

به نام او

تمرینات سری دوم - فصل دوم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب `HW?_Name_StudentNumber` (به عنوان مثال، `HW2_AmirHosseinSorour_9731028`) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل `ce.linear.algebra@gmail.com` در ارتباط باشید.

۱. ماتریس A ماتریسی است که در معادله‌ی $A^2 + c_1A + c_0I = O$ صدق می‌کند. c_0, c_1 اعداد اسکالر، I ماتریس همانی $n \times n$ و O ماتریس صفر $n \times n$ می‌باشد.

الف) ثابت کنید: اگر c_0 برابر با صفر نباشد، آنگاه ماتریس A معکوس‌پذیر است.

ب) درستی این گزاره را بررسی کنید: اگر $c_0 = 0$ باشد، آنگاه A معکوس‌پذیر نیست.

۲. اگر A, B ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشند و ماتریس $(A + B)$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه نشان دهید:

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$$

۳. اگر A, B ماتریس‌های مربعی باشند و $I - AB$ یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد، نشان دهید $I - BA$ نیز معکوس‌پذیر است (راهنمایی: از $B(I - AB) = (I - BA)B$ کمک بگیرید)

۴. الف) تجزیه LU را برای ماتریس متقارن A حساب کنید.
ب) ۴ شرط برای اعداد a, b, c, d بیابید تا ماتریس A دارای ۴ درایه محوری باشد.

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

۵. تجزیه LU ماتریس A را حساب کرده و با استفاده از آن، معادله‌ی $Ax = (3, 10, 20)^T$ را حل کنید.

۶. بررسی کنید کدام یک از زیرمجموعه‌های زیر در واقع یک زیر فضا از R^3 است (با ذکر دلیل)

الف) صفحه‌ی بردارهای (b_1, b_2, b_3) که $b_1 = 0$ باشد

ب) صفحه بردارهای (b_1, b_2, b_3) که $b_1 = 1$ باشد

ج) صفحه بردارهای (b_1, b_2, b_3) به طوری که $b_2 b_3 = 0$

د) تمام ترکیب‌های دو بردار $(1, 1, 0)$ و $(2, 0, 1)$

هـ) صفحه‌ی تمام بردارهای (b_1, b_2, b_3) به نحوی که $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۷. ماتریس رو به رو را در نظر بگیرید:

الف) یک پایه برای nullspace این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای row space این ماتریس بیابید.

ج) یک پایه برای range این ماتریس که شامل بردارهای ستونی آن است بیابید.

د) برای هر بردار ستونی که یک بردار پایه در قسمت قبل نیست، آن را به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه range ماتریس A بنویسید.

۸. الف) فرض کنید V یک زیرفضا از R^n و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد. ثابت کنید که تمام پایه‌های V دارای k بردار در V هستند.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و nullspace آن یک صفحه در R^3 است. همچنین range آن توسط بردار غیر صفر v در R^5 ، span می‌شود. m و n را تعیین نمایید و rank و nullity ماتریس A را بدست آورید.

۹. (امتیازی) فرض کنید که A یک ماتریس $m \times n$ است و ماتریس‌های C, D ماتریس‌های $n \times m$ می‌باشند به طوری که $CA = I_{n \times n}$ و $AD = I_{m \times m}$. ثابت کنید $C = D$ و $m = n$.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبر خطی

بهار ۱۴۰۰