به نام او

پاسخ تمرینات سری چهارم – فصل پنجم

۱. مشخص است که ستون های ماتریس A وابسته‌ی خطی می‌باشند و درنتیجه ماتریس A معکوس‌پذیر نخواهد بود. بنابراین A یک مقدار ویژه صفر خواهد داشت، و بردار ویژه های متناظر با این مقدار ویژه درواقع جواب معادله ی $\mathrm{Ax} = 0$ خواهند بود. در نتیجه درایه های x شامل مقادیری خواهند بود که میان ستون‌های A یک رابطه‌ی وابسته ی خطی ایجاد کند.

بنابراین، هر برداری در R^3 که مجموع درایه های آن برابر صفر شود، می‌تواند یک بردار ویژه متناظر با صفر باشد. باید دوتا از این بردارها بیابیم که از یکدیگر مستقل باشند و به عبارتی مضرب یکدیگر نباشند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

۲. **الف)** برای هر λ داریم:

$$(M - \lambda I)^T = M^T - (\lambda I)^T = M^T - \lambda I$$

بنابر تئوری 6 قسمت ۲/۲ کتاب نیز می دانیم $M^T - \lambda I$ معکوس‌پذیر خواهد بود، اگر و تنها اگر $(M - \lambda I)$ معکوس‌پذیر باشد؛ یا می توان گفت $M^T - \lambda I$ معکوس پذیر نیست، اگر و تنها اگر $(M - \lambda I)$ معکوس پذیر نباشد. بنابراین λ مقدار ویژه ی M^T خواهد بود، اگر و تنها اگر مقدار ویژه ی M باشد.

ب) اگر M یک ماتریس پایین مثلثی باشد، انگاه M^T یک ماتریس بالا مثلثی و درایه های روی قطر آن، همان درایه‌های روی قطر M خواهد بود.بنابراین به کمک بخشی از اثبات تئوری ۱ بخش ۵/۱ می توان نتیجه گرفت که این درایه های قطری، مقادیر ویژه ی M^T هستند (این قسمت اثبات شده بود) و در نهایت به کمک قسمت "الف" می توان نتیجه گرفت که این مقادیر ویژه، مقادیر ویژه ماتریس M نیز خواهند بود و درواقع برای هر دو ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی مقادیر ویژه هستند. پس برای هر ماتریس قطری نیز درایه های قطری مقادیر ویژه خواهند بود.

ج) اگر M ماتریسی باشد که مجموع درایه های هر سطر آن برابر با ۱ باشد، به راحتی می توان برداری مانند v را در R^n در نظر گرفت که همه ی درایه های آن ۱ هستند و $Av = sv$. بنابراین s یک مقدار ویژه ی A خواهد بود.

حال اگر مجموع درایه های هر ستون M برابر s باشد، این به این معنا است که مجموع درایه های هر سطر M^T برابر با s خواهد بود و طبق قسمت "الف"، s مقدار ویژه M نیز خواهد بود.

---

۳. باید ببینیم که آیا u ترکیب خطی‌ای از بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هست یا خیر. اگر بود، می توان $M^4 u$ را محاسبه کرد.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & | & 6\\1 & 2 & 1 & | & 8\\1 & 1 & 1 & | & 6\\1 & 1 & 2 & | & 9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 1\\0 & 1 & 0 & | & 2\\0 & 0 & 1 & | & 3\\0 & 0 & 0 & | & 0\end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix} = v_1 + 2v_2 + 3v_3$$

$$M^4u = M^4v_1 + 2M^4v_2 + 3M^4v_3 = 2^4v_1 + 2(-1)^4v_2 + 3(-1)^4v_3 = \begin{bmatrix}21\\23\\21\\24\end{bmatrix}$$

---

۴. **الف)** چون A یک ماتریس قطری‌شدنی است پس داریم $A = PDP^{-1}$ و چون معکوس پذیر است مقدار ویژه‌های A برابر صفر نیستند. پس تمام درایه‌های D غیر صفرند پس D هم معکوس پذیر است پس:

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = P^{-1^{-1}}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

و چون D قطری است، $D = D^{-1}$ پس A^{-1} هم قطری شدنی است.

ب) بله ممکن است، اگر فضای برداری آخرین مقدار ویژه یک بعدی باشد، آنگاه جمع ابعاد فضاهای ویژه‌ی ماتریس برابر ۶ می‌شود. و طبق قسمت b تئوری ۷، ماتریس تنها درصورتی قطری‌شونده می‌شود که جمع ابعاد فضاهای ویژه‌ی آن برابر ۷ شود.

---

۵. مقدار ویژه‌ها و فضاهای ویژه‌ی متناظر ماتریس a برابرند با:

$$\lambda = 0 \to v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \to \{v_2, v_3\} = \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

پس برای قطری‌سازی کافیست تا:

$$P = [v_r, v_2, v_3] = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس b ولی تنها یک مقدار ویژه دارد و فضای برداری متناظر آن یک بعدیست:

$$\lambda = 0 \to v_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

درنتیجه تنها یک بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس b داریم و بقیه‌ی مقادیر ویژه‌ی b مختلط هستند. پس ماتریس b بر اعداد حقیقی قطری شونده نیست.

.۶

۱) $T(e_1) = 0b_1 - 0b_2 + b_3 \,, T(e_2) = -b_1 - 2b_2 + 0b_3 \,, T(e_3) = 2b_1 + 0b_2 + 3b_3$

۲) $$[T(e_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , [T(e_2)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} , [T(e_3)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۳) $$[[T(e_1)]_B \quad [T(e_2)]_B \quad [T(e_3)]_B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

.۷ با روش $C = P^{-1}AP$:

بردار ویژه‌ی متناظر با $\lambda = 2 - i$ برابر است با $v = \begin{bmatrix} -1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$ و داریم:

$$Re(v) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Im(v) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \to P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

درنتیجه:

$$C = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از تئوری ۹:

تئوری ۹: اگر A یک ماتریس 2×2 با مقدار ویژه‌ی $\lambda = a - bi$ و بردار ویژه‌ی v متناظر آن باشد آنگاه $A = PCP^{-1}$ در صورتی که:

$$P = [Re(v) \quad Im(v)] \qquad \text{و} \qquad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

که در این مثال $a = 2$ و $b = 1$ در نتیجه:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۸. داریم:

$$X_k = c_1(\lambda_1)^k v_1 + c_2(\lambda_2)^k v_2 + c_3(\lambda_3)^k v_3$$

ابتدا باید ضرایب c را بدست آوریم:

$$X_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

که طبق همین معادله $c_1 = 2$ و $c_2 = 1$ و $c_3 = 2$ بدست می‌آید. پس با جایگذاری در رابطه اول داریم:

$$X_k = 2(3)^k v_1 + 1(\frac{4}{5})^k v_2 + 2(\frac{3}{5})^k v_3$$

زمانی که $k \to \infty$ است، متوجه می‌شویم که پاسخ به ساختار بردارهای ویژه بستگی دارد اما چون $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{5}$ هردو از ۱ کوچک‌تر هستند پس پاسخ X_k بیشتر به قسمت اول یعنی $2(3)^k v_1$ وابسته است. چون وقتی $k \to \infty$ است می دانیم که $(\frac{4}{5})^k v_2 \to 0$ و $(\frac{3}{5})^k v_3 \to 0$.

---

۹. با توجه به اطلاعات سوال داریم:

$$A\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_0 = 0.5$$

$$A\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.96 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_1 = 0.96$$

$$A\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6875 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54375 \\ 0.975 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_2 = 0.975$$

$$A\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5577 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47885 \\ 0.92308 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_2 = 0.92308$$

$$A\mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5188 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4594 \\ 0.90752 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_2 = 0.90752$$

طبق این توالی X_k به $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ میل می کند و مقدار μ_k هم به 0.9 میل می کند. در نتیجه 0.9 بزرگترین مقدار ویژه و $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$بردار ویژه متناظر با آن است که می‌توان با روش زیر از این پاسخ اطمینان حاصل کنیم:

$$A\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰