به نام او

تمرینات سری اول – فصل اول

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW1\_AmirHosseinSorour\_9731028$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل $ce.linear.algebra@gmail.com$ در ارتباط باشید.

---

۱. درستی و یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر یک لیست برداری مانند V داشته باشیم که شامل یک بردار v باشد، V مستقل خطی است اگر و تنها اگر $v \neq 0$ باشد.

ب) بردارهای $\begin{bmatrix}0\\0\\7\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-4\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ در فضای R^4 مستقل خطی هستند.

ج) اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که ستون های آن R^m را Span نمی کنند، آنگاه A در هر سطر خود دارای pivot خواهد بود.

---

۲. سوالات پاسخ کوتاه:

الف) مشخص کنید که تبدیل زیر خطی است یا نه؟

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2\ , x_1 - 3\ , 2x_1 - 5x_2)$$

ب) فرض کنید M یک ماتریس صفر 3×3 باشد (ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است) در این صورت مجموعه جواب معادله ماتریسی $Mx = 0$ چه خواهد بود؟

ج) نشان دهید بردارهای $\begin{bmatrix}9\\6\\7\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\8\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\-5\end{bmatrix}$ فضای R^4 را $Span$ نمی‌کنند.

۳. برای g, h, k مقادیری تعیین کنید تا سیستم زیر:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{bmatrix}$$

الف) جواب یکتا داشته باشد.

ب) بی نهایت جواب داشته باشد.

ج) جواب نداشته باشد.

---

۴. معادله‌ی برداری زیر را حل کنید. آیا b ترکیب خطی بردارهای a است؟ آیا b در فضای $span$ بردارهای a است؟

$$a_1 \times c_1 + a_2 \times c_2 + a_3 \times c_3 = b$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \; a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \; a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

---

۵. ماتریس A را درنظر بگیرید. بررسی کنید آیا معادله $Ax = b$ به ازای هر b در R^4 دارای جواب می‌باشد؟

سپس بررسی کنید که آیا بردار $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ در زیرمجموعه‌ای که ستون های A آن را $span$ می‌کنند قرار دارد یا خیر (دلیل آن را ذکر کنید)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

---

۶. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد به طوری که $m > n$ ، توضیح دهید چرا ستون های A نمی‌توانند فضای R^m را $Span$ کنند.

۷. ماتریس M یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد. برداری مانند b را در فضای R^n درنظر بگیرید به طوری که دستگاه معادلات خطی ناشی از ستون های M ناسازگار باشد. آیا برداری مانند a در R^n وجود خواهد داشت که معادله‌ی $Mx = a$ دارای یک جواب یکتا شود؟ (توضیح دهید)

---

۸. معادله ی ماتریسی $Ax = b$ را حل کنید و جواب خود را به فرم برداری نمایش دهید؛ که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

سپس درستی بردارهای بدست آمده در فرم برداری را بررسی کنید و در نهایت با توجه به فرم کاهش‌یافته‌ی سطری - پلکانی ماتریس A ، بررسی کنید که آیا برداری مانند u در R^3 وجود دارد که معادله ماتریسی $Ax = u$ به ازای آن ناسازگار ($inconsistent$) باشد؟ توضیح دهید.

---

۹. اگر $L: R^2 \to R^3$ تبدیل خطی باشد به این صورت که :

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad , \qquad L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الف) بردار $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ را بدست آورید.

ب) فرمول $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ را بدست آورید.

---

۱۰. فرض کنید $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $T: R^2 \to R^2$ یک تبدیل خطی باشد:

الف) آیا T پوشا (onto) است؟

ب) آیا T یک به یک (one to one) است؟

---

۱۱. (**امتیازی**) فرض کنید T یک تبدیل خطی است به گونه‌ای که $T: R^n \to R^m$ و $S = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ زیر مجموعه ای از فضای R^n باشد به گونه‌ای که $\{T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_k)\}$ تشکیل یک مجموعه‌ی مستقل خطی بدهد. ثابت کنید که مجموعه‌ی S نیز یک مجموعه‌ی مستقل خطی است.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

زمستان ۹۹