



به نام خدا

تمرین سوم

سیگنال‌ها و سیستم‌ها - بهار ۱۴۰۱

توضیحات

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ‌ها مرتب و خوانا باشند.
- مهلت ارسال پاسخ‌ها تا ساعت ۲۳:۵۹ شنبه ۱۴ فروردین می‌باشد.
- پاسخ‌های بخش تئوری را به صورت pdf و پاسخ‌های بخش عملی را به صورت zip با قالب نامگذاری HW?_Name_StudentNumber بارگذاری نمایید. (مثال: HW5_FarzadRadnia_9831024)
- در صورت بروز هرگونه ابهام، سوال خود را از طریق ایمیل SS.2022Spring@gmail.com یا شناسه‌ی تلگرامی [@AUTSS](https://t.me/AUTSS) با تدریس‌یاران درس مطرح کنید. موضوع ایمیل را "تمرین تئوری/عملی X : سوال Y" قرار دهید. همچنین برای سوالات خارج از تمرین از موضوع "سوال از فصل X" استفاده نمایید.



بخش اول - تمارین تئوری

۱. ضرایب سری فوریه سیگنال‌های خواسته شده در هر بخش را به دست بیاورید. (برای حل این سوال استفاده از شکل سیگنال‌ها مجاز نمی‌باشد و باید با استفاده از معادله صریح، ضرایب سری فوریه هر بخش را پیدا کنید.)

a. $x(t) = \cos(4\pi t) \sin(4\pi t)$

b. $x(t) = 2 \sin(2\pi t/6 + \pi/6) + 5 \cos(2\pi t/12)$

c. $x(t) = \sin^2(3\pi t) \cos(\pi t)$

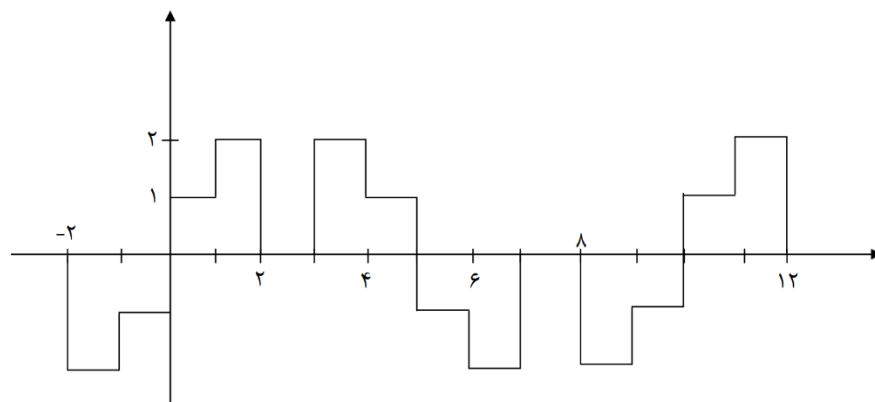
d. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3\delta(2t - kT_0)$

e. $x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0) \\ -1, & t \in [0, 1) \end{cases}$

f. $x(t) = |\cos(t)|$



۲. ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید. (راهنمایی: می‌توانید از خاصیت‌ها استفاده کنید).





۳. فرض کنید $x(t)$ سیگنالی متناوب با دوره تناوب اساسی T و ضرایب سری فوریه a_k می باشد. ضرایب سری فوریه سیگنال های زیر را بر حسب a_k محاسبه کنید.

a) $x(2t - 3)$

b) $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

c) $\mathcal{O}d\{x(t)\}$

d) $\mathcal{R}e\{x(t)\}$

e) $x(-t)e^{j6(\frac{\pi}{T})t}$



۴. توان متوسط سیگنال زیر را حساب کنید.

$$x(t) = 3e^{j3\pi t} + \sin(2\pi t) + 5e^{j8\pi t}$$



۵. اگر تمامی ویژگی‌های زیر، برای یک سیگنال پیوسته زمان با دوره تناوب اساسی $T_0 = 3$ و ضرایب سری فوریه a_k برقرار باشد، سیگنال $x(t)$ بیابید.

- $a_k = a_{-k}$
- $a_k = a_{k+2}$
- $\int_{-0.5}^{0.5} x(t) dt = 1$
- $\int_1^2 x(t) dt = 2$



۶. (امتیازی) به هر یک از قسمت‌های زیر، با استدلال کافی پاسخ دهید.

الف) یک سیگنال پیوسته زمان متناوب با دوره تناوب T ، همانند $x(t)$ هارمونیک فرد^۱ گفته می‌شود در صورتی که در نمایش سری فوریه آن

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$a_k = 0$ به ازای تمامی مقادیر صحیح زوج غیر صفر k .

(۱) نشان دهید اگر $x(t)$ هارمونیک فرد باشد، آنگاه $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$.

(۲) عکس گزاره ۱، را اثبات کنید. به این معنی که هر سیگنالی که خاصیت $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$ را برآورده کند، آن سیگنال هارمونیک فرد می‌باشد.

ب) فرض کنید سیگنال هارمونیک فرد متناوب $x(t)$ با دوره تناوب $T = 2$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$x(t) = t \quad 0 < t < 1$$

سیگنال $x(t)$ را رسم نموده و ضرایب سری فوریه این سیگنال را بیابید.

پ) همانگونه که سیگنال‌های هارمونیک فرد تعریف می‌شوند، سیگنال‌های هارمونیک زوج^۲ نیز قابل تعریف می‌باشند. سیگنال‌های هارمونیک زوج، سیگنال‌هایی هستند که در نمایش سری فوریه آن‌ها، $a_k = 0$ به ازای تمامی مقادیر صحیح فرد k .

آیا دوره تناوب اساسی چنین سیگنالی، می‌تواند T باشد؟ (راهنمایی: تساوی موجود در قسمت الف. ۱) را برای این نوع سیگنال بازنویسی کنید.)

ت) به طور کلی تر، با توجه به رابطه موجود در قسمت الف، نشان دهید که دوره تناوب اساسی سیگنال $x(t)$ می‌تواند T باشد اگر که یکی از شروط زیر برقرار باشد.

- a_1 یا a_{-1} مقداری غیر صفر داشته باشند.
- دو مقدار صحیح k و l وجود داشته باشند به گونه ای که این دو عامل مشترکی نداشته باشند و a_k و a_l هر دو دارای مقدار غیر صفر باشند.

¹ Odd Harmonic

² Even Harmonic



بخش دوم - تمرین شبیه سازی

برای ارسال این بخش، فایل های شبیه سازی را به همراه فایل pdf از تصاویر سیگنال های رسم شده، در قالب یک فایل با فرمت zip در سامانه بارگذاری نمایید.

سری فوریه ی سیگنال های پیوسته زمان

برای نمایش سری فوریه سیگنال را به صورت جمع سیگنال های سینوسی و کسینوسی نیز می توان نوشت؛ که در آن ضرایب فوریه همان ضرایب سینوس و کسینوس است و از روابط زیر به دست می آیند.

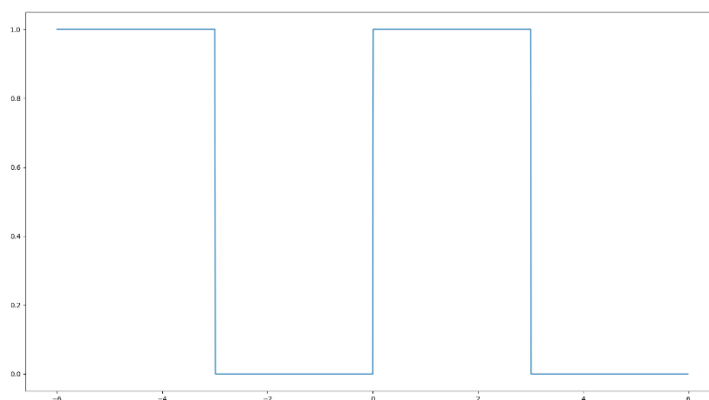
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

۱. تابعی پیاده سازی کنید که سیگنالی را دریافت کرده و ضرایب سریه فوریه آن را از صفر تا $k=c$ (شامل $k=c$ هم می شود) حساب کرده و بازگرداند.

۲. سپس تابعی پیاده سازی کنید که با گرفتن این ضرایب، سیگنال اصلی بازسازی کند.

۳. سیگنال متناوب زیر را رسم کنید و سپس با استفاده از توابع بالا، تخمین آن را برای مقادیر مختلف c بین صفر تا ده رسم کنید.



بدیهی است که هرچه مقدار c بیش تر شود باید سیگنال تخمینی شبیه تر به سیگنال اصلی شود. پیشنهاد می شود که به کمک ورودی label در تابع plot، و سپس صدا زدن `matplotlib.pyplot.legend` به نمودار خود راهنما اضافه کنید.