به نام او

پاسخ تمرینات سری پنجم – فصل ششم

۱. الف) صحیح – اما هر مجموعه $orthogonal$ متشکل از بردارهای **غیرصفر**، مستقل خطی است.

ب) صحیح – طبق قضیه 7(a) کتاب.

ج) صحیح – طبق متن کتاب، پاراگرافِ قبل از $Example\ 3$

د) صحیح - طبق متن کتاب، پاراگرافِ قبل از $Example\ 7$

ه) صحیح - با استناد به $Orthogonal\ Decomposition\ Theorem$.

و) غلط – با توجه به اثبات قضیه ۸ کتاب که مربوط به $Orthogonal\ Decomposition\ Theorem$ است (بهتر است به روابط اشاره شود) .

ی) صحیح – می‌دانیم طبق متن کتاب (پاراگرافِ قبل از قضیه ۹) اگر y در $W = Span\{u_1, \dots, u_p\}$ باشد آنگاه $Proj_W y = y$.

---

۲. قسمت اول: فرض کنیم $\|u\| = \|v\| = \beta$. در این صورت:

$$\|au + bv\| = \sqrt{(au + bv).(au + bv)} = \sqrt{a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)\beta^2 + 2ab(u.v)}$$

$$\|bu + av\| = \sqrt{(bu + av).(bu + av)} = \sqrt{b^2\|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)\beta^2 + 2ab(u.v)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|au + bv\| = \|bu + av\|$$

قسمت دوم: فرض کنیم $\|au + bv\| = \|bu + av\|$. باید ثابت کنیم $\|u\| = \|v\|$.

$$\|au + bv\| = \|bu + av\| \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{(au + bv).(au + bv)} = \sqrt{(bu + av).(bu + av)}$$

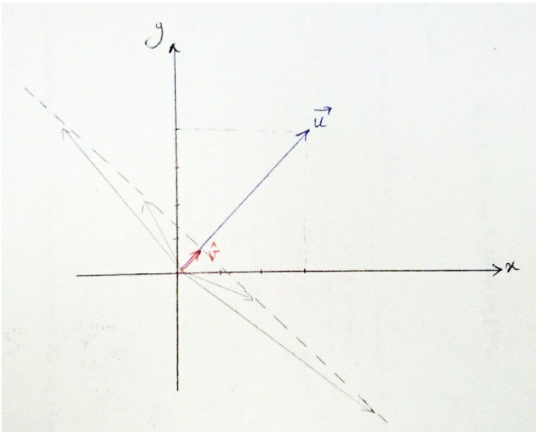
$$\Longrightarrow \quad a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab(u.v) = b^2\|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)$$

$$\Longrightarrow \quad (a^2 - b^2)\|u\|^2 + (b^2 - a^2)\|v\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - b^2)(\|u\|^2 - \|v\|^2) = 0$$

در حالتی که $a^2 = b^2$ باشد، کافیست $a = \pm b$ را در فرض مسئله جایگذاری کنیم تا حکم به سادگی بدست آید.

اما اگر $a^2 \neq b^2$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $\|u\|^2 = \|v\|^2$ و در نتیجه $\|u\| = \|v\|$ و حکم برقرار است.

۳. اگر ماتریس $Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]$ را در نظر بگیریم، می‌دانیم دترمینان این ماتریس برابر 1 یا -1 خواهد بود؛ چراکه $Q^T Q = I$ پس $\det(Q^T) . \det(Q) = 1$ و بنابراین $\det Q^2 = 1$. همچنین می‌دانیم اگر ستونی از ماتریس را در عددی ضرب کنیم دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود. بنابراین می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که دترمینان ماتریس A برابر 30 یا -30 خواهد بود.



۴. ابتدا بردارهای $\vec{u}$ و $\hat{v}$ را رسم می‌کنیم:

طبق شکل رو به رو، مکان هندسی بردار $\vec{v}$ برابر با خط‌چین خواهد بود که خطی عمود بر بردار $\vec{u}$ می‌باشد.

حال با مقایسه α و $||\hat{v}||$ می‌توان دید ۳حالت برای تعداد جواب‌های بردار $\vec{v}$ وجود دارد:

(چون $||\vec{u}|| = 5$ پس $||\hat{v}|| = 1$)

حالت اول: $1 > \alpha$: در این حالت هیچ جوابی برای بردار $\vec{v}$ وجود نخواهد داشت (دایره به شعاع α و خط‌چین تقاطعی ندارند)

حالت دوم: $\alpha = 1$: در این حالت تنها یک جواب برای بردار $\vec{v}$ وجود دارد که آن هم خود $\hat{v}$ است. یعنی $\vec{v} = \hat{v}$ و بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{u}$ موازی‌اند (دایره به شعاع α مماس بر خط‌چین است)

حالت سوم: $1 < \alpha$: در این حالت بردار $\vec{v}$ دارای ۲جواب خواهد بود (دایره به شعاع α و خط‌چین در دو نقطه متقاطع‌اند)

---

۵. فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

می‌توان با محاسبه ضرب داخلی این دو بردار نشان داد که متعامد نیستند؛ چراکه حاصل ضرب داخلیشان برابر با ۹ نیست.

بنابراین باید ابتدا یک پایه متعامد برای W بیابیم. از روش گرم اشمیت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} w_1 := v_1 \\ w_2 := v_2 + a v_1 \\ w_1 \cdot w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= 2 + 3a. \end{aligned}$$

به این ترتیب $a = -{}^{2}/_{3}$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

تغییر ابعاد متعامد بودن بردارها را تغییر نمی‌دهد. بنابراین برای رهایی از اعشار میتوان نوشت:

$$3\mathbf{w}_2 = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین مجموعه $\{w_1 . 3w_2\}$یک پایه متعامد برای W است. ولی طول این بردارها یک نمی‌باشد بنابراین orthonormal نیست. برای این تبدیل می‌توان نوشت:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$\|3\mathbf{w}_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{15}.$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

۶. ستون‌های ماتریس را x_1 و x_2 و x_3 درنظر بگیرید. ابتدا یک پایه متعامد پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_2 - (-1)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_3 - 4\mathbf{v}_1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پایه متعامد برای آن:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

ستون های ماتریس Q در تجزیه QR برابر با ورژن نرمال شده بردارهای بالا هستند:

$$Q=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, R=Q^T A=\begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

---

۷. با استفاده از روش $Least\ Squares$ به حل این سوال می‌پردازیم. با فرض A به عنوان ماتریس ضرایب خواهیم داشت:

$$(A^T A)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^T z$$

ابتدا باید ماتریس ضرایب را تشکیل بدهیم. هر سطر این ماتریس، ضرایب یکی از نقاط ماست:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال ترانهاده این ماتریس را هم بدست می‌آوریم:

$$A^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بردار z هم براساس صورت سوال به این شکل است:

$$z=\begin{bmatrix} 1.1 \\ 2 \\ -0.1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حال با حل معادله ذکر شده به پاسخ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.02 \\ -1.04 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌رسیم.

---

۸. با استناد به قضیه $Orthogonal\ Decomposition\ Theorem$ هر x در R^n را می‌توان منحصرا به صورت $x = p + u$ نوشت که p در $Row\ A$ و u در $(Row\ A)^\perp$. با استفاده از قضیه ۳ در بخش 6.1 می‌دانیم $(Row\ A)^\perp = Nul\ A$ بنابراین u در Nul A است.

سپس فرض کنید $Ax = b$ یک معادله $consistent$ است. فرض کنید x یک پاسخ باشد و x را به فرم $x = p + u$ مشابه آنچه گفته شد می‌نویسیم. سپس داریم $Ap = A(x - u) = Ax - Au = b - 0 = b$ بنابراین معادله $Ax = b$ حداقل یک پاسخ p در $Row\ A$ دارد.

در نهایت فرض کنید p و p_1 هردو در $Row\ A$ قرار دارند و هردو در معادله $Ax = b$ صدق می‌کنند. $p - p_1$ در $(Row\ A)^{\perp} = Nul\ A$ است چراکه $A(p - p_1) = Ap - Ap_1 = b - b = 0$. معادله $p = p_1 + (p - p_1)$ و $p = p + 0$ هردو p را به مجموع بردارهایی در $(Row\ A)$ و $(Row\ A)^{\perp}$ تجریه می‌کنند. با استناد به منحصربفرد بودن Orthogonal Decomposition Theorem میتوان گفت $p = p_1$ و p منحصربفرد است.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰