به نام او

تمرینات سری پنجم – فصل ششم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW5\_AmirHosseinSorour\_9731028$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل $ce.linear.algebra@gmail.com$ در ارتباط باشید.

---

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کرده و دلیل مناسب بیاورید.

الف) هر مجموعه $orthogonal$ در R^n مستقل خطی نیست.

ب) اگر ستون‌های ماتریس $A_{m\times n}$ ، $orthonormal$ باشند، آنگاه تبدیل خطی $x \mapsto Ax$ طول را حفظ می‌کند.

ج) تصویر عمودی y بر روی $\mathbf{v}$ با تصویر عمودی y بر روی $c\mathbf{v}$ یکسان است اگر $c \neq 0$ باشد.

د) ماتریس‌های $orthogonal$ معکوس‌پذیر هستند.

ه) برای هر y و هر زیرفضای W بردار $y - proj_W y$ بر W متعامد است.

و) تصویر عمود $\hat{y}$ از y بر روی زیرفضای W وابسته به پایه متعامد مورد استفاده در محاسبه $\hat{y}$ می‌باشد.

ی) اگر y در زیرفضای W باشد، آنگاه تصویر عمود y بر روی W همان y می‌باشد.

---

۲. فرض کنید $u, v \in V$ باشد. برای هر $a, b \in R$ ثابت کنید $||au + bv|| = ||bu + av||$ اگر و تنها اگر $||u|| = ||v||$.

---

۳. فرض کنید q_1, q_2, q_3 بردارهایی $orthonormal$ در R^3 باشند. تمامی مقادیر ممکن برای دترمینان ماتریس A را بدست آورده و راه‌حل خود را توضیح دهید.

$$A = [2q_1 \quad 3q_2 \quad 5q_3]$$

---

٤. فرض کنید $\vec{u} = (3,4)$ و $\hat{v}$ تصویر عمودی بردار v روی بردار u باشد. اگر $\vec{u} = 5\vec{v}$ و $\alpha = ||\vec{v}||$ باشد، با توجه به مقدار α روی تعداد جواب‌های مساله برای $\vec{v}$ بحث کنید (سعی کنید پاسخ خود را با رسم شکل تحلیل کنید)

۵. فرض کنید W زیرفضایی از R^4 باشد و پایه‌ای به شکل زیر داشته باشد:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

یک پایه $orthonormal$ برای W بیابید.

---

۶. برای ماتریس زیر تجزیه $QR\ Factorization$ را بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

---

۷. مقدار a, b, c را به گونه‌ای بیابید که معادله صفحه $z = ax + by + c$، صفحه‌ای $best\ fit$ برای مجموعه نقاط زیر باشد. (نقاط را به فرم (x, y, z) بخوانید)

$\{\ (0, 0, 1.1), (1,1,2), (0, 1, -0.1), (1, 0,3), (0, -1, 2)\ \}$

---

۸. (**امتیازی**) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ثابت کنید هر بردار x در R^n را میتوان به فرم $x = p + u$ نوشت به طوریکه p در $Row(A)$ و u در $Nul(A)$ باشد.

همچنین نشان دهید که معادله $Ax = b$ یک معادله $consistent$ (دارای حداقل یک پاسخ) است و یک p منحصربفردی در $Row(A)$ وجود دارد به نحوی که $Ap = b$.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰