

تجزیه LU

دستگاه معادله $Ax = b$ را فرض کنید. همان‌طور که می‌دانید حل این دستگاه با روش کاهش سطری در زمان $O(n^3)$ انجام می‌شود. اما اگر تجزیه LU ماتریس A را در اختیار داشته باشیم، حل معادله می‌تواند در زمان $O(n^2)$ انجام شود. همچنین می‌دانیم که محاسبه ماتریس‌های L و U خود در زمان $O(n^3)$ صورت می‌گیرد. در نتیجه حل یک دستگاه با محاسبه تجزیه LU ماتریس آن و پیدا کردن جواب دستگاه از روی آن روش به صرفه‌ای نیست.

حال فرض کنید می‌خواهیم تعداد زیادی معادله به شکل $Ax = b$ که در آن‌ها A ثابت و تنها b ها متفاوت هستند را حل کنیم (مثلاً برای محاسبه وارون یک ماتریس). در این شرایط اگر در ابتدا، یک بار تجزیه LU ماتریس A را در زمان $O(n^3)$ حساب کنیم، می‌توانیم دستگاه را به ازای b های مختلف در زمان $O(n^2)$ حل کنیم که بسیار بهینه‌تر است.

در این تمرین می‌خواهیم با استفاده از کتابخانه `numpy` در پایتون، دستگاه $Ax = b$ را به ازای b های مختلف به کمک تجزیه LU حل کنیم (برای سادگی فرض کنید ماتریس A مربعی است، تجزیه LU آن وجود دارد و دستگاه‌های خواسته هر کدام تنها یک جواب دارند). برای این کار:

۱. تابعی بنویسید که با دریافت ماتریس A ، ماتریس‌های L و U را محاسبه کرده و خروجی دهد.
۲. تابعی بنویسید که با انجام forward substitution دستگاه $Ly = b$ را حل کند و y را خروجی دهد.
۳. تابعی بنویسید که با انجام backward substitution دستگاه $Ux = y$ را حل کند و x را خروجی دهد.
۴. به کمک این توابع دستگاه‌های خواسته شده در ورودی را حل کنید.

توجه کنید که توابع مورد ۲ و ۳ باید از ویژگی پایین‌مثلثی و بالامثلثی بودن ماتریس‌های L و U استفاده کنند تا حجم محاسبات کاهش پیدا کند.

ورودی

در خط اول n ، اندازه ماتریس $A_{n \times n}$ ، و m ، تعداد بردارهای b مختلف که به ازای آن‌ها می‌خواهیم معادله $Ax = b$ را حل کنیم، با فاصله از هم آمده‌اند.

در n خط بعدی، سطرهای ماتریس A وارد می‌شوند.

در هر یک از m خط بعدی، درایه‌های هر یک از بردارهای b در فضای \mathbb{R}^n با فاصله از هم آمده‌اند.

خروجی

خروجی برنامه‌ی شما باید شامل n خط باشد که در هر خط جواب معادله به ازای b های مختلف (به ترتیبی که وارد شده‌اند) چاپ شود. اعداد را تا ۴ رقم اعشار چاپ کنید.

مثال

ورودی نمونه ۱

```
3 5
5 6 2
4 5 2
2 4 8
18 7 2
4 5 8
15 7 6
11 9 5
13 12 12
```

در این مثال تجزیه‌ی LU به شکل زیر می‌باشد. توجه کنید که تجزیه‌ی LU را نباید به عنوان خروجی چاپ کنید.

```
L =
1.0 0.0 0.0
0.8 1.0 0.0
0.4 8.0 1.0

U =
5.0 6.0 2.0
0.0 0.2 0.4
0.0 0.0 4.0
```

خروجی نمونه ۱

75.0 -64.0 13.5

-14.0 13.0 -2.0

53.0 -45.0 10.0

0.5 1.5 -0.25

-10.0 11.0 -1.5