به نام او

تمرینات سری ششم – فصل هفتم

۱. ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ را قطری‌سازی کنید به طوری که $B = PDP^{-1}$ . همچنین صحت پاسخ خود را بررسی کنید.

---

۲. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را قطری‌سازی عمودی کنید به طوری که $A = PDP^{-1} = PDP^{T}$ .

---

۳. فرض کنید $A$ ماتریسی حقیقی و قطری‌شدنی است و تمام مقادیر ویژه‌ی آن نامنفی هستند. ثابت کنید ماتریس $B$ وجود دارد به طوری که $B^2 = A$ .

---

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، $A^{100}$ را بیابید.

---

۵. اگر ماتریس $A$ دارای مقادیر ویژه‌ی ۱ و ۱ و ۲ باشد، کدام یک از موارد زیر را با قاطعیت صحیح است؟ دلیل بیاورید.

الف) $A$ معکوس‌پذیر است.

ب) $A$ قطری‌شدنی است.

ج) $A$ قطری‌شدنی نیست.

---

۶. تجزیه طیفی ($spectral\ decomposition$) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

---

۷. ماتریس فرم مربعی عبارات زیر را پیدا کنید.

الف) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2$

ب) $9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$

---

۸. با در نظر داشتن معادله‌های سوال قبل، یک ماتریس متعامد $P$ پیدا کنید که با تغییر متغیر $x = P^{-1}y$ معادله‌ی $x^T Ax$ را به یک فرم مربعی بدون *cross product* تبدیل کند.

۹. ماکزیمم مقدار $Q(x) = -3{x_1}^2 + 5{x_2}^2 - 2x_1x_2$ را با فرض ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ بدست آورید.

---

۱۰. تجزیه $SVD$ را برای ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

۱۱. تجزیه $SVD$ ماتریس $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

---

# پاسخ تمرینات سری ششم – فصل هفتم

۱. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $B$ را بدست می‌آوریم:

$$|B-\lambda I|=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 & 1 \\ 16 & 4-\lambda & -6 \\ -16 & 4 & 10-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Longrightarrow \quad -\lambda(\lambda-6)(\lambda-8)=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=6 \\ \lambda_3=8 \end{cases}$$

$$\lambda_1=0 \quad \Longrightarrow \quad (B-\lambda_1 I)v_1=0 \quad \Longrightarrow \quad v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

به طریق مشابه $v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $v_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ . بنابراین:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D=diag(0,6,8)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad B=PDP^{-1}$$

برای بررسی صحت جواب کافیست چک کنیم $BP=PD$ .

$$BP=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0 & 12 & 32 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PD=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0 & 12 & 32 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

---

۲. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A$ را بدست می‌آوریم:

$$|B-\lambda I|=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2(\lambda-3)=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1,\lambda_2=0 \\ \lambda_3=3 \end{cases}$$

$$\lambda=0 \quad \Longrightarrow \quad (B-\lambda I)v=0 \quad \Longrightarrow \quad v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به طریق مشابه $v_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

اکنون چون مجموعه‌ی $\{v_1,v_2,v_3\}$ یک مجموعه‌ی $orthonormal$ نیست، ابتدا با الگوریتم $Gram-Schmidt$ آن را $orthogonal$ می‌کنیم:

$$z_1=v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = v_2 - \frac{v_2 . z_1}{z_1 . z_1} z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z_3 = v_3 - \frac{v_3 . z_1}{z_1 . z_1} z_1 - \frac{v_3 . z_2}{z_2 . z_2} z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید در هر مرحله می‌توان برای رهایی از اعداد کسری، بردار نهایی را در عددی ضرب کرد (که تاثیری در جواب ندارد)

حال مجموعه‌ی $\{z_1, z_2, z_3\}$ یک مجموعه‌ی $orthogonal$ است. برای $orthonormal$ کردن آن بردارها را نرمال می‌کنیم:

$$u_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad , \quad u_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

بردارهای $u_1, u_2, u_3$ بردارهایی $orthonormal$ هستند. پس:

$$P = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$D = diag(0,0,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A = PDP^{-1} = PDP^T$$

اختیاری: برای بررسی صحت جواب نیز کافیست چک کنیم $AP = PD$ .

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

۳. از آنجایی که $A$ قطری‌شدنی است، داریم $A = PDP^{-1}$ به طوری که $P$ یک ماتریس و $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A$ هستند که طبق فرض سوال، $\lambda_i \geq 0$ .

اگر $B^2 = A$ باشد، داریم:

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}B^2P = P^{-1}BPP^{-1}BP = (P^{-1}BP)^2.$$

در نظر می‌گیریم که:

$$B = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}.$$

حال مراحل بالا را برعکس طی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} B^2 &= P\,\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}P\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1} \\ &= P\,\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}^2, \sqrt{\lambda_2}^2, \dots, \sqrt{\lambda_n}^2)P^{-1} \\ &= PDP^{-1} = A, \end{aligned}$$

و اثبات تمام.

---

٤. ابتدا ماتریس $A$ را قطری‌سازی می‌کنیم (محاسبات با شما) :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \cdot 5^{100} + 1 & 3 \cdot 5^{100} - 3 \\ 5^{100} - 1 & 5^{100} + 3 \end{bmatrix}.$$

---

۵. الف) صحیح: $\det(A) = 2 \neq 0$ ب) غلط: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ج) غلط: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

---

۶. ابتدا باید ماتریس $A$ را قطری سازی عمودی کنیم (مشابه سوال ۲ – برای حل این قسمت به $Example\ 2$ کتاب مراجعه کنید) :

$$P = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$D = diag(8,6,3) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \qquad A = PDP^{-1} = PDP^T$$

پس داریم:

$$A = 8u_1u_1^T + 6u_2u_2^T + 3u_3u_3^T$$

$$u_1u_1^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2u_2^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$u_3u_3^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ 8u_1u_1^T + 6u_2u_2^T + 3u_3u_3^T = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

---

۷. الف)

$$[x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + dx_2^2 + (b+c)x_1x_2$$

در نتیجه ماتریس مربعی برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$[x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 \end{bmatrix}$$

$$= ax_1^2 + ex_2^2 + ix_3^2 + (b+d)x_1x_2 + (c+g)x_1x_3 + (f+h)x_2x_3$$

در نتیجه ماتریس مربعی برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

---

۸. الف) مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های متناظر آنها را برای ماتریس $A$ بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 \ : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{normalization} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -4 \ : \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{normalization} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

و با قطری‌سازی ماتریس $A$ داریم:

$$A = PDP^{-1}, P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = y^T D y = 6y_1^2 - 4y_2^2$$

ب) مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های متناظر آنها را برای ماتریس $A$ بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3: \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{normalization} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9: \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{normalization} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 15: \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{normalization} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

و با قطری سازی ماتریس $A$ داریم:

$$A=PDP^{-1}, P=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{bmatrix}$$

$$x^TAx=(Py)^TA(Py)=y^TP^TAPy=y^TDy=3y_1^2+9y_2^2+15y_3^2$$

---

۹. ابتدا باید ماتریس مربوط به فرم درجه دو را بیابیم:

$$Q(x)=-3{x_1}^2-2x_1x_2+5{x_2}^2 \to Q(x)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

برای یافتن ماکزیمم عبارت، کافی است بزرگترین مقدار ویژه $A$ را بیابیم.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-3-\lambda & -1\\ -1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-16=(\lambda-1)^2-17=0$$

$$\left(\lambda-1-\sqrt{17}\right)\left(\lambda-1+\sqrt{17}\right)=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=1+\sqrt{17}\\ \lambda_2=1-\sqrt{17}\end{cases} \Rightarrow 1-\sqrt{17}\le -3{x_1}^2-2x_1x_2+5{x_2}^2\le 1+\sqrt{17}$$

---

۱۰. در ابتدا ماتریس $A^TA$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^TA=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه های این ماتریس را بدست می‌آوریم.

$$\det(A^TA-0I)=\begin{vmatrix}20-\lambda & -10\\ -10 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-25\lambda=\lambda(\lambda-25)=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=25\end{cases}$$

$$\lambda_1:\ A^TA-\lambda I=\begin{bmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}20 & -10 & 0\\ -10 & 5 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}20 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$basis\ for\ null(A^TA-0I):\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_2 : \ A^T A - 25I = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$basis\ for\ null(A^T A - 25I): \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

سپس بردارها را نرمالیزه کرده و در ماتریس $V$ قرار می‌دهیم.

$$V^T = \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

حال باید ماتریس های $\Sigma, U$ را بدست آوریم.

$$\begin{cases} Av_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Av_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow u_1 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

باتوجه به آنکه مقدار $Av_1$ برابر با بردار صفر شد، باید دوبردار دیگر برای ماتریس $U$ بیابیم.

$$u_1 . x = 0 \rightarrow \frac{-2\sqrt{5}}{5} x_1 + \frac{-\sqrt{5}}{5} x_2 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x_2}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad u_3 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

---

۱۱. ابتدا باید یک $orthonormal\ set$ از $eigenvalue$های $A^T A$ بدست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A - \lambda I) = 0 \to \begin{vmatrix} 81-\lambda & -27 \\ -27 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(81-\lambda) - 9 \times 81 = \lambda^2 - 90\lambda = 0$$

$$\lambda(90-\lambda) = 0 \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 90 \end{cases}$$

$\lambda = 90$:

$$(A^T A - 90I)x = 0 \to \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -27 & 0 \\ -27 & -81 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -9 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to x_1 = -3x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \to v_1{}' = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0:$

$(A^T A - 0I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix} x = 0$

$\begin{bmatrix} 81 & -27 & 0 \\ -27 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 81 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}$

$x = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{3} \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow v_2{}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

$V = [v_1{}' \quad v_2{}'] = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

حال $singular\ value$ها را مشخص می‌کنیم که مجذور $eigenvalue$های ما می‌باشند و سازنده‌ی زیرماتریس $D$ از ماتریس $\Sigma$ ما هستند.

$\sigma_1 = 30, \qquad \sigma_2 = 0$

$\Sigma = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

حال تنها کافی است ماتریس $U$ را بسازیم.

$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1{}' = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$

حال باید $U$ را گسترش دهیم یا $extend$ کنیم چرا که دو ستون دیگر برای تشکیل ماتریس می‌خواهد. توجه شود که $||Av_2|| = 0$ خواهد بود چون $\sigma_2 = 0$ است. چون این دو بردار دیگر $U$ باید بر $u_1$ عمود باشند، پس داریم:

$u_1 . x = 0 \rightarrow \frac{1}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 0 \rightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

$x = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

بنابراین :

$$w_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

حال باید الگوریتم $Gram\ Schmidt$ را روی $w_1, w_2$ اجرا کنیم تا تصویر عمود یکی بر دیگری یافت شود.

$$u_2 = w_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$u_3 = w_2 - \frac{w_2.u_2}{u_2.u_2}u_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{-4}{5}\\ 1\end{bmatrix} \xRightarrow{scaling\ by\ 5} u_3 = \begin{bmatrix}2\\-4\\5\end{bmatrix}$$

$$u_2{}' = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{bmatrix}, \quad u_3{}' = \begin{bmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$U = [u_1 \quad u_2{}' \quad u_3{}'] = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

و در نهایت تجزیه $SVD$ ماتریس $A$ برابر خواهد شد با:

$$A = U\Sigma V = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار ۱۴۰۰