



به نام خدا

تمرین پنجم

سیگنال‌ها و سیستم‌ها - بهار ۱۴۰۱

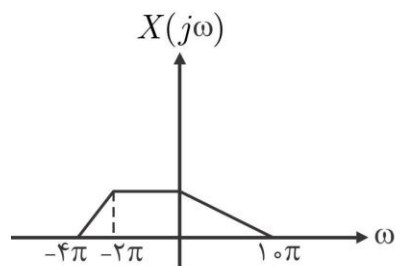
توضیحات

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ‌ها مرتب و خوانا باشند.
- مهلت ارسال پاسخ‌ها تا ساعت ۲۳:۵۹ جمعه ۳۰ اردیبهشت می‌باشد.
- پاسخ‌های بخش تئوری را به صورت pdf و پاسخ‌های بخش عملی را به صورت zip با قالب نامگذاری HW?_Name_StudentNumber بارگذاری نمایید. (مثال: HW5_FarzadRadnia_9831024)
- در صورت بروز هرگونه ابهام، سوال خود را از طریق ایمیل SS.2022Spring@gmail.com یا شناسه‌ی تلگرامی [@AUTSS](https://t.me/AUTSS) با تدریس‌یاران درس مطرح کنید. موضوع ایمیل را "تمرین تئوری/عملی X: سوال Y" قرار دهید. همچنین برای سوالات خارج از تمرین از موضوع "سوال از فصل X" استفاده نمایید.



بخش اول - تمرین تئوری

۱. سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل فوریه‌ای به فرم زیر است:



اگر بخواهیم از این سیگنال نمونه برداری کنیم به طوری که امکان بازسازی کامل سیگنال $x(t)$ از روی نمونه آن وجود داشته باشد،

الف) حداقل مقدار نرخ نمونه برداری چند هرتز می‌تواند باشد؟

ب) حداکثر فاصله زمانی نمونه‌ها چند ثانیه است؟



۲. با استفاده از روابط صریح، سری فوریه سیگنال‌های گسسته زمان داده شده را بیابید.

a) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN_0]$

b) $x[n] = 1 + \sin\left(\frac{20\pi}{12}n + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4}\right)$

d) $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

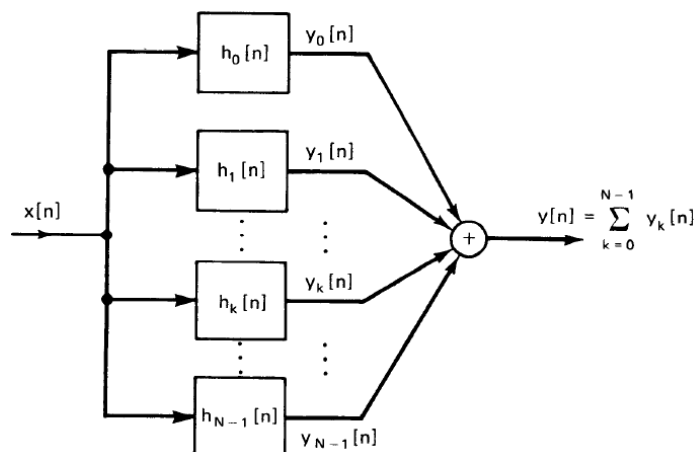
e) $x[n] = (-1)^n + \cos\left(\frac{\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}\right)$

f) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 3k]$



۳. یک سیستم گسسته زمان متشکل از ترکیب موازی از N فیلتر LTI با پاسخ ضربه‌ی $h_k[n]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ را داریم. به طوری که برای هر k , $h_k[n]$ با عبارت زیر به $h_0[n]$ رابطه دارد:

$$h_k[n] = e^{j(2\pi nk/N)} h_0[n]$$

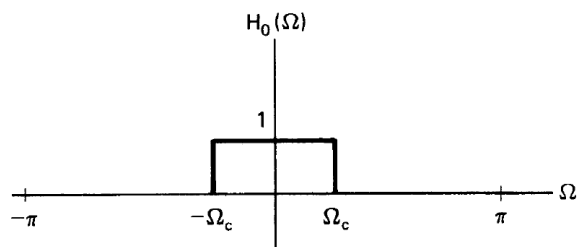


الف) اگر $h_0[n]$ یک فیلتر پایین گذر گسسته

زمان ایده آل با پاسخ فرکانسی $H_0(\Omega)$ باشد، که در شکل زیر نشان داده شده است، تبدیل فوریه $h_1[n]$ و

$h_{N-1}[n]$ را برای Ω در بازه‌ی $-\pi < \Omega < \pi$ ترسیم

کنید.



ب) مقدار فرکانس قطع را در شکل بالا بر حسب N تعیین کنید به طوری که سیستم، یک سیستم همانی باشد. یعنی برای همه n ها و هر ورودی $x[n]$, $y[n] = x[n]$ شود.

ج) فرض کنید که $h[n]$ دیگر محدود به یک فیلتر پایین گذر ایده آل نیست. اگر $h[n]$ نشان دهنده‌ی پاسخ

ضربه‌ی کل سیستم در شکل اول با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ باشد، آنگاه $h[n]$ را می‌توان به شکل

$$h[n] = r[n] h_0[n]$$

بیان کرد. $r[n]$ را تعیین و ترسیم کنید.

د) از نتیجه قسمت قبل، یک شرط لازم و کافی را در مورد $h_0[n]$ تعیین کنید تا مشخص شود که سیستم کلی یک سیستم همانی خواهد بود. (پاسخ نباید هیچ جمعی داشته باشد).



۴. تبدیل فوریه سیگنال های زیر را بیابید.

a) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2]$

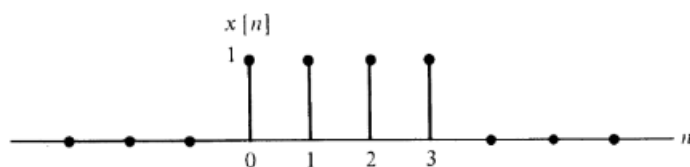
b) $x[n] = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

c) $x[n] = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{3}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$

d) $x[n] = u[n+3] - u[n-4]$

e) $x[n] = \sin^2\left[\frac{\pi}{8}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] + \cos^2\left[\frac{\pi}{8}n\right]$

f)





۵. معکوس تبدیل فوریه سیگنال های زیر را به دست آورید.

a) $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \frac{2}{2-e^{-j\omega}} + 2\pi\delta(\omega)$

b) $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega k}$

c) $X(e^{j\omega}) = \frac{2-12e^{-j\omega}}{1-12e^{-j\omega}+35e^{-2j\omega}}$

d) $X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$



تمرین پنجم

۶. (امتیازی) یک سیستم LTI علی را در نظر بگیرید که با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n]$$

الف) پاسخ فرکانسی این سیستم $H(e^{j\omega})$ را به دست بیاورید.

ب) خروجی سیستم به ازای ورودی فوق را مشخص کنید: $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$

ج) خروجی سیستم به ازای ورودی فوق را مشخص کنید: $x[n] = (\frac{-1}{3})^n u[n]$

د) خروجی سیستم را به ازای ورودی‌ای که تبدیل فوریه آن به صورت زیر است مشخص کنید:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$



بخش دوم – تمرین شبیه‌سازی

برای ارسال این بخش، فایل‌های شبیه‌سازی را به همراه فایل pdf از تصاویر سیگنال‌های رسم شده، در قالب یک فایل با فرمت zip در سامانه بارگذاری نمایید.

نمونه‌برداری سیگنال‌های پیوسته زمان

۱. سیگنال سینوسی $x_1(t) = \cos(10\pi t)$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ با اندازه گام 0.0001 نمایش دهید.

الف) تابعی پیاده‌سازی کنید که یک سیگنال و نرخ نمونه‌برداری آن را ورودی بگیرد و سیگنال نمونه‌برداری شده را خروجی دهد.

ب) سیگنال $x_1(t)$ را با فرکانس 4 Hz نمونه‌برداری کنید و نمودار سیگنال نمونه‌برداری شده را نمایش دهید.

ج) آیا نرخ نمونه‌برداری قسمت قبل مناسب است؟ چرا؟

۲. سیگنال $x_2(t) = \cos(30\pi t)$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ با اندازه گام 0.0001 رسم کرده و با نرخ‌های 20 ، 30 و 40 هرتز نمونه‌برداری کنید و نمایش دهید، سپس مشخص کنید که کدام نرخ مناسب است.