به نام او

پاسخ تمرینات سری سوم – فصل سوم و چهارم

۱. **روش اول:**

می‌توانیم در نظر بگیریم که B = [x y z] باشد. آنگاه می‌توانیم بگوییم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و مطابق قوانین دترمینان داریم:

$$det(A)\, det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به ماتریس B متوجه می‌شویم که ستون‌های آن مستقل خطی هستند. در نتیجه ماتریس B معکوس پذیر است پس $det(B) \neq 0$ است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که دترمینان A می‌بایست صفر باشد.

روش دوم:

با توجه به بردارها داریم:

$$Ax + Ay = Az$$

که می‌توانیم بگوییم:

$$A(x + y - z) = 0$$

چون سه بردار x و y و z مستقل خطی هستند پس ترکیب خطی آن‌ها با ضرایب موجود مخالف صفر است در نتیجه دترمینان A برابر صفر خواهد بود.

---

۲. **روش اول:**

برای محاسبه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع از $end\ point$ های مثلث استفاده می‌کنیم که مساحت آن نصف مساحت متوازی الاضلاع است که این $end\ point$ ها برابر (1,2) , (3,0) , (0,0) هستند.

با فرمول زیر مساحت این متوازی‌الاضلاع را بدست می‌آوریم:

$$A = 2 \times \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

که پس از انجام محاسبات A = 6 خواهد بود.

روش دوم:

می‌توانیم دترمینان [v u] یا [u v] را بدست آوریم که می‌دانیم قدرمطلق این مقادیر برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

پس در این روش هم به مقدار ۶ برای مساحت می‌رسیم.

---

۳. می‌دانیم بردارهای v_1, v_2, v_3 مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & -h & 3h+1 \end{bmatrix}$ نامنفرد یا معکوس‌پذیر باشد. یا به عبارتی دترمینان A مخالف صفر باشد.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & -h & 3h+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2h \\ -h & 3h+1 \end{vmatrix} = 2h^2 + 3h + 1$$

$$= (2h+1)(h+1) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} h \neq -1 \\ h \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر مقدار x بجز $-\frac{1}{2}$ و -1، بردارهای v_1, v_2, v_3 مستقل خطی خواهند بود.

---

۴. الف) می‌دانیم یک ماتریس مانند A معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر ماتریسی مانند B وجود داشته باشد که AB=I و BA=I، حال داریم:

$$A \times A^{-1} = I \rightarrow \det(A).\det(A^{-1}) = 1 \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

ب) ابتدا با استفاده از تئوری ۶ قسمت ۳/۲ ($\det(AB) = \det(A)\det(B)$) دترمینان بالا را تجزیه می‌کنیم.

$$\det((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T) = \det((A^4)^T).\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).\det((B^3)^T)$$
$$= \det(A^4).\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).\det(B^3)$$

همچنین چون $\det(A^n) = \det(A \times A \times \ldots \times A) = \det(A) \ldots \times \det(A) = (\det(A))^n$ پس داریم:

$$\det((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T) = (\det(A))^4.\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).(\det(B))^3$$

همچنین به راحتی مانند بالا قابل اثبات هست که $det(A^{-n}) = det(A^{-1})^n$ و از طرفی داریم:

$$\det((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T) = (\det(A))^4.\frac{1}{\det(B)}.\frac{1}{(\det(A))^4}.(\det(B))^3 = (\det(B))^2$$

پس برای محاسبه ی دترمینان بالا تنها کافی است دترمینان B را بدست آوریم؛ که چون B یک ماتریس بالا مثلثی است، پس $\det(B) = 24$ می‌شود و در نتیجه:

$$\det((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T) = (\det(B))^2 = (2 \times 3 \times 4)^2 = 24^2 = \mathbf{576}$$

۵. طبق تئوری ۸ داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times ad_j(A)$$

$$adj\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} I & 0 \\ D & I \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ D & I \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & I \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} I & 0 \\ B & I \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} I & 0 \\ A & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} A & I \\ B & D \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} I & 0 \\ B & D \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} I & 0 \\ A & I \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^2 & 0 & 0 \\ -AI & I^2 & 0 \\ AD - BI & -DI & I^2 \end{bmatrix}$$

از طرفی با گسترش بر سطر اول دترمینان $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}$ را بدست می‌آوریم:

$$\det(A) = +I \times \begin{vmatrix} I & 0 \\ D & I \end{vmatrix} = I \times I^2 = I^3 \xrightarrow{I>0} I = 1$$

درنتیجه:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}\right)} \times ad_j\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{I^3} \times \begin{bmatrix} I^2 & 0 & 0 \\ -AI & I^2 & 0 \\ AD - BI & -DI & I^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ P & I & 0 \\ Q & R & I \end{bmatrix}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که :

$$P = -A$$
$$Q = AD - B$$
$$R = -D$$

.۶

$$a = \frac{\det(A_1 b)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{10}$$

۷. الف) فرض کنید زیرفضاهای H و K و فضای برداری V را در اختیار داریم. بردار صفر از V به $H+K$ متعلق است زیرا صفر در هر دوی H و K موجود می‌باشد. (چون خودشان زیرفضا هستند) و 0+0 = 0 . همچنین اگر ۲ بردار در $H+K$ را انتخاب کنیم، برای مثال $w_1 \;=\; u_1+v_1 \;\; , w_2 = u_2+v_2$ به طوریکه $u_1 \;,\; u_2$ در H و $v_1 \,, v_2$ در K باشند آنگاه داریم:

$$w_1+w_2 \;=\; u_1+v_1+u_2+v_2 \;=\; (u_1+u_2)+(v_1+v_2)$$

(جمع برداری در V خواص جابجایی و شرکت‌پذیری را دارد)

حال میتوان گفت u_1+u_2 متعلق به H و v_1+v_2 متعلق به K است چراکه $K \,, H$ زیرفضا می‌باشند. این نشان می‌دهد که w_1+w_2 در $H+K$ است.

بنابر این میتوان گفت $H+K$ تحت جمع بسته است.

از طرفی در صورتی که عددی مثل c داشته باشیم، می‌توان نوشت :

$$cw_1 = c(u_1+v_1) = cu_1+cv_1$$

در اینجا بردار cu_1 متعلق به H است و cv_1 متعلق به K چراکه $H \,, K$ زیرفضا می‌باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت cw_1 متعلق به $H+K$ است پس تحت ضرب عدد اسکالر در بردار نیز بسته است.

در این حالت می‌توان گفت از آنجاییکه $H+K$ هر ۳ ویژگی را داراست یک زیرفضا از V می‌باشد.

ب) واضح است که H یک زیرفضا از $H+K$ است؛ چراکه هر بردار u در H را می‌توان به فرم $\mathrm{u}+0$ نوشت که در آن بردار صفر در K است. (و همچنین در H)

از آنجاییکه H شامل بردار صفر در $H+K$ است و H تحت جمع برداری و ضرب عدد در بردار بسته است (چون H یک زیرفضا از V است)، آنگاه H یک زیرفضا از $H+K$ نیز می‌باشد. به طور مشابه می‌توان اثبات کرد که K نیز یک زیرفضا از $H+K$ است.

---

۸. برای این سوال کافیست مثال نقض مناسب پیدا کنیم.

الف) بردار زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $x_1 \;=\; 1 > 0$ ، بردار x در S_1 قرار دارد. سپس عدد $1-$ را در این بردار ضرب می‌کنیم:

$$(-1)\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همان طور که میتوان مشاهده نمود، درایه اول 1- می‌شود که دراینجا x – در S_1 قرار ندارد. پس S_1 تحت ضرب عدد در بردار بسته نیست و زیرفضا نمی‌باشد.

ب) بردار صفر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه بردار صفر در رابطه مربوط به S_2 صدق نمی‌کند می‌توان گفت که S_2 شامل بردار صفر نمی‌باشد، بنابراین یک زیرفضا نیست.

ج) بردار های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این بردار ها در S_3 قرار دارند چرا که هر دو در رابطه مربوطه صدق می‌کنند. اگر این دو بردار را جمع کنیم داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که واصح است در رابطه صدق نمی‌کند و در S_3 قرار ندارد. از آنجاییکه S_3 تحت جمع برداری بسته نیست پس یک زیرفضا نمی‌باشد.

---

۹. الف) برای هر A , B در $M_{2\times 2}$ و هر عدد c داریم:

$$T(A+B)=(A+B)+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T=(A+A^T)+(B+B^T)=T(A)+T(B)$$

و

$$T(cA)=(cA)^T=c(A^T)=cT(A)$$

بنابراین T یک تبدیل خطی است.

ب) فرض کنید B هر المانی در $M_{2\times 2}$ باشد به طوریکه $B^T = B$ و ½ $= \mathrm{A}$ آنگاه داریم:

$$T(A)=A+A^T=\frac{1}{2}B+(\frac{1}{2}B)^T=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B^T=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B=B$$

ج) در بخش ب نشان دادیم که $Range(T)$ شامل مجموعه تمام B هایی در $M_{2\times 2}$ است که $B^T = B$. باید نشان دهیم که هر B در $Range(T)$ این ویژگی را داراست.

فرض کنید B در $Range(T)$ باشد و B=T(A) برای یک A در $M_{2\times 2}$ برقرار باشد. آنگاه $B = A^T + A$ و :

$$B^T=(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T=B$$

پس B دارای ویژگی $B^T = B$ می‌باشد.

د) فرض کنید A در کرنل T بوده و $T(A) = A^T + A = 0$ و $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

داریم: $$A+A^T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & c+b \\ b+c & 2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با حل معادله بالا می‌توان فهمید که $a = d = 0$ و $c = -b$. بنابر این کرنل T برابر است با: $\left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \text{ real}\right\}.$

---

۱۰. بردار a را در نظر می‌گیریم. از آنجاییکه این بردار 3-dimensional است نمی‌تواند در $Range$ ماتریس A باشد و همچنین داریم:

$$\mathbf{Aa}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\neq \mathbf{0},$$

پس بردار a در $null\ space$ ماتریس A نیز حضور ندارد.

سپس بردار b را در نظر می‌گیریم. به طور مشابه این بردار نیز 3-dimensional است. بنابراین در $Range(A)$ حضور ندارد. همچنین داریم:

$$\mathbf{Ab}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}= \mathbf{0},$$

پس میتوان گفت که b در $null\ space\ (A)$ هست.

در نهایت بردار c را در نظر می‌گیریم. این بردار 2-dimensional است پس این بردار در $null\ space\ (A)$ حضور ندارد.

برای آنکه تعیین کنیم c در $Range(A)$ هست یا نه نیاز است تا بررسی کنیم که سیستم $Ax = c$ دارای جواب است یا خیر. ماتریس افزوده این معادله را تشکیل می‌دهیم و عملیات ردیفی را پیاده‌سازی می‌کنیم. داریم:

$$[A \mid \mathbf{c}]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2-3R_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]\xrightarrow{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

از آنجاییکه معادله دارای جواب است پس می‌توان گفت که c در $Range(A)$ هست.

۱۱. با توجه به تعاریف $subspace$ داریم :

$$U + V = \{x + y \;\mid\; x \in U \quad , \quad y \in V\}$$

و این مجموع خودش یک $subspace$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $dim(U) = n \;,\; dim(V) = m$ و پایه $B_1 = \{u_1, u_2, \dots , u_n\}$ برای زیرفضای U و $B_2 = \{v_1, v_2, \dots , v_m\}$ برای زیرفضای V در نظر می‌گیریم.

حال یک بردار تصادفی X را از زیر فضای U و بردار Y از زیر فضای V انتخاب می‌کنیم که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$X = r_1u_1 + \cdots + r_nu_n$$

$$Y = s_1v_1 + \cdots + s_mv_m$$

که s ها و r ها اعداد اسکالر هستند.

$$X + Y = r_1u_1 + \cdots + r_nu_n + s_1v_1 + \cdots + s_mv_m$$

و از انجایی که X , Y بردارهای دلخواهی بودند پس می‌توان نوشت $X + Y$ عضوی از

$$S = Span(u_1, u_2, \dots , u_n, v_1, v_2, \dots , v_m)$$

می‌باشد پس $U + W$ زیرمجموعه این فضاست. حال می‌دانیم که اعضای نوشته شده در $span$ ممکن است نسبت به هم مستقل نباشند و بتوان برخی از آن ها را به صورت مجموع چندی دیگر نوشت پس بدون اینکه کلیتی از تعریف $span$ از دست بدهیم می‌توانیم اعضایی از آن حذف کنیم پس ماکسیمم سایز $dim(S)$ برابر با مجموع $dim(U)$, $dim(V)$ است و در حالتی از این کمتر خواهد شد ولی هرگز بیشتر نخواهد بود پس می‌توان نوشت :

$$dim(U + W) \leq dim(S) \leq n + m = dim(U) + dim(V)$$

---

۱۲. ماتریس A را به فرم نردبانی تبدیل می‌کنیم تا $rank$ آن را بدست آوریم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{rank} A = 2.$$

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 17/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A) = 2.$$

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(AA^{\mathrm{T}}) = 2.$$

می‌توان نشان داد که رابطه‌ی $rank(A) = rank(A^tA) = rank(AA^t)$ برای هر ماتریس A (نه لزوماً ماتریس‌های مربعی) برقرار است.

۱۳. الف) بهترین راه این است که دترمینان ماتریسی را بدست آوریم که ستون‌هایش بردارهای v_3 , v_2 , v_1 هستند و مقادیری را برای λ بدست آوریم که به ازای آن‌ها دترمینان برابر صفر خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -4 - 4\lambda = 0.$$

می‌توان نتیجه گرفت مجموعه بردارهای v_3 , v_2 , v_1 تنها به ازای $\lambda = -1$ تشکیل پایه برای R^3 نمی‌دهند.

ب) فرض کنید $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 3$. در اینصورت با استفاده از قسمت الف، مشخص است که B و S پایه‌هایی برای R^3 هستند.

ج) بردارهای v_2 , v_1 در هر دو پایه وجود دارند و برابرند. بنابراین می‌توان گفت:

$$[\mathbf{v}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B \quad \text{and} \quad [\mathbf{v}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

پس کافیست $[s]_B$ را محاسبه کنیم. برای اینکار باید ضرایب a, b, c را در معادله‌ی $s = av_1 + bv_2 + cb = Ax$ بدست آوریم. برای اینکار ماتریس افروده زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$[\mathbf{s}]_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

پس ماتریس تبدیل P از پایه B به S برابر است با:

$$P = ([\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, [\mathbf{s}]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

و می‌توان به راحتی $[w]_B$ را محاسبه کرد:

$$[\mathbf{w}]_B = P[\mathbf{w}]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_B.$$

۱۴. الف) برای حل این سوال می‌توانیم ضرایب x_1, x_2, x_3, x_4 را پشت سر هر ماتریس(یک بردار از پایه) بگذاریم و درایه‌های نظیر را جمع بزنیم و سپس معادله را حل کنیم. برای مثال فرض کنید ما میخواهیم درایه v_{11} را بسازیم برا اینکار با توجه به پایه B خواهیم داشت (x_i ضریب b_i می‌باشد) :

$$V_{11} \rightarrow (1 \times x_1) + (0 \times x_2) + (3 \times x_3) + (-2 \times x_4) = -3$$

$$V_{12} \rightarrow (0 \times x_1) + (-1 \times x_2) + (5 \times x_3) + (-4 \times x_4) = -2$$

و اگر برای هر ۴ درایه اینکار را انجام دهیم به ۴ معادله و ۴ مجهول می‌رسیم که به راحتی قابل حل می‌باشد و مقادیر بردار X که همان مختصات ما بر اساس پایه مورد نظر است، پیدا می‌کنیم.

و معادله ما به شکل زیر در می‌آید :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

که با حل این معادله به جواب زیر می‌رسیم :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

حال مراحل بالا را برای پایه C نیز تکرار می‌کنیم و معادله برای این پایه به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

که با حل به جواب زیر می‌رسیم :

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ب) برای حل این قسمت باید هر ماتریس در پایه B را بر اساس ماتریس‌های پایه C بنویسیم. می‌توانیم رویه قسمت قبل را در پیش بگیریم و ۴ بار روند تشکیل ماتریس را انجام دهیم ولی اگر کمی به ساختار ماتریس های پایه C نگاه کنیم، در می‌یابیم که با اولویت‌بندی بین آن‌ها به راحتی می‌توانیم اینکار را بدون تشکیل معادله انجام دهیم. برای مثال برای ایجاد درایه a_2 فقط اولین ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ نقش دارد؛ پس با مشخص‌کردن ضریب این ماتریس به سراغ ماتریس بعدی می‌رویم و در گام بعد هم می‌بینیم برای a_{21} فقط ماتریس‌های اول و دوم نقش دارند که ما ضریب اولی را مشخص کردیم پس فقط باید ضریب دومی را مشخص کنیم و با ادامه همین روال تمام ضرایب برای ما مشخص می‌شود:

$$[b_1]_c = -2c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$[b_2]_c = 0c_1 + 3c_2 - 4c_3 + c_4$$

$$[b_3]_c = 0c_1 + 0c_2 + 5c_3 - 2c_4$$

$$[b_4]_c = 0c_1 + 0c_2 - 4c_3 + 2c_4$$

میدانیم که هر $[b_i]_c$ یک ستون از ماتریس انتقال است و با کنار هم قرار دادن ستون‌ها به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰