به نام او

تمرینات سری سوم – فصل سوم و چهارم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW3\_AmirHosseinSorour\_9731028$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل $ce.linear.algebra@gmail.com$ در ارتباط باشید.

---

۱. اگر A یک ماتریس 3×3 باشد و x و y و z سه بردار مستقل خطی باشند و داشته باشیم:

$$Ax = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad Ay = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad Az = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

آنگاه مقدار دترمینان ماتریس A را بیابید.

---

۲. اگر $u = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ باشد، مساحت بین بردارهای u و v و u + v و صفر را بدست آورید.

---

۳. فرض کنید مجموعه برداری $\left\{v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}x\\1\\-x\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}1\\2x\\3x+1\end{bmatrix}\right\}$ مستقل خطی است.
مقادیر x را به کمک دترمینان بیابید.

---

۴. الف) اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد، نشان دهید $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

ب)با توجه به ماتریس های زیر:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 0 & 9\end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

مقدار عبارت $det((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T)$ را بدست آورید.

۵. اگر معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}$، ماتریس $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ P & I & 0 \\ Q & R & I \end{bmatrix}$ باشد و $I > 0$، آنگاه P,Q,R را بر حسب A,B,D به کمک معادله‌ی $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times ad_j(A)$ بنویسید.

---

۶. با در نظر گرفتن معادله‌ی $Ax = b$ مقدار a را با استفاده از روش کرامر محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

---

۷. فرض کنید H و K زیرفضاهایی از فضای برداری V هستند. مجموع H و K که به صورت H+K نوشته می‌شود، مجموعه تمام بردارهایی در V است که می‌توان آنها را به صورت جمع ۲بردار، یکی در H و یکی در K نوشت:

$$H + K = \{w : w = u + v.\ u \in H.\ \ v \in K\}$$

الف) نشان دهید H+K یک زیرفضا از V می‌باشد.

ب) نشان دهید H یک زیرفضا از H+K است. به طور مشابه برای K نیز ثابت کنید.

---

۸. هریک از مجموعه های زیر، زیرفضاهایی از فضای برداری مشخص شده‌شان نیستند. برای هریک از مجموعه ها دلیلی بیاورید که چرا یک زیرفضا نمی‌باشد.

الف)

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x_1 \geq 0 \right\}$$

ب)

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2 \right\}$$

ج)

$$S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ y = x^2 \right\}$$

۹. فرض کنید $M_{2\times2}$ فضای برداری تمام ماتریس های 2×2 باشد و تعریف کنیم:

$T : M_{2*2} \to M_{2*2} . T(A) = A + A^T$

به طوریکه $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

الف) نشان دهید T یک تبدیل خطی است.

ب) فرض کنید B هریک از المان های $M_{2\times2}$ به طوریکه $B^T = B$ باشد. یک A در $M_{2\times2}$ بیابید به طوریکه T(A) = B باشد.

ج) نشان دهید که $Range\ (T)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های B در M_{2*2} است به طوریکه $B^T = B$.

د) $Kernel\ (T)$ را توصیف کنید.

---

۱۰. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ و داریم:

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای بردارهای a و b و c مشخص کنید که آیا هریک از این بردارها در $Null\ Space\ (A)$ هست یا خیر. به طور مشابه برای $Range(A)$ بررسی نمایید.

---

۱۱. فرض کنید U , V دو $subspace$ هستند که dim آن‌ها متناهی است. ثابت کنید:

$\dim(U + V) \leq \dim(U) + \dim(V)$

---

۱۲. رتبه $(rank)$ ماتریس‌های A، A^tA و AA^t را با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ بدست آورید. آیا می‌توانید نتیجه‌گیری خود را در قالب حدس بیان کنید؟

---

۱۳. الف) اگر ماتریس‌های v_1 , v_2 , v_3 تشکیل یک پایه برای R^3 بدهند، مقدار λ را بیابید.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

ب) فرض کنید $b = (2,0,1)^T$ و $s = (2,0,3)^T$. نشان دهید $B = \{v_1 , v_2 , b\}$ و $S = \{v_1 , v_2 , s\}$ پایه‌هایی برای R^3 هستند.

ج) ماتریس انتقال P از پایه B به S را بیابید. اگر $[w]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_S$ ، $[w]_B$ را حساب کنید.

---

۱۴. (**امتیازی**) الف) مختصات بردار v را در هر یک از پایه های B, C بیابید.

ب) ماتریس انتقال از پایه B به پایه C را بنویسید.

$$V = M_2(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰