به نام او

پاسخ تمرینات سری اول – فصل اول

۱. الف) درست، طبق متن کتاب درسی در بخش ۱.۷ و همچنین تئوری ۹ فصل یک کتاب، اگر یک مجموعه برداری شامل بردار صفر باشد، وابسته ی خطی خواهد بود؛ پس در زمانی که مجموعه برداری تنها یک بردار دارد، برای آنکه مجموعه مستقل خطی باشد، بردار $\mathbf{v}$ حتما باید مخالف صفر باشد.

ب) درست، می دانیم ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر Ax = 0 تنها دارای جواب بدیهی باشد. حال اگر بردارهای داده شده را ستون های یک ماتریس در نظر بگیریم و ماتریس افزوده متناظر با آن را به فرم کاهش یافته سطری در آوریم، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و جواب ما برابر خواهد شد با $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ که یک جواب بدیهی است.

ج) نادرست، زیرا طبق تئوری چهارم فصل اول کتاب درسی می‌دانیم اگر یک ماتریس $m \times n$ در هر سطر خود دارای pivot باشد، ستون های آن ماتریس R^m را Span خواهند کرد. در واقع ماتریس ذکر شده در هر سطر خود دارای pivot نیست.

---

۲. الف) دو شرط تبدیل خطی زیر را برای این تبدیل بررسی می‌کنیم:

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(cu) = cT(u)$

شرط اول:

سمت چپ معادله:

$$T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1 – 2x_2 – 2y_2,\ \ x_1 + y_1 -3,\ \ 2x_1 + 2y_1 – 5x_2 – 5y_2)$$

سمت راست معادله:

$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 3, 2x_1 - 5x_2)$

$T(y_1, y_2) = (y_1 - 2y_2, y_1 - 3, 2y_1 - 5y_2)$

$T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = (x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2, \quad x_1 + y_1 - 6, \quad 2x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 5y_2)$

درایه دوم سمت راست و چپ معادله با هم برابر نیستند پس در نتیجه شرط اول برقرار نیست پس تبدیل خطی نیست.

$T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \neq T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$

اگر شرط دوم را بررسی کنیم متوجه می شویم که شرط دوم هم برقرار نیست. در نتیجه با برقرار نبودن حداقل یکی از شرط‌ها این خطی بودن تبدیل نقض می شود.

ب) اگر A یک ماتریس 3×3 در فضای R^3 باشد، هر بردار x ای در معادله ی $Ax = 0$ صدق خواهد کرد و بنابراین مجموعه جواب ما تمامی بردارهای موجود در فضای R^3 خواهد بود.

ج) طبق تئوری ۴ فصل یک کتاب درسی می دانیم اگر یک ماتریس $m \times n$ بخواهد فضای R^m را span کند، باید در هر سطر خود pivot داشته باشد. اگر این سه بردار را ستون‌های یک ماتریس درنظر بگیریم، چون این ماتریس 3×4 خواهد شد، نهایت ۳ تا محور می تواند به ما بدهد و این درحالی است که ماتریس ما ۴ سطر خواهد داشت؛ در نتیجه در هر سطر خود محور نخواهد داشت. بنابراین این سه بردار فضای R^4 را Span نخواهند کرد. به عبارتی دیگر برای Span کردن فضای R^m، حداقل به m بردار در این فضا نیاز داریم.

.۳

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{bmatrix} \to R3 = R3 + 2 \times R1 \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & k+14 & 2g+1 \end{bmatrix}$$

$$R3 = R3 + R2 \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & k+9 & 2g+1+h \end{bmatrix}$$

الف) به ازای $k+9 \neq 2g+1+h$ یا به عبارت دیگر $8 \neq 2g+h-k$ سیستم جواب یکتا دارد.

ب) اگر $k+9 = 2g+1+h = 0$ آنگاه x_3 متغیر آزاد می‌شود و بی‌نهایت جواب به ازای x_3 های متفاوت داریم.

ج) اگر $k = -9$ ولی $2g+1+h \neq 0$ آنگاه ردیف آخر ماتریس ردیف pivot می‌شود و طبق تئوری۲ (وجود و یکتایی جواب) اگر ردیفی از ماتریس به شکل $[0 \quad \cdots \quad 0 \quad b]$ داشته باشیم آنگاه دستگاه جواب ندارد.

.۴

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow R2 = 2 \times R1 + R2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow R3$$
$$= R3 - 2 \times R2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

درنتیجه سیستم متناظر جواب دارد پس معادله‌ی برداری صورت سوال هم جواب دارد. پس b را می‌توان به شکل ترکیب خطی بردارهای a نوشت و از آنجایی که b ترکیب خطی بردارهای a هست، پس b در *span{a1,a2,a3}* هست.

---

۵. ماتریس A را به فرم کاهش یافته (echelon) در می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون در هر سطر ماتریس A ما pivot نداریم، بنابراین طبق تئوری چهارم فصل یک کتاب، معادله ی $Ax = b$ به ازای هر b در R^4 دارای جواب نخواهد بود.

برای قسمت دوم سوال ابتدا ماتریس افزوده را ساخته و سپس به فرم کاهش یافته ی سطری-پلکانی در می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&-1&0&-2\\-1&0&0&1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&-1&0&-2\\0&0&1&4\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&4\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

بردار u در مجموعه بردارهایی که ستون های A آنها را Span می کند وجود ندارد. چراکه در سطر آخر ماتریس افزوده داریم $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 2]$ و طبق تئوری دوم کتاب در فصل اول، دستگاه معادلات متناظر با معادله ماتریسی Ax = u ناسازگار خواهد بود.

---

۶. طبق تئوری ۴ فصل ۱ کتاب درسی می دانیم اگر یک ماتریس $m \times n$ بخواهد فضای R^m را span کند، باید محور داشته باشد. بنابراین اگر ماتریس m>n باشد، ماتریس A حداکثر n موقعیت محور(pivot position) می‌تواند داشته باشد که برای پر کردن m سطر کافی نخواهد بود. بنابراین ستون های A نمی‌توانند فضای R^m را Span کنند و به عبارتی Ax = b به ازای هر b در R^m جواب نخواهد داشت.

---

۷. خیر، اگر Mx = b دارای جواب نباشد، M در هر ستون خود نمی‌تواند محور داشته باشد؛ بنابراین چون M یک ماتریس $n \times n$ است، نهایت می تواند $n-1$ محور داشته باشد. بنابراین معادله ماتریسی Mx = a، به ازای هر a در R^n، حداکثر $n-1$ متغیر پایه (basic variable) و یک متغیر آزاد (free variable) خواهد داشت. درنتیجه Mx = a یا جوابی نخواهد داشت و یا بی نهایت جواب خواهد داشت.

---

۸. ابتدا ماتریس افزوده حاصل از ستون های A و بردار b را ساخته و به فرم کاهش یافته ی سطری در می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}2&3&1&1&4\\1&2&0&-1&1\\3&4&2&4&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1&1\\2&3&1&1&4\\3&4&2&4&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1&1\\0&-1&1&3&2\\0&-2&2&7&6\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1&1\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&-1&0&4\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&0&-5\\0&1&-1&0&4\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2x_3 \\ x_2 = 4 + x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

جواب عمومی یا فرم برداری جواب:

$$x = \begin{bmatrix} -5 - 2x_3 \\ 4 + x_3 \\ x_3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p + tv \qquad t \in \mathbb{R}$$

حال درستی پاسخ خود را بررسی می‌کنیم:

$$Ap = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Ap = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در نهایت به کمک فرم کاهش‌یافته سطری ماتریس A که در بالا بدست آوردیم، سازگاری (consistency) آن را در فضای سه بعدی بررسی می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود A در هر سطر خود دارای موقعیت محوری (pivot position) می‌باشد و در نتیجه به ازای هر بردار u در فضای R^3، معادله ماتریسی Ax = u سازگار خواهد بود و بنابراین برداری مانند u وجود نخواهد داشت که نتوان آن را به صورت ترکیب خطی‌ای از ستون های A نوشت.

---

۹. الف) می‌دانیم که بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ پایه هایی برای R^2 هستند. حال باید بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از این دو پایه بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1 \quad , \quad c_2 = 2$$

حال با توجه به این مقادیر، $L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = L\left(-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = -L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 2L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = -\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$$

ب) دوباره می‌توانیم $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه بنویسیم:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 + c_2\\c_2\end{bmatrix} \quad => \quad c_1 = x - y \quad , \quad c_2 = y$$

این مقادیر را در معادله بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = (x - y)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

حال با توجه به این فرمول $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = L\left((x-y)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = (x-y)L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + yL\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= (x-y)\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x+2y\\2x\end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\x+2y\\2x\end{bmatrix}$$

---

۱۰. الف) اگر تبدیل خطی T پوشا باشد، باید به ازای هر $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \in R^2$ یک $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in R^2$ وجود داشته باشد به طوری که $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ y & 2 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2a-b \\ 0 & 1 & b-a \end{bmatrix}$$

این سیستم دارای جواب هست پس T پوشا است.

ب) کافی است نشان دهیم اگر $Ax = 0$ باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که $x = 0$.

با توجه به ماتریس‌های بالا کافی است به جای a, b صفر قرار دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس بالا $x = 0 , y = 0$

در نتیجه T یک به یک است.

راه حل دوم: از پوشا بودن یا نبودن می‌توانستیم نتیجه بگیریم که:

$X = 2a - b$

$Y = b - a$

که نشان می‌دهد $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b \\ b-a \end{bmatrix}$ برای $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ همیشه یک جواب بردار هست در نتیجه یک به یک است.

---

۱۱. یک ترکیب خطی از بردارهای s را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}_n,$$

برای این که نشان دهیم S مجموعه‌ای مستقل خطی است، باید نشان دهیم همه‌ی ضرایب این ترکیب، یعنی c_iها برابر صفر می‌باشند. می‌دانیم که حاصل هر تبدیل خطی روی بردار صفر، بردار صفر می‌باشد؛ پس طبق خواص تبدیل‌های خطی داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_m &= T(\mathbf{0}_n) = T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) \\ &= c_1T(\mathbf{x}_1) + c_2T(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_kT(\mathbf{x}_k). \end{aligned}$$

حال از آنجایی که بردارهای $T(X_1) , T(X_2), \dots , T(X_k)$ مستقل خطی می‌باشند پس ضرایب متناظر آن‌ها در ترکیب خطی بالا برابر صفر خواهد بود. در نتیجه $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ که نتیجه می‌دهد که S مجموعه‌ای مستقل خطی می‌باشد.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰