$$

پس:

$$\boxed{\mathbb{E}[X_n]=\frac{n(n-۱)}{۲}(۱-p^۲)^{n-۲}}$$

پرسش تئوری ۱۳

طبق نامساوی مارکف:

$$\mathbb{P}[X_n\geq ۱]\leq \mathbb{E}[X_n]\rightarrow \boxed{\mathbb{P}[X_n\geq ۱]\leq \frac{n(n-۱)}{۲}(۱-p^۲)^{n-۲}}$$
$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[X_n\geq ۱]\leq \frac{n^۲(۱-p^۲)^n}{۲}$$

سمت راست نامساوی یعنی $H(n,p)=\frac{n^۲(۱-p^۲)^n}{۲}$ اگر p خیلی به صفر نزدیک نباشد در n های زیاد به صفر میل می‌کند. اما در p های خیلی کوچک ناگهان در مرز بسیار کوچک $p_۰$ مقدار آن با شیب زیاد به بینهایت میل می‌کند و هرچقدر n بیشتر باشد مقدار $p_۰$ نیز کمتر خواهد بود.

پرسش تئوری ۱۴

اگر p خیلی کوچک نباشد داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[X_n\geq ۱]\leq ۰\rightarrow \lim_{n\to\infty}X_n=۰$$

یعنی تعداد جفت های بدون همسایه مشترک به صفر میل می‌کند و با احتمال بالا حداکثر فاصله بین هر دو راس برابر ۲ است پس قطر متاگراف که یعنی ماکسیمم فاصله بین دو راس گراف، با احتمال بالا به ۲ میل می‌کند. تاثیر p به اینصورت است که تا وقتی $p>p_۰$ قطر متاگراف به ۲ میل میکند ولی در $p<p_۰$ احتمال وجود رئوس بدون همسایه مشترک بیشتر می‌شود در شبیه سازی ۶ هم دیدیم که میانگین فاصله نزدیک ۶ است چون p خیلی به صفر نزدیک است. همانطور که گفته شد با افزایش n مرز $p_۰$ به صفر نزدیکتر می‌شود و ناحیه اثرگذاری p کوچکتر می‌شود. بله با شبیه‌سازی انجام شده مطابقت دارد.

۶ و إنَ یَکاد بخوانید!

پرسش شبیه‌سازی ۹

کد را مطابق زیر می‌زنیم : مطابق کد بالا مشاهده می‌کنیم که ابتدا با تابع networkx.triangle تعداد مثلث‌ها

```python
findCycle = lambda G : np.sum(list(nx.triangles(G).values()))/3
n = 100
p = 0.34
data = np.array([findCycle(nx.fast_gnp_random_graph(n,p)) for i in range (0,100)])
data.mean()
```

```
✓ 1.5s                                                            Python
6377.38
```

شکل ۱۲: کد پایتون پرسش شبیه‌سازی ۹

را شمرده (این تابع هر مثلث را ۳ بار می‌شمارد پس باید بر ۳ تقسیم کنیم)، سپس در یک حلقه فور ۱۰۰ بار این کار را انجام می‌دهیم در مانگین مقادیر را حساب می‌کنیم. در نتیجه داریم :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\text{تعداد حلقه های دوستی سه نفره}\right] = ۶۳۷۷٫۳۸}$$

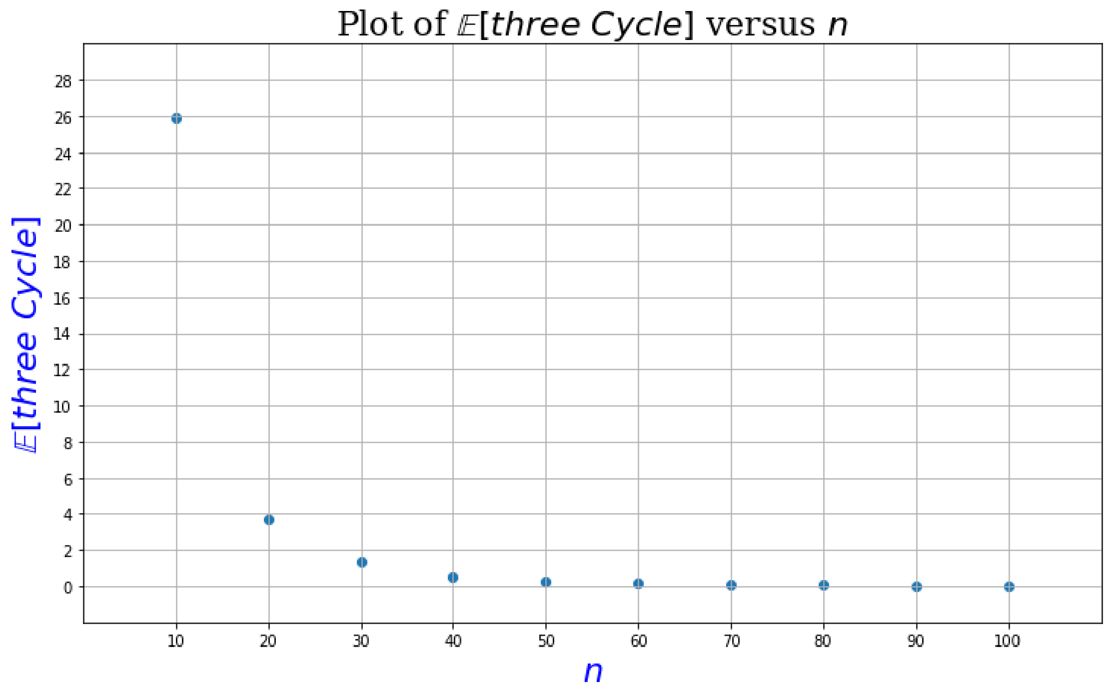
پرسش شبیه‌سازی ۱۰

کد را مطابق شکل زیر می‌زنیم :

```python
N = np.arange(10,110,10)
P = 60/np.power(N,2)
Data = np.zeros(10)
for i in range(0,10):
    Data[i] = np.array([findCycle(nx.fast_gnp_random_graph(N[i],P[i])) for j in range (0,100)]).mean()
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.scatter(N,Data)
plt.title(r"Plot of $\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$ versus $n$",fontdict={'family':'serif','size':22})
plt.ylabel(r"$\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlabel(r"$n$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlim([0,110])
plt.ylim([-2,30])
plt.xticks(np.linspace(10,100,10))
plt.yticks(np.linspace(0,28,15))
plt.grid()
plt.show()
```

شکل ۱۳: کد پایتون پرسش شبیه‌سازی ۱۰

مطابق شکل ۱۳ ابتدا بردار N را شامل مقادیر $[۱۰, ۱۰۰]$ با گام‌های ۱۰ می‌باشد را با دستور numpy.arrange تولید می‌کنیم سپس با دستور numpy.power هر کدام از عضوهای بردار N را به توان دو رسانده و با تقسم ۶۰ بر آن بردار P به ازای هر n تولید می‌کنیم. در نهایت در یک حلقه for ، کد پرسش شبیه‌سازی ۹ را دوباره به ازای n ، p تکرار می‌کنیم و در نهایت با دستور pylpot.scatter نمودار آن را مطابق زیر رسم می‌کنیم :



شکل ۱۴: نمودار پرسش شبیه‌سازی ۱۰

مشاهده می‌کنیم که با افزایش مقدار n میانگین حلقه‌های دوستی سه نفره به صفر میل می‌کند. دلیل آن هم این است که احتمال وجود هر یال بین دو راس با $\frac{1}{n^2}$ متناسب است پس احتمال وجود مثلث بین ۳ راس دلخواه با $\frac{1}{n^6}$ متناسب است، همچنین تعداد حلقه‌های سه نفره با $\binom{n}{3}$ یا به عبارتی برای n های بزرگ با n^3 تناسب دارد که ضرب آن در احتمال وجود هر مثلث با $\frac{1}{n^3}$ متناسب است که برای $n \to \infty$ به صفر میل می‌کند به همین جهت، نتیجه شبیه‌سازی قابل توجیه می‌باشد.

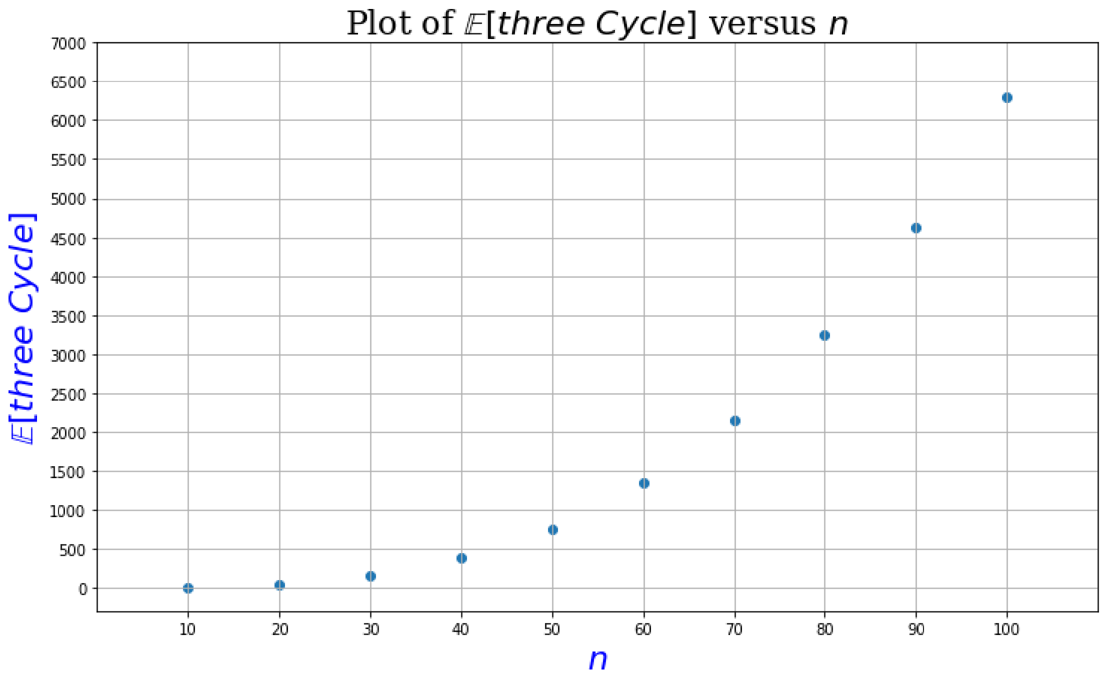
پرسش شبیه‌سازی ۱۱

کد را مطابق زیر می‌زنیم :

```
N = np.arange(10,110,10)
p = 0.34
Data = np.zeros(10)
for i in range(0,10):
    Data[i] = np.array([findCycle(nx.fast_gnp_random_graph(N[i],p)) for j in range (0,100)]).mean()
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.scatter(N,Data)
plt.title(r"Plot of $\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$ versus $n$",fontdict={'family':'serif','size':22})
plt.ylabel(r"$\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlabel(r"$n$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlim([0,110])
plt.ylim([-300,7000])
plt.xticks(np.linspace(10,100,10))
plt.yticks(np.linspace(0,7000,15))
plt.grid()
plt.show()
```

شکل ۱۵: کد پابتون پرسش شبیه‌سازی ۱۱

در کد بالا مانند قسمت قبل عمل می کنیم صرفا p تابعیتی از n ندارد و ثابت است. حال نمودار میانگین حلقه‌های دوستی سه نفره بر حسب n مطابق شکل زیر است :



شکل ۱۶: نمودار پرسش شبیه‌سازی ۱۱

مطابق شکل ۱۶ مشاهده می‌کنیم که با افزایش n تعداد حلقه‌های دوستی سه نفره به چیز خاصّی میل نمی‌کند و و واگرا به سمت ∞ می‌شود. علّت آن هم این است که چون p ثابت است احتمال وجود مثلث که برابر با $p^۳$ می‌باشد یک چیز ثابت است در نتیجه با افزایش یا کاهش n این احتمال تغییر نمی‌کند، از طرفی هم تعداد مثلثات با افزایش n مطابق آنچه در پرسش شبیه‌سازی ۱۰ گفته شد با $n^۳$ متناسب است در نتیجه با افزایش n حاصل ضرب تعداد مثلثات در احتمال وجود مثلث که میانگین را به ما می‌دهد با $n^۳$ متناسب است که به بی نهایت میل می‌کند. در نتیجه انتظار ما با شبیه‌سازی مطابق دارد.

پرسش شبیه‌سازی ۱۲

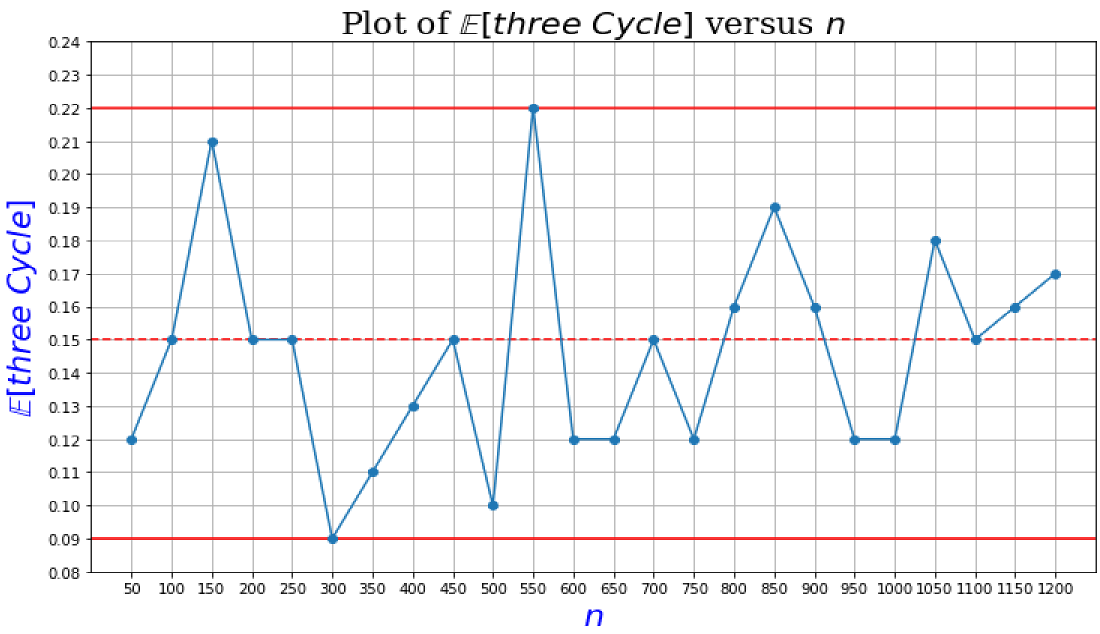
کد را مطابق شکل زیر می‌زنیم :

```python
N = np.arange(50,1250,50)
P = 1/np.power(N,1)
Data = np.zeros(24)
for i in range(0,24):
    Data[i] = np.array([findCycle(nx.fast_gnp_random_graph(N[i],P[i])) for j in range (0,100)]).mean()
```

```python
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.plot((0,1250),(0.12,0.12),color='r')
plt.plot((0,1250),(0.26,0.26),color='r')
plt.plot((0,1250),(0.16,0.16),color='r',linestyle='--')
plt.scatter(N,Data)
plt.title(r"Plot of $\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$ versus $n$",fontdict={'family':'serif','size':22})
plt.ylabel(r"$\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlabel(r"$n$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlim([0,1250])
plt.ylim([0.1,0.28])
plt.xticks(np.linspace(50,1200,24))
plt.yticks(np.linspace(0.1,0.28,10))
plt.grid()
plt.show()
```

شکل ۱۷: کد پایتون پرسش شبیه‌سازی ۱۲

مشاهده می‌کنیم که مانند پرسش شبیه‌سازی ۱۰ بردار N را در بازه‌ی گفته شده توسط سوال تعریف می‌کنیم و بردار P را می‌سازیم، نکته قابل توجه این است که نمی‌توان مستقیم نوشت : $P = 1/N$، چون ارور می‌دهد، باید نوشت : $P = 1/\text{numpy.power}(N,1)$، حال مانند پرسش شبیه‌سازی ۱۰ در یک حلقه for، میانگین تعداد حلقه‌های دوستی سه نفره را به دست می‌آوریم و در نهایت نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم :



شکل ۱۸: نمودار میانگین حلقه‌های سه نفره بر حسب n، پرسش شبیه‌سازی ۱۲

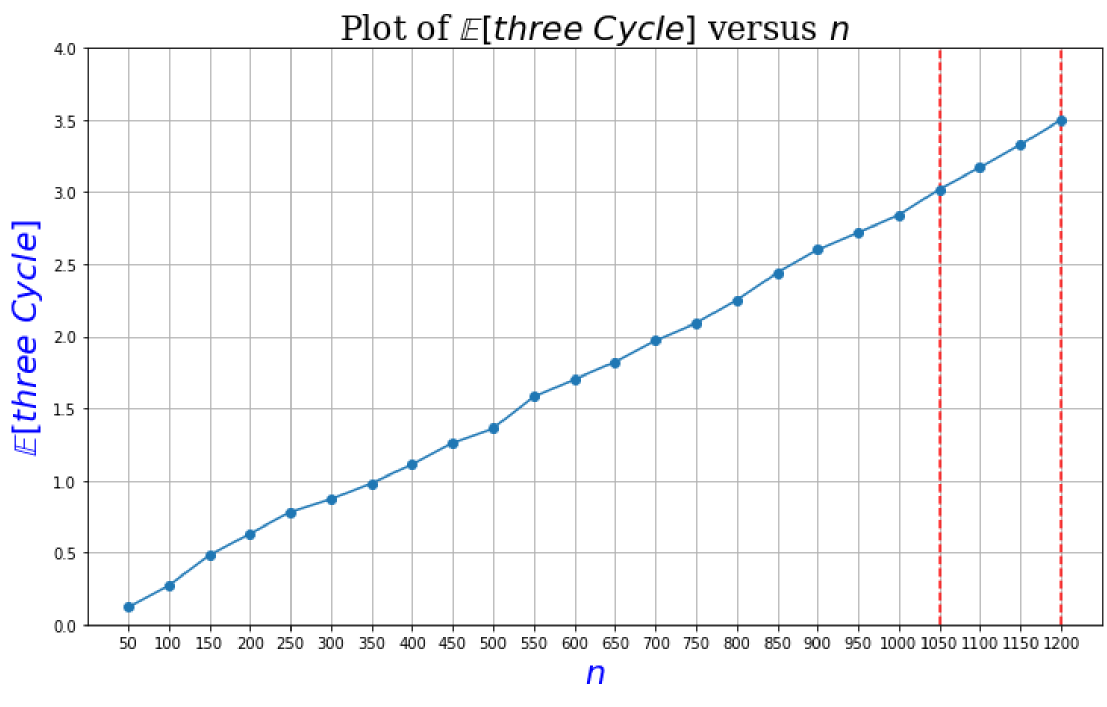
مطابق شکل ۱۸ مشاهده می‌کنیم که مقادیر در پنجره $[0/09, 0/22]$ محصوره شده است و در این پنجره نوسان می‌کند. به طور تقریبی مشاهده می‌کنیم که حول مقدار ۰/۱۵ در حال نوسان است همچنین با افزایش مقدار n دامنه نوسانات کوچکتر می‌شود، در نتیجه می توان گفت که به ازای $n \to \infty$، میانگین به مقداری حوالی ۰/۱۵ یا ۰/۱۶ میل می‌کند.

حال باید تابع تجمعی میانگین را پیدا کنیم، برای این کارکد را مطابق زیر می‌زنیم :

```python
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.plot((1050,1050),(0,4),color='r',linestyle='--')
plt.plot((1200,1200),(0,4),color='r',linestyle='--')
plt.plot(N,Data.cumsum(),marker='o')
plt.title(r"Plot of $\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$ versus $n$",fontdict={'family':'serif','size':22})
plt.ylabel(r"$\mathbb{E}\left[three\ Cycle\right]$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlabel(r"$n$",fontdict={'family':'serif','size':22,'color':'blue'})
plt.xlim([0,1250])
plt.ylim([0,4])
plt.xticks(np.linspace(50,1200,24))
plt.yticks(np.linspace(0,4,9))
plt.grid()
plt.show()
```

شکل ۱۹: کد پایتون میانگین تجمّعی حلقه‌های دوستی سه نفره، پرسش شبیه‌سازی ۱۲

مطابق کد بالا برای به دست آوردن تابع تجمّعی، از دستور numpy.cumsum استفاده می‌کنیم سپس نمودار آن را مطابق زیر رسم می‌کنیم :



شکل ۲۰: نمودار میانگین تجمّعی حلقه‌های سه نفره بر حسب n، پرسش شبیه‌سازی ۱۲

مطابق شکل ۲۰ مشاهده می‌کنیم که نمودار اوایل خاصیت غیرخطی زیادی دارد و با افزایش مقدار n خطّی تر می‌شود به طوری که در محدوده‌ای که با رنگ قرمز مشخص شده است نمودار خاصیّت خطّی دارد و این بدان

معناست که شیب نمودار یا میانگین تعداد حلقه‌ها ثابت شده‌است و به عدد خاصّی میل می‌کند، برای حساب کردن مقدار میانگین، باید شیب نمودار را به دست آورده و در ۵۰ ضرب کنیم :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\text{حلقه‌های دوستی سه نفره}\right] = \frac{۳/۵ - ۳}{۱۲۰۰ - ۱۰۵۰} \times ۵۰ = \frac{۱}{۶}}$$

پرسش تئوری ۱۵

$$I_{u,v,w} = \begin{cases} ۱ & \text{سه رأس } u, v, w \text{ تشکیل مثلث بدهند} \\ ۰ & \text{سه رأس } u, v, w \text{ تشکیل مثلث ندهند} \end{cases}$$

برای اینکه $I_{u,v,w} = ۱$ باشد یا مثلث تشکیل شود باید این سه رأس دوبه‌دو به یکدیگر وصل باشند، برای همین باید سه یال که وجود آن‌ها از یکدیگر مستقل است، داشته بین این سه رأس داشته باشیم یعنی با توجه به استقلال داریم :

$$\boxed{\mathbb{P}\left[I_{u,v,w} = ۱\right] = p \times p \times p = p^۳}$$

پرسش تئوری ۱۶

با به تعریف متغیر $I_{u,v,w}$ داریم :

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = T_{۳,n} = \sum_{u=۱}^{n} \sum_{v>u} \sum_{w>v} I_{u,v,w}$$

حال از دو طرف تساوی بالا میانگین می‌گیریم :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{u=۱}^{n} \sum_{v>u} \sum_{w>v} I_{u,v,w}\right] \\ &= \sum_{u=۱}^{n} \sum_{v>u} \sum_{w>v} \mathbb{E}\left[I_{u,v,w}\right] \\ &= \sum_{u=۱}^{n} \sum_{v>u} \sum_{w>v} ۱ \times p^۳ \\ &= \binom{n}{۳} p^۳ = \boxed{\frac{n\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)}{۶} p^۳} \end{aligned}$$

پرسش تئوری ۱۷

طبق نامساوی مارکف داریم :

$$\mathbb{P}\left[T_{۳,n} \geq ۱\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right]}{۱} = \frac{n\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)}{۶}p^{۳}$$

حال $p\left(n\right) = \frac{۱}{n^{۲}}$ جاگذاری می‌کنیم :

$$\mathbb{P}\left[T_{۳,n} \geq ۱\right] \leq \frac{\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)}{۶n^{۵}}$$

با میل دادن $n \to \infty$ برای عبارت بالا داریم :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[T_{۳,n} \geq ۱\right] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)}{۶n^{۵}} = ۰$$

مطابق عبارت بالا، از آنجایی که احتمال یک عدد نامنفی است پس وقتی کران بالای آن به صفر میل کند، احتمال هم به صفر میل می‌کند این یعنی، وقتی $n \to \infty$ رود، احتمال اینکه میانگین تعداد مثلث‌ها در گراف، حداقل یک باشد، به صفر می‌رود یا به عبارتی دیگر، میانگین تعداد مثلث‌ها به صفر می‌رود.

پرسش تئوری ۱۸

ابتدا فرض‌ها را می‌نویسیم :

(۱) $\{Y_n\}_{n=۰}^{\infty}$: متغیّر تصادفی صحیح و نامنفی

(۲) $$\forall n \in \mathbb{N} \,:\, \mathbb{E}\left[Y_n\right] > ۰$$

(۳) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\left(Y_n\right)}{\mathbb{E}\left[Y_n\right]^{۲}} = ۰$$

با استفاده از فرض سوّم داریم :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\left(Y_n\right)}{\mathbb{E}\left[Y_n\right]^{۲}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\mathbb{E}\left[Y_n\right]^{۲}} \sum_{k=۰}^{\infty} \left(k - \mathbb{E}\left[Y_n\right]\right)^{۲} \mathbb{P}\left[X = k\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۰}^{\infty} \left(\frac{k}{\mathbb{E}\left[Y_n\right]} - ۱\right)^{۲} \mathbb{P}\left[X = k\right] \\
&= ۰
\end{aligned}$$

با توجّه به عبارت بالا، متوجّه می‌شویم که جمع یک سری جملات توان‌دو یا نامنفی ضربدر احتمال که خود نیز عددی نامنفی است برابر صفر شده است در نتیجه باید تک تک جملات صفر باشند، احتمال که نمی‌تواند به ازای همه‌ی مقادیر صفر باشد پس عبارت توان‌دو باید صفر باشد که نتیجه می‌دهد :

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n\right]$$

یعنی در حد $n \to \infty$ تمام مقادیر متغیر تصادفی Y_n به یک جمله‌ی ثابت میل می‌کند که طبعاً همان میانگین Y_n هم می‌باشد. حال از آنجایی که مقدار متغیّر تصادفی همواره صحیح و نامنفی است پس $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n\right]$ نیز باید عددی صحیح و نامنفی باشد و از آنجایی که طبق فرض ۲ مقدار میانگین همواره بزگتر از صفر است پس داریم :

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n\right] \geq ۱$$

در نتیجه :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[Y_n \geq ۱\right] = ۱$$

پرسش تئوری ۱۹

برای محاسبه میانگین $I_{u,v,w}I_{u',v',w'}$، تنها لازم است حالتی را در نظر بگبریم که هر دوی این متغیرهای تصادفی، یک شوند یعنی بین رأس‌های u, v, w و u', v', w' مثلث داشته باشیم که در این صورت سه حالت مختلف ممکن است رخ دهد :

۱. هیچ یال مشترکی بین مثلث‌های u, v, w و u', v', w' وجود نداشته باشد :

$$\text{شش یال مستقل} \to \boxed{\mathbb{E}\left[I_{u,v,w}I_{u',v',w'}\right] = p^{۶}}$$

۲. یک یال مشترک بین مثلث‌های u, v, w و u', v', w' وجود داشته باشد یا به عبارتی دو رأس این دو مثلث یکسان هستند :

$$\text{پنج یال مستقل} \to \mathbb{E}\left[I_{u,v,w}I_{u',v',w'}\right] = \binom{۳}{۲}p^{۵}$$
$$= \boxed{۳p^{۵}}$$

۳. سه یال مشترک وجود داشته باشد یابه عبارتی سه راس یکسان باشند (نکته مهم این است که امکان ندارد که فقط دو یال مشترک داشته باشیم چون برای این موضوع باید سه رأس یکسان باشند که یال سوم هم به اجبار یکسان می‌شود) :

$$\text{سه یال مستقل} \to \boxed{\mathbb{E}\left[I_{u,v,w}I_{u',v',w'}\right] = p^{۳}}$$

پرسش تئوری ۲۰

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_{۳,n}^{۲}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{u=۱}^{n}\sum_{v>u}\sum_{w>v} I_{u,v,w}\right)^{۲}\right] \\
&= \left[\binom{n-۳}{۳}\binom{n}{۳} + \binom{۳}{۱}\binom{n-۳}{۲}\binom{n}{۳}\right]\mathbb{E}\left[I_{u,v,w}I_{u',v',w'} \middle| \text{حالت اوّل}\right] + \binom{n-۳}{۱}\binom{n}{۳}\mathbb{E}\left[I_{u,v,w}I_{u',v',w'} \middle| \text{حالت دوّم}\right] + \binom{n}{۳}\mathbb{E}\left[I_{u,v,w}I_{u',v',w'} \middle| \text{حالت سوّم}\right] \\
&\approx \boxed{\frac{n^{۶}}{۳۶}p^{۶} + \frac{n^{۵}}{۴}p^{۶} + \frac{n^{۴}}{۲}p^{۵} + \frac{n^{۳}}{۶}p^{۳}}
\end{aligned}
$$

در عبارت بالا تعداد مثلث‌هایی که هیچ یال مشترکی ندارند برابر است با تعداد مثلث‌های که یک رأس مشترک دارند به‌علاوه‌ی تعداد مثلث‌هایی که هیچ راس مشترکی ندارند. به همین دلیل عبارت اوّل جمع دوجمله است که جمله‌ی اوّل بیانگر تعداد مثلث‌های بدون هیچ رأس مشترک و جمله‌ی دوّم بیانگر تعداد مثلث‌های با یک رأس مشترک برای هرمثلث است. عبارت بعدی بیانگر تعداد مثلث‌های با دو رأس مشترک برای هر مثلث است و عبارت بعدی بیانگر تعداد مثلث‌های با سه رأس مشترک برای هر مثلث می‌باشد. تمام عبارت‌ها در تعداد مثلث‌ها ضرب شده‌اند که همه جملات حاصل‌ضرب را به ما بدهند.

پرسش تئوری ۲۱

می دانیم که واریانس تعداد مثلث‌ها برابر است با :

$$
\mathrm{Var}\left(T_{۳,n}\right) = \mathbb{E}\left[T_{۳,n}^{۲}\right] - \mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right]^{۲}
$$

حال به ازای $p = cte$، یعنی p تابع n نباشد، داریم :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}(T_{3,n})}{\mathbb{E}\left[T_{3,n}\right]^{2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[T_{3,n}^{2}\right] - \mathbb{E}\left[T_{3,n}\right]^{2}}{\mathbb{E}\left[T_{3,n}\right]^{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[T_{3,n}^{2}\right]}{\mathbb{E}\left[T_{3,n}\right]^{2}} - 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{6}}{36}p^{6} + \frac{n^{5}}{4}p^{6} + \frac{n^{4}}{2}p^{5} + \frac{n^{3}}{6}p^{3}}{\frac{n^{6}}{36}p^{6}} - 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{6}}{36}p^{6}}{\frac{n^{6}}{36}p^{6}} - 1 \\
&= 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

پرسش تئوری ۲۲

دنباله متغیر تصادفی $\{T_{3,n}\}_{n=3}^{\infty}$ در نظر می‌گیریم، همچنین شرط $n > 2$ باید برقرار باشد تا بتوانیم حلقه‌ی دوستی سه‌نفره داشته باشیم، در غیر این صورت متغیر تصادفی $T_{3,n}$ صفر است. حال به ازای $p = cte$ داریم :

۱. $T_{3,n}$ که نشان‌دهنده تعداد مثلث‌هاست متغیر تصادفی نامنفی می‌باشد.

۲. با توجه به میانگین $T_{3,n}$ که در پرسش تئوری ۱۶ به دست آوردیم داریم :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, n > 2 \,:\, \mathbb{E}\left[T_{3,n}\right] = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6}p^{3} > 0$$

۳. در پرسش تئوری ۲۱ نشان دادیم :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}(T_{3,n})}{\mathbb{E}\left[T_{3,n}\right]^{2}} = 0$$

حال طبق قضیه ۱ می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[T_{3,n} \geq 1\right] = 1$$

مشاهده می‌کنیم که به وقتی تعداد رئوس به سمت ∞ میل می‌کند احتمال اینکه مثلثی یا حلقه‌ی دوستی سه‌نفره نداشته باشیم به ازای $p = cte$ به صفر میل می‌کند، به طور شهودی اگر احتمال تشکیل یک مثلث مقدارِ ثابتِ بزرگتر از صفر، هرچند کوچک باشد و تعداد مثلث‌های قابل تشکیل به سمت بی‌نهایت میل کند قطعاً حداقل یک مثلث خواهیم داشت یعنی احتمال اینکه مثلثی نداشته باشیم از نظر احتمالاتی به صفر همگرا می‌شود. همچنین این نتیجه با شبیه‌سازی هم در تطابق است، طبق شکل ۱۶ مشاهده می‌کنیم که با افزایش n تعداد مثلث‌ها هم زیاد می‌شود و به سمت صفر نمی‌رود بلکه به سمت بی‌نهایت می‌رود. نکته مهم این است که این نتایج فقط به ازای $p = cte$ برقرار است.

پرسش تئوری ۲۳

ابتدا اثبات می‌کنیم که گشتاور فاکتوریل مرتبه‌ی r متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ، λ^r می‌باشد :

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] &= \sum_{k=۰}^{\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

حال با مشتق‌گیری داریم :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X)_r\right] &= \left.\frac{\partial^r M_x(t)}{\partial t^r}\right|_{t=۱} \\ &= \left. e^{-\lambda} \lambda^r e^{\lambda t}\right|_{t=۱} \\ &= \lambda^r \end{aligned}$$

حال طرف دیگر را اثبات می‌کنیم، در نظر می‌گیریم :

$$\lambda^r = \left.\frac{\partial^r M_X(t)}{\partial t^r}\right|_{t=۱}$$

باید تابع $M_X(t)$ را طوری پیدا کنیم که در معادله بالا صدق کند و همچنین اثبات کنیم که یکتاست، برای این کار بسط تیلور تابع $M_X(t)$ را حول $t = ۱$ می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \left. M_X(t)\right|_{t=۱} + \frac{\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=۱}}{۱!}(t-۱) + \frac{\left.\frac{\partial^۲ M_X(t)}{\partial t^۲}\right|_{t=۱}}{۲!}(t-۱)^۲ + \cdots \\ &= ۱ + \lambda(t-۱) + \frac{\lambda^۲}{۲!}(t-۱)^۲ + \cdots \end{aligned}$$

ازآنجایی که بسط تیلور یکتاست و همچنین بسط تیلور بالا تابع $e^{\lambda(t-۱)}$ را نشان می‌دهد پس می توان گفت که:

$$M_X(t) = e^{\lambda(t-۱)}$$

حال نشان می‌دهیم خود تابع مولّد فاکتوریل نیز یکتاست برای این کار از این نکته استفاده می‌کنیم که تابع مولّد گشتاور یکتاست و همچنین :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}\left[t^X\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{X\ln(t)}\right] \\ &= \Phi_X(\ln(t)) \end{aligned}$$

چون تابع گشتاور $\Phi_X\left(t\right)$ یکتاست و از آنجایی که تابع $\ln(t)$ هم یک به یک است در نتیجه تابع $\Phi_X\left(\ln(t)\right)$ یکتاست. پس تابع مولّد فاکتوریل $M_X\left(t\right)$ یکتاست. حال از آنجایی در قسمت اول اثبات نشان دادیم که تابع مولّد فاکتوریل توزیع پواسون، $e^{\lambda(t-۱)}$ است و اینجا هم به همین تابع مولّد رسیدیم پس می‌توان گفت که تابع پواسون تنها توزیعی است که گشتاور فاکتوریل λ^r دارد.

پرسش تئوری ۲۴

طبق تعریف، $\mathbb{E}\left[(T_{۳,n})_{۲}\right] = \mathbb{E}\left[T_{۳,n}^{۲}\right] - \mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right]$ و $\mathbb{E}\left[(T_{۳,n})_{۱}\right] = \mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right]$ می‌باشد، حال باتوجّه به نتایج پرسش‌های تئوری ۲۰ و ۱۶ و اینکه $p = \frac{c}{n}, \lambda = \frac{c^۳}{۶}$ است، داریم :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(T_{۳,n})_{۱}\right] &= \mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right] \\
&= \frac{n\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)}{۶}p^{۳} \\
&\approx \frac{n^{۳}}{۶} \times \frac{c^{۳}}{n^{۳}} = \lambda
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(T_{۳,n})_{۲}\right] &= \mathbb{E}\left[T_{۳,n}^{۲}\right] - \mathbb{E}\left[T_{۳,n}\right] \\
&\approx \frac{n^{۶}}{۳۶}p^{۶} + \frac{n^{۵}}{۴}p^{۶} + \frac{n^{۴}}{۲}p^{۵} + \frac{n^{۳}}{۶}p^{۳} - \frac{n^{۳}}{۶}p^{۳} \\
&= \left(\frac{c^{۳}}{۶}\right)^{۲} + \frac{c^{۶}}{۴n} + \frac{c^{۵}}{۲n} \\
&\approx \left(\frac{c^{۳}}{۶}\right)^{۲} = \lambda^{۲}
\end{aligned}$$

پرسش تئوری ۲۵

برای اثبات حکم ابتدا سعی می‌کنیم که $T_{۳,n}\left(T_{۳,n}-۱\right)\left(T_{۳,n}-۲\right)\ldots\left(T_{۳,n}-r+۱\right)$ بر حسب متغیرهای تصادفی برنولی $I_{u,v,w}$ بنویسیم. برای سادگی به جای سه اندیس از یک اندیس استفاده می‌کنیم ولی جمع را روی تمام مثلث‌ها انجام می‌دهیم. حال ادعا می کنیم که :

$$\sum I_i\left(\sum I_i - ۱\right)\left(\sum I_i - ۲\right)\ldots\left(\sum I_i - r + ۱\right) = r!\sum \overbrace{I_i I_j I_k \ldots I_n}^{\text{r بار}}$$

تمام سیگماهای سمت راست تساوی بالا روی تمام مثلث‌ها زده می‌شوند، سیگای سمت چپی هم روی تمام حالت‌های r مثلث از n مثلث زده می‌شود. حال به کمک استقراء حکم بالا را ثابت می‌کنیم، ابتدا پایه $r = ۲$ را درنظر می‌گیریم :

$$\sum I_i\left(\sum I_i - ۱\right) = \sum I_i^{۲} + ۲\sum_{j>i} I_i I_j - \sum I_i$$

جملات اول و سوم باهم ساده می‌شوند دلیل آن‌هم این است که اگر $I_i = ۱$ باشد، $I_i^۲ = ۱$ می‌شود و بالعکس.
پس داریم :

$$\sum I_i \left(\sum I_i - ۱\right) = ۲! \sum I_i I_j$$

حال فرض می‌کنیم که برای r حکم برقرار باشد، باید برای $r + ۱$، حکم را اثبات کنیم :

$$\begin{aligned}(T_{۳,n})_{r+۱} &= \left(r! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}}\right) \left(\sum I_i - r\right) \\ &= \left(r! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}}\right) \sum I_i - rr! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}}\end{aligned}$$

در عبارت بالا، اولین عبارت شامل r انتخاب تکراری و $r -$ تعداد مثلث‌ها انتخاب غیر تکراری برای هر جمله داخل سیگما می‌باشد. همچنین انتخاب‌های غیرتکرای تشکیل جایگشت برای $r + ۱$ مثلث را می‌دهند ولی ممکن است برخی جایگشت‌ها تکراری باشند چون هر جایگشت r تایی از آنجایی که r جایگشت همسایه دارد، هنگامی تمام حالت $r + ۱$ را به دست می‌آوریم، هر جایگشت r بار تکرار می‌شود. پس باید تقسیم بر r هم کنیم که تعداد آن‌ها می‌شود : (N تعداد مثلث‌هاست)

$$\frac{(N - r)}{r}\binom{N}{r} = \binom{N}{r + ۱}$$

مشاهده می‌کنیم که تمام جایگشت‌های $r + ۱$ را توانستیم به دست آوریم، حال برای جملات تکراری چون هربار یک مثلث دوبار ضرب می‌شود و چون $I_i^۲ = I_i$ در نتیجه جایگشت‌های r تایی باقی می‌مانند با این تفاوت که هرکدام r بار شمرده شده‌اند. حال داریم :

$$rr! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}} - rr! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}} = ۰$$

در نهایت داریم :

$$(T_{۳,n})_{r+۱} = (r + ۱)! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r+۱ بار}}$$

پس حکم ثابت شد. حال باید امیدریاضی $(T_{۳,n})_{r+۱}$ را به دست آوریم :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(T_{۳,n})_r\right] &= \mathbb{E}\left[r! \sum \overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}}\right] \\ &= r! \sum \mathbb{E}\left[\overbrace{I_i I_j I_k \dots I_n}^{\text{r بار}}\right]\end{aligned}$$

همچنین برای حساب کردن امیدریاضی باید فقط حالتی را درنظر بگیریم که $\overbrace{I_iI_jI_k\dots I_n}^{\text{بار r}}$ ۱ شود یا به عبارتی همه‌ی r مثلث تشکیل شود، از طرفی طبق گفته صورت سوال می‌دانیم که احتمال وجود r مثلّث در متاگراف به صورتی که حداقل ۲ مثلث از میان آن ها یک رأس مشترک داشته باشند، بسیار کمتر از احتمال وجود r مثلث است که هیچ کدام هیچ رأس مشترکی ندارند، در نتیجه از احتمال حالت‌هایی که راس مشترک داریم در مقابل حالت‌های که راس مشترک نداریم صرف‌نظر می‌کنیم پس تعداد حالت‌های r تایی بدون رأس مشترک برابر است با :

$$\frac{۱}{r!}\binom{n}{۳}\binom{n-۳}{۳}\binom{n-۶}{۳}\dots\binom{n-۳(r-۱)}{۳}\approx\frac{\left(\binom{n}{۳}\right)^r}{r!}$$

در عبارت بالا به این گونه حالت‌ها را شمردیم که ابتدا سه رأس انتخاب می‌کنیم سپس سه رأس از مابقی رأس‌ها و الی آخر تا r مثلث داشته باشیم، همچنین در این نوع شمردن جایگشت‌های مختلف r مثلث را هم می‌شماریم به همین جهت بر $r!$ تقسیم می‌کنیم. همچنین تقریب n بزرگ را هم زدیم.

در نهایت داریم :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(T_{۳,n})_r\right] &= r!\,\frac{\left(\binom{n}{۳}\right)^r}{r!}\left(p^{۳}\right)^r\\ &= \left(\binom{n}{۳}p^{۳}\right)^r = \lambda^r\checkmark\end{aligned}$$

۷ قومی به جد و جهد نهادند وصل دوست، قومی دگر حواله به تقدیر می‌کنند!

پرسش شبیه‌سازی ۱۳

در یک for با ۱۰۰ مرحله هر بار یک گراف binomial تولید می‌کنیم. دستور list(isolates(G)) به ما list رئوس منفرد را می‌دهد حال اگر bool را روی آن اعمال کنیم درصورت خالی بودن لیست(نبودن نقطهٔ منفرد)، صفر بر می‌گرداند و در غیر این صورت یک. پس در هر مرحله به شمارنده bool(list(isolates(G))) را اضافه می‌کنیم تا تعداد دفعاتی که گراف با نقطهٔ منفرد داریم را پیدا کنیم و در اخر با تقسیم این عدد بر ۱۰۰ احتمال وجود فردی بدون دوست بدست خواهد آمد. دستور is_connected(G) اگر گراف همبند باشد یک و اگر نباشد صفر برمی‌گرداند. پس در هر مرحله به شمارندهٔ دیگری is_connected(G) را اضافه می‌کنیم تا تعداد دفعاتی که گراف همبند داریم را پیدا کنیم و در اخر با تقسیم این عدد بر ۱۰۰ احتمال همبند بودن گراف بدست می‌آید.

```
n=150
p=0.2
t=0 #number of graphs with alonbe people
d=0 #number of connected graph
for i in range (0,100):
    G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
    t+=bool(list(isolates(G)))
    d+=is_connected(G)

print(f"existence of isolated node: {t/100}\nconnected graph: {d/100}")
✓ 0.8s
existence of isolated node: 0.0
connected graph: 1.0
```

شکل ۲۱: محاسبهٔ احتمال وجود فرد بدون دوست و همبند بودن گراف

شبیه سازی نتیجه می‌دهد که:

$$\boxed{\mathbb{P}\left[\text{وجود فرد بدون دوست}\right] = ۰ \quad \mathbb{P}\left[\text{همبند بودن گراف}\right] = ۱}$$

پرسش شبیه‌سازی ۱۴

کد قسمت قبل را بصورت دو تابع برحسب n و p می‌نویسیم که احتمال ها را پیدا کنیم. برای احتمال عدم وجود فرد بدون دوست یک را منهای شمارنده تقسیم بر ۱۰۰ می‌کنیم و همبند بودن گراف نیز مثل قسمت قبل است. حال برای n های گفته شده و تابع p هر کدام از احتمال‌ها را در یک بردار می‌ریزیم و در آخر آنها را در یک نمودار برحسب این nها میکشیم. با دستور legend برای هر کدام لیبل گذاری می‌کنیم.

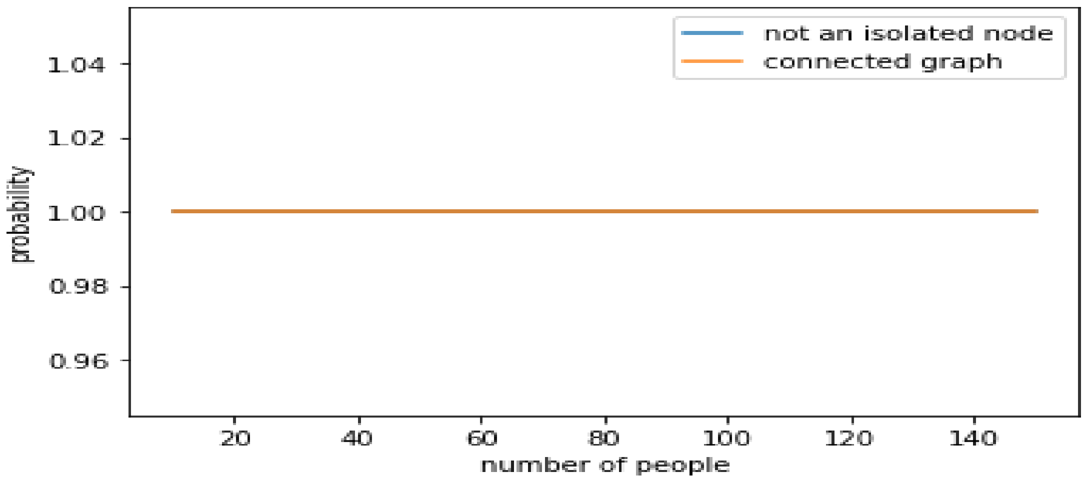
```python
def f(n,p): #number of graphs with alonbe people
    t=0
    for i in range (0,100):
        G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
        t+=bool(list(isolates(G)))
    return 1-t/100

def g(n,p): #number of graphs with alonbe people
    d=0
    for i in range (0,100):
        G=generators.random_graphs.binomial_graph(n,p)
        d+=is_connected(G)
    return d/100

n=[10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120,130,140,150]
B=[]
C=[]
for i in n:
    B.append(f(i,(4*np.log(i))/i))
for i in n:
    C.append(g(i,(4*np.log(i))/i))
plt.figure()
plt.plot(n,B)
plt.plot(n,C)
plt.legend(["not an isolated node","connected graph"])
plt.xlabel("number of people")
plt.ylabel("probability")
plt.show()
```

شکل ۲۲: کد نمودار احتمال عدم وجود فرد بدون دوست و همبند بودن گراف

نمودار به این صورت است:



شکل ۲۳: نمودار احتمال عدم وجود فرد بدون دوست و همبند بودن گراف برحسب تعداد افراد

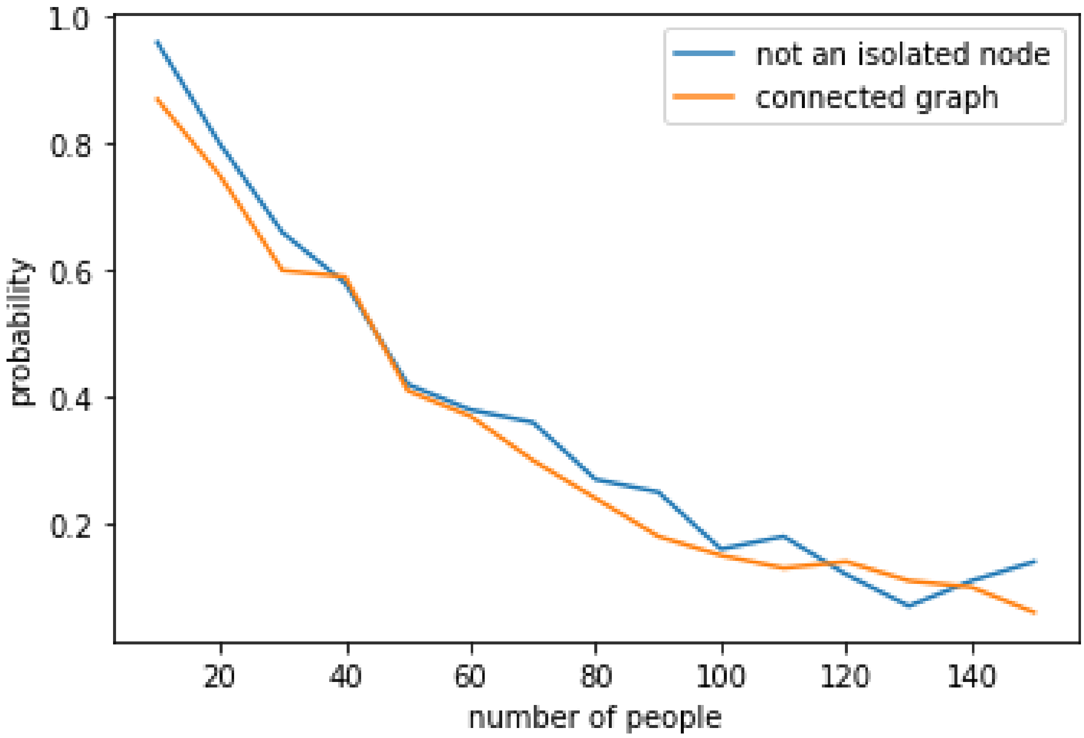
مشاهده می‌کنیم که هر دو مقدار ثابت ۱ را دارند.

پرسش شبیه‌سازی ۱۵

طبق خواستهٔ سوال کد قسمت قبل را تکرار می‌کنیم و تابع p را تغییر می‌دهیم.

```python
B=[]
C=[]
for i in n:
    B.append(f(i,4/i))
for i in n:
    C.append(g(i,4/i))
plt.plot(n,B)
plt.plot(n,C)
plt.legend(["not an isolated node","connected graph"])
plt.xlabel("number of people")
plt.ylabel("probability")
plt.show()
```

شکل ۲۴: کد نمودار احتمال عدم وجود فرد بدون دوست و همبند بودن گراف



شکل ۲۵: نمودار احتمال عدم وجود فرد بدون دوست و همبند بودن گراف برحسب تعداد افراد

طبق آزمایش نظم خاصی ندارند و با افزایش n نوسان می‌کنند ولی در کل حالت نزولی دارند.

پرسش تئوری ۲۶

گراف G_{ij} یعنی گرافی که از جایگشت iام با j رأس ساخته می‌شود باید همبند باشد و همینطور با $n-j$ رأس دیگر هیچ مسیری نداشته باشد تا $K_j^{(i)} = ۱$ باشد یعنی $j(n-j)$ یال بین رئوس این گراف و باقی رئوس نباید وجود داشته باشند:

$$\mathbb{P}\left[K_j^{(i)} = 1\right] = \mathbb{P}[\text{همبند بودن } G_{ij}\text{، نبودن یال‌های میانی}] = (1-p)^{j(n-j)}\mathbb{P}[\text{همبند بودن } G_{ij}]$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left[K_j^{(i)} = 1\right] \leq (1-p)^{j(n-j)}}$$

پرسش تئوری ۲۷

می‌دانیم $X_j = \sum_{i=1}^{\binom{n}{j}} K_j^{(i)}$ و $\mathbb{E}\left[K_j^{(i)}\right] = \mathbb{P}\left[K_j^{(i)} = 1\right]$ در نتیجه:

$$\boxed{\mathbb{E}[X_j] \leq \binom{n}{j}(1-p)^{j(n-j)}}$$

پرسش تئوری ۲۸

می‌دانیم $X = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ پس:

$$\mathbb{E}[X] \leq (n-1)\binom{n}{j}(1-p)^{j(n-j)}$$

طبق فرض گفته شده:

$$\rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X] \leq \frac{n}{n^{1.7}} = \frac{1}{n^{0.7}} \approx 0}$$

در nهای بسیار زیاد به صفر میل می‌کند

پرسش تئوری ۲۹

طبق نامساوی مارکف داریم $\mathbb{P}[X \geq 1] \leq \mathbb{E}[X]$ که نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[X \geq 1\right] \leq 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} X = 0$$

و طبق تعریف می‌دانیم اگر $X = 0$ باشد گراف همبند است پس اثبات می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\text{همبند بودن } G(n,p)] = 1$$