به نام او

پاسخ تمرینات سری دوم – فصل دوم

۱. الف)

$$A^2 + c_1A = -c_0I$$
$$A(A + c_1I) = -c_0I$$
$$A\left(\frac{-1}{c_0}(A + c_1I)\right) = I$$

حال فرض می‌کنیم $B = \left(\frac{-1}{c_0}(A + c_1I)\right)$. پس ما نشان دادیم که $AB = I$ و به طور مشابه میتوانیم نشان دهیم $BA = I$. پس B وارون ماتریس A می‌باشد.

ب) غلط. مثال نقض: $A = I$ که وارون پذیر است و $c_1 = -1$ و معادله به فرم $A^2 - A = 0$ درمی‌آید و بر قرار است.

---

۲. فرض می‌کنیم $P = A + B$. پس $B = P - A$.

حال داریم :

$$A(A + B)^{-1}B = AP^{-1}(P - A) = AP^{-1}P - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$$

و از طرفی داریم :

$$B(A + B)^{-1}A = (P - A)P^{-1}A = PP^{-1}A - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$$

با توجه به عبارت بالا سمت راست و چپ تساوی پس از ساده سازی به مقدار یکسان رسیدند پس تساوی برقرار است.

---

۳. راه اول:

$$B(I - AB) = (I - BA)B$$

$$B = (I - BA)B(I - AB)^{-1}$$

$$BA = (I - BA)B(I - AB)^{-1}A$$

$$I - BA = I - (I - BA)B(I - AB)^{-1}A$$

$$(I - BA) + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A = I$$

$$(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) = I \quad \rightarrow \quad (I - BA)^{-1} = (I + B(I - AB)^{-1}A)$$

راه دوم: برهان خلف.

فرض خلف : $I - BA$ وارون پذیر نیست.

پس معادله $BAx = x$ ($BAx = x$ $\rightarrow$ $(I - BA)x = 0$) جواب غیر بدیهی (غیر صفر) دارد. حال A را از سمت چپ در این معادله ضرب می‌کنیم و به عبارت $ABAx = Ax$ می‌رسیم و از عبارت قبل می‌دانیم که Ax مخالف صفر است. حال می‌توانیم $Ax = y$ را در نظر بگیریم و معادله خود را به صورت $ABy = y$ بازنویسی کنیم که شکل دیگری از معادله‌ی $(I - AB)y = 0$ می‌باشد. و از آنجایی که y غیر صفر است، پس $I - AB$ وارون پذیر نیست و این خلاف فرض سوال است و فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

---

۴. الف)

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b-a \\ b-a \\ b-a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c-b \\ c-b \end{bmatrix}, [d-c] \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

ب) درایه‌های محوری در ماتریس U باید مخالف صفر باشند. بنابراین:

$$a \neq 0 \quad , \quad b \neq a \quad , \quad c \neq b \quad , \quad d \neq c$$

۵.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, [3] \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}3\\10\\20\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad LUx=b \quad , \quad Ux=y \quad \rightarrow \quad Ly=b$$

$$Ly=b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix} y=\begin{bmatrix}3\\10\\20\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

$$Ux=y \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix} x=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

---

۶. الف) فرض کنید S شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

$$v \in R \quad , \quad v=(b_1,b_2,b_3) \quad , \quad b_1=0$$

اگر $v_1=(0,a_2,a_3)$ و $v_2=(0,b_2,b_3)$ باشد آنگاه $v_1+v_2=(0,a_2+b_2,a_3+\ b_3)$ که عضو S است.
فرض کنید $c \in R$ و $c.v_1=(c.0,c.a_2,c.a_3) \in S$. از آنجاییکه S تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، می‌توان گفت که یک زیرفضا می‌باشد.

ب) فرض کنید S شامل تمام بردار هایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

$$v \in R \quad , \quad v=(b_1,b_2,b_3) \quad , \quad b_1=1$$

اگر $v_1=(1,a_2,a_3)$ و $v_2=(1,b_2,b_3)$ باشد آنگاه $v_1+v_2=(2,a_2+b_2,a_3+\ b_3)$ که عضو S نمی‌باشد.
بنابراین از آنجاییکه S تحت عملیات جمع بسته نیست، یک زیر فضا نمی‌باشد.

ج) فرض کنید S شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

$$v \in R \quad , \quad v=(b_1,b_2,b_3) \quad , \quad b_2b_3=0$$

اگر $v_1=(a_1,a_2,a_3)$ و $v_2=(b_1,b_2,b_3)$ باشد آنگاه $v_1+v_2=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+\ b_3)$ است.
برای آنکه v_1+v_2 عضو S باشد باید :

$$(a_2+b_2).(a_3+\ b_3)=0 \quad \rightarrow \quad a_2\,a_3+a_2\,b_3+b_2\,a_3+b_2\,b_3=0 \quad \rightarrow \quad a_2\,b_3+b_2\,a_3=0$$

داریم:

$$v_1=(1,0,1) \quad , \quad v_2=(1,1,0) \in S \quad \rightarrow \quad v_1+v_2=(2,1,1) \notin S$$

از آنجاییکه S تحت جمع بسته نیست، می‌توان نتیجه گرفت که زیرفضا نمی‌باشد.

د) فرض کنید S شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

$$v_1 = \lambda(1,1,0) + \gamma(2,0,1)$$

و داریم:

$$v_1 + v_2 = \lambda_1(1,1,0) + \gamma_1(2,0,1) + \lambda_2(1,1,0) + \gamma_2(2,0,1)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2).(1,1,0) + (\gamma_1 + \gamma_2).(2,0,1) \quad \in S$$

اگر $c \in R$ داریم:

$$c.v_1 = c.\left(\lambda_1(1,1,0) + \gamma_1(2,0,1)\right) = c.\lambda_1(1,1,0) + c.\gamma_1(2,0,1) \quad \in S$$

از آنجاییکه S تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، می‌توان گفت یک زیرفضا می‌باشد.

ه) فرض کنید S شامل تمام بردار هایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

$$v = (b_1, b_2, b_3) \quad , \quad b_3 - b_2 + 3b_1 = 0 \quad \to \quad b_3 = b_2 - 3b_1$$

داریم:

$$v_1 = (a_1, a_2, a_3) \ , v_2 = (b_1, b_2, b_3) \ \in S$$
$$v_1 + v_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$a_3 = a_2 - 3b_1 \quad , \quad b_3 = b_2 - 3b_1$$
$$\to \ a_3 + b_3 = (a_2 + b_2 - 3b_1 - 3a_1) \quad \to \quad v_1 + v_2 \ \in S$$

و بدیهی است که تحت عملیات ضرب اسکالر نیز بسته است پس می‌توان گفت یک زیرفضا می‌باشد.

---

۷. ابتدا ماتریس کاهش‌یافته ردیفی را برای ماتریس A پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_2]{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

الف) با محاسبات بالا می‌توان فهمید جواب عمومی معادله $Ax = 0$ به صورت زیر است:

$$x_1 = -9x_3 - 2x_4$$
$$x_2 = 3x_3 - x_4,$$

که x_3 و x_4 متغیر های آزاد هستند. بنابر این بردار جواب برای $Ax = 0$ برابر است با:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x_3 - 2x_4 \\ 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که میتوان از روی آن $null\ space$ را برای این ماتریس پیدا کرد:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ for all } x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
$$= \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

بنابراین می‌توان فهمید این ۲ بردار که مستقل خطی‌اند و $null\ space$ را $span$ می‌کنند، یک پایه برای آن می‌باشند.

ب) ردیف‌های غیرصفر ماتریس کاهش یافته A یک پایه برای فضای سطری این ماتریس هستند:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ج) ستون‌هایی از ماتریس A که متناظر با ستون‌های دارای $leading\ 1$ در ماتریس کاهش‌یافته‌اند، تشکیل یک پایه برای $range\ A$ را می‌دهند.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

د) برای بردارهای ستونی A ، بردار های A_1, A_2, A_3, A_4 را در نظر می‌گیریم. در قسمت قبل نشان دادیم که بردارهای A_1, A_2 یک پایه برای $range\ A$ تشکیل می‌دهند. بنابراین باید A_3, A_4 را به عنوان ترکیب خطی ۲ بردار دیگر بنویسیم. از آنجایی‌که ماتریس کاهش‌یافته A را قبلا محاسبه کرده بودیم، به سادگی می‌توان دریافت که درایه‌های سومین ستون این ماتریس ضرایب ترکیب خطی A_3 و درایه های ستون ۴ ضرایب ترکیب خطی A_4 را می‌دهند.

$$A_3 = 9A_1 - 3A_2.$$

$$A_4 = 2A_1 + A_2.$$

۸. الف) اگر $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_l\}$ یک پایه دلخواه برای زیرفضای V باشد هدف ما نشان دادن $l = k$ است.

از آنجاییکه B یک پایه است، می‌توان گفت که یک $spanning\ set$ شامل k بردار برای V می‌باشد. پس مجموعه‌ای از $k+1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی می‌باشند. از آنجایی‌که B′ یک پایه است، پس مستقل خطی است. پس $k \leq l$ می‌باشد.

از طرفی B′ یک پایه است پس یک $spanning\ set$ برای V می‌باشد که دارای l بردار است. پس می‌توان گفت هر مجموعه دارای $l+1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی است. از طرفی B نیز یک پایه است که مستقل خطی است. پس $k \leq l$ است.

می‌توان نتیجه گرفت که $l = k$ می‌باشد.

ب) برای ماتریس $m \times n$ به نام A می‌توان گفت $null\ space$ آن دارای بردارهای xای می‌باشد که $Ax = 0$. پس x باید *n-dimensional* باشد. از آنجاییکه $null\ space$ یک زیرفضا از R^3 است، می‌توان نتیجه گرفت $n = 3$.

$Range$ ماتریس A شامل بردارهای yای است که $y = Ax$ به طوری که $x \in R^n$. بنابراین y باید *m-dimensional* باشد. پس $range$ یک زیرفضا از R^5 است و $m = 5$.

از آنجایی‌که یک صفحه یک زیرفضای ۲بعدی است، پس $nullity = 2$ و $range$ توسط یک بردار v، $span$ می‌شود. بنابر این v یک پایه برای $range$ است و $\text{rank} = 1$.

همچنین می‌توان نوشت :

$$\text{rank of } A + \text{nullity of } A = n.$$

پس $n = 3$ و $nullity = 2$ و $rank = 1$.

---

۹. اگر x یک بردار عضو R^n به صورتی که $Ax = 0$ باشد، آنگاه بر اساس عبارت زیر x باید بردار صفر باشد (تمام المان‌های این بردار صفر است)

$$x = I_n x = (CA)x = C(Ax) = C \times 0_m = 0_n$$

حال برای اینکه $Ax = 0$ همواره جواب بدیهی داشته باشد، نباید تعداد ستون‌هایش از تعداد سطرهایش بیشتر باشد؛ زیرا در این صورت متغیر آزاد خواهیم داشت و دیگر تنها جواب ما جواب بدیهی نخواهد بود پس $n \leq m$.

به ازای هر b عضو R^m داریم :

$$b = I_m b = (AD)b = A(Db)$$

و می‌توان نتیجه گرفت $Ax = b$ جواب دارد و باید به ازای هر b دلخواه جواب داشته باشد $(x = Db)$. حال باید سطر و ستون‌های ماتریس A به شکلی باشد که به ازای هر b دلخواه بتوان جوابی برای معادله $Ax = b$ یافت و این یعنی نباید تعداد سطرهای ماتریس A از تعداد ستون‌هایش بیشتر باشد زیرا در این صورت سطرهایی وجود خواهند داشت که در آن ها المان محوری وجود ندارد و این امکان ایجاد ناسازگاری را به همراه دارد. پس $n \geq m$.

حال از رابطه $n \leq m$ و $m \leq n$ نتیجه می‌شود که $n = m$.

حال برای اثبات C =D داریم :

$$(CA)D \;=\; I_nD \;=\; D$$

$$C(AD) \;=\; CI_m \;=\; C$$

$$C(AD) \;=\; (CA)D$$

پس $C \;=\; D$.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰