به نام او

تمرینات سری چهارم – فصل پنجم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW4\_AmirHosseinSorour\_9731028$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل $ce.linear.algebra@gmail.com$ در ارتباط باشید.

---

۱. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ بدون انجام محاسبه، یک مقدار ویژه و دو بردار ویژه متناظر را بیابید.

---

۲. ماتریس $M_{n\times n}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ی $M_{n\times n}$ باشد، آنگاه λ مقدار ویژه ی M^T هم خواهد بود.

ب) در تئوری یکِ کتاب، ثابت شد که مقادیر ویژه ی یک ماتریس پایین مثلثی برابر درایه‌های روی قطر اصلی می‌باشند. حال به کمک قسمت «الف» این قضیه را برای ماتریس های مربعی بالا مثلثی اثبات کنید تا اثبات تئوری یکِ کتاب کامل شود.

ج) اکنون فرض کنید M ماتریسی است که مجموع درایه‌های هر ستون آن برابر با s می‌باشد، نشان دهید s یک مقدار ویژه برای M می‌باشد. (راهنمایی: ابتدا این گزاره را برای ماتریسی که مجموع درایه‌های هر سطر آن s می‌شود اثبات کنید و سپس از قسمت «الف» کمک بگیرید)

---

۳. فرض کنید مقادیر ویژه‌ی ماتریس $M_{n\times n}$ برابر با $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 2$ و فضای ویژه‌ی هر کدام از این مقادیر برابر با $E_1 = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ و $E_2 = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ باشد. آیا با اطلاعات جاری می توان M^4u را به ازای $u = \begin{bmatrix}6\\8\\6\\9\end{bmatrix}$ محاسبه کرد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، M^4u را محاسبه کنید.

۴. ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که اگر A هم قطری‌شدنی و هم معکوس‌پذیر باشد آنگاه A^{-1} نیز قطری‌شدنی است.

ب) اگر A یک ماتریس 7×7 با ۳ بردار ویژه باشد، و یکی از فضاهای برداری آن دوبعدی و یکی دیگر سه‌بعدی باشند، آیا امکان دارد که A قطری‌شونده نباشد؟ توضیح دهید.

---

۵. ماتریس‌های زیر را درصورتی که بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی قطری‌شدنی هستند، قطری سازی کنید.

$$a)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

---

۶. فرض کنید $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای R^3 باشد و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد و $T: R^3 \to V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 - x_2)b_1 - (2x_2)b_2 + (x_1 + 3x_3)b_3$$

۱. $T(e_1), T(e_2)$ و $T(e_3)$ را محاسبه کنید.

۲. $[T(e_1)]_B, [T(e_2)]_B$ و $[T(e_3)]_B$ را محاسبه کنید.

۳. ماتریس تبدیل T را تحت پایه‌های ε و B بیابید.

---

۷. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ با بردار ویژه‌های $\lambda = 2 \pm i$، ماتریس C به فرم $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ و ماتریس معکوس‌پذیر P را بیابید تا $A = PCP^{-1}$ برقرار باشد.

این کار را یک بار از طریق $C = P^{-1}AP$ و بار دیگر با کمک تئوری ۹ انجام دهید.

---

۸. فرض کنید که مقدار ویژه‌های ماتریس $A_{3\times 3}$ برابر 3 و $\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{5}$ باشند و بردار ویژه‌های آن‌ها هم به‌ترتیب برابر $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ است. مقدار $x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ است. آنگاه پاسخ معادله $x_{k+1} = Ax_k$ را به‌ازای مقدار x_0 داده شده بدست آورید و توضیح دهید که اگر $k \to \infty$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۹. ماتریس A به همراه دنباله ی x_k که از $power\ method$ بدست آمده، آورده شده است. بیش‌ترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را تخمین بزنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

دنباله ی x_k به ترتیب k صعودی از چپ به راست:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6875 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5577 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5188 \\ 1 \end{bmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰