几乎无变量的微积分

82 分快速上手

纳纳米

版本 6.2, 2022 年 5 月 22 日

几乎无变量的微积分

82 分快速上手

v6.2

纳纳米

2022 年 5 月 22 日

I dedicate this book
to my waifus and chairudos and husbandos.
However, unfortunately,
there is a lamentably thick wall between us.

目录

插图

表格

代码

序*

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的 “微积分” 跟 “分析学” 不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为 “微积分” 就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并**不是**从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是什么样的. 您可以对比我的书的跟传统的微积分教材的 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 计算过程. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

本书的副标题是《82 分快速上手》. 其实, 您不必太在意这个副标题里的 “82 分”; 这只是一个旧客. 事实上, 本书的正文就只有 82 页. 我假定您至多用 1 分 (即 60 秒) 看 1 页. 这么看来, 您至多用 82 分就可以了解最基本的微积分. 不过, 认真地, 若我至多用 1 分看 1 页**算学书**, 我可能学不到什么东西.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了 “几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的

---

*The preface was written on the seventh of April in 2022. Too many things happened, so I just slightly modified it and wrote a “real preface.”

个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘教版八年级下册的算学课本的定义.

定义 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

定义 一般地, 如果变量 y 随着变量 x 而变化, 并且对于 x 取的每一个值, y 都有唯一的一个值与它对应, 那么称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是胡话 a function of x (土话: x 的函数) 的简记. 这时叫 x 作**自变量**, 叫 y 作**因变量**. 对于自变量 x 取的每一个值 a, 称因变量 y 的对应值为**函数值**, 并记其作 $f(a)$.

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触 “函数” 的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用 “这种函数” 讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用 “有序对” 定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话 “变量” “对应”. 不过, 更严谨地看, “有序对” 是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义 (a, b) 为 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号 f (而不是 $f(x)$), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x);$$

我们计算不定积分时, 用的记号是

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x;$$

我们计算积分时, 用的记号是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链规则为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

这里 $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$. 视导数为 "变率", 那这就是在说, y 关于 x 的变率等于 y 关于 u 的变率与 u 关于 x 的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的 $\frac{11}{10}$ (也就是说, A 比 B 快 $\frac{1}{10}$), 而 B 的速率是 C 的速率的 $\frac{9}{10}$ (也就是说, B 比 C 慢 $\frac{1}{10}$), 那么 A 的速率是 C 的速率的 $\frac{99}{100}$; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: "有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?" 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用 D 表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说, $\mathrm{D}\exp = \exp$, $\mathrm{D}\cos = -\sin$, $\mathrm{D}\sin = \cos$. 不过, 当我想表达 $\mathrm{D}\ln$ 时, 我意识到了一个重要的问题: "已知 $\mathrm{D}\ln x = 1/x$. 左边的 $\ln x$ 就是 ln, 可右边的 $1/x$ 应该是什么?" 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}\colon\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} &\to \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写 $\mathrm{D}\ln = \mathrm{rec}$. 不过, 我还是没法好好地表示 $\mathrm{D}\arcsin$ 跟 $\mathrm{D}\arctan$. 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名

字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的 “什么也不干” 的函数

$$\begin{aligned} \mathrm{fdn}\colon\quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写序; 这一次, 我就想认真地写序. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的 “读书报告”: 这本书 “浪费了” 巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 最近, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些 “优良传统” 也来到了这本书上: 开放源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些 “优良传统” 是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

`https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

`https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

若您看到本书的错误, 我希望您毫不犹豫地告诉我; 我会修正错误的.

纳纳米

2022 年 4 月 17 日

序

嘛; 听我说罢. 我告诉您为什么序后还有序.

我大概是在 2022 年 4 月中旬完成了本书. 当时, 它的副标题还是《78 分快速上手》; 这意味着, 当时, 本书的正文也就只有 78 页. 不过, 读者们似乎不是特别喜欢本书. 有一位读者花了大约 3 分看完了本书; 这确实不是什么好事. 他没说什么; 不过我也能看出, 本书不吸引他. 不少读者花了几十分读本书; 当然了, 大家也都说, 未能体会到什么本书讨论的对象 “实用” “优越”. 我从来没说 “实用”; 我也不怎么说它 “优越” (我也只在前一个序里说 “无变量的微积分在某些地方确实是有优势的”). 我也承认, 本书的本质跟传统的微积分的教程的本质没有什么不同. 但, 我觉得我在本书使用的记号有条理; 我不觉得本书没有任何价值. 不过, 我说本书有价值是无用的; **您**觉得本书对**您**有价值, 那才是有价值. 毕竟, 这里的 “有价值” 跟主观的感受有关罢.

所以, 本书转型了. 原本, 本书只有算学的东西; 现在, 本书还讨论怎么用乳胶排版. 我想, 这至少会吸引一些想学乳胶的人罢. 当然, 本书不是从**零**教您学乳胶; 您可视本书为乳胶参考材料, 从本书 (或其代码) 里挑出您感兴趣的东西.

所以, 前一个序是 “假序”, 而本序才是 “真序”.

就说这么多罢.

纳纳米

2022 年 5 月 22 日

Acknowledgments

I owe a huge debt to many organizations and people that directly or indirectly provided me with their assistance.

This shows how a margin note looks. Margin notes are not often seen in Chinese books. I do see them in manuscripts, though.

I thank Jakub Marian for his easy-to-comprehend articles which discuss calculus with almost no variables and other related topics.[1-7] I thank Karl Menger[8] for a more detailed discussion. I thank Constantin Carathéodory for a new and handy definition of derivatives. I thank Stephen Kuhn[9] for promoting the new method. I thank Ruan Longpei[10] and Wu Changqing[11] for pointing out an easily ignored “bug” in high school mathematics. I thank Walter Rudin[12], Mei Jiaqiang[13] and Zhang Zhusheng[14] for their excellent mathematical analysis textbooks.

I thank the Comprehensive TeX Archive Network. I thank TeX Live. I thank all packages used in the book. Since there are too many packages, it is not desirable to list everything here. For this reason, I have listed them in the bibliography instead. I would not be able to write a book easily and freely without them. I thank Visual Studio Code. I thank Vim (or more precisely, the VSCodeVim extension). I would not be able to type so smoothly without them. I thank AutoHotKey, which I use mainly for defining my own keybindings. I thank Emacs, which can be used to type Chinese characters. I thank Firefox, the open-source browser which I have been using for years. I thank Windows 11 Pro Insider Preview, the operating system which I have been using for approximately a year and which has fewer unpleasing bugs compared with the stable releases. I thank LaTeX Stack Exchange, which is full of LaTeX treasures. I thank GitHub and Gitee. I thank myself for spending a considerable amount of time on English so that I do not have much difficulty in reading package documentations or searching what I

One more thing. To cite something, say `\cite{<item>}`*, where* `<item>` *is the thing to be cited.*

need on the World Wide Web.

I thank SukeraSparo for creating educational visual novels, *The Expression Amrilato*[15] and *Distant Memoraĵo*[16]. I really had a good time. I also picked up some Esperanto (or more precisely, *Juliamo*). I am still able to count in the language made by Ludwig Lazarus Zamenhof (*nul*, *unu*, *du*, *tri*, *kvar*, *kvin*, *ses*, *sep*, *ok*, *naû*, *dek*, *dek unu*, *dek du*, *dek tri*, *dek kvar*, *dek kvin*, etc.); I am still able to say *Dankon!* to thank others or *Gratulon!* to congratulate others; however, I do not have many opportunities to use it as frequently as I use English. That is really a pity.

There must still be many organizations and people that helped me but are not mentioned in my acknowledgments. I apologize for not listing them here, since I did not keep track of everything.

Finally, I give my special thanks to someone who is "unable to name anything" for the Hosimiya Sio decoration and some other presents in the three-dimensional world, which really brightened me when I felt depressed.

Septsea

May 22, 2022

术语表

我在此处列出一些被本书用, 但在其他场合不常被见到的术语.

虫	bug
窗	Windows
词儿	Word
宏硬	Macrohard; Microsoft
胡话	English
旧客	joke
可携带文档格式	Portable Document Format; PDF
蟒蛇	Python
乳胶	LaTeX
视觉工作室代码	Visual Studio Code
鼠鼠	mouse
算学	the lore of reckoning; mathematics
算学家	mathematician
统一码转换格式辛	Unicode Transformation Format 8; UTF-8
土话	Chinese
爪哇	Java

List of Lores

注 本章是用来测试术语表的排版的.

注 所谓 Anglish, 就是这么一种胡话变体: 它尽量挑胡话自己的词, 而不是挑从别的话里借来的词. 比方说, 用 “正常的胡话” 表达一个世纪 (也就是 100 年), 就是 a century; 不过, 胡话的 century 是从拉丁话 *centuria* 来的. 那么, Anglish 会怎么表达此事呢? 可以说 a hundred years, 也可说 five score years (胡话的 score 就是 20).

注 *Lores* are what are know as *studies* in the English tung (language). There are a great many of them with names, but almost all of these names come from either the Latin or Greek tung.

Below is a list of lores given first in English, and then in Anglish.

The honewordy hue (adjective form) of the nounword (noun) *lore* is *lorely*, that of *frood* is *frodly*, while that of *craft* is *crafty*.

acanthology	spinelore
acarology	mitelore, ticklore
aerobiology	lifefrod of the sky
aerology	skylore
agathology	goodnessfrod
agmatology	cracklore of bones
agrostology	grasslore
alethiology	truthlore
anatomy	bodylore

anemology	windlore
anthropology	kithlore
aphnology	weathlore
apiology	beelore
archaeology	kithlore of yore
argyrothecology	till-lore
astacology	crayfishlore
astrology	starcraft
astronomy	starlore
atmology	steamlore
auxology	growthlore
balneology	bathlore
biology	lifelore
botany	wortlore
bromatology	foodlore
caliology	nestlore
campanology	bell-lore
cardiology	heartlore
caricology	sedgelore
carpology	seedlore
cephalology	headlore
cetology	whalelore
chemistry	minglinglore
chessology	gamelore of draughts
climatology	welkinlore
conchology	shell-lore
cosmetology	fairnesslore
cosmology	heavenlore
craniology	skull-lore

cynology	doglore
demonology	devillore
dendrochronology	ringlore of trees
dendrology	treelore
dermatology	skinlore
dialectology	byleidlore
ecclesiology	churchlore
economics	wealthlore
embryology	deerbloomlore
emetology	pukelore
encephalology	brainlore
endocrinology	sunder withinlore
epidemiology	outbreaklore
eschatology	endtimelore
ethnology	folklore
etymology	kinlore of words
exobiology	outer-lifelore
felinology	catlore
fluviology	flowlore
fromology	cheeselore
garbology	trashlore
gastrology	gutlore
genealogy	kinlore
geography	earthlore, worldlore
geology	earthfrod, stonelore
geometry	shapelore
geomorphology	landscapelore

gerontology	eldinglore
gynaecology	womanlore
haematology	bloodlore
hamartiology	sinlore
heliology	sunlore
herpetology	wurmlore
hippology	horsecraft
histology	fleshlore
history	yorelore
horology	timelore
hydrobiology	lifelore of water
hydrology	waterlore
hydrometry	flowlore
hyetology	rainlore
hygrology	damplore
hypnology	sleeplore
iatrology	heallore
ichnology	spoorlore
icthyology	fishlore
kalology	fairfrodlore
lexicology	wordlistlore
limnology	merelore
linguistics	leedlore (leedcraft), speechlore (speechcraft), tunglore (tungcraft)
logology	wordcraft
macrometeorology	greater welkinlore

mammalogy	suckledeerlore
mathematics	reckoninglore
metaloreology	lore of lores
meteorology	weatherlore
microseismology	lesser quakelore
mixology	drinklore, blendlore of drinks
molinology	mill-lore
muscology	mosslore
musicology	gleelore, galelore, songlore
mycology	swamblore
myrmecology	antlore
nanotechnology	motecraft, motework
neossology	birdlore of nests
nephology	cloudlore
nephrology	kidneylore
neurology	brainlore
oceanography	sealore
oecogeomorphology	lifemesh-landscapelore
oecohydrology	lifemesh waterlore
oecology	lifemeshlore
oenology	winelore
oncology	cankerlore, illgrowthlore
ophiology	snakelore
ophthalmology	eyelore
optics	sightlore
ornithology	birdlore
orology	berglore, fell-lore
osteology	bonelore
otology	earlore

ovology	egglore
paedology	childlore
palaeogeology	yorestonelore
palaeozoology	yoredeerlore
pathology	sicklore
pharmacology	druglore
philology	lovlearninglore
photology	lightlore
phrenology	mindlore
phycology	seaweedlore
ponerology	evillore
potamology	streamlore
proctology	arselore, buttlore
psychology	mindfrod
psychopharmacology	minddruglore
pteridology	fernlore
pyrology	firelore
religiology	trothlore
respirology	breathlore
rhinology	noselore
scatology	shitlore, dunglore
seismology	quakelore
selenology	moonlore
sexology	chivesdomlore, fucklore, swivelore
sitology	foodlore
sociology	fellowshiplore
sophology	wisdomlore
storiology	folklore

tartarology	hell-lore
tecnology	childlore, bairnlore
thanatology	deathlore
theology	godlore
toxicology	banelore
trichology	hairlore
vexillology	fanelore, flaglore
zoology	deerlore

第一部分

预备知识

第一章　集与函数

我先简单地介绍一下基础概念吧.

1.1　集

定义 1.1　**集**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为**元**.

注 1.2　事实上, 集与元是所谓的 “原始概念”. 我们至多**描述**集或元是什么; 我们无法**定义**集或元.

定义 1.3　无元的集是**空集**.

注 1.4　或许您在别的地方能看到形如 $\varnothing$ 的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

注 1.5　一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

定义 1.6　一般地, 若集 A 由元 $a, b, c, \cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \cdots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

定义 1.7　若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a **属于** A 或 A **包含** a. 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a **不属于** A 或 A **不包含** a.

注 1.8 "属于" 也是原始概念.

定义 1.9 若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的**子集**或 B 是 A 的**超集**. 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用 "真" 形容之.

注 1.10 或许, 您在别的地方能看到形如 $\subseteq$, $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说 A 是 B 的真子集, 我们再加上 $A \neq B$ 即可.

例 1.11 设 $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$. 不难看出, $0 \in C$, $1 \notin C$, $C \subset B$.

注 1.12 空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

定义 1.13 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A **等于** B, 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

定义 1.14 集 A 与 B 的**交**是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的**并**是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集的交与并.

例 1.15 设 E 是全体偶数作成的集; 设 O 是全体奇数作成的集. 不难看出, $E \cap O$ 为空集, 而 $E \cup O$ 恰为全体整数作成的集.

定义 1.16 设 A, B 是集. 定义

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

注 1.17 值得注意的是, 我们没说 $B \subset A$.

定义 1.18 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里, (a, b) 是**有序对**. 我们规定, 二个有序对 (a, b) 与 (c, d) 相等相当于 $a = c$ 且 $b = d$.

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 相等, 相当于 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

注 1.19 一般地, $A \times B \neq B \times A$.

注 1.20 设 A, B 分别有 m, n 个元. 则 $A \times B$ 有 mn 个元.

定义 1.21 一般地, $\mathbb{N}$ 指全体非负整数作成的集; $\mathbb{Z}$ 指全体整数作成的集; $\mathbb{Q}$ 指全体有理数作成的集; $\mathbb{R}$ 指全体实数作成的集; $\mathbb{C}$ 指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 1.22 在微积分里, $\mathbb{R}$ 的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数 a, b, 其中 $a < b$. 那么我们记:

(1) $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
(2) $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;
(3) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;
(4) $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;
(5) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$;
(6) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$;
(7) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;
(8) $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$;
(9) $[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$.

统称这九类子集为**区间**. a 是区间 $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ 的**左端点**; b 是区间 $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ 的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为 $\{a\}$ 是**退化为一点的区间** $[a,a]$; 我们认为空集是**空区间** $[a,a)$, (a,a), $[a,a)$, $[b,a)$, (b,a), $(b,a]$ 或 $[b,a]$. 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

注 1.23 设 a, b, c 是实数. 说 b 介于 a 跟 c 之间, 就是说 $a \leqslant b \leqslant c$ 或 $c \leqslant b \leqslant a$ (简单地, 就是 $(b-a)(b-c) \leqslant 0$). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为 "区间". 那么, 显而易见地, 任给一个区间 I, 任取 I 的二个相异实数 a, b, 则每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元. 反过来, 若 $\mathbb{R}$ 的子集 I 适合 "任取 I 的二个相异实数, 每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元", 则 I 是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

1.2 关系与函数

定义 1.24 设 A, B 是集. $A \times B$ 的子集称为 A 到 B 的**关系**.

定义 1.25 设 A, B 是集. 若 A 到 B 的关系 f 适合下述性质, 则说 f 是 A 到 B 的**函数** (或**映射**):

- 任取 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $(a,b) \in f$;
- 若 (a,b) 与 (a,c) 均为 f 的元, 则 $b = c$.

设 $(a,b) \in f$. 我们记此事为 $b = f[a]$, 并说 b 是 a 在函数 f 下的**像**, a 是 b 在函数 f 下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数 f:

$$\begin{aligned} f\colon\quad & A \to B, \\ & a \mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

"$f\colon A \to B$" 是 "f 是 A 到 B 的函数" 的简写.

注 1.26 一般地, 我们写 a 在函数 f 下的像为 $f(a)$, 而不是 $f[a]$. 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

例 1.27 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$. 显然, $A \times B$ 有 6 个元. 不难看出, $A \times B$ 有 64 个子集, 故 A 到 B 的关系共有 64 个. 不过, A 到 B 的函数只有 8 个.

定义 1.28 在本书, 我们为 “什么也不干” 的函数起一个名字. 具体地, 设 $A \subset B$. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}\colon \quad & A \to B, \\ & a \mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中 ι 是希腊字母 iota.

我们简单地写 $\iota_{A,A}$ 为 ι_A. 有时, 若既不必指出 A, 也不必指出 B, 我们直接写 ι. 换句话说: ι (或者带下标的 ι_A, $\iota_{A,B}$) 啥也不干, 即 $\iota[x] = x$, 其中 x 可以是任意文字.

一般也称 ι 为**恒等函数**.

定义 1.29 设 f 是 A 到 B 的函数. 称 A 为 f 的**定义域**; 称 B 为 f 的**陪域**.

定义 1.30 设 $C \subset A$. 设 $f\colon A \to B$. 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称 $f[A]$ 为 f 的**值域**. 显然 f 的值域是 f 的陪域的子集.

注 1.31 设 $f\colon A \to B$. 若 $D \subset C \subset A$, 则 $f[D] \subset f[C]$.

定义 1.32 设 f, g 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 都有 $f[a] = g[a]$, 则说 $f = g$.

可写 $f = g$ 的否定为 $f \neq g$. 具体地, 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] \neq g[a]$, 则说 $f \neq g$.

定义 1.33 设 R 是 A 到 B 的关系. B 到 A 的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为 R 的**反关系**.

定义 1.34　设 f 是 A 到 B 的函数. 若 f 的反关系 g 是 B 到 A 的函数, 则称 g 是 f 的**反函数**. 我们写 f 的反函数为 $f^{[-1]}$.

注 1.35　不难验证, 若 g 是 f 的反函数, 则 f 也一定是 g 的反函数. 这是因为 R 的反关系的反关系是 R.

定义 1.36　设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 C 到 D 的函数, 且 $f[A] \subset C$. 任取 A 的元 a. 按照函数的定义, 存在唯一的 $b \in f[A]$ 使 $(a, b) \in f$. 既然 $b \in f[A] \subset C$, 再根据函数的定义, 存在唯一的 $d \in g[C] \subset D$ 使 $(b, d) \in g$. 这样的 d 可用 $g[f[a]]$ 表示. 作 A 到 D 的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是 A 到 D 的函数. 我们称函数 $g \circ f$ 为 f 与 g 的**复合**.

注 1.37　设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, 且 $f[A] \subset C$. 设 $E \subset A$. 那么 $f[E] \subset f[A] \subset C$, 故 $g[f[E]]$ 是有意义的. 我们说, $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$.

取 $d \in g[f[E]]$. 按定义, 存在 $t \in f[E]$ 使 $g[t] = d$. 对这个 t 而言, 又存在 $e \in E$ 使 $f[e] = t$. $(g \circ f)[e]$, 按定义, 等于 $g[f[e]]$, 也就是 $g[t]$, 也就是 d. 所以 $d \in (g \circ f)[E]$. 这说明 $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$.

取 $d' \in (g \circ f)[E]$. 按定义, 存在 $e' \in E$ 使 $(g \circ f)[e'] = d'$. 所以 $t' = f[e'] \in f[E]$. 那么 $g[t'] = d'$. 所以 $d' \in g[f[E]]$. 这说明 $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$.

既然 $g[f[E]]$ 跟 $(g \circ f)[E]$ 相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了 $a \in A$ 时 $(g \circ f)[a]$ 就是 $g[f[a]]$, 可我们并没有**定义** $(g \circ f)[E]$ 是 $g[f[E]]$. 大算学家 John von Neumann 说过: “Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.” 所以, 习惯就好了.

注 1.38　设 $f\colon A \to B$. 那么 $f \circ \iota_A = f$, 且 $\iota_B \circ f = f$.

注 1.39　一般地, $g \circ f \neq f \circ g$. 一方面, $g \circ f$ 有定义时, $f \circ g$ 可能无定义; 另一方面, 即使 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 都有定义, 二者也不一定相等.

定理 1.40 函数的复合是**结合的**. 具体地, 设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $h\colon E \to F$, 且 $f[A] \subset C$, $g[C] \subset E$. 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $h \circ g \circ f$.

证 $q = g \circ f$ 是 A 到 D 的函数, 且 $p = h \circ g$ 是 C 到 E 的函数. 因 $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$, 故 $h \circ q = h \circ (g \circ f)$ 是 A 到 F 的函数; 因 $f[A] \subset C$, 故 $p \circ f = (h \circ g) \circ f$ 也是 A 到 F 的函数. 任取 $a \in A$. 则

$$(h \circ (g \circ f))[a] = h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],$$
$$((h \circ g) \circ f)[a] = (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]].$$

证毕.

定义 1.41 设 f 是 A 到 B 的函数.

- 若任取 A 的相异二元 a 与 a', 都有 $f[a] \neq f[a']$, 则称 f 是**单函数**.
- 若对任意 $b \in B$, 都存在 $a \in A$ 使 $f[a] = b$, 则称 f 是**满函数**.

例 1.42 设 $A \subset B$. A 到 B 的函数 $\iota_{A,B}$ 总是单函数. 不过, 若 $A \neq B$, 则 $\iota_{A,B}$ 不是满函数.

注 1.43 设 $B \subset C$. 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 A 到 C 的函数, 且对任意 $a \in A$, $f[a] = g[a]$. 那么, f 是单函数的一个必要与充分条件是: g 是单函数. 若 f 不是满函数, 则 g 也不是.

若 f 是满函数, 则 g 也是满函数的一个必要与充分条件是: $B = C$.

定理 1.44 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 B 到 A 的函数 g 适合如下性质:

- 对任意 $a \in A$, $g[f[a]] = a$; 也就是说, $g \circ f = \iota_A$.
- 对任意 $b \in B$, $f[g[b]] = b$; 也就是说, $f \circ g = \iota_B$.

则:

- 至多有一个这样的 g;
- g 是 f 的反函数.

证 至多只有一个这样的 g 是显然的. 具体地, 若 $g'\colon B \to A$ 适合 $g' \circ f = \iota_A$, 且 $f \circ g' = \iota_B$, 则

$$g = g \circ \iota_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \iota_A \circ g' = g'.$$

下证 g 是 f 的反函数. 事实上, 若 h 是 f 的反函数, 则不难验证 h 适合上述二条性质. 所以 $g = h$. 证毕.

定理 1.45 设 $f\colon A \to B$ 与 $g\colon B \to C$ 的反函数分别是 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 与 $g^{[-1]}\colon C \to B$. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

证 记 $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}\colon C \to A$; 记 $p = g \circ f$. 不难用结合律验证 $q \circ p = \iota_A$, 且 $p \circ q = \iota_B$. 这里以 $q \circ p$ 为例:

$$\begin{aligned}
q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\
&= (q \circ g) \circ f \\
&= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\
&= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\
&= (f^{[-1]} \circ \iota_B) \circ f \\
&= f^{[-1]} \circ f \\
&= \iota_A.
\end{aligned}$$

证毕.

注 1.46 不难看出, 函数 f 有反函数的一个必要与充分条件是: f 是单函数, 且 f 是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

定义 1.47 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 $C \subset A$. 作 C 到 B 的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知, f_C 是 C 到 B 的函数. 我们说, f_C 是 f 在 C 上的**限制**.

1.3 函数的演算

注 本节的话或许比较混乱.

本节讨论 $\mathbb{R}$ 的子集到 $\mathbb{R}$ 的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是 “几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

定义 1.48　设 $f\colon A \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ 且 $0 \in B$. 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] = 0$, 就说 a 是 f 的一个**根**.

现在我们介绍一些 “基本初等函数”.

定义 1.49　本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \imath\colon \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c\colon \quad & \mathbb{R} \to \{c\}, \\ & x \mapsto c, \end{aligned}$$

其中 c 是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp\colon \quad & \mathbb{R} \to (0, +\infty), \\ & x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin\colon \quad & \mathbb{R} \to [-1, 1], \\ & x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 余弦函数:

$$\begin{aligned} \cos\colon \quad & \mathbb{R} \to [-1, 1], \\ & x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}; \end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan\colon\quad \{x \mid \cos[x] \neq 0\} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln\colon\quad (0,+\infty) &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin\colon\quad [-1,1] &\to \left[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right],\\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 s 指 sin 在 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$ 上的限制 $\sin_I\colon I \to [-1,1]$, 2π 是 cos 的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan\colon\quad \mathbb{R} &\to \left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right),\\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 t 指 tan 在 $J = (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 上的限制 $\tan_J\colon J \to \mathbb{R}$;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{abs}\colon\quad \mathbb{R} &\to [0,+\infty),\\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geqslant 0;\\ -x, & x < 0.\end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{sqrt}\colon\quad [0,+\infty) &\to [0,+\infty),\\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

注 1.50 在本书, 2π 是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

例 1.51 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned} f\colon \quad & A \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]. \end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达 f 的定义. 具体地,

$$f = \exp \circ \operatorname{sqrt} \circ \ln_A.$$

这里, $\ln_A$ 自然是 $\ln$ 在 A 上的限制.

不过, 复合并不够用.

例 1.52 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g\colon \quad & A \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达 g 的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写 $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$ 跟 $\sin[x]$ 为 $\exp \circ \operatorname{sqrt} \circ \ln_A$ 与 $\sin_A$; 可是, 我们要怎么写 x^3? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

定义 1.53 设 A, B, C 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$. 设 $*$ 是文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$\begin{aligned} f * g\colon \quad & A \to D, \\ & x \mapsto f[x] * g[x], \end{aligned}$$

其中陪域 $D \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定. 一般地, 若 $*$ 是乘号 $\cdot$, 则可被省略. 可写 $0_A - f$ 为 $-f$; 这里 0_A 当然是常函数 0 在 A 上的限制.

若对任意 $x \in A$, 都有 $f[x] \neq 0$, 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}\colon \quad & A \to E, \\ & x \mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $E \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

若对任意 $x \in A$, $f[x]^{g[x]}$ 有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g\colon\quad & A \to F, \\ & x \mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $F \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

例 1.54 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g\colon\quad & A \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写 x^3 为 $(\iota_A)^{3_A}$. 所以

$$g = (\exp \circ \operatorname{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^{3_A};$$

这里, 我们取陪域为 $\mathbb{R}$.

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的 g 还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取 $B = (0, 1)$. 令

$$\begin{aligned} h\colon\quad & B \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \operatorname{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与 “对应法则”. 不过, 您无妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如 “函数 $f(x) = \sqrt{1 + x} + \ln(1 - x)$” 这样的文字时, 我们其实视这个 f 的定义域为全体使 $f(x)$ 有意义的一切实数作成的集 (也就是 $[-1, 1)$); 当我们看到形如 “函数 $g(x) = 1 - x$ ($x \in$

$[-1,0]$)" 的文字时, 我们认为 g 的定义域为已经提到的集 $[-1,0]$. f 跟 g 的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, "万能的" $\mathbb{R}$).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取 $\mathbb{R}$.

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的 h 为

$$h = \ln \circ \frac{\iota - \sin}{1 - \iota} + \mathrm{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

定义 1.55 我们称定义域为 A 的函数为 (定义在) A 上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

定义 1.56 若 $B \subset A$, f 是 A 上的函数, 我们说 f 在 B 上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} &f+g=g+f, && fg=gf,\\ &(f+g)+h=f+(g+h), && (fg)h=f(gh),\\ &f(g+h)=fg+fh, && (f+g)h=fh+gh. \end{aligned}$$

这里 f, g, h 都是 A 上的函数.

设函数 ℓ 的值域是 A 的子集. 记 $f / g = \frac{f}{g}$, $f \wedge g = f^g$. 设 $*$ 是五文字 $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\wedge$ 的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned} ((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]]\\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x]. \end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于 $+$ 与 $\cdot$ 的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中有用, 故我建议您好好看看它.

例 1.57　我们知道, 对任意实数 x, 都有 $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$. 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

例 1.58　我们可写 “二倍角公式” 为

$$\begin{aligned}
\sin \circ 2\imath &= 2\cos\sin, \\
\cos \circ 2\imath &= \cos^2 - \sin^2 \\
&= 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 \\
&= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\
\tan \circ 2\imath &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2\imath \\
&= \frac{2\cos\sin}{\cos^2 - \sin^2} \\
&= \frac{2\tan}{1 - \tan^2} \\
&= \frac{2\imath}{1 - \imath^2} \circ \tan.
\end{aligned}$$

例 1.59　值得注意的是, $f(g+h)$ 并不是 $f \circ (g+h)$:

$$\begin{aligned}
2\cos(\cos + \sin) &= 2\cos^2 + 2\cos\sin \\
&= (\cos + \sin + 1) \circ 2\imath \\
&= (\cos + \sin) \circ 2\imath + 1 \\
&= \sqrt{2}\cos \circ \left(\imath - \frac{2\pi}{8}\right) \circ 2\imath + 1 \\
&= \sqrt{2}\cos \circ \left(2\imath - \frac{2\pi}{8}\right) + 1.
\end{aligned}$$

例 1.60　值得注意的是, 本书的 $\sin^{-1}$ 不是 arcsin, $\tan^{-1}$ 也不是 arctan. 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}
\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\
&= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\
&= \frac{1 - \cos}{\sin}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sin^2}{2\cos\sin} \circ \frac{\iota}{2} \\
&= \tan \circ \frac{\iota}{2}.
\end{aligned}
$$

例 1.61 我们看一些关于 arcsin 跟 arctan 的等式. 在本例, 我们约定, sin, tan 分别表示 $\sin_{[-2\pi/4,2\pi/4]}$ 与 $\tan_{(-2\pi/4,2\pi/4)}$. 这样,

$$
\begin{aligned}
\sin \circ \arcsin &= \iota_{[-1,1]}, \\
\tan \circ \arctan &= \iota_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}
$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$
\begin{aligned}
\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\iota_{[-2\pi/4,2\pi/4]} \circ \arcsin) \\
&= (\cos \circ \iota_{[-2\pi/4,2\pi/4]}) \circ \arcsin \\
&= (\mathrm{sqrt} \circ (1-\iota^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\
&= (\mathrm{sqrt} \circ (1-\iota^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\
&= \mathrm{sqrt} \circ (1-\iota^2).
\end{aligned}
$$

这里的 ι 自然是 $\iota_{[-1,1]}$.

类似地,

$$
\begin{aligned}
\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\iota_{(-2\pi/4,2\pi/4)} \circ \arctan) \\
&= (\cos \circ \iota_{(-2\pi/4,2\pi/4)}) \circ \arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2+\sin^2}\right) \circ \arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt} \circ \frac{1}{1+\iota^2} \circ \tan\right) \circ \arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt} \circ \frac{1}{1+\iota^2}\right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\mathrm{sqrt} \circ (1+\iota^2)}.
\end{aligned}
$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$
\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos\tan) \circ \arctan = \frac{\iota}{\mathrm{sqrt} \circ (1+\iota^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{\iota}{\mathrm{sqrt} \circ (1-\iota^2)}.
\end{aligned}
$$

注 1.62　或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号: $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$\begin{aligned}
\cos[\arcsin] &= \operatorname{sqrt}[1 - \imath^2], \\
\cos[\arctan] &= \frac{1}{\operatorname{sqrt}[1 + \imath^2]}, \\
\sin[\arctan] &= \frac{\imath}{\operatorname{sqrt}[1 + \imath^2]}, \\
\tan[\arcsin] &= \frac{\imath}{\operatorname{sqrt}[1 - \imath^2]}.
\end{aligned}$$

虽然我已经用 $f[a]$ 表示 a 在 f 下的像了, 我自然地也用 $f[C]$ 表示 C 的每个元在 f 下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用 $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.

第二章 连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础.
若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是 $\mathbb{R}$ 的子集.

2.1 连续的定义

定义 2.1 设 $x \in \mathbb{R}$. 设 δ 为正数. 则 $N[x;\delta] = (x-\delta, x+\delta)$ 是 x 的一个**邻域**. 称 $N[x;\delta] \setminus \{x\} = (x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$ 是 x 的一个**去心邻域**.

不难看出, $N[x;\delta]$ 就是 $\{t \mid |t-x| < \delta\}$, 而 $N[x;\delta] \setminus \{x\}$ 就是 $\{t \mid 0 < |t-x| < \delta\}$.
下面的不等式十分有用.

定理 2.2 对任意实数 x, y, 有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数 a, b, c,

$$|a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leqslant |a-b| + |b-c|.$$

证 注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|xy| - xy) \geqslant 0.$$ 证毕.

定义 2.3 设 f 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 若任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $f[A \cap N[x;\delta]] \subset N[f[x];\varepsilon]$, 则说 f 于 x **连续**.

不难看出, f 于 x 连续的一个必要与充分条件是: 任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时, 必有 $|f[t]-f[x]|<\varepsilon$.

定理 2.4　设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 则 $f*g$ 也于 x 连续.

证　以 $*$ 为 $+$ 或 $-$ 时为例. 任取 $\varepsilon>0$. 这样, 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 g 于 x 连续, 故存在正数 δ_2 使

$$|t-x|<\delta_2 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1, δ_2 的较小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}|(f*g)[t]-(f*g)[x]| &= |(f[t]*g[t])-(f[x]*g[x])|\\ &= |(f[t]-f[x])*(g[t]-g[x])|\\ &\leqslant |f[t]-f[x]|+|g[t]-g[x]|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$*$ 为 $\cdot$ 时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned}&(fg)[t]-(fg)[x]\\ &= f[t]g[t]-f[x]g[x]\\ &= (f[t]-f[x]+f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]+g[t])\\ &= (f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]).\end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使 $(f[t]-f[x])g[t]$ 跟 $f[x](g[t]-g[x])$ 的绝对值都不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ 就好. 首先, 存在正数 δ_3 使

$$|t-x|<\delta_3 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)}.$$

其次, 存在正数 δ_4 使

$$|t-x|<\delta_4 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<1.$$

由此可知, $|t-x|<\delta_4$ 且 $t\in A$ 时,

$$|g[t]|=|g[x]+(g[t]-g[x])|<|g[x]|+1.$$

最后, 存在正数 δ_5 使

$$|t-x|<\delta_5 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}.$$

取 δ 为 $\delta_3,\delta_4,\delta_5$ 的最小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}
&|(fg)[t]-(fg)[x]|\\
&=|(f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x])|\\
&\leqslant|f[t]-f[x]|\cdot|g[t]|+|f[x]|\cdot|g[t]-g[x]|\\
&<\frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}\cdot(|g[x]|+1)+|f[x]|\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.5 设 f 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则 f^{-1} 于 x 连续.

证 任取 $\varepsilon>0$. 注意到

$$f^{-1}[t]-f^{-1}[x]=-\frac{f[t]-f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明 $|f[t]f[x]|$ 比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然 $f[x]\neq 0$, 那么 $|f[x]|$ 当然是正数. 所以, 存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]|=|f[t]-(f[t]-f[x])|\leqslant|f[t]|+|f[t]-f[x]|<|f[t]|+\frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]|>|f[x]|-\frac{|f[x]|}{2}=\frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, $|t-x|<\delta_1$ 且 $t\in A$ 时,

$$|f[t]f[x]|>\frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使 $|f[t]-f[x]|<\frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$ 即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

注 2.6 一般地, 设 f 是 A 上的函数, $x\in A$, 且 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则存在 x 的邻域 $N[x;\delta]$ 使 $t\in A\cap N[x;\delta]$ 时必有

$$\frac{1}{2}<\frac{f[t]}{f[x]}<\frac{3}{2}.$$

取 $\varepsilon=|f[x]|/2$; 然后,

$$\left|\frac{f[t]}{f[x]}-1\right|=\frac{|f[t]-f[x]|}{|f[x]|}<\frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到 $|a-b|<c$ 相当于 $a-c<b<a+c$.

定理 2.7 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $f[x]\neq 0$. 则 g/f 也于 x 连续.

证 注意到 $g/f=g\cdot f^{-1}$. 证毕.

定理 2.8 设 $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$. 若 f 于 x 连续, 且 g 于 $f[x]$ 连续, 则 $g\circ f\colon A\to C$ 于 x 连续.

证 任取正数 ε. 那么, 存在正数 δ' 使

$$|v-f[x]|<\delta' \text{ 且 } v\in B \implies |g[v]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

也存在正数 δ 使

$$|t-x|<\delta \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\delta'.$$

显然 $f[t]\in B$. 所以, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$|(g\circ f)[t]-(g\circ f)[x]|=|g[f[t]]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

证毕.

2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

定义 2.9 设 f 是 A 上的函数. 若 f 于 A 的每一点都连续, 则 f 是 (A 上的) **连续函数**.

注 2.10 显然, 若 $B \subset A$, 那么 f 在 B 上的限制 f_B 也是连续函数.

利用上节的结论, 我们有下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我就不证了.

定理 2.11 设 f, g 都是 A 上的连续函数. 则:
(1) $f * g$ 是连续函数, 这里 $*$ 是三文字 $+$, $-$, $\cdot$ 的任意一个.
(2) 若 f 不取零值 (也就是说, f 无根), 则 g/f 是连续函数.

定理 2.12 设 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ 都是连续函数. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 也是连续函数.

例 2.13 常函数 $c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意非空集 $T \subset \mathbb{R}$, $c[T] = \{c\}$. 所以, 任取正数 ε, 对 x 的**任意**邻域 $N[x;\delta]$, 都有 $c[N[x;\delta]] = \{c\} \subset N[c;\varepsilon] = N[c[x];\varepsilon]$.

例 2.14 $\iota\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意集 $T \subset \mathbb{R}$, $\iota[T] = T$. 所以, 任取正数 ε, 取 x 的 ε 邻域 $N[x;\varepsilon]$, 即得 $\iota[N[x;\varepsilon]] = N[x;\varepsilon] = N[\iota[x];\varepsilon] \subset N[\iota[x];\varepsilon]$.

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

定理 2.15 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1\iota + \cdots + b_n\iota^n}{a_0 + a_1\iota + \cdots + a_m\iota^m}$$

(其中 m, n 为非负整数, 且 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 是不全为零的实数, $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

定义 2.16 设 f 是 A 上的函数. 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y])\geqslant 0$, 则说 f **增** (也说 f 是**增函数**); 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y])>0$, 则说 f **严增** (也说 f 是**严增函数**).

若 $-f$ 增, 则 f **减** (也说 f 是**减函数**); 若 $-f$ 严增, 则 f **严减** (也说 f 是**严减函数**).

若 f 增或 f 减, 则 f **单调** (也说 f 是**单调函数**); 若 f 严增或 f 严减, 则 f **严单调** (也说 f 是**严单调函数**).

简单地, 说 f 增 (严增), 就是说对任意适合 $x\in A$, $y\in A$ 且 $x<y$ 的 x, y, 必有 $f[x]\leqslant f[y]$ ($f[x]<f[y]$); 说 f 减 (严减), 就是说对任意适合 $x\in A$, $y\in A$ 且 $x<y$ 的 x, y, 必有 $f[x]\geqslant f[y]$ ($f[x]>f[y]$).

例 2.17 设 a 为非零实数, b 为实数. 则 $a\imath+b$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严单调函数. 任取二个相异实数 x, y, 则

$$\begin{aligned}&(x-y)((a\imath+b)[x]-(a\imath+b)[y])\\ =&(x-y)((ax+b)-(ay+b))\\ =&a(x-y)^2.\end{aligned}$$

由此可知, $a>0$ 时 $a\imath+b$ 严增, 而 $a<0$ 时 $a\imath+b$ 严减.

可以验证, $(a\imath)^{[-1]}=\frac{1}{a}\imath$, 且 $(\imath+b)^{[-1]}=\imath-b$. 所以

$$\begin{aligned}(a\imath+b)^{[-1]}&=((\imath+b)\circ(a\imath))^{[-1]}\\ &=(a\imath)^{[-1]}\circ(\imath+b)^{[-1]}\\ &=\frac{1}{a}\imath\circ(\imath-b)\\ &=\frac{1}{a}\imath-\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

不难看出, $(a\imath+b)^{[-1]}$ 跟 $a\imath+b$ 同严增 (或严减).

定理 2.18 设 f 是 A 上的严单调函数. 则 f 是单函数.

证 任取 A 的相异二元 x, y. 则

$$f[x]-f[y]=\frac{(x-y)(f[x]-f[y])}{x-y}\neq 0.$$

证毕.

我们知道, 若 $f\colon A \to B$ 是单函数, 且 $f[A] = B$, 则 f 有反函数 $f^{[-1]}\colon B \to A$. 特别地, 适当选取陪域后, 每个严单调函数都有反函数.

定理 2.19 设 $f\colon A \to B$ 是满的严增 (严减) 函数. 则 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 也是满的严增 (严减) 函数.

证 依假定, f 是双函数, 故有反函数 $f^{[-1]}$, 且 $f^{[-1]}$ 当然是既满亦单的.

无妨设 f 严增; f 严减时, 您可类似地论证 $f^{[-1]}$ 亦严减.

下设 f 严增. 任取 B 的相异二元 x', y'. 令 $x = f^{[-1]}[x']$, $y = f^{[-1]}[y']$. 易见 $x \neq y$, 且 $x' = f[x]$, $y' = f[y]$. 因 f 严增, 故

$$(f[x] - f[y])(x - y) = (x - y)(f[x] - f[y]) > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}&(x' - y')(f^{[-1]}[x'] - f^{[-1]}[y'])\\ =\ &(f[x] - f[y])(x - y) > 0.\end{aligned}$$

证毕.

下面的结论十分重要.

定理 2.20 设 I 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 则 f 是连续函数的一个必要与充分条件是: J 是区间.

证 无妨设 f 严增.

先看必要性. 设 f 连续. 用反证法. 若 $J = f[I]$ 不是区间, 则存在 J 的相异二元 x', y' 使 $x' < y'$ 且 $J \cap (x', y')$ 为空集. 设 $f[x] = x'$; 设 $f[y] = y'$. 显然 $x < y$. 任取 I 的大于 x 的元 u. 因为 f 严增, 故 $f[u] > f[x] = x'$; 因为 $f[u] \notin (x', y')$, 故 $f[u] \geqslant y'$. 所以, $f[u] - f[x] \geqslant y' - x'$. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ 使 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < y' - x'.$$

因为 I 是区间, 且 $x, y \in I$, 故 $[x, y] \subset I$; 特别地, 这说明, 存在适合条件 $0 < v - x < \delta$ 且 $v \in I$ 的数 v. 故

$$y' - x' > |f[v] - f[x]| = f[v] - f[x] \geqslant y' - x'.$$

这是矛盾.

再看充分性. 设 J 是区间. 任取 $x \in I$. 我们证明 f 于 x 连续.

先设 x 是 I 的左端点. 那么, 对每个 $w > x, w \in I$, 都有 $f[w] > f[x]$. 于是, $f[x]$ 也是 J 的左端点. 任取正数 ε, 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] + e \in J$. 令 $q = f^{[-1]}[f[x]+e]$, 则必有 $x < q$. 从而, 当 $x \leqslant t < q$ 时, $f[x] \leqslant f[t] < f[x]+e$. 这么看来, 存在正数 $\delta = q - x$, 当 $t \in N[x;\delta] \cap I = [x, q)$ 时, 必有

$$|f[t] - f[x]| = f[t] - f[x] < e < \varepsilon.$$

类似地, 当 x 是 I 的右端点时, 您也可用完全类似的套路论证 f 于 x 连续.

现设 x 既不是 I 的左端点, 也不是 I 的右端点. 这样, 存在正数 d 使 $x - d, x + d \in I$. 所以 $f[x - d], f[x + d] \in J$, 且 $f[x - d] < f[x] < f[x + d]$. 故 $f[x]$ 也不是 J 的端点. 所以, 任取正数 ε, 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] - e$, $f[x] + e \in J$. 令 $p = f^{[-1]}[f[x] - e]$, $q = f^{[-1]}[f[x] + e]$. 那么 $p < x < q$. 取 δ 为 $x - p$ 与 $q - x$ 的较小者. 则 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$p \leqslant x - \delta < t < x + \delta \leqslant q,$$

从而

$$f[x] - e = f[p] \leqslant f[x - \delta] < f[t] < f[x + \delta] \leqslant f[q] = f[x] + e,$$

即

$$|f[t] - f[x]| \leqslant e < \varepsilon.$$ 证毕.

由此, 我们可以得到如下关于反函数的定理.

定理 2.21　设 I 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 设 f 是连续函数. 则 $f^{[-1]}\colon J \to I$ 也是连续函数.

证　设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 因为 I 是区间, 且 f 是连续函数, 故 $J = f[I]$ 也是区间. 因为 $f^{[-1]}$ 也是满的严单调函数, 且 $I = f^{[-1]}[J]$ 是区间, 故 $f^{[-1]}$ 是连续函数. 证毕.

最后, 我不加论证地给出一些常见的连续函数. 您可以在任意一本分析教材里找到论证.

- exp: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 ln: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 是满的连续函数. 记 sin 在 $[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 上的限制为 s. 则 s 是满的严增函数. 故其反函数 arcsin: $[-1, 1] \to [-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- tan: $\{x \mid \cos[x] \neq 0\} \to \mathbb{R}$ 是满的连续函数. 记 tan 在 $(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 上的限制为 t. 则 t 是满的严增函数. 故其反函数 arctan: $\mathbb{R} \to (-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- 设 n 是正偶数. 则 ι^n: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[2]{x}$ 为 $\sqrt{x}$; 一般写 $\iota^{1/2}$ 为 sqrt.
- 设 n 是正奇数. 则 ι^n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[1]{x}$ 为 x; 一般写 $\iota^{1/1}$ 为 ι.
- abs: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ 是连续函数.

2.3　连续函数的积分

我简单地介绍一下连续函数的积分.

传统地, 一本算学分析 (或高等算学) 教材会先讲导数 (微分学), 再讲如何反求导 (不定积分), 然后才是积分 (定积分). 不过, 为论证连续函数一定有 "反导", 就需要 (连续函数的) 积分的知识. 所以, 逻辑地, 我选择先说连续函数的积分论. 这里, 我就不加证明地列举本书用到的关于积分的结论. 如果您对这些结论的论证感兴趣, 您可以参考算学家梅加强的《数学分析》.

定理 2.22　设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 作数列

$$
\begin{aligned}
A\colon\quad & \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\
n \mapsto & \begin{cases} 0, & n = 0; \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right], & n \geqslant 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

则存在唯一的实数 α, 使对任意正数 ε, 存在非负整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|A[n] - \alpha| < \varepsilon$.

我们称 α 为 f 在 $[a, b]$ 上的**积分**, 并记 α 为

$$\int_a^b f.$$

注 2.23 传统地, 我们记上面的 α 为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我并没有说老记号不好; 只不过, 我会展现一种不需要 "变量 x" 的积分法 (如何无变量地计算积分), 故我在此使用新记号. 本注的目的是告诉您传统的记号跟本书的记号的区别.

例 2.24 设 k 为常函数. 则不难看出,

$$\int_a^b k = (b - a)k.$$

现在, 我们看积分的一些基本性质. 不过, 我们先作一个约定.

定义 2.25 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 规定

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

定理 2.26 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

定义 2.27 设 $*$ 是文字 $>, <, \geqslant, \leqslant$ 的任意一个. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 f, g 都是 A 上的函数. 若对任意 $t \in A$, 都有 $f[t] * g[t]$, 则我们写 $f * g$.

注 2.28 注意, 我们没说 $*$ 可以是文字 $\neq$; 这是因为我们已经规定, $f \neq g$ 是 $f = g$ 的**否定**.

定理 2.29 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 设 $f \leqslant g$. 则

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

定义 2.30 我们可简单地写 $\operatorname{abs} \circ f$ 为 $|f|$; 类似地, 我们也可简单地写 $\operatorname{sqrt} \circ f$ 为 $\sqrt{f}$.

例 2.31 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 不难验证 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. 故

$$\int_a^b (-|f|) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

也就是

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

不难看出, 对任意 $a, b \in I$,

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|.$$

定理 2.32 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

下面的结论很重要; 之后会用到.

定理 2.33 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $x \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} F\colon \quad & I \to \mathbb{R}, \\ & t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \dfrac{1}{t-x}\displaystyle\int_x^t f, & t \neq x. \end{cases} \end{aligned}$$

则 F 于 x 连续.

证 任取正数 ε. 我们的目标是, 找到正数 δ, 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in I$ 时, $|F[t]-F[x]|<\varepsilon$. 这相当于: 找到正数 δ, 使 $0<|t-x|<\delta$ 且 $t\in I$ 时,

$$\left|\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x]\right| < \varepsilon.$$

这不难. 首先, 注意到

$$f[x](t-x)=\int_x^t f[x],$$

故

$$\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x] = \frac{1}{t-x}\int_x^t (f-f[x]).$$

取低于 ε 的正数 e. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 d, 使 $|t-x|<d$ 且 $t\in I$ 时,

$$|f[t]-f[x]|<e.$$

所以

$$\left|\int_x^t (f-f[x])\right| \leqslant \left|\int_x^t |f-f[x]|\right| \leqslant \left|\int_x^t e\right| = |t-x|e.$$

也就是说, $0<|t-x|<d$ 且 $t\in I$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x]\right| &= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_x^t (f-f[x])\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|t-x|}\cdot|t-x|e \\ &= e<\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

第二部分

微积分

第三章　导数

本章简单地提及导数及其运算.

若无特别说明, 本章的函数的定义域都是区间.

3.1　背景

定义 3.1　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 若存在 x 的邻域 N, 与 $N \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续, 则说 f 于 x **可导**, 并称 $F[x]$ 为 f 于 x 的**导数**.

注 3.2　传统地, 我们用极限

$$\lim_{t \to x} \frac{f[t] - f[x]}{t - x}$$

是否存在定义 f 是否于 x 可导; 极限存在时, 它的值就是 f 于 x 的导数. 可以证明, 这二个定义是等价的; 不过, 既然我花了不少篇幅讨论连续函数, 我将呈现一种不一样的微分学 (求导学). 我采取的定义来自希腊算学家 Constantin Carathéodory. 假如您对此事感兴趣, 您可阅美国算学家 Stephen Kuhn 的名为 *The Derivative á la Carathéodory* 的文章 (不过, 我想说, 标题的 *á la* 应该是 *à la*).

我们看导数的一些基本性质. 在定义里, 若 f 于 x 可导, 则 f 于 x 的导数似乎不止一个. 不过, 我们即将说明, 导数是唯一的.

定理 3.3 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F_1, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F_1,$$

且 F_1 于 x 连续. 设存在 x 的邻域 N_2, 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 F_2, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F_2,$$

且 F_2 于 x 连续. 则 $F_1[x] = F_2[x]$. 也就是说, f 于 x 的导数, 若存在, 则唯一.

证 用反证法. 设 $F_1[x] \neq F_2[x]$, 则 $\varepsilon = |F_1[x] - F_2[x]|$ 是正数. 我们要由此推出矛盾.

因为 $N_1 \cap I$ 是区间, 且 F_1 于 x 连续, 故存在正数 δ_1, 使 $0 < |t - x| < \delta_1$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_1[t] - F_1[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $N_2 \cap I$ 是区间, 且 F_2 于 x 连续, 故存在正数 δ_2, 使 $0 < |t - x| < \delta_2$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_2[t] - F_2[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1 与 δ_2 中的较小者. 则 $0 < |t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= |F_1[x] - F_2[x]| \\
&= \left|\left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right) - \left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right| + \left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这是矛盾. 证毕.

例 3.4 设 a, b 为实数. 则 $a\iota + b$ 于其定义域的任意一点都可导. 具体地,

$$a\iota + b = (a\iota + b)[x] + (\iota - x)a,$$

而 a 是连续函数. 并且, $a\iota + b$ 于任意一点的导数都是 a.

定理 3.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导. 则 f 于 x 连续.

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N, 与 $N \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续.

因为 $\iota - x$ 于 x 连续, 故 $(\iota - x)F$ 于 x 连续; 因为 $f[x]$ 于 x 连续, 故 f 于 x 连续. 证毕.

定理 3.6 设 I 为区间. 设 f, g 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f, g 都于 x 可导. 则:

- $f + g$ 于 x 可导, 且

$$(f + g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) + (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 设 k 为常数. 则 kf 于 x 可导, 且

$$(kf \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = k \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- fg 于 x 可导, 且

$$(fg \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot g[x] + f[x] \cdot (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 若 $f[x] \neq 0$, 则 g/f 于 x 可导, 且

$$(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}.$$

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续. 类似地, 因为 g 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_2, 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 G, 使

$$g = g[x] + (\iota - x)G,$$

且 G 于 x 连续. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域. 这里, 为方便, 无妨滥用记号, 视 F, G 分别是 F, G 在 $N \cap I$ 上的限制. 此外, 注意到, f, g 于 x 的导数分别为 $F[x], G[x]$.

因为

$$\begin{aligned} f + g &= (f[x] + (\iota - x)F) + (g[x] + (\iota - x)G) \\ &= (f[x] + g[x]) + (\iota - x)(F + G) \\ &= (f + g)[x] + (\iota - x)(F + G), \end{aligned}$$

且 $F + G$ 于 x 连续, 故 $f + g$ 于 x 可导, 且导数为 $(F + G)[x] = F[x] + G[x]$.

因为

$$\begin{aligned} kf &= k(f[x] + (\iota - x)F) \\ &= kf[x] + k(\iota - x)F \\ &= (kf)[x] + (\iota - x)(kF), \end{aligned}$$

且 kF 于 x 连续, 故 kf 于 x 可导, 且导数为 $(kF)[x] = k \cdot F[x]$.

因为

$$\begin{aligned} fg &= (f[x] + (\iota - x)F)g \\ &= f[x](g[x] + (\iota - x)G) + ((\iota - x)F)g \\ &= (fg)[x] + (\iota - x)(F \cdot g + f[x] \cdot G), \end{aligned}$$

且 $h = F \cdot g + f[x] \cdot G$ 于 x 连续, 故 fg 于 x 可导, 且导数为 $h[x] = F[x]g[x] + f[x]G[x]$.

最后一个等式需要一点儿技巧. 首先, 既然 $f[x] \neq 0$, 且 f 于 x 连续, 故存在 x 的邻域 M, 使 $t \in M \cap I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2},$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leqslant |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, 在 M 上, f 不取零值. 从而, 在 $(M \cap N) \cap I$ 上,

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f^{-1}[x] + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f[x]}\right) \\ &= f^{-1}[x] - \frac{f - f[x]}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] - \frac{(\iota - x)F}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] + (\iota - x) \cdot \left(-\frac{F}{f[x]f}\right). \end{aligned}$$

因为 $-F/(f[x]f)$ 于 x 连续, 故 f^{-1} 于 x 可导, 且导数为 $-F[x]/(f^2[x])$.

注意到 $g/f = g \cdot f^{-1}$, 故 g/f 于 x 可导, 且

$$\begin{aligned} &(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ =\ &(gf^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ =\ &(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f^{-1}[x] + g[x] \cdot (f^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ =\ &(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot \frac{1}{f[x]} + g[x] \cdot \left(-\frac{(f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f[x]f[x]}\right) \\ =\ &\frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}. \end{aligned}$$

证毕.

例 3.7 我们知道, $a\iota + b$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 a. 特别地, 常函数于 x 的导数为 0, 而 ι 于 x 的导数为 1. 利用算学归纳法, 可算出, 当 n 为正整数时, ι^n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 nx^{n-1}. 由此, 多项式函数于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导. 进而, 有理函数于有定义的点可导. 顺便一提, 即使 n 为负整数, ι^n 于非零的 x 的导数仍为 nx^{n-1}.

定理 3.8 (链规则) 设 I, J 为区间. 设 f: $I \to J$, g: $J \to K$. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导, 且 g 于 $f[x]$ 可导. 则 $g \circ f$ 于 x 可导, 且

$$(g \circ f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (g \text{ 于 } f[x] \text{ 的导数}) \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

证 因为 g 于 $f[x]$ 可导, 故存在 $f[x]$ 的邻域 $\boldsymbol{M}$, 与 $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{J}$ 上的函数 $\boldsymbol{G}$, 使

$$g = g[f[x]] + (\iota - f[x])G,$$

且 $\boldsymbol{G}$ 于 $f[x]$ 连续; 同时, $G[f[x]]$ 即为 g 于 $f[x]$ 的导数. 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap \boldsymbol{I}$ 上的函数 $\boldsymbol{F}$, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 $\boldsymbol{F}$ 于 x 连续; 同时, $\boldsymbol{F}[x]$ 即为 f 于 x 的导数.

因为 f 亦于 x 连续, 故对 $f[x]$ 的邻域 $\boldsymbol{M}$ 来说, 必存在 x 的邻域 N_2, 使 $f[N_2 \cap \boldsymbol{I}] \subset \boldsymbol{M}$; 又因为 f 的陪域为 $\boldsymbol{J}$, 故 $f[N_2 \cap \boldsymbol{I}] \subset \boldsymbol{J}$. 所以, $f[N_2 \cap \boldsymbol{I}] \subset \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{J}$. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域, 且 $f[N \cap \boldsymbol{I}] \subset \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{J}$. 为方便, 无妨滥用记号, 视 $\boldsymbol{F}$, f 分别是 $\boldsymbol{F}$, f 在 $N \cap \boldsymbol{I}$ 上的限制. (事实上, 本段文字只是保证复合 $\boldsymbol{G} \circ f$ 有意义罢了.)

现在考察 $g \circ f$:

$$\begin{aligned} g \circ f &= g[f[x]] + (f - f[x])(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (\iota - x)F(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (\iota - x) \cdot (G \circ f)F. \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{G}$ 于 $f[x]$ 连续, 而 f 于 x 连续, 故 $\boldsymbol{G} \circ f$ 于 x 连续; 又因 $\boldsymbol{F}$ 于 x 连续, 故 $(\boldsymbol{G} \circ f)\boldsymbol{F}$ 于 x 连续. 所以 $g \circ f$ 于 x 可导, 且导数为 $G[f[x]] \cdot F[x]$. 证毕.

定理 3.9 设 $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$ 为区间. 设 f: $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}$: $\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$. 设 $y \in \boldsymbol{J}$. 设 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导. 则 $f^{[-1]}$ 于 y 可导的一个必要与充分条件是: f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

若 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数不等于零, 则

$$(f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}) = \frac{1}{(f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数})}.$$

证 先看必要性. 既然 $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 那么 $\iota_J = f \circ f^{[-1]}$ 于 y 可导. 由链规则, 有

$$1 = (f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数}) \cdot (f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}).$$

从而 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

再看充分性. 因为 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 故存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[f^{[-1]}[y]] + (\iota - f^{[-1]}[y])F,$$

且 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续. 依假定, f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数 $F[f^{[-1]}[y]] \neq 0$. 所以, 存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_2, 使在 $N_2 \cap (N_1 \cap I)$ 上, F 不取零值. 取 $N = N_2 \cap N_1$, 则 N 也是 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域, 且在 $N \cap I$ 上, 不但 F 不取零值, 且

$$f = y + (\iota - f^{[-1]}[y])F.$$

因为 f 严单调, 且 I, J 都是区间, 故 f, $f^{[-1]}$ 都是连续函数. 特别地, $f^{[-1]}$ 于 y 连续. 故对 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N, 存在 y 的邻域 M, 使 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N$. 因为 $f^{[-1]}$ 的值域为 I, 故 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset I$. 也就是说, $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N \cap I$. (事实上, 这只是为保证复合 $F \circ f^{[-1]}$ 有意义.) 那么, 在 $M \cap J$ 上, 有

$$f \circ f^{[-1]} = y + (f^{[-1]} - f^{[-1]}[y])(F \circ f^{[-1]}),$$

即

$$f^{[-1]} = f^{[-1]}[y] + (\iota - y) \cdot \frac{1}{F \circ f^{[-1]}}.$$

因为 $f^{[-1]}$ 于 y 连续, 而 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续, 故 $F \circ f^{[-1]}$ 于 y 连续; 因为 (在 $M \cap J$ 上) F 不取零值, 故 $1/(F \circ f^{[-1]})$ 亦于 y 连续. 所以, $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且导数为 $1/F[f^{[-1]}[y]]$. 证毕.

最后, 我给出一个十分有用的事实; 不过, 由于没有足够多的工具, 我就不论证了.

定理 3.10 指数函数、馀弦函数、正弦函数于其定义域的每一点都可导. 具体地:

- exp: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\exp[x]$.
- cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $-\sin[x]$,
- sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\cos[x]$.

3.2 无变量的导数计算

这是本章的重点; 这也是本书的一个重点. 不过, 不重要地, “无变量的导数计算” 的 “导数” 跟前面的 “导数” 不是一个词, 但仍有联系.

定义 3.11 设 f 是区间 I 上的函数. 若 f 于 I 的每一点都可导, 则定义函数

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[f]\colon\quad & I \to K, \\ & x \mapsto (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}), \end{aligned}$$

其中陪域 K 可视情况而定 (除非特别说明, 我们不在意陪域). 我们称 $\mathrm{D}[f]$ 为 f 的**导函数** (亦可简称其为 f 的**导数**).

抽象地, $\mathrm{D}[f]$ 的 D 本身就是一个函数; 不过, 这是一个变函数为函数的函数 (有点儿绕). 有时, 在不引起误会的时候, 我们也可写 $\mathrm{D}[f]$ 为 $\mathrm{D}f$; 毕竟, 至少在本书里, D 也只跟函数 “作用”.

当然, 我又忘记了一件事: 若 f 于 I 的每一点都可导, 我们就说 f 是 I 上的**可导函数**.

曾经, 我们写 “f 于 x 的导数是 ℓ”; 现在, 我们总算能简便地表此事以 $\mathrm{D}[f][x] = \ell$ 或 $\mathrm{D}f[x] = \ell$. 乘热打铁, 我们用简单的话转述前节的结论.

定理 3.12 设 f, g 都是区间 I 上的可导函数.

- $f + g$ 也是 I 上的可导函数, 且

$$\mathrm{D}[f+g] = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g.$$

- 设 k 为常数. 则 kf 也是 I 上的可导函数, 且

$$\mathrm{D}[kf] = k\mathrm{D}f.$$

- fg 也是 I 上的可导函数, 且

$$\mathrm{D}[fg] = \mathrm{D}f \cdot g + f \cdot \mathrm{D}g.$$

- 设 f 不取零值. 则 g/f 也是 I 上的可导函数, 且

$$\mathrm{D}\,\frac{g}{f} = \frac{\mathrm{D}g \cdot f - g \cdot \mathrm{D}f}{f^2}.$$

定理 3.13 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$, $g\colon J \to K$ 都是可导函数. 则 $g \circ f$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}[g \circ f] = (\mathrm{D}g \circ f) \cdot \mathrm{D}f.$$

注 3.14 有时, 我们也写 $g \circ f$ 为 $g[f]$; 相应地, 也可写链规则为

$$\mathrm{D}[g[f]] = \mathrm{D}g[f] \cdot \mathrm{D}f.$$

我们约定 $\mathrm{D}g[f]$ 表示 $(\mathrm{D}g)[f]$; 这跟 $\mathrm{D}g \circ f$ 表示 $(\mathrm{D}g) \circ f$ 是一致的. 不过, 由于 $\mathrm{D}g[f]$ 比 $\mathrm{D}g \circ f$ 紧凑, 我们省去了一对圆括号.

定理 3.15 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}\colon J \to I$. 设 f 是可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值. 则 $f^{[-1]}$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}f^{[-1]} = \frac{1}{\mathrm{D}f \circ f^{[-1]}}.$$

定理 3.16 导数表 I:

- $\mathrm{D}c = 0$, 此处 c 为常函数.
- $\mathrm{D}\,\imath^n = n\,\imath^{n-1}$ (n 为整数).
- $\mathrm{D}\exp = \exp$.
- $\mathrm{D}\cos = -\sin$.
- $\mathrm{D}\sin = \cos$.

用这四个定理, 我们可以**清楚地**、**有条理地**计算常见的函数的导 (函) 数. 我举一些例; 您可以比较本书的计算过程跟传统的导数计算过程.

例 3.17 因为 $\tan = \sin/\cos$, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\tan &= \mathrm{D}\,\frac{\sin}{\cos} \\ &= \frac{\mathrm{D}\sin\cdot\cos - \sin\cdot\mathrm{D}\cos}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\ &= \cos^{-2} = 1 + \tan^2.\end{aligned}$$

例 3.18 因为 $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 严增, $\mathbb{R}, (0,+\infty)$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\exp = \exp > 0$, 故 $\ln\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\ln = \frac{1}{\mathrm{D}\exp \circ \ln} = \frac{1}{\exp \circ \ln} = \frac{1}{\imath}.$$

因为 $\sin\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to (-1,1)$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4), (-1,1)$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\sin = \cos > 0$, 故 $\arcsin\colon (-1,1) \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\arcsin = \frac{1}{\mathrm{D}\sin \circ \arcsin} = \frac{1}{\cos \circ \arcsin} = \frac{1}{\operatorname{sqrt} \circ (1 - \imath^2)}.$$

因为 $\tan\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to \mathbb{R}$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4), \mathbb{R}$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\tan = 1 + \tan^2 > 0$, 故 $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\arctan = \frac{1}{\mathrm{D}\tan \circ \arctan} = \frac{1}{(1+\tan^2) \circ \arctan} = \frac{1}{1+\imath^2}.$$

设 n 为正整数. 因为 $\imath^n\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 严增, $(0,+\infty)$ 是区间, 且 $\mathrm{D}\,\imath^n = n \cdot \imath^{n-1} > 0$, 故 $\imath^{1/n}\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\,\imath^{1/n} = \frac{1}{\mathrm{D}\,\imath^n \circ \imath^{1/n}} = \frac{1}{(n \cdot \imath^{n-1}) \circ \imath^{1/n}} = \frac{1}{n}\imath^{1/n-1}.$$

设 m 为整数. 则 $\imath^{m/n} = (\imath^{1/n})^m = \imath^m \circ \imath^{1/n}$. 故

$$\mathrm{D}\,\imath^{m/n} = (\mathrm{D}\,\imath^m \circ \imath^{1/n}) \cdot \mathrm{D}\,\imath^{1/n} = ((m \cdot \imath^{m-1}) \circ \imath^{1/n}) \cdot \frac{1}{n}\imath^{1/n-1} = \frac{m}{n}\imath^{m/n-1}.$$

也就是说, 对任意有理数 r, $\mathrm{D}\,\imath^r = r\,\imath^{r-1}$.

例 3.19 定义符号函数:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\colon\quad & \mathbb{R} \to \{1, 0, -1\}, \\ & t \mapsto \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

设 I 是某个不含 0 的区间. 故 sign (在 I 上的限制) 是常函数, 且导数为 0.

不难看出, $\operatorname{abs} = \operatorname{sign} \cdot \imath$. 所以,

$$\mathrm{D}\operatorname{abs} = \mathrm{D}\operatorname{sign} \cdot \imath + \operatorname{sign} \cdot \mathrm{D}\,\imath = \operatorname{sign} = \frac{\operatorname{abs}}{\imath}.$$

由此, 我们可计算 $\ln\circ\mathrm{abs}$ 的导数:

$$\mathrm{D}[\ln\circ\mathrm{abs}]=(\mathrm{D}\ln\circ\mathrm{abs})\cdot\mathrm{D}\,\mathrm{abs}=\left(\frac{1}{\imath}\circ\mathrm{abs}\right)\cdot\frac{\mathrm{abs}}{\imath}=\frac{1}{\imath}.$$

我们添加上面的计算结果到导数表 I, 就得到了一张较为完善的导数表 II. 以后, 我们的导数计算十分依赖此表与导数表 I 前的三个定理.

定理 3.20 导数表 II:

- $\mathrm{D}c=0$, 此处 c 为常函数.
- $\mathrm{D}\,\imath^r=r\,\imath^{r-1}$ (r 为有理数).
- $\mathrm{D}\exp=\exp$.
- $\mathrm{D}\cos=-\sin$.
- $\mathrm{D}\sin=\cos$.
- $\mathrm{D}\tan=\cos^{-2}=1+\tan^2$.
- $\mathrm{D}\ln=\mathrm{D}[\ln\circ\mathrm{abs}]=\imath^{-1}$.
- $\mathrm{D}\arcsin=\mathrm{sqrt}^{-1}\circ(1-\imath^2)$.
- $\mathrm{D}\arctan=1/(1+\imath^2)$.
- $\mathrm{D}\,\mathrm{abs}=\mathrm{abs}/\imath=\mathrm{sign}$.
- $\mathrm{D}\,\mathrm{sqrt}=\imath^{-1}\circ(2\,\mathrm{sqrt})$.

例 3.21 设 f,g 是区间 I 上的可导函数, 且 $f>0$. 求 $\mathrm{D}[f^g]$.
事实上, f^g 就是 $\mathrm{e}^{g(\ln\circ f)}$, 也就是 $\exp\circ(g(\ln\circ f))=\exp\circ(g\ln[f])$. 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{D}[f^g]&=\mathrm{D}[\exp\circ(g\ln[f])]\\&=(\mathrm{D}\exp\circ(g\ln[f]))\cdot\mathrm{D}[g\ln[f]]\\&=(\exp\circ(g\ln[f]))\cdot(\mathrm{D}g\cdot\ln[f]+g\cdot\mathrm{D}[\ln[f]])\\&=f^g\cdot\mathrm{D}g\cdot\ln[f]+f^g\cdot g\cdot(\mathrm{D}\ln\circ f)\cdot\mathrm{D}f\\&=f^g\ln[f]\,\mathrm{D}g+g f^{g-1}\,\mathrm{D}f.\end{aligned}$$

例 3.22 设

$$\begin{aligned}f\colon\quad&[0,+\infty)\to\mathbb{R},\\&x\to\ln\left[x^2\mathrm{e}^x+\sqrt{1+x^3}\right].\end{aligned}$$

求 $\mathrm{D}f$.

本问题定义 f 时, 使用了带变量的记号. 为了方便地计算 f 的导数, 我们不妨先无变量地表达 f:

$$\begin{aligned} g &= \iota^2 \cdot \exp + \mathrm{sqrt} \circ (1 + \iota^3), \\ f &= \ln \circ g. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f &= \mathrm{D}[\ln \circ g] \\ &= (\mathrm{D}\ln \circ g) \cdot \mathrm{D}g \\ &= g^{-1} \cdot \mathrm{D}[\iota^2 \cdot \exp] + g^{-1} \cdot \mathrm{D}[\mathrm{sqrt} \circ (1 + \iota^3)] \\ &= g^{-1} \cdot (\mathrm{D}\,\iota^2 \cdot \exp + \iota^2 \cdot \mathrm{D}\exp) \\ &\qquad + g^{-1} \cdot ((\mathrm{D}\,\mathrm{sqrt} \circ (1 + \iota^3)) \cdot \mathrm{D}[1 + \iota^3]) \\ &= g^{-1} \cdot (2\iota + \iota^2) \cdot \exp + g^{-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \iota^3}} \cdot 3\iota^2 \\ &= \frac{\iota\,(2 + \iota) \exp + \dfrac{3\iota^2}{2\sqrt{1 + \iota^3}}}{\iota^2 \exp + \sqrt{1 + \iota^3}}. \end{aligned}$$

第四章　不定积分

上一章, 我们接触了导数; 这一章, 我们来考虑导数的 "反操作".

具体地, 设 I 为区间, 且 f 是 I 上的函数. 上一章的要点是: 已知 f, 求 $\mathrm{D}f$; 这一章的要点是: 已知 I 上的函数 g 适合 $\mathrm{D}f = g$, 求 f.

4.1　原函数与不定积分

设 I 为区间. 不难看出, I 上的常函数的导数是 0 (在 I 上的限制). 不过, 重要地, 此事反过来也对:

定理 4.1　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的可导函数. 若 $\mathrm{D}f = 0$, 则 f 为常函数.

此事的论证可见于一般的分析教材, 所以我就不证了 (或许, 当我变强的时候, 我就能**在我的书里**给出**我自己的论证**了).

此事的一个重要的转述如下:

定理 4.2　设 I 为区间. 设 f_1, f_2 为 I 上的可导函数. 若 $\mathrm{D}f_1 = \mathrm{D}f_2$, 则存在常函数 c, 使 $f_2 = f_1 + c$.

证　考虑 $h = f_2 - f_1$. 那么 $\mathrm{D}h = 0$. 从而 h 是常函数.　　证毕.

由此, 我们作如下定义.

定义 4.3　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 若存在 I 上的可导函数 F 使 $\mathrm{D}F = f$, 则说 F 是 f 的一个**原函数**.

定义 4.4 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 f 有一个原函数. 那么, 称 f 的**全体**原函数作成的**集**为 f 的**不定积分**, 即

$$\int f = \{g \mid g \text{ 是 } f \text{ 的原函数}\}.$$

定理 4.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 F 是 f 的原函数. 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

证 设 G 是 f 的一个原函数. 则 $G = F + c$, 其中 c 为某个常函数. 故

$$\int f \subset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

另一方面, 若 c' 是常函数, 显然有 $\mathrm{D}[F + c'] = \mathrm{D}F = f$. 所以

$$\int f \supset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

证毕.

例 4.6 因为 $\mathrm{D}\exp = \exp$, 故

$$\int \exp = \{\exp + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

例 4.7 因为 $\mathrm{D}[-\cos] = \sin$, 故

$$\int \sin = \{-\cos + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

例 4.8 因为 $\mathrm{D}\sin = \cos$, 故

$$\int \cos = \{\sin + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

至此, 我们已经知道什么是不定积分. 不过, 我们也可以看到, 当前的表达不定积分的方式比较复杂. 所以, 我们很需要一种简写法; 我们将在下一节讨论此事.

我们知道, 若区间 I 上的函数有原函数, 那自然地有不定积分. 什么样的函数有原函数呢? 下面的结论给出了此问题的**部分**解答; 不过, 就算只是“部分”, 对本书而言, 也足够了.

定理 4.9 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则存在 I 上的可导函数 F, 使 $\mathrm{D}F = f$.

证 固定 $a \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} F\colon\quad & I \to \mathbb{R}, \\ & t \mapsto \int_a^t f. \end{aligned}$$

任取 $x \in I$. 从而对任意 $t \in I$,

$$F[t] = \int_a^x f + \int_x^t f = F[x] + (t - x)Q[t],$$

其中

$$\begin{aligned} Q\colon\quad & I \to \mathbb{R}, \\ & t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \dfrac{1}{t - x}\displaystyle\int_x^t f, & t \neq x. \end{cases} \end{aligned}$$

取 x 的一个邻域 N. 所以, 在 $N \cap I$ 上, 有

$$F = F[x] + (\imath - x)Q,$$

且 Q 于 x 连续 (定理 2.33), 故 F 于 x 可导, 且 F 于 x 的导数为

$$Q[x] = f[x].$$

证毕.

由此可得微积分的一个重要定理. 不过, 这不是本章的重点讨论对象.

定理 4.10 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

证 固定 $c \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} G\colon\quad & I \to \mathbb{R}, \\ & t \mapsto \int_c^t f. \end{aligned}$$

那么 G 是 f 的原函数, 且

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = G[b] - G[a].$$

既然 F 也是 f 的原函数, 那必定存在常函数 ℓ, 使 $G = F + \ell$. 所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= G[b] - G[a] \\ &= (F+\ell)[b] - (F+\ell)[a] \\ &= (F[b] + \ell[b]) - (F[a] + \ell[a]) \\ &= (F[b] + \ell) - (F[a] + \ell) \\ &= F[b] - F[a].\end{aligned}$$

证毕.

4.2　函数集的演算

上节, 我们正式地定义了区间 I 上的函数 f 的不定积分是 f 的全体原函数作成的集. 随后, 我们知道, 若 $\mathrm{D}F = f$, 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

不过, 此表达似乎不是很简洁. 很少有人愿意每次写不定积分都要写上形如 "c 是 I 上的常函数" 这样的话. 并且, 这种表达方式也不利于我们表达不定积分跟不定积分的关系.

例 4.11　设 f, g 都是区间 I 上的函数, 且不定积分存在. 我们看 $f + g$ 是否有不定积分. 为回答这个问题, 无妨设 F, G 分别是 f, g 的原函数. 那么 $\mathrm{D}[F + G] = f + g$. 从而, $f + g$ 确实有不定积分

$$A = \int (f+g) = \{F + G + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

记

$$B = \left\{ u + v \;\middle|\; u \in \int f, \text{且 } v \in \int g \right\}.$$

我们证明: $A = B$.

任取 $F + G + c \in A$. 那么 $F \in \int f$, 且 $G + c \in \int g$. 所以 $F + G + c \in B$. 这说明, $A \subset B$.

任取 $u + v \in B$, 其中 $u \in \int f$, 且 $v \in \int g$. 那么存在常函数 d_1, d_2 使 $u = F + d_1$, $v = G + d_2$. 所以 $u + v = F + G + (d_1 + d_2)$. 二个常函数的和仍为常函数, 故 $u + v \in A$. 这说明, $A \supset B$.

我们该怎样描述 $\int (f + g)$, $\int f$ 与 $\int g$ 的关系? 您可能在其他的分析教材里见过形如

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

的文字. 不过, 上式右端的 "+" 是什么意思? 或者, 具体地, 焊接二个集的 + 是什么意思呢?

上例告诉我们, 我们很需要为函数集定义新的运算; 更确切地, 我们很需要搬函数的运算到函数集上.

定义 4.12 设 A 为集. 若任取 A 的元 f, f 是一个函数, 就称 A 为**函数集**.

设 P, Q 为二个集. 若函数集 A 的每个元都是 P 上的函数, 就说 A 是 P 上的函数集. 若函数集 A 的每个元都是 P 到 Q 的函数 (定义域为 P, 陪域为 Q), 则说 A 是 P 到 Q 的函数集. 此时, 我们也说, 函数集 A 的定义域为 P, 陪域为 Q.

定义 4.13 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 R 到 S 的函数集, 且任取 A 的元 a, a 的值域是 R 的子集. 于是, 任取 B 的元 b, $b \circ a$: $P \to S$ 有意义. 定义

$$B \circ A = \{b \circ a \mid b \in B, a \in A\}.$$

不难看出, $B \circ A$ 就是 P 到 S 的函数集.

函数集的复合也有结合律.

定理 4.14 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 R 到 S 的函数集, C 是 T 到 U 的函数集. 设任取 A 的元 a, a 的值域是 R 的子集; 设任取 B 的元 b, b 的

值域是 S 的子集. 则

$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $C \circ B \circ A$.

此事的论证不难; 不过, 我希望您能适应这种论证方式; 这样, 您就完全可类似地论证其他的关于函数集的运算律.

证 取 $f \in C \circ (B \circ A)$. 于是, 存在 $a \in A, b \in B, c \in C$ 使 $f = c \circ (b \circ a)$. 因为函数的复合适合结合律, 故

$$f = c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a \in (C \circ B) \circ A.$$

再取 $g \in (C \circ B) \circ A$. 于是, 存在 $a' \in A, b' \in B, c' \in C$ 使 $g = (c' \circ b') \circ a'$. 因为函数的复合适合结合律, 故

$$g = (c' \circ b') \circ a' = c' \circ (b' \circ a') \in C \circ (B \circ A).$$ 证毕.

就像为函数集引入复合那样, 对 $\mathbb{R}$ 的子集到 $\mathbb{R}$ 的子集的函数集, 我们还可引入 $+, -, \cdot, /, ^\wedge$ 等运算.

定义 4.15 设 P, Q, S 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 P 到 S 的函数集. 设 $*$ 为三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中 $A * B$ 的陪域可按需要决定. 一般地, 我们可写 $\{0\} - B$ 为 $-B$, 写 $A \cdot B$ 为 AB.

若任取函数集 A 的元 a, 任取 $p \in P$, 都有 $a[p] \neq 0$, 则定义

$$\frac{B}{A} = \left\{ \frac{b}{a} \,\middle|\, b \in B, a \in A \right\},$$

其中陪域可按需要决定.

若对任意 $a \in A, b \in B, p \in P$, $a[p]^{b[p]}$ 有意义, 则还可定义

$$A^B = \{a^b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中陪域可按需要决定.

现在, 我邀请您证明函数集的如下性质. 我就不证明了; 因为我想, 我已经告诉您怎么论证了.

定理 4.16 设 P 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 A, B, C 都是 P 到 (某个) $\mathbb{R}$ 的子集的函数集. 则

$$\begin{aligned} A+B&=B+A, & AB&=BA, \\ (A+B)+C&=A+(B+C), & (AB)C&=A(BC). \end{aligned}$$

尽管函数集跟函数有类似的运算律, 不过, 这并不是说, 函数的每一个运算律都可被搬到函数集上.

例 4.17 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 0 是 P 上的恒取零值的函数. 那么, 不难看出, 对任意 $p \in P$:

- $p+0=p$;
- 存在 P 上的函数 q, 使 $p+q=0$ (取 q 为 $-p$ 即可).

由此, 我们不难推出: 若 $p, q, r \in P$, 且 $q+p=r+p$, 则 $q=r$; 在等式二侧同时加 $-p$, 利用结合律, 再利用 0 的性质即知. 我们姑且称这个性质为函数的加法的消去律.

函数集的加法也有消去律吗? 一般来说, 没有. 取 $A=\{1\}$; 取 B, C 为

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \cdots\},$$

这里的 $0, 1, -1, \cdots$ 都是 P 上的常函数. 那么, 不难验证, $A+C=B+C=C$. 可是, $A \neq B$.

例 4.18 设 P 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 A, B, C 都是 P 到 (某个) $\mathbb{R}$ 的子集的函数集. 那么 $A(B+C)$ 跟 $AB+AC$ **不一定**相等. 事实上, 任取 $f \in A(B+C)$, 的确存在 $a \in A, b \in B, c \in C$ 使 $f=a(b+c)=ab+ac$, 故 $f \in AB+AC$. 可是, 任取 $g \in AB+AC$, 我们只能说存在 $a, a' \in A, b \in B, c \in C$ 使 $g=ab+a'c$. 注意, 这里的 a 跟 a' 不一定相等, 故我们不能说它一定是 $A(B+C)$ 的元.

例 4.19 设 P 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 任取函数集 L 的元 ℓ, ℓ 的值域都是 P 的子集. 设 A, B 是 P 上的函数集. 设 $*$ 是五文字 +, −, ·, /, ^ 的任意一个. 则 $(A*B)\circ L$ 与 $(A\circ L)*(B\circ L)$ **不一定**相等.

现在我们考虑一类特殊的函数集; 这也是不定积分的演算重点考察的对象.

我们先为一种特殊的函数集引入方便的记号.

设 $P \subset \mathbb{R}$. 考虑 P 上的函数. 任取实数 c, 我们总可以作一个 P 上的常函数

$$\begin{aligned} c\colon \quad P &\to \{c\}, \\ t &\mapsto c. \end{aligned}$$

反过来, 任取 P 上的一个 (实的) 常函数 f, 我们也总能找到一个实数 c, 使任取 $t \in P$, 都有 $f[t] = c$. 并且, 不同的实数 (常函数) 对应着不同的常函数 (实数). 我们记全体实数作成的集为 $\mathbb{R}$; 所以, 我们也无妨记全体 P 上的 (实的) 常函数作成的集为 $\mathbb{R}_P$. 我们曾说, 除非有必要, 我们不严格区分函数及其限制; 也就是说, 在语境明确的时候, 我们也可写 $\mathbb{R}_P$ 为 $\mathbb{R}$.

下面的几条性质十分重要.

定理 4.20 设 $\mathbb{R}_P$ 为 P 上的全体常函数作成的集. 则 $\mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.

证 任取 $f \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$. 那么, 存在 $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_P$, 使 $f = f_1 + f_2$. 因为二个常函数的和还是常函数, 故 $f \in \mathbb{R}_P$. 反过来, 任取 $g \in \mathbb{R}_P$. 因为 $g = g + 0$, 且 $0 \in \mathbb{R}_P$, 故 $g \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$. 证毕.

定理 4.21 设 $\mathbb{R}_P$ 为 P 上的全体常函数作成的集.

- 若 $d \in \mathbb{R}_P$, 则 $\{d\} + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.
- 若 $k \in \mathbb{R}_P$, 且 $k \neq 0$, 则 $\{k\} \cdot \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.

证 我在此处论证关于加的等式. 任取 $f \in \{d\} + \mathbb{R}_P$. 那么, 存在 $e \in \mathbb{R}_P$ 使 $f = d + e$. 因为二个常函数的和还是常函数, 故 $f \in \mathbb{R}_P$. 反过来, 任取 $g \in \mathbb{R}_P$. 因为 $g = d + (g - d)$, 且 $g - d \in \mathbb{R}_P$, 故 $g \in \{d\} + \mathbb{R}_P$.

论证关于乘的等式的方法是类似的. 不过, 要注意一些细节. $k \neq 0$ 的意思是 k 跟 0 作为**函数**不相等; 所以, 是**存在** $p \in P$, 使 $k[p] \neq 0[p]$. 不过, 因为 k 跟 0 都是**常函数**, 故 $k \neq 0$ (实数的不相等). 所以 k 有倒数 k^{-1}, 且 k^{-1} 也是常函数. 证毕.

定理 4.22　设 C 为 P 上的函数集, 且其元都是常函数. 设函数集 A 的每一个函数的值域都是 P 的子集. 则 $C \circ A = C$.

证　注意到对任意 $a \in A$, $k \in C$, 必有 $k \circ a = k$. 证毕.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = \{F\} + \mathbb{R}.$$

您可能会觉得写 $\{F\}$ 较繁. 所以, 我们再简化一下记号.

例 4.23　我假定您学过高中算学里的立体几何.

在高中, 您一开始就学了集与集的关系、运算. 自然地, 我们视平面为**点集** (每一个元都是点的集), 也视直线为**点集**. 那么, 点 P 在直线 ℓ 上, 就是 $P \in \ell$; 点 P 不在直线 ℓ 上, 就是 $P \notin \ell$. 类似地, 点 P 在平面 Π 内, 就是 $P \in \Pi$; 点 P 不在平面 Π 内, 就是 $P \notin \Pi$.

现在, 我们任取一个平面 Π 与一条直线 ℓ. 您也知道, 下面的三事, 有且只有一件能发生:

- ℓ 上的每一个点都是 Π 的点. 我们可简单地记此事为 $\ell \subset \Pi$.
- ℓ 上的每一个点都不是 Π 的点. 我们说, $\ell \cap \Pi$ 是空集.
- 存在唯一的一点 P, 使 $P \in \ell$, 且 $P \in \Pi$. 高中算学会这么写: $\ell \cap \Pi = P$.

Well. 正如您所见, 按道理, 我们应当写 $\ell \cap \Pi = \{P\}$; 毕竟, 我们说, 平面跟直线都是**点集**. 可是, 我们省略了 $\{\ \}$. 也就是说, 我们简单地写刚好有一个元的集 $\{a\}$ 为 a. 不重要地, 高中算学一开始讲集时, 用 $A \subseteq B$ 表达 “A 是 B 的子集”, 用 $A \subsetneqq B$ 表达 “A 是 B 的真子集”; where are you, $\subset$?

当然了, 也不是每个高中算学老师都是 “盲人”. 假如您对此事感兴趣, 您可以参考阮龙培的《关于立体几何应用集合论符号的几点看法》与吴长庆的《立体几何使用 “集合语言” 的准确性》. 我承认, 这些文章都比我老.

借此机会, 我说一说我的观点吧. 我的有限的知识告诉我, 土话跟胡话都有不少多义词. 这里, “多义” 并不是指有 “很大的区别” 的解释, 而是说这些含义 “相似”, 但又不完全一样 (我加了引号, 因为我不知道怎么用行

话表达我的想法). 就以 “曲线” (胡话: curve) 为例吧. 在中学, 我们一般视曲线为点集. 所以, 我们说, (平面的) 曲线有隐方程 $F[x, y] = 0$, 也有参数方程 $x = f[t]$, $y = g[t]$, $t \in A$ (A 就是所谓的 “参数区间”). 这么看来, 曲线就是全体适合隐方程 (或参数方程) 的 (x, y) 作成的集. 在算学分析 (或高等算学) 里, 您可能也学过怎么用积分算曲线的长. 这个时候, 曲线的方程可能更重要; 这是因为, 曲线的 “几何性质” 似乎对曲线的长的公式的推导没有帮助. 我们计算曲线的长时, 一般都要求 “曲线的参数方程” 的导数连续——这其实涉及方程的分析性质了. (假如您对此事感兴趣, 您可以参考美国算学家 Walter Rudin 的教材 *Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed*.)

目前, 算学家都是人; 不过, 人类, 似乎生来就想着偷懒. 所以说, 算学家也不例外. 算学家一方面追求严谨; 另一方面, 假如记号不是很简洁, 算学家自己写起来都费劲. 所以, 算学家会说: “在本书 (或本文、本节、本章), 为方便, 我们约定文字 (表达式、符号) ××× 表示⋯⋯” 不过, 我觉得, 可以先给出 “稍繁琐的写法”, 再给 “简单的写法”; 这或许能让学生体会到简单的写法为什么方便. 可惜, 我看了好几本新的高中算学书, 都是一开始用 $\subseteq$ 表子集, 而在立体几何里 “借用” $\subset$ 表直线的每一点都在平面内; 没有一本 (高中算学) 教材说 “为方便, 我们用 $\subset$ 表子集, 并省去刚好有一个元的集 $\{a\}$ 外的花括号”.

好了, 我就说这么多吧. 严格地, 这算是 “私货” 了; 可是, 这是一本告诉他人我 (与一些算学家) 的想法的微积分读物. 假如我不带 “私货”, 那我要带什么呢? 或许, 我不如不写这本书.

现在, 请允许我正式地作出这样的约定: 在不引起混淆时, 我们可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 a. 所以, 像 $a \in a$, $a \subset \{a\}$ 的表达都是可被接受的.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = F + \mathbb{R}.$$

代 f 以 $\mathrm{D}F$, 就有

$$\int \mathrm{D}F = F + \mathbb{R}.$$

不严格地, 若忽视常函数, 那么不定积分 “抵消了” 导数. 反过来呢?

定义 4.24 设 I 是区间. 设 A 是 I 上的函数集, 且 A 的每个元都是可导函数. 我们说, A 是 I 上的**可导函数集**. 定义

$$\mathrm{D}[A] = \{\mathrm{D}a \mid a \in A\}.$$

有时, 我们也可简单地写 $\mathrm{D}[A]$ 为 $\mathrm{D}A$.

例 4.25 不难看出, $\mathrm{D}\mathbb{R} = \{0\} = 0$.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\left[\int f\right] &= \mathrm{D}[\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}] \\
&= \{\mathrm{D}[F + c] \mid c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{f \mid c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{f\} = f.
\end{aligned}$$

所以, 不严格地, 我们也可以说, 导数 “抵消了” 不定积分.

定义 4.26 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 A 为 P 上的函数集. 若存在 $a \in A$ 使 $P = \{a\} + \mathbb{R} = a + \mathbb{R}$, 就说 A 是 P 上的**至多相差常函数的函数集**.

注 4.27 或许这样的函数集有更好的名字; 不过, 我姑且这么叫吧.

定理 4.28 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 f 是 P 上的函数.

- 若 g 是 P 上的函数, 则

$$(f + \mathbb{R}) + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

- 若 g 是 P 上的函数, 则

$$f + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

  特别地, 取 g 为常函数 c, 则

$$f + \mathbb{R} = f + (c + \mathbb{R}) = (f + c) + \mathbb{R}.$$

- 若 $k \in \mathbb{R}$, 且 $k \neq 0$, 则

$$k(f + \mathbb{R}) = kf + \mathbb{R}.$$

- 若函数 h 的值域是 P 的子集, 则

$$(f+\mathbb{R})\circ h = f\circ h+\mathbb{R}.$$

证 利用函数集的运算律与 $\mathbb{R}$ 的性质, 有

$$\begin{aligned}(f+\mathbb{R})+(g+\mathbb{R}) &= (\{f\}+\mathbb{R})+(\{g\}+\mathbb{R})\\ &= ((\{f\}+\mathbb{R})+\{g\})+\mathbb{R}\\ &= (\{f\}+(\mathbb{R}+\{g\}))+\mathbb{R}\\ &= (\{f\}+(\{g\}+\mathbb{R}))+\mathbb{R}\\ &= ((\{f\}+\{g\})+\mathbb{R})+\mathbb{R}\\ &= (\{f+g\}+\mathbb{R})+\mathbb{R}\\ &= \{f+g\}+(\mathbb{R}+\mathbb{R})\\ &= (f+g)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}f+(g+\mathbb{R}) &= \{f\}+(\{g\}+\mathbb{R})\\ &= (\{f\}+\{g\})+\mathbb{R}\\ &= (f+g)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

取 $f_1\in k(f+\mathbb{R})$. 那么, 存在 $c\in\mathbb{R}$ 使 $f_1=k(f+c)=kf+kc\in kf+\mathbb{R}$. 取 $f_2\in kf+\mathbb{R}$. 那么, 存在 $d\in\mathbb{R}$ 使 $f_2=kf+d$. 因为 $k\neq 0$, 故 $f_2=kf+kk^{-1}d=k(f+k^{-1}d)\in k(f+\mathbb{R})$.

最后一个更容易了. 取 $f_1\in(f+\mathbb{R})\circ h$. 那么, 存在 $c\in\mathbb{R}$ 使 $f_1=(f+c)\circ h=f\circ h+c\circ h=f\circ h+c\in f\circ h+\mathbb{R}$. 取 $f_2\in f\circ h+\mathbb{R}$. 那么, 存在 d 使 $f_2=f\circ h+d$. 因为 $d=d\circ h$, 故 $f_2=(f+d)\circ h\in(f+\mathbb{R})\circ h$. 证毕.

4.3 不定积分的演算

现在, 我们研究怎么算不定积分.

定理 4.29 设 I 是区间. 设 F 是 I 上的可导函数. 则

$$\int \mathrm{D}F = F+\mathbb{R}.$$

证 我已经证过它了. 证毕.

这或许是最基本的计算法了. 一般来说, "简单的" 函数的不定积分都可以这么求出来.

例 4.30 设 I 是某个不含 0 的区间. 求 $\int \iota^{-1}$.
我们知道, $\mathrm{D}[\ln \circ \operatorname{abs}] = \iota^{-1}$. 所以

$$\int \iota^{-1} = \ln \circ \operatorname{abs} + \mathbb{R}.$$

定理 4.31 设 I 是区间. 设 f, g 是 I 上的函数. 设 f, g 都有不定积分.

- $f + g$ 也有不定积分, 且

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

- 设 $k \in \mathbb{R}$, 且 $k \neq 0$. 则 kf 也有不定积分, 且

$$\int kf = k \int f.$$

证 设 F, G 分别是 f, g 的原函数. 那么

$$\int f = F + \mathbb{R}, \quad \int g = G + \mathbb{R}.$$

因为 $\mathrm{D}[F + G] = f + g$, 故

$$\begin{aligned} \int (f + g) &= (F + G) + \mathbb{R} \\ &= (F + \mathbb{R}) + (G + \mathbb{R}) \\ &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

类似地, 因为 $\mathrm{D}[kF] = kf$, 且 $k \neq 0$, 故

$$\int kf = kF + \mathbb{R} = k(F + \mathbb{R}) = k \int f.$$

证毕.

注 4.32 注意到 $\int 0 = \mathbb{R}$. 所以, 对任意 $k \in \mathbb{R}$,

$$\int kf = k \int f + \mathbb{R}.$$

例 4.33　设 A 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 那么, 不难验证, $-A = (-1)A$. 所以, 特别地, 有

$$\begin{aligned}\int (f-g) &= \int (f+(-1)g)\\ &= \int f + \int (-1)g\\ &= \int f + (-1)\int g\\ &= \int f - \int g.\end{aligned}$$

例 4.34

$$\begin{aligned}&\int \cos = \int \mathrm{D}\sin = \sin + \mathbb{R},\\ &\int \sin = \int (-1)\mathrm{D}\cos = (-1)\int \mathrm{D}\cos = -\cos + \mathbb{R},\\ &\int \exp = \int \mathrm{D}\exp = \exp + \mathbb{R},\\ &\int \iota^n = \int \frac{1}{n+1}\mathrm{D}\,\iota^{n+1} = \frac{\iota^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R} \quad (n \neq -1).\end{aligned}$$

例 4.35

$$\begin{aligned}\int (3\cos - 4\sin + 5\exp) &= \int (3\cos - 4\sin) + \int 5\exp\\ &= \int 3\cos - \int 4\sin + \int 5\exp\\ &= 3\int \cos - 4\int \sin + 5\int \exp\\ &= 3(\sin + \mathbb{R}) - 4(-\cos + \mathbb{R}) + 5(\exp + \mathbb{R})\\ &= (3\sin + \mathbb{R}) + (4\cos + \mathbb{R}) + (5\exp + \mathbb{R})\\ &= ((3\sin + 4\cos) + \mathbb{R}) + (5\exp + \mathbb{R})\\ &= 3\sin + 4\cos + 5\exp + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.36

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2} &= \int (1+\tan^2) = \int \mathrm{D}\tan = \tan + \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{1+\iota^2} &= \int \mathrm{D}\arctan = \arctan + \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-\iota^2}} &= \int \mathrm{D}\arcsin = \arcsin + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.37

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 &= \int (1+\tan^2) - 1\\
&= \int (1+\tan^2) - \int 1\\
&= (\tan + \mathbb{R}) - (\iota + \mathbb{R})\\
&= \tan - \iota + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.38

$$\begin{aligned}
\int \frac{\iota^4}{1+\iota^2} &= \int \frac{\iota^4 - 1 + 1}{1+\iota^2}\\
&= \int \left(\iota^2 - 1 + \frac{1}{1+\iota^2}\right)\\
&= \int \iota^2 - \int 1 + \int \frac{1}{1+\iota^2}\\
&= \left(\frac{\iota^3}{3} + \mathbb{R}\right) - (\iota + \mathbb{R}) + (\arctan + \mathbb{R})\\
&= \frac{\iota^3}{3} - \iota + \arctan + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

定理 4.39 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数, 且有不定积分. 设 $f\colon I \to J$ 是可导函数. 则 $(g \circ f)\,\mathrm{D}f$ 也有不定积分, 且

$$\int (g \circ f)\,\mathrm{D}f = \left(\int g\right) \circ f.$$

证 设 G 是 g 的原函数. 则

$$\mathrm{D}[G \circ f] = (\mathrm{D}G \circ f)\,\mathrm{D}f = (g \circ f)\,\mathrm{D}f.$$

从而

$$\begin{aligned}\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f &= G\circ f+\mathbb{R}\\ &= (G+\mathbb{R})\circ f\\ &= \left(\int g\right)\circ f.\end{aligned}$$

证毕.

注 4.40　作为对比, 我们看看怎么用传统的记号表示此事.

设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数, 且有不定积分

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)+C.$$

设 $f\colon I\to J$ 是可导函数. 则 $(g\circ f)\,f'$ 也有不定积分

$$\int g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t = G(f(t))+C.$$

一般称这种计算不定积分的方法为 “第一**换元** (积分) 法”; 不过, 我认为, 可以称其为 “第一**复合** (积分) 法”, 因为 (表面上) 我代 “换元” 以 “复合”. 事实上, 传统的记号跟我在本书用的新记号表达的仍为同一件事. 所谓 “第一换元法” 的本质还是复合与链规则, 只不过, 传统的记号似乎不太允许 “$x=f(x)$” 的写法, 故换一个文字是有必要的.

例 4.41　设 g 有不定积分. 设 $a, b\in\mathbb{R}$, 且 $a\neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int g\circ(a\imath+b) &= \int \frac{1}{a}\,(g\circ(a\imath+b))\,\mathrm{D}[a\imath+b]\\ &= \int\left(\frac{g}{a}\circ(a\imath+b)\right)\mathrm{D}[a\imath+b]\\ &= \left(\int\frac{g}{a}\right)\circ(a\imath+b)\\ &= \left(\frac{1}{a}\int g\right)\circ(a\imath+b).\end{aligned}$$

例 4.42　设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{c}{a\imath + b} &= \left(\frac{1}{a}\int \frac{c}{\imath}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a}\int \frac{1}{\imath} + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a}\ln \circ \operatorname{abs} + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \frac{c}{a}\ln \circ \operatorname{abs} \circ (a\imath + b) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地, 若 $n \neq -1$, 则

$$\begin{aligned}\int c(a\imath + b)^n &= \left(\frac{1}{a}\int c\imath^n\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a}\int \imath^n + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a} \cdot \frac{\imath^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \frac{c(a\imath + b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.43　以后, 若

$$k\int g = kG + \mathbb{R},$$

我们可直接写

$$\left(k\int g\right) \circ f = kG \circ f + \mathbb{R}.$$

例 4.44　利用三角公式, 有

$$\begin{aligned}\int \cos\sin &= \int \frac{1}{2}\sin \circ 2\imath \\ &= \left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\sin\right) \circ 2\imath \\ &= \left(\frac{1}{4}\int \sin\right) \circ 2\imath \\ &= -\frac{1}{4}\cos \circ 2\imath + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

当然, 我们也可以这么解:

$$\begin{aligned}\int \cos\sin &= \int \sin \mathrm{D}\sin \\ &= \left(\int \iota\right)\circ \sin \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.45 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-\iota^2}} &= \int \frac{1/a}{\sqrt{1-(\iota/a)^2}} \\ &= \left(\frac{1}{1/a}\int \frac{1/a}{\sqrt{1-\iota^2}}\right)\circ \frac{\iota}{a} \\ &= \arcsin\circ\frac{\iota}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+\iota^2} &= \int \frac{1/a^2}{1+(\iota/a)^2} \\ &= \left(\frac{1}{1/a}\int \frac{1/a^2}{1+\iota^2}\right)\circ \frac{\iota}{a} \\ &= \frac{1}{a}\arctan\circ\frac{\iota}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.46

$$\begin{aligned}\int \tan &= \int \frac{\sin}{\cos} \\ &= \int \frac{-\mathrm{D}\cos}{\cos} \\ &= \left(\int \frac{-1}{\iota}\right)\circ\cos \\ &= -\ln\circ\operatorname{abs}\circ\cos + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.47

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos}{\sin} &= \int \frac{\mathrm{D}\sin}{\sin} \\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\sin + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.48 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\iota^2 - a^2} &= \int \frac{1}{(\iota - a)(\iota + a)} \\
&= \int \frac{(\iota + a) - (\iota - a)}{2a(\iota - a)(\iota + a)} \\
&= \int \left(\frac{1}{2a(\iota - a)} - \frac{1}{2a(\iota + a)} \right) \\
&= \int \frac{1}{2a(\iota - a)} - \int \frac{1}{2a(\iota + a)} \\
&= \left(\int \frac{1}{2a\iota} \right) \circ (\iota - a) - \left(\int \frac{1}{2a\iota} \right) \circ (\iota + a) \\
&= \frac{1}{2a} \ln \circ \operatorname{abs} \circ (\iota - a) - \frac{1}{2a} \ln \circ \operatorname{abs} \circ (\iota + a) + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{\operatorname{abs} \circ (\iota - a)}{\operatorname{abs} \circ (\iota + a)} \right] + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2a} \ln \circ \operatorname{abs} \circ \frac{\iota - a}{\iota + a} + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.49

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos} &= \int \frac{\cos}{\cos^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{D} \sin}{1 - \sin^2} \\
&= \left(\int \frac{1}{1 - \iota^2} \right) \circ \sin \\
&= -\frac{1}{2 \cdot 1} \ln \circ \operatorname{abs} \circ \frac{\iota - 1}{\iota + 1} \circ \sin + \mathbb{R} \\
&= -\frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 + \sin} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \sin}{1 - \sin} + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.50

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin} &= \int \frac{1}{\cos \circ (2\pi/4 - \iota)} \\
&= \left(\frac{1}{-1} \int \frac{1}{\cos} \right) \circ \left(\frac{2\pi}{4} - \iota \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1-\sin}{1+\sin}\circ\left(\frac{2\pi}{4}-\iota\right)+\mathbb{R}\\
&= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1-\cos}{1+\cos}+\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

定理 4.51 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数. 设 $f\colon I\to J$ 是严单调的可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值. 若 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 有不定积分, **则 g 也有不定积分**, 且

$$\int g = \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ f^{[-1]}.$$

证 因为 $f\colon I\to J$ 是严单调的可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值, 故 $f^{[-1]}$ 也是严单调的可导函数. 设 G 是 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 的一个原函数. 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}[G\circ f^{[-1]}] &= (\mathrm{D}G\circ f^{[-1]})\,\mathrm{D}f^{[-1]}\\
&= ((g\circ f)\circ f^{[-1]})\cdot(\mathrm{D}f\circ f^{[-1]})\cdot\frac{1}{\mathrm{D}f\circ f^{[-1]}}\\
&= (g\circ(f\circ f^{[-1]}))\cdot 1\\
&= g\circ\iota = g.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\int g &= G\circ f^{[-1]}+\mathbb{R}\\
&= (G+\mathbb{R})\circ f^{[-1]}\\
&= \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ f^{[-1]}.
\end{aligned}
$$

证毕.

上述结论有一个变体; 请您仔细比较二者的细微区别.

定理 4.52 设 I, J 为区间. **设 J 上的函数 g 有不定积分.** 设 $f\colon I\to J$ 可导. 设 $e\colon J\to I$ 适合 $f\circ e=\iota$. 则

$$\int g = \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ e.$$

证 因为 J 上的函数 g 有不定积分, 且 $f\colon I\to J$ 是 I 上的可导函数, 故 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 有不定积分, 且

$$\left(\int g\right)\circ f = \int (g\circ f)\,\mathrm{D}f.$$

从而

$$\begin{aligned}\int g &= \left(\int g\right)\circ\{\iota\}\\ &= \left(\int g\right)\circ\{f\circ e\}\\ &= \left(\int g\right)\circ(\{f\}\circ\{e\})\\ &= \left(\left(\int g\right)\circ f\right)\circ\{e\}\\ &= \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ e.\end{aligned}$$

证毕.

例 4.53 设 $a\in\mathbb{R}$, 且 $a>0$. 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+\iota^2}}.$$

记 $g=\sqrt{a^2+\iota^2}\colon \mathbb{R}\to[a,+\infty)$. 不难看出, 求解 $\int g^{-1}$ 的最大障碍就是 sqrt (它一定存在, 因为 g^{-1} 是连续函数). 所以, 我们想一个办法消去根号. 什么东西跟 g 的复合可以不带 sqrt 呢? 联想到三角恒等式 $1+\tan^2=\cos^{-2}$, 故我们可考虑令 $f=a\tan\colon(-2\pi/4,2\pi/4)\to\mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}(g^{-1}\circ f)\,\mathrm{D}f &= \frac{a(1+\tan^2)}{\sqrt{a^2+a^2\tan^2}}\\ &= \sqrt{1+\tan^2}\\ &= \frac{1}{\cos}.\end{aligned}$$

接下来就是要找一个 $e\colon\mathbb{R}\to(-2\pi/4,2\pi/4)$, 使 $f\circ e=\iota$. 事实上, 这样的 e 并不难找, 因为

$$\begin{aligned}f^{[-1]} &= (a\iota\circ\tan)^{[-1]}\\ &= \tan^{[-1]}\circ(a\iota)^{[-1]}\\ &= \arctan\circ\frac{\iota}{a},\end{aligned}$$

故我们取 e 为 f 的反函数, 即有 $f \circ e = \imath$. 故

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+\imath^2}} &= \left(\int \frac{1}{\cos}\right) \circ \left(\arctan \circ \frac{\imath}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{1+\sin}{1-\sin} \circ \left(\arctan \circ \frac{\imath}{a}\right) + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{1+\imath}{1-\imath} \circ (\sin \circ \arctan) \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \left(\frac{1+\imath}{1-\imath} \circ \frac{\imath}{\sqrt{1+\imath^2}}\right) \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{\sqrt{1+\imath^2}+\imath}{\sqrt{1+\imath^2}-\imath} \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{\left(\sqrt{1+\imath^2}+\imath\right)^2}{\left(\sqrt{1+\imath^2}-\imath\right)\left(\sqrt{1+\imath^2}+\imath\right)} \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln \circ \imath^2\right) \circ \left(\imath + \sqrt{1+\imath^2}\right) \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \mathrm{abs} \circ \left(\imath + \sqrt{1+\imath^2}\right) \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\imath + \sqrt{1+\imath^2}\right) \circ \frac{\imath}{a} + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\frac{\imath + \sqrt{a^2+\imath^2}}{a}\right) + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\imath + \sqrt{a^2+\imath^2}\right) - \ln[a] + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\imath + \sqrt{a^2+\imath^2}\right) + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.54 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{\imath^2 - a^2}}.$$

我们先设 $g = \mathrm{sqrt}^{-1} \circ (\imath^2 - a^2)\colon (a, +\infty) \to (0, +\infty)$. 假如我们算出 g 的不定积分是 $G + \mathbb{R}$, 那么我们可以由此立得 $h = \mathrm{sqrt}^{-1} \circ (\imath^2 - a^2)\colon (-\infty, a) \to (0, +\infty)$ 的不定积分. 这是因为

$$h = g \circ (-\imath),$$

故

$$\begin{aligned}\int h &= \left(\frac{1}{-1}\int g\right)\circ(-\iota)\\ &= -G\circ(-\iota)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

对于 g, 我们考虑 $f = a/\iota\colon (a,+\infty)\to(0,1)$. 不难看出, $f\circ f=\iota$, 故

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{\iota^2-a^2}} &= \left(\int\frac{\mathrm{D}f}{\sqrt{f^2-a^2}}\right)\circ f\\ &= \left(\int\frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}}\right)\circ\frac{a}{\iota}.\end{aligned}$$

现在, 我们想办法计算

$$\int\frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}}.$$

因为 $\sin\colon (0,2\pi/4)\to(0,1)$ 可导, 且 $\sin\circ\arcsin=\iota$, 故

$$\begin{aligned}\int\frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}} &= \left(\int\frac{-\mathrm{D}\sin}{\sin\cos}\right)\circ\arcsin\\ &= \left(\int\frac{-1}{\sin}\right)\circ\arcsin\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1+\iota}{1-\iota}\circ(\cos\circ\arcsin)+\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1+\iota}{1-\iota}\circ\sqrt{1-\iota^2}+\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{1-\sqrt{1-\iota^2}}+\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{\left(1+\sqrt{1-\iota^2}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\iota^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\iota^2}\right)}+\mathbb{R}\\ &= \left(\frac{1}{2}\ln\circ\iota^2\right)\circ\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{\iota}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{\iota}+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\imath^2-a^2}} &= \left(\int \frac{-1}{\imath\sqrt{1-\imath^2}}\right)\circ\frac{a}{\imath}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\left(\frac{1+\sqrt{1-\imath^2}}{\imath}\circ\frac{a}{\imath}\right)+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

这算出了 $g=\operatorname{sqrt}^{-1}\circ(\imath^2-a^2)\colon (a,+\infty)\to(0,+\infty)$ 的不定积分. 由此可知 $h=\operatorname{sqrt}^{-1}\circ(\imath^2-a^2)\colon(-\infty,-a)\to(0,+\infty)$ 的不定积分是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{\imath^2-a^2}} &= -\ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}}{a}\circ(-\imath)+\mathbb{R}\\ &= -\ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{-\imath+\sqrt{(-\imath)^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{a}{-\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{a\left(\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}\right)}{\left(-\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}\right)\left(\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}\right)}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}}{-a}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

综上, 若区间 J 不包含 $[-a,a]$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{\imath^2-a^2}} &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\left(\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}\right)-\ln[|a|]+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\left(\imath+\sqrt{\imath^2-a^2}\right)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.55 设 $a\in\mathbb{R}$, 且 $a>0$. 则

$$\int\frac{1}{\sqrt{\imath^2\pm a^2}}=\ln\circ\operatorname{abs}\circ\left(\imath+\sqrt{\imath^2\pm a^2}\right)+\mathbb{R}.$$

我再介绍一个解不定积分的法则.

定理 4.56 设 I 为区间, f, g 都是 I 上的可导函数. 若 $g\mathrm{D}f$ 有不定积分, 则 $f\mathrm{D}g$ 也有不定积分, 且

$$\int f\mathrm{D}g = fg - \int g\mathrm{D}f.$$

证 设 H 是 $g\mathrm{D}f$ 的一个原函数. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{D}[fg - H] &= \mathrm{D}f \cdot g + f \cdot \mathrm{D}g - \mathrm{D}H \\ &= g\mathrm{D}f + f\mathrm{D}g - g\mathrm{D}f \\ &= f\mathrm{D}g.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int f\mathrm{D}g &= (fg - H) + \mathbb{R} \\ &= fg - (H + \mathbb{R}) \\ &= fg - \int g\mathrm{D}f.\end{aligned}$$

证毕.

例 4.57 设整数 $m \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \iota^{m-1}\ln &= \int \ln \mathrm{D}\,\frac{\iota^m}{m} \\ &= \ln\frac{\iota^m}{m} - \int \frac{\iota^m}{m}\,\mathrm{D}\ln \\ &= \frac{\iota^m \ln}{m} - \int \frac{\iota^{m-1}}{m} \\ &= \frac{\iota^m}{m^2}(m\ln - 1) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.58

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln}{\iota} &= \int \ln \mathrm{D}\ln \\ &= \left(\int \iota\right) \circ \ln \\ &= \frac{1}{2}\ln^2 + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.59 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是严单调的可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值. 所以, $f^{[-1]}$ 也是严单调的可导函数. 从而

$$\begin{aligned}\int f^{[-1]} &= \int f^{[-1]}\,\mathrm{D}\,\iota \\ &= f^{[-1]}\,\iota - \int \iota\,\mathrm{D}f^{[-1]} \\ &= \iota f^{[-1]} - \int (f\circ f^{[-1]})\,\mathrm{D}f^{[-1]} \\ &= \iota f^{[-1]} - \left(\int f\right)\circ f^{[-1]}.\end{aligned}$$

例 4.60 我们可轻松地求解 arcsin 的不定积分:

$$\begin{aligned}\int \arcsin &= \iota\arcsin - \left(\int \sin\right)\circ\arcsin \\ &= \iota\arcsin + \cos\circ\arcsin + \mathbb{R} \\ &= \iota\arcsin + \mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \arctan &= \iota\arctan - \left(\int \tan\right)\circ\arctan \\ &= \iota\arctan - \ln\circ\mathrm{abs}\circ\cos\circ\arctan + \mathbb{R} \\ &= \iota\arctan + \ln\circ\mathrm{abs}\circ\mathrm{sqrt}^{-1}\circ(1+\iota^2) + \mathbb{R} \\ &= \iota\arctan + \ln\circ\mathrm{sqrt}^{-1}\circ(1+\iota^2) + \mathbb{R} \\ &= \iota\arctan - \ln\circ\mathrm{sqrt}\circ(1+\iota^2) + \mathbb{R} \\ &= \iota\arctan - \frac{1}{2}\ln\circ(1+\iota^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

原则上, 我还可以再举一些例; 不过, 我感觉, 学而不思则罔, 思而不学则殆. 再者, 我假定您学过微积分, 所以您可以自行找高等算学 (或算学分析) 教材上的问题练习. 当然, 请试用我在本书讲的 “无变量不定积分法”.

第五章　积分

本章讨论如何**计算**积分; 这里的 “积分” 是 “定积分”, 虽然我觉得 “定” 有些多馀.

我暂且用一会儿传统的记号, 告诉您我在本章会写什么东西吧.

具体地, 设 f 是区间 I 上的连续函数, 且 $a, b \in I$. 积分论告诉我们, f 在 $[a, b]$ 上的积分 (或者, f 在 $[b, a]$ 上的积分的相反数)

$$\alpha = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在. 所以, 我们可以专心地思考怎么算出结果 (而不必担心结果是否存在); 本章就告诉您一些计算积分的方法.

当然, 我还是会使用

$$\int_a^b f$$

表示 α; 毕竟, 这是本书的一个大主题.

5.1　不定积分与积分

我们在上一章 “乘热打铁地” 证明了当时没用到的定理:

定理 4.10 (Newton-Leibniz)　设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

原则上, 我们可以用这个定理计算很多积分了.

例 5.1 因为 cos 的一个原函数是 sin, 故

$$\int_0^{2\pi/4}\cos=\sin[2\pi/4]-\sin[0]=1.$$

例 5.2 因为 exp 的一个原函数是 exp, 故

$$\int_0^1\exp=\exp[1]-\exp[0]=\mathrm{e}-1.$$

例 5.3 因为 $1/(1+\iota^2)$ 的一个原函数是 arctan, 故

$$\int_{-1}^1\frac{1}{1+\iota^2}=\arctan[1]-\arctan[-1]=\frac{2\pi}{4}.$$

不过, 我们不妨先探索不定积分跟积分的联系. 在建立一定的联系后, 我们可以更有条理地算积分.

定理 4.10 是 Newton-Leibniz 公式的一个经典说法; 它描述了**原函数**与**积分**的关系. 自然地, 就有这样的问题: 有没有**直接**描述**不定积分**跟**积分**的关系的说法呢?

姑且从传统的记号说起. 或许, 您还能想起来, 用传统的记号, 可写上述三个积分的计算为

$$\int_0^{2\pi/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{2\pi/4}=1,$$
$$\int_0^1\exp x\,\mathrm{d}x=\exp x\Big|_0^1=\mathrm{e}-1,$$
$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^1=\frac{2\pi}{4}.$$

这里, $\exp x\Big|_0^1$ 就是 $\exp 1-\exp 0$ (或者, 按本书的记号, $\exp[1]-\exp[0]$) 的省略. 所以, 我们也可定义一个类似的记号.

定义 5.4 设 f 是 $P\subset\mathbb{R}$ 上的函数. 设 $a, b\in P$. 定义

$$\big[f\big]_a^b=f[b]-f[a].$$

姑且称其为 “bracket 运算” (土话: 方括号运算).

传统的记号在函数 $f(x)$ (这里, 为对照, 使用经典的函数记号) 的右侧画单条长竖线; 为清晰起见, 我用一对方括号包围函数 f. 毕竟, 形如

$$1 + f(x)\Big|_a^b$$

的文字是有歧义的: 这是 $1 + (f(b) - f(a))$ 还是 $(1 + f(b)) - (1 + f(a))$ 呢?

定理 5.5 设 f, g 都是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数. 设 $a, b \in P$. Bracket 运算适合如下性质:

- 二个函数的和的 bracket 等于二个函数的 bracket 的和, 即
$$\left[f + g\right]_a^b = \left[f\right]_a^b + \left[g\right]_a^b.$$
- 设 k 为 P 上的常函数. 则
$$\left[k\right]_a^b = 0.$$
- 设 k 为 P 上的常函数. 则
$$\left[kf\right]_a^b = k \cdot \left[f\right]_a^b.$$
- 设 $Q \subset \mathbb{R}$ 上的函数 h 的值域是 P 的子集. 设 $c, d \in Q$. 则
$$\left[f \circ h\right]_c^d = \left[f\right]_{h[c]}^{h[d]}.$$

证 按定义论证这四条即可.

$[f+g]_a^b$, 按定义, 就是 $(f+g)[b]-(f+g)[a]$. 不过, 我们知道, $(f+g)[b] = f[b] + g[b]$; 类似地, $(f + g)[a] = f[a] + g[a]$. 所以, 二者的差就是

$$(f[b] + g[b]) - (f[a] + g[a]) = (f[b] - f[a]) + (g[b] - g[a]) = \left[f\right]_a^b + \left[g\right]_a^b.$$

$[k]_a^b$, 按定义, 就是 $k[b] - k[a]$. 可是, $k[b] = k[a] = k$, 故 $[k]_a^b = 0$.

$[kf]_a^b$, 按定义, 就是 $(kf)[b]-(kf)[a]$. 不过, $(kf)[b] = k[b]\cdot f[b] = k\cdot f[b]$; 类似地, $(kf)[a] = k \cdot f[a]$. 所以

$$k \cdot f[b] - k \cdot f[a] = k \cdot (f[b] - f[a]) = k \cdot \left[f\right]_a^b.$$

最后一个或许是最容易的:

$$\begin{aligned}\left[f\circ h\right]_c^d &= (f\circ h)[d]-(f\circ h)[c]\\ &= f[h[d]]-f[h[c]]\\ &= \left[f\right]_{h[c]}^{h[d]}.\end{aligned}$$

证毕.

利用 bracket 运算, 我们可 "换汤不换药" 地改写 Newton-Leibniz 公式:

定理 5.6 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b\in I$,

$$\int_a^b f=\left[F\right]_a^b.$$

的确, 这个改写只是用 "新鲜的" bracket 运算包装了函数在二点的差. 不过, 这还只是一小步; 我马上就要迈一大步了.

我刚定义了函数的 bracket 运算; 那么函数集有没有 bracket 运算呢?

这问题, 其实是废话: 有就是有, 没有就是没有. 的确, 我刚才只是定义了函数的 bracket 运算, 而没有定义函数集的 bracket 运算. 不过这是大问题吗? 我现在就定义它.

定义 5.7 设 A 是 $P\subset\mathbb{R}$ 上的函数集. 设 $a, b\in P$. 定义

$$\begin{aligned}\left[A\right]_a^b &= \left\{\left[f\right]_a^b \,\middle|\, f\in A\right\}\\ &= \{f[b]-f[a]\mid f\in A\}.\end{aligned}$$

不难看出, bracket 运算变函数集为数集 (实数集的子集). 所以, 为研究函数集的 bracket 运算的性质, 我们要定义数集的运算.

定义 5.8 设 P, Q 为 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$P*Q=\{p*q\mid p\in P, q\in Q\}.$$

老样子, 可写 $P\cdot Q$ 为 PQ, 写 $\{0\}-P$ 为 $-P$.

若 P 的每一个元都不是零, 还可定义

$$\frac{Q}{P} = \left\{ \frac{q}{p} \,\middle|\, q \in Q, p \in P \right\}.$$

若对任意 $p \in P, q \in Q, p^q$ 有意义, 则还可定义

$$P^Q = \{p^q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

不意外地, 我们有如下性质.

定理 5.9 设 P, Q, S 都是 $\mathbb{R}$ 的子集. 则

$$\begin{aligned} &P + Q = Q + P, && PQ = QP, \\ &(P + Q) + S = P + (Q + S), && (PQ)S = P(QS). \end{aligned}$$

由此, 我们就有如下的函数集的 bracket 运算律:

定理 5.10 设 A, B 都是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 设 $a, b \in P$.

- 二个函数集的和的 bracket 等于二个函数集的 bracket 的和, 即

$$\big[A + B\big]_a^b = \big[A\big]_a^b + \big[B\big]_a^b.$$

- 设函数集 C 的每一个元都是 P 上的常函数. 则

$$\big[C\big]_a^b = \{0\}.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$\big[\{k\}A\big]_a^b = \{k\} \cdot \big[A\big]_a^b.$$

- 设 $Q \subset \mathbb{R}$ 上的函数 h 的值域是 P 的子集. 设 $c, d \in Q$. 则

$$\big[A \circ \{h\}\big]_c^d = \big[A\big]_{h[c]}^{h[d]}.$$

证 还是老套路: 相互包含. 由于我已经建立了函数的 bracket 运算律, 所以您的论证应该不会太长. 证毕.

在上一章, 我曾说, 在不引起混淆时, 可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 a. 现在我又要采用这个约定了.

定理 5.11　设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 f 是 P 上的函数. 设 $\mathbb{R}_P$ 是 P 上的所有 (实的) 常函数作成的集 (当然, 也可简单地写其为 $\mathbb{R}$). 设 $a, b \in P$. 则

$$\left[f + \mathbb{R}\right]_a^b = \left[f\right]_a^b.$$

证　直接验证; 不过, 您还是要注意一些细节的.

$$\begin{aligned}
\left[f + \mathbb{R}\right]_a^b &= \left[\{f\} + \mathbb{R}\right]_a^b \\
&= \left[\{f\}\right]_a^b + \left[\mathbb{R}\right]_a^b \\
&= \left[\{f\}\right]_a^b + \{0\} \\
&= \left[\{f\}\right]_a^b \\
&= \left[f\right]_a^b.
\end{aligned}$$

证毕.

下面的命题更直接地焊接了不定积分与积分.

定理 5.12 (Newton-Leibniz)　设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b.$$

注 5.13　严谨地 (但不重要地), 我们应当写

$$\left\{\int_a^b f\right\} = \left[\int f\right]_a^b.$$

证　因为 f 是 I 上的连续函数, 故 f 有一个原函数 F, 且 $\int f = F + \mathbb{R}$. 从而

$$\left[\int f\right]_a^b = \left[F + \mathbb{R}\right]_a^b = \left[F\right]_a^b = \int_a^b f.$$

证毕.

5.2　计算积分

在上一节, 我们得到了新的 Newton-Leibniz 公式:

定理 5.12 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b.$$

这将是本节的重点; 毕竟, 在大多数场合, **具体**计算积分时, 还是要用它.

我们先从积分论**借**三个公式. 它们比 Newton-Leibniz 公式更基础; 或者说, 在论证 Newton-Leibniz 公式时, 我们已经用到它们了.

定理 2.26 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

定理 2.32 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

我们曾建立了不定积分的运算律; 现在, 我们试建立积分的更多的运算律.

先定义一个术语.

定义 5.14 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的可导函数. 若 $\mathrm{D}f$ 还是 I 上的连续函数, 则说 f **连导**.

定理 5.15 设 I, J 为**区间**. 设 g 是 J 上的**连续函数**. 设 $f\colon I \to J$ **连导**. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b (g \circ f)\,\mathrm{D}f = \int_{f[a]}^{f[b]} g.$$

请您注意上述定理的**被强调的词**; 为保证积分有意义 (请注意, 在本书, 我们只讨论**连续函数**的积分论), 我要求函数的性质好一些; 不过, 这并不是很影响实际应用.

证 因为 f 连导, 故 f 跟 $\mathrm{D}f$ 都是连续函数. 因为 g 是连续函数, 故 $h=(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 也是连续函数. 所以, 可用 Newton-Leibniz 公式计算 h 的积分. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b (g\circ f)\,\mathrm{D}f &= \left[\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right]_a^b\\ &= \left[\left(\int g\right)\circ f\right]_a^b\\ &= \left[\int g\right]_{f[a]}^{f[b]}\\ &= \int_{f[a]}^{f[b]} g.\end{aligned}$$

证毕.

我们无妨再看一遍命题的论证. 首先, 我们明确 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 是连续函数, 故可用 Newton-Leibniz 公式计算积分; 然后, 我们用不定积分的运算律转化为 g 的积分 (因为 g 是连续函数).

其实, 在实际的计算中, 我们**并不需要**每一次都变不定积分的 bracket 运算为积分. 一般地, 我们用 Newton-Leibniz 公式算积分. 为书写方便, 我们一般用长竖线 (当然, 在本书, 用 bracket 运算) 代替函数在二点的值的差. 因为本书定义了函数集的 bracket 运算, 故我们可直接变积分为函数集的 bracket. 在方括号内, 就是我们已经熟知的不定积分. 所以, 不定积分与 bracket 运算就能解决大多数积分问题. (当然, Newton-Leibniz 公式也不是万能的.)

例 5.16 我以简单的 $\sin\cos$ 为例吧.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/4}\sin\cos &= \int_0^{2\pi/4}\sin\mathrm{D}\sin = \int_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]}\iota\\ &= \left[\int\iota\right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} = \left[\frac{\iota^2}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若充分利用 bracket 运算的性质, 我们可以这么写:

$$\int_0^{2\pi/4}\sin\cos = \left[\int\sin\cos\right]_0^{2\pi/4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int \sin \mathrm{D} \sin\right]_0^{2\pi/4} = \left[\left(\int \iota\right) \circ \sin\right]_0^{2\pi/4} \\
&= \left[\int \iota\right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} \\
&= \left[\frac{\iota^2}{2} + \mathbb{R}\right]_0^1 = \left[\frac{\iota^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

当然, 因为 $\mathbb{R}$ 的 bracket 为 0, 故计算积分时不必写出来.

定理 5.17 设 I, J 为**区间**. 设 J 上的函数 g **连续**. 设 $f \colon I \to J$ **连导**. 设 $e \colon J \to I$ 适合 $f \circ e = \iota$. 任取 $c, d \in J$. 则

$$
\int_c^d g = \int_{e[c]}^{e[d]} (g \circ f) \mathrm{D} f.
$$

证 注意到 g 与 $(g \circ f)\mathrm{D}f$ 都是连续函数. 所以

$$
\begin{aligned}
\int_c^d g &= \left[\int g\right]_c^d \\
&= \left[\left(\int (g \circ f) \mathrm{D} f\right) \circ e\right]_c^d \\
&= \left[\int (g \circ f) \mathrm{D} f\right]_{e[c]}^{e[d]} \\
&= \int_{e[c]}^{e[d]} (g \circ f) \mathrm{D} f.
\end{aligned}
$$

证毕.

例 5.18 计算

$$
\int_{-1}^{1} \operatorname{sqrt} \circ (1 - \iota^2).
$$

设 $J = [-1, 1]$. 设 $g = \operatorname{sqrt} \circ (1 - \iota^2)$ 为 J 上的函数. 为计算此积分, 我们无妨考虑找一个合适的**区间** I, 与一个 I 到 J 的连导函数 f, 使 $(g \circ f)\mathrm{D}f$ 简单一些; 当然, 还要找一个 J 到 I 的函数 e, 使 $f \circ e = \iota$. 我们无妨取 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$, $f = \sin$. 那么, $\mathrm{D}f = \cos$, 且 $g \circ f = \cos$. 并且, 不难看出,

取 $e = \arcsin$, 即得 $f \circ e = \imath$. 故

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \operatorname{sqrt} \circ (1 - \imath^2) &= \left[\int \operatorname{sqrt} \circ (1 - \imath^2)\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\left(\int (\operatorname{sqrt} \circ (1 - \imath^2) \circ \sin) \mathrm{D} \sin\right) \circ \arcsin\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\int \cos^2\right]_{\arcsin[-1]}^{\arcsin[1]} \\
&= \left[\int \frac{1 + \cos}{2} \circ 2\imath\right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
&= \left[\left(\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos}{2}\right) \circ 2\imath\right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
&= \left[\int \frac{1 + \cos}{4}\right]_{2\imath[-2\pi/4]}^{2\imath[2\pi/4]} \\
&= \left[\frac{\imath + \sin}{4}\right]_{-2\pi/2}^{2\pi/2} \\
&= \frac{2\pi/2 + 0}{4} - \frac{-2\pi/2 + 0}{4} \\
&= \frac{2\pi}{4}.
\end{aligned}$$

定理 5.19 设 I 为**区间**, f, g 都是 I 上的**连导**函数. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b f \mathrm{D} g = [fg]_a^b - \int_a^b g \mathrm{D} f.$$

证 $f\mathrm{D}g$ 与 $g\mathrm{D}f$ 都是连续函数. 从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b f \mathrm{D} g &= \left[\int f \mathrm{D} g\right]_a^b = \left[fg - \int g \mathrm{D} f\right]_a^b \\
&= [fg]_a^b - \left[\int g \mathrm{D} f\right]_a^b = [fg]_a^b - \int_a^b f \mathrm{D} g.
\end{aligned}$$

证毕.

例 5.20 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \sin \exp.$$

注意到 $\mathrm{D}\exp = \exp$. 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/2} \sin\exp &= \int_0^{2\pi/2} \sin \mathrm{D}\exp \\
&= \big[\sin\exp\big]_0^{2\pi/2} - \int_0^{2\pi/2} \exp \mathrm{D}\sin \\
&= 0 - \int_0^{2\pi/2} \cos\exp \\
&= -\int_0^{2\pi/2} \cos \mathrm{D}\exp \\
&= -\big[\cos\exp\big]_0^{2\pi/2} + \int_0^{2\pi/2} \exp \mathrm{D}\cos \\
&= (1 + \exp[2\pi/2]) - \int_0^{2\pi/2} \sin\exp.
\end{aligned}$$

由此可知

$$\int_0^{2\pi/2} \sin\exp = \frac{1 + \exp[2\pi/2]}{2}.$$

最后, 我再讲一个小技巧吧.

定理 5.21 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b f = \int_a^b f \circ (a + b - \imath) = \frac{1}{2}\int_a^b (f + f \circ (a + b - \imath)).$$

证 我们证明前一个等号成立即可; 至于后一个等号, 利用 “二个相等的数的平均数跟其相等” 即可.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f \circ (a + b - \imath) &= \int_a^b -f \circ (a + b - \imath) \cdot (-1) \\
&= \int_a^b (-f \circ (a + b - \imath))\, \mathrm{D}(a + b - \imath) \\
&= \int_{(a+b-\imath)[a]}^{(a+b-\imath)[b]} -f \\
&= -\int_b^a f = \int_a^b f.
\end{aligned}$$

证毕.

例 5.22 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \frac{\imath \sin}{2-\sin^2}.$$

设

$$f = \frac{\imath \sin}{2-\sin^2}.$$

按照以往的经验, 您可能会试着先找 f 的不定积分. 注意, f 甚至可以是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 所以 f 的不定积分**一定存在**. 只不过, 您是否能顺利地写出来, 就是另一个问题. 我承认, 我自己也写不出初等函数 F, 使 $\mathrm{D}F = f$.

既然找原函数不太行, 那就试着用小技巧. 注意到

$$\sin = \sin \circ \left(\frac{2\pi}{2} - \imath\right),$$

故

$$f \circ \left(0 + \frac{2\pi}{2} - \imath\right) = \frac{(2\pi/2 - \imath)\sin}{2-\sin^2}.$$

从而

$$\begin{aligned} g &= f + f \circ \left(0 + \frac{2\pi}{2} - \imath\right) \\ &= \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{2-\sin^2} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{1+(-\cos)^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/2} f &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi/2} g \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} \int_0^{2\pi/2} \frac{\mathrm{D}[-\cos]}{1+(-\cos)^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-\cos[0]}^{-\cos[2\pi/2]} \frac{1}{1+\imath^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{D}\arctan \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{(2\pi)^2}{16}. \end{aligned}$$

附录 A 祝福

注 本章是用来测试排版的.

注 《祝福》是鲁迅创作的短篇小说, 写于 1924 年 2 月 7 日, 最初发表于 1924 年 3 月 25 日出版的上海《东方杂志》半月刊第二十一卷第 6 号上, 后收入小说集《彷徨》.

注 有意思地, 本作的胡话翻译的标题是 *The New Year's Sacrifice*. 毕竟, 周树人先生在这里写的 “祝福” 完全不是 good wishes (见第 2 段的**被强调的文字**).

旧历*的年底毕竟最像年底, 村镇上不必说, 就在天空中也显出将到新年的气象来. 灰白色的沉重的晚云中间时时发出闪光, 接着一声钝响, 是送灶的爆竹; 近处燃放的可就更强烈了, 震耳的大音还没有息, 空气里已经散满了幽微的火药香. 我是正在这一夜回到我的故乡鲁镇的. 虽说故乡, 然而已没有家, 所以只得暂寓在鲁四老爷的宅子里. 他是我的本家, 比我长一辈, 应该称之曰 “四叔”, 是一个讲理学的老监生†. 他比先前并没有甚么大改变, 单是老了些, 但也还未留胡子, 一见面是寒暄, 寒暄之后说我 “胖了”, 说我 “胖了” 之后即大骂其新党. 但我知道, 这并非借题在骂我: 因为他所骂的还是康有为‡. 但是, 谈话是总不投机的了, 于是不多久, 我便一个人剩在书房里.

第二天我起得很迟, 午饭之后, 出去看了几个本家和朋友; 第三天也照样. 他们也都没有甚么大改变, 单是老了些; **家中却一律忙, 都在准备着 “祝福”. 这是鲁镇年终的大典, 致敬尽礼, 迎接福神, 拜求来年一年中的好运气**

*The Chinese lunar calendar.

†The highest institute of learning in the Ching dynasty.

‡A famous reformist who lived from 1858 to 1927 and advocated constitutional monarchy.

的. 杀鸡, 宰鹅, 买猪肉, 用心细细的洗, 女人的臂膊都在水里浸得通红, 有的还带着绞丝银镯子. 煮熟之后, 横七竖八的插些筷子在这类东西上, 可就称为 "福礼" 了, 五更天陈列起来, 并且点上香烛, 恭请福神们来享用, 拜的却只限于男人, 拜完自然仍然是放爆竹. 年年如此, 家家如此, ——只要买得起福礼和爆竹之类的——今年自然也如此. 天色愈阴暗了, 下午竟下起雪来, 雪花大的有梅花那么大, 满天飞舞, 夹着烟霭和忙碌的气色, 将鲁镇乱成一团糟. 我回到四叔的书房里时, 瓦楞上已经雪白, 房里也映得较光明, 极分明的显出壁上挂著的朱拓的大 "寿" 字, 陈抟[*]老祖写的, 一边的对联已经脱落, 松松的卷了放在长桌上, 一边的还在, 道是 "事理通达心气和平". 我又无聊赖的到窗下的案头去一翻, 只见一堆似乎未必完全的《康熙字典》[†], 一部《近思录集注》和一部《四书[‡]衬》. 无论如何, 我明天决计要走了.

况且, 一直到昨天遇见祥林嫂的事, 也就使我不能安住. 那是下午, 我到镇的东头访过一个朋友, 走出来, 就在河边遇见她; 而且见她瞪着的眼睛的视线, 就知道明明是向我走来的. 我这回在鲁镇所见的人们中, 改变之大, 可以说无过于她的了: 五年前的花白的头发, 即今已经全白, 会不像四十上下的人; 脸上瘦削不堪, 黄中带黑, 而且消尽了先前悲哀的神色, 仿佛是木刻似的; 只有那眼珠间或一轮, 还可以表示她是一个活物. 她一手提着竹篮. 内中一个破碗, 空的; 一手拄著一支比她更长的竹竿, 下端开了裂: 她分明已经纯乎是一个乞丐了. 我就站住, 豫备她来讨钱.

"你回来了?" 她先这样问.

"是的."

"这正好. 你是识字的, 又是出门人, 见识得多. 我正要问你一件事——" 她那没有精采的眼睛忽然发光了.

我万料不到她却说出这样的话来, 诧异的站着.

"就是——" 她走近两步, 放低了声音, 极秘密似的切切的说, "一个人死了之后, 究竟有没有魂灵的?"

我很悚然, 一见她的眼钉着我的, 背上也就遭了芒刺一般, 比在学校里遇到不及豫防的临时考, 教师又偏是站在身旁的时候, 惶急得多了. 对于魂灵

---

[*]A hermit at the beginning of the tenth century.

[†]A Chinese dictionary compiled under the auspices of Emperor Kang Hsi who reigned from 1662 to 1722.

[‡]Confucian classics.

的有无, 我自己是向来毫不介意的; 但在此刻, 怎样回答她好呢? 我在极短期的踌躇中, 想, 这里的人照例相信鬼, 然而她, 却疑惑了, ——或者不如说希望: 希望其有, 又希望其无……, 人何必增添末路的人的苦恼, 一为她起见, 不如说有罢.

"也许有罢, ——我想." 我于是吞吞吐吐的说.

"那么, 也就有地狱了?"

"啊! 地狱?" 我很吃惊, 只得支吾著, "地狱? ——论理, 就该也有. ——然而也未必, ……谁来管这等事……."

"那么, 死掉的一家的人, 都能见面的?"

"唉唉, 见面不见面呢? ……" 这时我已知道自己也还是完全一个愚人, 甚么踌躇, 甚么计划, 都挡不住三句问, 我即刻胆怯起来了, 便想全翻过先前的话来, "那是, ……实在, 我说不清……. 其实, 究竟有没有魂灵, 我也说不清."

我乘她不再紧接的问, 迈开步便走, 匆匆的逃回四叔的家中, 心里很觉得不安逸. 自己想, 我这答话怕于她有些危险. 她大约因为在别人的祝福时候, 感到自身的寂寞了, 然而会不会含有别的甚么意思的呢? ——或者是有了甚么豫感了? 倘有别的意思, 又因此发生别的事, 则我的答话委实该负若干的责任……. 但随后也就自笑, 觉得偶尔的事, 本没有甚么深意义, 而我偏要细细推敲, 正无怪教育家要说是生著神经病; 而况明明说过 "说不清", 已经推翻了答话的全局, 即使发生甚么事, 于我也毫无关系了.

"说不清" 是一句极有用的话. 不更事的勇敢的少年, 往往敢于给人解决疑问, 选定医生, 万一结果不佳, 大抵反成了怨府, 然而一用这说不清来作结束, 便事事逍遥自在了. 我在这时, 更感到这一句话的必要, 即使和讨饭的女人说话, 也是万不可省的.

但是我总觉得不安, 过了一夜, 也仍然时时记忆起来, 仿佛怀着甚么不祥的豫感, 在阴沉的雪天里, 在无聊的书房里, 这不安愈加强烈了. 不如走罢, 明天进城去. 福兴楼的清炖鱼翅, 一元一大盘, 价廉物美, 现在不知增价了否? 往日同游的朋友, 虽然已经云散, 然而鱼翅是不可不吃的, 即使只有我一个……. 无论如何, 我明天决计要走了.

我因为常见些但愿不如所料, 以为未毕竟如所料的事, 却每每恰如所料的起来, 所以很恐怕这事也一律. 果然, 特别的情形开始了. 傍晚, 我竟听到

有些人聚在内室里谈话, 仿佛议论甚么事似的, 但不一会, 说话声也就止了, 只有四叔且走而且高声的说:

“不早不迟, 偏偏要在这时候——这就可见是一个谬种!”

我先是诧异, 接着是很不安, 似乎这话于我有关系. 试望门外, 谁也没有. 好容易待到晚饭前他们的短工来冲茶, 我才得了打听消息的机会.

“刚才, 四老爷和谁生气呢?” 我问.

“还不是和祥林嫂?” 那短工简捷的说.

“祥林嫂? 怎么了?” 我又赶紧的问.

“老了.”

“死了?” 我的心突然紧缩, 几乎跳起来, 脸上大约也变了色, 但他始终没有抬头, 所以全不觉. 我也就镇定了自己, 接着问:

“甚么时候死的?”

“甚么时候? ——昨天夜里, 或者就是今天罢. ——我说不清.”

“怎么死的?”

“怎么死的? ——还不是穷死的?” 他淡然的回答, 仍然没有抬头向我看, 出去了.

然而我的惊惶却不过暂时的事, 随着就觉得要来的事, 已经过去, 并不必仰仗我自己的 “说不清” 和他之所谓 “穷死的” 的宽慰, 心地已经渐渐轻松; 不过偶然之间, 还似乎有些负疚. 晚饭摆出来了, 四叔俨然的陪着. 我也还想打听些关于祥林嫂的消息, 但知道他虽然读过 “鬼神者, 二气之良能也”*, 而忌讳仍然极多, 当临近祝福时候, 是万不可提起死亡、疾病之类的话的, 倘不得已, 就该用一种替代的隐语, 可惜我又不知道, 因此屡次想问, 而终于中止了. 我从他俨然的脸色上, 又忽而疑他正以为我不早不迟, 偏要在这时候来打搅他, 也是一个谬种, 便立刻告诉他明天要离开鲁镇, 进城去, 趁早放宽了他的心. 他也不很留. 这样闷闷的吃完了一餐饭.

冬季日短, 又是雪天, 夜色早已笼罩了全市镇. 人们都在灯下匆忙, 但窗外很寂静. 雪花落在积得厚厚的雪褥上面, 听去似乎瑟瑟有声, 使人更加感得沉寂. 我独坐在发出黄光的菜油灯下, 想, 这百无聊赖的祥林嫂, 被人们弃在尘芥堆中的, 看得厌倦了的陈旧的玩物, 先前还将形骸露在尘芥里, 从活得有趣的人们看来, 恐怕要怪讶她何以还要存在, 现在总算被无常打扫得干

*A Confucian saying.

净净了. 魂灵的有无, 我不知道; 然而在现世, 则无聊生者不生, 即使厌见者不见, 为人为己, 也还都不错. 我静听着窗外似乎瑟瑟作响的雪花声, 一面想, 反而渐渐的舒畅起来.

然而先前所见所闻的她的半生事迹的断片, 至此也联成一片了.

她不是鲁镇人. 有一年的冬初, 四叔家里要换女工, 做中人的卫老婆子带她进来了, 头上扎著白头绳, 乌裙, 蓝夹袄, 月白背心, 年纪大约二十六七, 脸色青黄, 但两颊却还是红的. 卫老婆子叫她祥林嫂, 说是自己母家的邻舍, 死了当家人, 所以出来做工了. 四叔皱了皱眉, 四婶已经知道了他的意思, 是在讨厌她是一个寡妇. 但是她模样还周正, 手脚都壮大, 又只是顺着限, 不开一句口, 很像一个安分耐劳的人, 便不管四叔的皱眉, 将她留下了. 试工期内, 她整天的做, 似乎闲著就无聊, 又有力, 简直抵得过一个男子, 所以第三天就定局, 每月工钱五百文.

大家都叫她祥林嫂; 没问她姓甚么, 但中人是卫家山人, 既说是邻居, 那大概也就姓卫了. 她不很爱说话, 别人问了才回答, 答的也不多. 直到十几天之后, 这才陆续的知道她家里还有严厉的婆婆, 一个小叔子, 十多岁, 能打柴了; 她是春天没了丈夫的; 他本来也打柴为生, 比她小十岁*: 大家所知道的就只是这一点.

日子很快的过去了, 她的做工却毫没有懈, 食物不论, 力气是不惜的. 人们都说鲁四老爷家里雇著了女工, 实在比勤快的男人还勤快. 到年底, 扫尘, 洗地, 杀鸡, 宰鹅, 彻夜的煮福礼, 全是一人担当, 竟没有添短工. 然而她反满足, 口角边渐渐的有了笑影, 脸上也白胖了.

新年才过, 她从河边掏米回来时, 忽而失了色, 说刚才远远地看见几个男人在对岸徘徊, 很像夫家的堂伯, 恐怕是正在寻她而来的. 四婶很惊疑, 打听底细, 她又不说. 四叔一知道, 就皱一皱眉, 道:

"这不好. 恐怕她是逃出来的."

她诚然是逃出来的, 不多久, 这推想就证实了.

此后大约十几天, 大家正已渐渐忘却了先前的事, 卫老婆子忽而带了一个三十多岁的女人进来了, 说那是祥林嫂的婆婆. 那女人虽是山里人模样, 然而应酬很从容, 说话也能干, 寒暄之后, 就赔罪, 说她特来叫她的儿媳回家

---

*In old China it used to be common in country districts for young women to be married to boys of ten or eleven. The bride's labour could then be exploited by her husband's family.

去, 因为开春事务忙, 而家中只有老的和小的, 人手不够了.

“既是她的婆婆要她回去, 那有甚么话可说的呢?” 四叔说. 于是算清了工钱, 一共一千七百五十文, 她全存在主人家, 一文也还没有用, 便都交给她的婆婆. 那女人又取了衣服, 道过谢, 出去了. 其时已经是正午.

“阿呀, 米呢? 祥林嫂不是去淘米的么? ……” 好一会, 四婶这才惊叫起来. 她大约有些饿, 记得午饭了.

于是大家分头寻淘箩. 她先到厨下, 次到堂前, 后到卧房, 全不见掏箩的影子. 四叔踱出门外, 也不见, 一直到河边, 才见平平正正的放在岸上, 旁边还有一株菜.

看见的人报告说, 河里面上午就泊了一只白篷船, 篷是全盖起来的, 不知道甚么人在里面, 但事前也没有人去理会他. 待到祥林嫂出来掏米, 刚刚要跪下去, 那船里便突然跳出两个男人来, 像是山里人, 一个抱住她, 一个帮着, 拖进船去了. 祥林嫂还哭喊了几声, 此后便再没有甚么声息, 大约给用甚么堵住了罢. 接着就走上两个女人来, 一个不认识, 一个就是卫婆于. 窥探舱里, 不很分明, 她像是捆了躺在船板上.

“可恶! 然而…….” 四叔说.

这一天是四婶自己煮中饭; 他们的儿子阿牛烧火.

午饭之后, 卫老婆子又来了.

“可恶!” 四叔说.

“你是甚么意思? 亏你还会再来见我们.” 四婶洗著碗, 一见面就愤愤的说, “你自己荐她来, 又合伙劫她去, 闹得沸反盈天的, 大家看了成个甚么样子? 你拿我们家里开玩笑么?”

“阿呀阿呀, 我真上当. 我这回, 就是为此特地来说说清楚的. 她来求我荐地方, 我那里料得到是瞒着她的婆婆的呢. 对不起, 四老爷, 四太太. 总是我老发昏不小心, 对不起主顾. 幸而府上是向来宽洪大量, 不肯和小人计较的. 这回我一定荐一个好的来折罪…….”

“然而…….” 四叔说.

于是祥林嫂事件便告终结, 不久也就忘却了.

只有四嫂, 因为后来雇用的女工, 大抵非懒即馋, 或者馋而且懒, 左右不如意, 所以也还提起祥林嫂. 每当这些时候, 她往往自言自语的说, “她现在不知道怎么样了?” 意思是希望她再来. 但到第二年的新正, 她也就绝了望.

新正将尽, 卫老婆子来拜年了, 已经喝得醉醺醺的, 自说因为回了一趟卫家山的娘家, 住下几天, 所以来得迟了. 她们问答之间, 自然就谈到祥林嫂.

"她么?" 卫若婆子高兴的说, "现在是交了好运了. 她婆婆来抓她回去的时候, 是早已许给了贺家坳的贺老六的, 所以回家之后不几天, 也就装在花轿里抬去了."

"阿呀, 这样的婆婆! ……" 四婶惊奇的说.

"阿呀, 我的太太! 你真是大户人家的太太的话. 我们山里人, 小户人家, 这算得甚么? 她有小叔子, 也得娶老婆. 不嫁了她, 那有这一注钱来做聘礼? 他的婆婆倒是精明强干的女人呵, 很有打算, 所以就将地嫁到里山去. 倘许给本村人, 财礼就不多; 惟独肯嫁进深山野坳里去的女人少, 所以她就到手了八十千. 现在第二个儿子的媳妇也娶进了, 财礼花了五十, 除去办喜事的费用, 还剩十多千. 吓, 你看, 这多么好打算? ……"

"祥林嫂竟肯依? ……"

"这有甚么依不依. ——闹是谁也总要闹一闹的, 只要用绳子一捆, 塞在花轿里, 抬到男家, 捺上花冠, 拜堂, 关上房门, 就完事了. 可是祥林嫂真出格, 听说那时实在闹得利害, 大家还都说大约因为在念书人家做过事, 所以与众不同呢. 太太, 我们见得多了: 回头人出嫁, 哭喊的也有, 说要寻死觅活的也有, 抬到男家闹得拜不成天地的也有, 连花烛都砸了的也有. 样林嫂可是异乎寻常, 他们说她一路只是嚎, 骂, 抬到贺家坳, 喉咙已经全哑了. 拉出轿来, 两个男人和她的小叔子使劲的捺住她也还拜不成天地. 他们一不小心, 一松手, 阿呀阿弥陀佛, 她就一头撞在香案角上, 头上碰了一个大窟窿, 鲜血直流, 用了两把香灰, 包上两块红布还止不住血呢. 直到七手八脚的将她和男人反关在新房里, 还是骂, 阿呀呀, 这真是……." 她摇一摇头, 顺下眼睛, 不说了.

"后来怎么样呢?" 四婢还问.

"听说第二天也没有起来." 她抬起眼来说.

"后来呢?"

"后来? ——起来了. 她到年底就生了一个孩子, 男的, 新年就两岁*了. 我在娘家这几天, 就有人到贺家坳去, 回来说看见他们娘儿俩, 母亲也胖, 儿子也胖; 上头又没有婆婆, 男人所有的是力气, 会做活; 房子是自家的. ——唉唉,

*It was the custom in China to reckon a child as one year old at birth, and to add another year to his age as New Year.

她真是交了好运了."

从此之后, 四婶也就不再提起祥林嫂.

但有一年的秋季, 大约是得到祥林嫂好运的消息之后的又过了两个新年, 她竟又站在四叔家的堂前了. 桌上放著一个荸荠式的圆篮, 檐下一个小铺盖. 她仍然头上扎著白头绳, 乌裙, 蓝夹袄, 月白背心, 脸色青黄, 只是两颊上已经消失了血色, 顺着眼, 眼角上带些泪痕, 眼光也没有先前那样精神了. 而且仍然是卫老婆子领着, 显出慈悲模样, 絮絮的对四婶说:

"……这实在是叫作 '天有不测风云', 她的男人是坚实人, 谁知道年纪轻轻, 就会断送在伤寒上? 本来已经好了的, 吃了一碗冷饭, 复发了. 幸亏有儿子; 她又能做, 打柴摘茶养蚕都来得, 本来还可以守着, 谁知道那孩子又会给狼衔去的呢? 春天快完了, 村上倒反来了狼, 谁料到? 现在她只剩了一个光身了. 大伯来收屋, 又赶她. 她真是走投无路了, 只好来求老主人. 好在她现在已经再没有甚么牵挂, 太太家里又凄巧要换人, 所以我就领她来——我想, 熟门熟路, 比生手实在好得多……"

"我真傻, 真的," 祥林嫂抬起她没有神采的眼睛来, 接着说. "我单知道下雪的时候野兽在山坳里没有食吃, 会到村里来; 我不知道春天也会有. 我一清早起来就开了门, 拿小篮盛了一篮豆, 叫我们的阿毛坐在门槛上剥豆去. 他是很听话的, 我的话句句听; 他出去了. 我就在屋后劈柴, 掏米, 米下了锅, 要蒸豆. 我叫阿毛, 没有应, 出去口看, 只见豆撒得一地, 没有我们的阿毛了. 他是不到别家去玩的; 各处去一问, 果然没有. 我急了, 央人出去寻. 直到下半天, 寻来寻去寻到山坳里, 看见刺柴上桂著一只他的小鞋. 大家都说, 糟了, 怕是遭了狼了. 再进去; 他果然躺在草窠里, 肚里的五脏已经都给吃空了, 手上还紧紧的捏著那只小篮呢. ……" 她接着但是呜咽, 说不出成句的话来.

四婶起刻还踌躇, 待到听完她自己的话, 眼圈就有些红了. 她想了一想, 便教拿圆篮和铺盖到下房去. 卫老婆子仿佛卸了一肩重相似的嘘一口气, 祥林嫂比初来时候神气舒畅些, 不待指引, 自己驯熟的安放了铺盖. 她从此又在鲁镇做女工了.

大家仍然叫她祥林嫂.

然而这一回, 她的境遇却改变得非常大. 上工之后的两三天, 主人们就觉得她手脚已没有先前一样灵活, 记性也坏得多, 死尸似的脸上又整日没有笑影, 四婶的口气上, 已颇有些不满了. 当她初到的时候, 四叔虽然照例皱过

眉, 但鉴于向来雇用女工之难, 也就并不大反对, 只是暗暗地告诫四姑说, 这种人虽然似乎很可怜, 但是败坏风俗的, 用她帮忙还可以, 祭祀时候可用不着她沾手, 一切饭菜, 只好自已做, 否则, 不干不净, 祖宗是不吃的.

四叔家里最重大的事件是祭祀, 祥林嫂先前最忙的时候也就是祭祀, 这回她却清闲了. 桌子放在堂中央, 系上桌帏, 她还记得照旧的去分配酒杯和筷子.

“祥林嫂, 你放著罢! 我来摆.” 四婶慌忙的说.

她讪讪的缩了手, 又去取烛台.

“祥林嫂, 你放著罢! 我来拿.” 四婶又慌忙的说.

她转了几个圆圈, 终于没有事情做, 只得疑惑的走开. 她在这一天可做的事是不过坐在灶下烧火.

镇上的人们也仍然叫她祥林嫂, 但音调和先前很不同; 也还和她讲话, 但笑容却冷冷的了. 她全不理会那些事, 只是直着眼睛, 和大家讲她自己日夜不忘的故事:

“我真傻, 真的,” 她说, “我单知道雪天是野兽在深山里没有食吃, 会到村里来; 我不知道春天也会有. 我一大早起来就开了门, 拿小篮盛了一篮豆, 叫我们的阿毛坐在门槛上剥豆去. 他是很听话的孩子, 我的话句句听; 他就出去了. 我就在屋后劈柴, 淘米, 米下了锅, 打算蒸豆. 我叫 ‘阿毛!’, 没有应. 出去一看, 只见豆撒得满地, 没有我们的阿毛了. 各处去一向, 都没有. 我急了, 央人去寻去. 直到下半天, 几个人寻到山坳里, 看见刺柴上挂著一只他的小鞋. 大家都说, 完了, 怕是遭了狼了; 再进去; 果然, 他躺在草窠里, 肚里的五脏已经都给吃空了, 可怜他手里还紧紧的捏著那只小篮呢. ……” 她于是淌下眼泪来, 声音也呜咽了.

这故事倒颇有效, 男人听到这里, 往往敛起笑容, 没趣的走了开去; 女人们却不独宽恕了她似的, 脸上立刻改换了鄙薄的神气, 还要陪出许多眼泪来. 有些老女人没有在街头听到她的话, 便特意寻来, 要听她这一段悲惨的故事. 直到她说到呜咽, 她们也就一齐流下那停在眼角上的眼泪, 叹息一番, 满足的去了, 一面还纷纷的评论著.

她就只是反复的向人说她悲惨的故事, 常常引住了三五个人来听她. 但不久, 大家也都听得纯熟了, 便是最慈悲的念佛的老太太们, 眼里也再不见有一点泪的痕迹. 后来全镇的人们几乎都能背诵她的话, 一听到就烦厌得头

痛.

“我真傻, 真的,” 她开首说.

“是的, 你是单知道雪天野兽在深山里没有食吃, 才会到村里来的.” 他们立即打断她的话, 走开去了.

她张著口怔怔的站着, 直着眼睛看他们, 接着也就走了, 似乎自己也觉得没趣. 但她还妄想, 希图从别的事, 如小篮, 豆, 别人的孩子上, 引出她的阿毛的故事来. 倘一看见两三岁的小孩子, 她就说:

“唉唉, 我们的阿毛如果还在, 也就有这么大了……”

孩子看见她的眼光就吃惊, 牵着母亲的衣襟催她走. 于是又只剩下她一个, 终于没趣的也走了, 后来大家又都知道了她的脾气, 只要有孩子在眼前, 便似笑非笑的先问她, 道:

“祥林嫂, 你们的阿毛如果还在, 不是也就有这么大了么?”

她未必知道她的悲哀经大家咀嚼赏鉴了许多天, 早已成为渣滓, 只值得烦厌和唾弃; 但从人们的笑影上, 也仿佛觉得这又冷又尖, 自己再没有开口的必要了. 她单是一瞥他们, 并不回答一句话.

鲁镇永远是过新年, 腊月二十以后就火起来了. 四叔家里这回须雇男短工, 还是忙不过来, 另叫柳妈做帮手, 杀鸡, 宰鹅; 然而柳妈是 “善女人”, 吃素、不杀生的, 只肯洗器皿. 祥林嫂除烧火之外, 没有别的事, 却闲著了, 坐着只看柳妈洗器皿. 微雪点点的下来了.

“唉唉, 我真傻,” 祥林嫂看了天空, 叹息著, 独语似的说.

“祥林嫂, 你又来了.” 柳妈不耐烦的看着她的脸, 说. “我问你: 你额角上的伤痕, 不就是那时撞坏的么?”

“晤晤.” 她含糊的回答.

“我问你: 你那时怎么后来竟依了呢?”

“我么? ……”,

“你呀. 我想: 这总是你自己愿意了, 不然…….”

“阿阿, 你不知道他力气多么大呀.”

“我不信. 我不信你这么大的力气, 真会拗他不过. 你后来一定是自己肯了, 倒推说他力气大.”

“啊啊, 你……你倒自己试试着.” 她笑了.

柳妈的打皱的脸也笑起来, 使她蹙缩得像一个核桃, 干枯的小眼睛一看

祥林嫂的额角, 又钉住她的眼. 祥林嫂似很局促了, 立刻敛了笑容, 旋转眼光, 自去看雪花.

“祥林嫂, 你实在不合算.” 柳妈诡秘的说. “再一强, 或者索性撞一个死, 就好了. 现在呢, 你和你的第二个男人过活不到两年, 倒落了一件大罪名. 你想, 你将来到阴司去, 那两个死鬼的男人还要争, 你给了谁好呢? 阎罗大王只好把你锯开来, 分给他们. 我想, 这真是……”

她脸上就显出恐怖的神色来, 这是在山村里所未曾知道的.

“我想, 你不如及早抵当. 你到土地庙里去捐一条门槛, 当作你的替身, 给千人踏, 万人跨, 赎了这一世的罪名, 免得死了去受苦.”

她当时并不回答甚么话, 但大约非常苦闷了, 第二天早上起来的时候, 两眼上便都围着大黑圈. 早饭之后, 她便到镇的西头的土地庙里去求捐门槛, 庙祝起初执意不允许, 直到她急得流泪, 才勉强答应了. 价目是大钱十二千. 她久已不和人们交口, 因为阿毛的故事是早被大家厌弃了的; 但自从和柳妈谈了天, 似乎又即传扬开去, 许多人都发生了新趣味, 又来逗她说话了. 至于题目, 那自然是换了一个新样, 专在她额上的伤疤.

“祥林嫂, 我问你: 你那时怎么竟肯了?” 一个说.

“唉, 可惜, 白撞了这一下.” 一个看着她的疤, 应和道.

她大约从他们的笑容和声调上, 也知道是在嘲笑她, 所以总是瞪着眼睛, 不说一句话, 后来连头也不回了. 她整日紧闭了嘴唇, 头上带着大家以为耻辱的记号的那伤痕, 默默的跑街, 扫地, 洗菜, 淘米. 快够一年, 她才从四婶手里支取了历来积存的工钱, 换算了十二元鹰洋, 请假到镇的西头去. 但不到一顿饭时候, 她便回来, 神气很舒畅, 眼光也分外有神, 高兴似的对四婶说, 自己已经在土地庙捐了门槛了.

冬至的祭祖时节, 她做得更出力, 看四婶装好祭品, 和阿牛将桌子抬到堂屋中央, 她便坦然去拿酒杯和筷子.

“你放著罢, 祥林嫂!” 四婶慌忙大声说.

她像是受了炮烙似的缩手, 脸色同时变作灰黑, 也不再去取烛台, 只是失神的站着. 直到四叔上香的时候, 教她走开, 她才走开. 这一回她的变化非常大, 第二天, 不但眼睛窈陷下去, 连精神也更不济了. 而且很胆怯, 不独怕暗夜, 怕黑影, 即使看见人, 虽是自己的主人, 也总惴惴的, 有如在白天出穴游行的小鼠, 否则呆坐着, 直是一个木偶人. 不半年, 头发也花白起来了, 记性

尤其坏, 甚而至于常常忘却了去淘米.

“祥林嫂怎么这样了？倒不如那时不留她.” 四婶有时当面就这样说, 似乎是警告她.

然而她总如此, 全不见有伶俐起来的希望. 他们于是想打发她走了, 教她回到卫老婆子那里去. 但当我还在鲁镇的时候, 不过单是这样说; 看现在的情状, 可见后来终于实行了. 然而她是从四叔家出去就成了乞丐的呢, 还是先到卫老婆子家然后再成乞丐的呢? 那我可不知道.

我给那些因为在近旁而极响的爆竹声惊醒, 看见豆一般大的黄色的灯火光, 接着又听得毕毕剥剥的鞭炮, 是四叔家正在 “祝福” 了; 知道已是五更将近时候. 我在蒙胧中, 又隐约听到远处的爆竹声联绵不断, 似乎合成一天音响的浓云, 夹着团团飞舞的雪花, 拥抱了全市镇. 我在这繁响的拥抱中, 也懒散而且舒适, 从白天以至初夜的疑虑, 全给祝福的空气一扫而空了, 只觉得天地圣众歆享了牲醴和香烟, 都醉醺醺的在空中蹒跚, 豫备给鲁镇的人们以无限的幸福.

一九二四年二月七日

附录 B　乙酰水杨酸

注　本章是用来测试排版的.

阿司匹林 (胡话: Aspirin), 也称乙酰水杨酸 (胡话: acetylsalicylic acid), 是水杨酸类药物, 通常用作止痛剂、解热药和消炎药, 亦能用于治疗某些特定的发炎性疾病, 例如川崎氏病、心包炎, 以及风湿热等等. 心肌梗塞后马上给药能降低死亡的风险. 本品也能防止血小板在血管破损处凝集, 有抗凝作用. 高心血管风险患者长期低剂量服用可预防心脏病、中风与血栓. 该药还可有效预防特定几种癌症, 特别是直肠癌. 对于止痛及发烧而言, 药效一般会于 30 分内发挥. 阿司匹林是一种非甾体抗炎药 (NSAID), 在抗发炎的角色上与其他 NSAID 类似, 但阿司匹林还具有抗血小板凝集的效果.

阿司匹林的其中一个常见的副作用是会引起胃部不适. 更严重的副作用则包含胃溃疡、胃出血等等, 也可能会使气喘恶化. 其中年长者、酗酒者, 以及还有服用其他非甾体抗炎药或抗凝剂者, 出血风险更高, 妊娠后期也不建议用药. 有感染的孩童不建议用药, 因为这会增加患瑞氏综合征的风险. 高剂量者可能会引起耳鸣.

虽然它们都有名为水杨酸的类似结构, 作用相似 (解热、消炎、镇痛), 抑制的环氧化酶 (COX) 也相同, 但阿司匹林的不同之处在于其抑制作用不可逆, 而且对环氧化酶-1 (COX-1) 的抑制作用比对环氧化酶-2 的 (COX-2) 更强.

阿司匹林衍生自柳树皮中发现的化学物质. 早在 2 400 年前柳树皮就用来治病, 希波克拉底就用它来治头痛. 1763 年, 在牛津大学的沃德姆学院, 爱德华·斯通首次从柳树皮中发现了阿司匹林的有效成分水杨酸. 1853 年, 化学家查尔斯·弗雷德里克·格哈特以乙酰氯处理水杨酸钠, 首次合成出乙酰水杨酸. 此后五十年, 化学家们逐步提升生产的效率. 1897 年, 德国拜耳开始研

究乙酰水杨酸的医疗用途, 以代替高刺激性的水杨酸类药物. 到 1899 年, 拜耳以阿司匹林 (Aspirin) 为商标, 销售本品至全球. 此后五十年, 阿司匹林跃升成为使用最广泛的药物之一. 目前, 拜耳公司在很多国家对于 “阿司匹林” 一名的专利权已经过期, 或是已经卖给其他公司.

本品是当今世界上应用最广泛的药物之一, 每年的消费量约 40 000 吨 (约 50 至 120 十亿锭). 本品列名于世界卫生组织基本药物标准清单之中, 为基础公卫体系必备药物之一. 截至 2014 年, 每剂在发展中国家的批发价约介于 0.002 至 0.025 美元之间. 截至 2015 年, 每月剂量在美国的价格低于 25.00 美金. 本品目前属于通用名药物.

B.1 医疗用途

阿司匹林可以治疗多种疾病, 包括发烧、疼痛、风湿热, 也可治疗一些炎症, 如类风湿性关节炎、心包炎和川崎病. 低剂量服用还可减少心肌梗死发作的死亡风险, 某些情况下也可减少发生中风的风险. 部分证据表明阿司匹林可以预防直肠癌, 但是其原理尚不明晰. 在美国, 50 岁至 70 岁的人且心血管疾病风险大于 10% 的族群可给予低剂量阿司匹林, 且不会增加出血风险.

B.1.1 疼痛

对急性疼痛而言, 阿司匹林是一种高效的镇痛药, 但是通常认为其对疼痛的缓解效果不如布洛芬, 因为阿司匹林更容易引发胃肠道出血. 一般情况下, 阿司匹林对肌肉抽搐、腹胀、胃扩张和急性皮肤刺激引起的疼痛无明显效果. 像其他非甾体抗炎药一样, 阿司匹林与咖啡因一起使用的止痛效果比单独使用阿司匹林要好. 阿司匹林泡腾片, 如白加黑或拜阿司匹林, 比药片起效更快, 可以有效治疗偏头痛. 可以有效地治疗某些形式的神经性疼痛.

头痛

阿司匹林及其复方制剂都能有效治疗某几种头痛, 但对另外几种则效果不明. 因其他疾病或创伤导致的继发性头痛需要及时在医疗机构接受治疗.

国际头痛分类标准 (ICHD) 分原发性头痛为紧张性头痛、偏头痛和丛集性头痛等类别. 普遍认为包括阿司匹林在内的非处方止痛药可以有效治疗紧张性头痛.

阿司匹林, 特别是和对乙酰氨基酚、咖啡因组成复方药物 (如阿咖酚散), 被认为是治疗偏头痛的首选, 在疼痛刚发作时最有效, 药效相当于服用低剂量的舒马曲坦.

B.1.2 炎症与发热

阿司匹林可以不可逆地抑制环氧化酶 (COX) 来调节前列腺素系统, 进而达到疼痛控制及退烧的效果. 也可以治疗某些急性或慢性的发炎性疾病, 如类风湿性关节炎. 阿司匹林是一种公认的成人用退烧药, 但许多医学协会 (包含美国家庭医学会、美国儿科学会, 以及美国食品药品监督管理局) 及监管机构强烈反对用它治疗儿童发热, 因为儿童在有病毒或细菌感染时使用水杨酸类药物可能会患上瑞氏综合征, 患病几率虽小, 但致死率很高. 鉴于这一风险, 美国食品药品监督管理局 (FDA) 从 1986 年开始要求所有含阿司匹林的药物都需注明儿童和青少年不宜服用.

B.1.3 心脏病与中风

1970 年初, 牛津大学心血管内科的名誉教授彼得·斯莱特研究了阿司匹林对心脏功能的影响和预防中风的效果. 斯莱特和他的团队为研究该药用于防治其他疾病打下基础. 一份 2015 的报告指出, 50 岁的心脏病高危人群每日服用低剂量阿司匹林获益最大.

阿司匹林在心肌梗死的治疗上面扮演重要的角色. 一项临床研究发现在怀疑有 ST 时段上升心肌梗塞 (STEMI) 的患者, 阿司匹林能够降低 30 日死亡率, 从 11.8% 至 9.4%. 在这些患者中, 大出血的风险不会因为服药增加, 但小出血的风险会上升.

阿司匹林能够预防部分人群罹患心脏病和中风, 低剂量服用时能延缓心血管疾病的进程, 降低有病史的人群的复发率 (即 “二次预防”).

不过阿司匹林对低风险人群 (如没有心脏病和中风病史, 没有基础性疾病的人) 益处不大. 有些研究建议视情况服用, 而另一些研究则认为出现其

他状况 (如胃肠道出血) 的风险太大, 得不偿失, 所以完全不建议预防性的服用.

预防性服用阿司匹林的另一问题是会产生耐药现象. 如果患者有耐药性, 药物的效力就会下降, 这会增加中风的风险. 有科学家建议对治疗方案进行测试, 以确定哪些患者对阿司匹林和其他抗血栓药 (如氯吡格雷) 有耐药性.

此外, 也有建议含阿司匹林的复方制剂用于预防心血管疾病.

B.1.4 术后

美国卫生保健研究和质量监督局 (AHRQ) 在一份指南中建议, 完成冠状动脉再成形术 (PCI), 例如安装冠状动脉支架后, 应终身服用阿司匹林. 该药常与 ADP 受体拮抗剂 (如氯吡格雷、普拉格雷、替格瑞洛等) 联用以预防血栓, 这种疗法叫作 "双重抗血栓疗法" (DAPT). 美国和欧盟对术后采用这种疗法的时间和指征有着不同的指导方针. 美国建议 DAPT 治疗至少持续 12 个月, 而欧盟则建议根据不同情况持续治疗 1 至 12 个月不等.

B.1.5 预防癌症

阿司匹林能降低癌症, 特别是大肠癌 (CRC) 的发生率和死亡率. 但效果需要服药至少 10 至 20 年才能见到效果. 此外, 本品也能为为减少子宫内膜癌、乳癌, 以及前列腺癌的风险.

一些人认为, 对患癌风险一般的人而言, 若比较阿司匹林的防癌作用和引起出血的风险, 利大于弊, 但还有人不太确定是否如此. 由于这种不确定性, 美国预防服务工作组 (USPSTF) 在有关这个问题的指南中不建议患癌风险一般的人群服用阿司匹林预防大肠癌.

B.1.6 其他

阿司匹林是治疗急性风湿热所引起的发热和关节痛的一线药物. 这种疗法的疗程通常为一至二星期, 一般不会更长. 发热和疼痛缓解后就不用再服药了, 因为它不能减少心脏并发症和风湿性心脏瓣膜病后遗症的发生率.

萘普生的药效和阿司匹林相当, 毒性更小, 但由于临床使用经验有限, 建议该药仅用作二线治疗.

除了风湿热外, 川崎病是少数几种可以让儿童服用阿司匹林的病症, 不过并没有高质量的证据证实它的效果.

低剂量的阿司匹林补充剂对妊娠毒血症有一定疗效.

B.2 不良反应

B.2.1 禁忌

布洛芬或萘普生过敏的人群、对水杨酸 (或一般非甾体抗炎药) 不耐受的人群禁用, 患有哮喘的人群或会因非甾体抗炎药导致支气管痉挛的人群慎用. 因为阿司匹林会对胃壁产生影响, 生产厂商建议患有消化性溃疡、轻症糖尿病或胃炎的人群在服用前先咨询医师. 即使没有上述情况, 当阿司匹林与酒精或华法林同时服用时也有导致胃出血的风险. 患有血友病或其它出血性疾病的人群也不应服用该药及其它水杨酸类药物. 患有遗传性疾病葡萄糖-6-磷酸脱氢酶缺乏症的人群服用阿司匹林会导致溶血性贫血, 这取决于用量的多少和病情的严重性. 不建议登革热患者服用该药, 因为这会提高出血倾向. 患有肾病、高尿酸血症或痛风的人群不宜服用, 因为阿司匹林会抑制肾脏排出尿酸的功能, 从而加重病情. 另外不应使用该药治疗儿童或青少年的发热或流感, 因为这与患上瑞氏综合征有关.

B.2.2 肠胃道反应

阿司匹林会增加消化道出血的风险. 尽管有些肠溶片在广告中宣称 “不伤胃” , 但研究表明肠溶片并未降低出血风险. 若该药和其他非甾体抗炎药联用, 出血风险还会增加. 阿司匹林和氯吡格雷或华法林联用也会增加上消化道出血的风险.

阿司匹林对 COX-1 的抑制似乎启动了胃的防御机制, 使 COX-2 活性增强, 若同时服用 COX-2 抑制剂, 则会增加对胃黏膜的侵蚀. 因此, 当阿司匹林与任何 “天然” 的会抑制 COX-2 的补充剂 (如大蒜提取物, 姜黄素, 越桔, 松树皮, 银杏, 鱼油, 白藜芦醇, 染料木黄酮, 槲皮素, 间苯二酚等) 联用时, 必须

特别小心.

除了肠溶片外, 制药公司还会利用 “缓冲剂” 来缓解消化道出血的问题. 缓冲剂旨在防止阿司匹林集结在胃壁上, 不过它的效果存在争议. 几乎所有抗酸药里的缓冲剂都能使用, 如 Bufferin 使用氧化镁, 还有制剂使用碳酸钙的.

最近有对阿司匹林与维生素 C 联用以保护胃黏膜的研究. 服用相同剂量的维生素 C 和阿司匹林与单独服用阿司匹林相比, 能减少对胃的伤害.

B.2.3 对中枢神经系统的影响

大鼠实验表明, 阿司匹林的代谢物水杨酸在大剂量时能引起暂时性耳鸣, 这是由于花生四烯酸的作用和 NMDA 受体级联反应.

B.2.4 瑞氏综合征

瑞氏综合征是一种罕见的严重疾病, 特征是急性脑病和脂肪肝, 发生在少年儿童服用阿司匹林治疗发热或其他感染时. 从 1981 年到 1997 年, 美国疾病控制与预防中心接到 1 207 宗未满 18 岁的瑞氏综合征病患报告. 其中 93% 在综合征出现三周之前就已患病, 主要是呼吸道感染、水痘和腹泻. 81.9% 的受检儿童都检出了水杨酸. 出现阿司匹林引起瑞氏综合征的报告后, 美国就采取了预防性的安全措施 (如卫生局局长发出警告, 更改含阿司匹林药品的标识), 美国儿童的阿司匹林用量明显下降, 瑞氏综合征的病例报告也明显减少. 同样, 英国发出儿童不宜服用阿司匹林的警告后, 药物用量和病例报告也有减少. 美国食品药品监督管理局现在建议 12 岁以下儿童发热都不能服用阿司匹林或含有阿司匹林的药物. 英国药品和医疗产品监管署也建议 16 岁以下儿童不应服用阿司匹林, 除非另有医嘱.

B.2.5 其他不良反应

小部分人服用阿司匹林后会产生类似于过敏的反应, 如荨麻疹、水肿和头痛. 这种反应是由于水杨酸不耐受, 并不是真正的过敏, 而是连一点点水杨酸都无法代谢所导致的药物过量.

有些人服用阿司匹林会产生皮肤组织水肿, 有研究发现有些病患服药 1 到 6 时后就会发生. 不过, 阿司匹林单独服用并不会导致水肿, 和非甾体抗炎药联用时才会发生.

阿司匹林会增加脑部微出血的风险, 磁共振成像 (MRI) 可见 5 至 10 毫米的斑块, 或者是更小的低信号斑块.

一项研究估计每天平均服用 270 毫克的阿司匹林后, 脑出血 (ICH) 的概率绝对值增加了 1.2‰, 与此相比, 心肌梗死的概率绝对值下降了 13.7‰, 缺血性中风的概率绝对值则下降了 3.9‰. 如果已经发生脑出血, 阿司匹林会提高死亡率, 每天大约 250 毫克的剂量导致发病后三个月内死亡的概率是原来的 2.5 倍 (95% 置信区间是 1.3 倍到 4.6 倍).

阿司匹林和其他非甾体抗炎药会抑制前列腺素合成, 引起低肾素性低醛固酮症, 可能引发高血钾症. 不过, 当肾功能和血容量都正常时, 这些药物并不会导致高血钾症.

阿司匹林在术后十天内都能引起长时间出血. 一项研究选择了 6 499 名手术病人进行观察, 发现其中有 30 人需要再次进行手术以控制出血. 这 30 人中有 20 人是弥漫性出血, 另外 10 人只有一个部位出血. 弥漫性出血是由术前单独使用阿司匹林或和其他非甾体抗炎药联用引起的, 而离散的出血则不是.

2015 年 7 月 9 日, 美国食品药品监督管理局提升了对非甾体抗炎药增加心脏病和中风风险的警告. 阿司匹林虽然也是非甾体抗炎药, 但并不在警告的范围内.

B.2.6 过量服用

阿司匹林过量分为急性和慢性. 急性过量是指一次性服用大剂量的药物, 而慢性过量则是指一段时间内服用超过正常剂量的药物. 急性过量的死亡率是 2%. 慢性过量的死亡率更高达 25%, 且对儿童影响尤为严重. 中毒的治疗方法有使用活性炭、静脉注射葡萄糖和生理盐水, 使用碳酸氢钠, 还有透析. 通常用自动分光光度法测量血浆中阿司匹林的活性代谢产物, 即水杨酸来诊断中毒. 一般来说, 正常服药治疗后血浆中水杨酸含量为 30–100 毫克每升, 高剂量服用的患者血浆中的含量为 50–300 毫克每升, 急性中毒患者血浆中的含量为 700–1 400 毫克每升. 服用次水杨酸铋、水杨酸甲酯和水杨酸

钠后也会产生水杨酸.

B.2.7　互相作用

阿司匹林和其他药物会发生互相作用, 如乙酰唑胺和氯化铵会增加水杨酸的毒性, 酒精则会增加该药导致胃肠道出血的风险. 血液中阿司匹林还会影响部分药物与蛋白质结合, 包括抗糖尿病药 (甲苯磺丁脲和氯磺丙脲)、华法林、氨甲蝶呤、苯妥英、丙磺舒、丙戊酸 (会影响该药代谢中的重要一环β-氧化) 和其他非甾体抗炎药. 另外皮质类固醇能降低阿司匹林的浓度, 布洛芬会抵消阿司匹林的抗血栓作用, 影响其保护心血管和预防中风的功能. 阿司匹林会降低安体舒通的药理活性, 经由肾小管分泌时还会与青霉素 G 竞争. 阿司匹林也会抑制维生素 C 的吸收.

B.2.8　耐药性

在有些人身上, 阿司匹林的抗血栓作用不如别的人明显, 这种现象称为阿司匹林耐药性或是对阿司匹林不敏感. 研究表明女性比男性更易产生耐药性, 另一项研究总共调查了 2 930 人, 发现有 28% 的人有耐药性. 不过还有一项针对 100 名意大利人的研究表明, 虽然看上去有 31% 的人耐药, 不过只有 5% 的人是真正耐药的, 其他人只是没按要求服药而已. 另一项研究在 400 名健康志愿者中没有发现真正对阿司匹林有抗药性的人, 但有服用肠溶阿司匹林的人出现 “伪耐药性, 体现为药物吸收的延迟和减少”.

B.3　制法

制取阿司匹林的反应通常归为酯化反应. 水杨酸和乙酸酐 (一种乙酸的衍生物) 发生反应, 水杨酸中的羟基替换为酯基, 生成阿司匹林和副产物乙酸. 通常用少量硫酸作催化剂 (有时用磷酸).

含高浓度阿司匹林的制剂常有醋味, 这是因为阿司匹林会在潮湿的环境下发生水解, 分子分解成水杨酸和乙酸.

B.4 作用机理

1971 年, 英国皇家外科学院的药理学家约翰·范恩证实了阿司匹林会抑制前列腺素和血栓素的生成. 他因这项发现和苏恩·伯格斯特龙、本格特·萨米尔松共同获得 1982 年诺贝尔生理学或医学奖. 1984 年获授下级勋位爵士.

B.4.1 对前列腺素和血栓素的抑制

阿司匹林能抑制前列腺素和血栓素是因为该药能不可逆地使合成前列腺素和血栓素所需的环氧合酶 (COX, 学名叫前列腺素氧化环化酶, PTGS) 失活. 阿司匹林能使 PTGS 活性位点中的一个丝氨酸残基乙酰化, 这是它和其他非甾体抗炎药 (如双氯芬酸钠和布洛芬) 的不同之处, 因为其他的药抑制作用都是可逆的.

阿司匹林低剂量服用时能阻止血小板中血栓素 A2 的合成, 这会在受影响的血小板的生命周期 (约 8–9 天) 内抑制血小板聚集. 阿司匹林的这种抗血栓作用可用于降低心脏病发生率. 每天服用 40 毫克的阿司匹林能显著抑制血栓素 A2 的最大急性合成量, 但不影响前列腺素 I2 的合成, 不过服用剂量更高时就会抑制前列腺素 I2 的合成.

前列腺素是身体局部产生的一种激素, 它有多种作用, 包括在下丘脑中调节体温, 传递痛觉到大脑, 还会引起炎症. 血栓素会使血小板聚集形成血栓, 而心肌梗死主要是由血栓导致的, 因此低剂量服用阿司匹林能有效防止心肌梗死.

B.4.2 对 COX-1 和 COX-2 的抑制

阿司匹林可以抑制环氧化酶-1 (COX-1) 和环氧化酶-2 (COX-2). 它能不可逆地抑制 COX-1 并且改变 COX-2 的酶活性. COX-2 通常产生的大多是会促进发炎的前列腺素类激素, 但受阿司匹林作用后则产生能抗炎的脂氧素. 新一代非甾体抗炎药——昔布类 COX-2 抑制剂——可以单独抑制 COX-2, 以减少对胃肠道的副作用.

然而许多新一代的 COX-2 抑制剂如罗非昔布在过去十年内都遭到了撤回, 因为有证据表明它们会增加患心脏病和中风的风险. 人体的血管内皮细

胞原本会合成 COX-2. 选择性抑制 COX-2 后, 因为血小板里的 COX-1 未受影响, 前列腺素 (尤其是前列环素 PGI2) 的合成相比血栓素会有所降低. 这样 PGI2 抗凝血的保护作用就消失了, 这会增加血栓、心肌梗死和其他相关的循环系统疾病的风险. 因为血小板没有 DNA, 它的 COX-1 若被阿司匹林不可逆地抑制, 就无法再生, 这是和昔布类可逆抑制剂的不同之处.

此外, 阿司匹林除了有抑制 COX-2 的环氧化能力之外, 还能转化其为类似脂加氧酶的酵素. 被阿司匹林处理过后的 COX-2 可以转多种多元不饱和脂肪酸为过氧化物, 这些过氧化物又会被代谢为具有抗发炎活性的特异性促修复介质, 如脂氧素、消散素、巨噬细胞消炎介质等等.

B.4.3 其他机理

阿司匹林还有三种作用方式. 一是使线粒体的氧化磷酸化解偶联. 阿司匹林会携带质子从线粒体膜间隙扩散进入线粒体基质, 然后再次电离释放质子. 简而言之, 阿司匹林作为缓冲剂运输质子, 因此高剂量服用时会因电子传递链释放的热量而造成发热, 这和低剂量服用的退烧作用相反. 二是阿司匹林会促进一氧化氮自由基的生成. 一氧化氮自由基本身在小鼠体内也有抗炎的作用, 它能减少白细胞粘附, 后者是免疫系统应对感染的重要一步. 不过, 没有足够证据表明阿司匹林能抗感染. 第三, 更新的研究表明水杨酸及其衍生物能通过 NF-κB 调节细胞信号. NF-κB 是一种转录因子复合体, 在许多生物过程 (包括发炎) 中起重要作用.

阿司匹林在体内分解为水杨酸, 而水杨酸本身则有抗炎、退烧、镇痛等作用. 2012 年发现水杨酸还能激活 AMP 活化蛋白激酶, 这是水杨酸和阿司匹林药效的一种可能的解释. 阿司匹林分子中的乙酰基也并非没有作用. 细胞蛋白的乙酰化是其转译后修饰中被广泛研究的现象. 阿司匹林能使包括 COX 同工酶在内的几种蛋白质乙酰化. 这些乙酰化反应可能可以阐释一些阿司匹林尚未得到解释的效应.

B.5 药剂学

一般来说, 成人用于治疗发烧或关节炎时每天服用四次, 这和以前治疗风湿热时所用的剂量接近. 有或怀疑有冠状动脉病史的人要预防心肌梗死

(MI), 每天低剂量服用一次即可.

USPSTF 在 2009 年 3 月向 45–79 岁的男性和 55–79 岁的女性建议, 如果阿司匹林降低男性心肌梗死和女性中风的风险所带来的潜在效益要大于引起消化道出血的潜在危害, 那么就提倡服用该药以预防冠状动脉心脏疾病. WHI 的研究表明女性如果坚持低剂量 (75 毫克或 81 毫克) 服用, 死于心血管疾病的风险就会降低 25%, 总死亡率降低 14%. 低剂量服用阿司匹林 (每天 75 毫克或 81 毫克) 也和心血管疾病发病率降低有关, 长期服用以预防疾病的患者利用这种方式可以兼顾药物的有效性和安全性.

儿童服用阿司匹林治疗川崎病时, 服用剂量和体重相关, 头二周每天服用四次, 接下来六至八周降低剂量, 每天服用一次.

B.6 药代动力学

乙酰水杨酸是一种弱酸, 口服后在胃的酸性环境中几乎不电离, 而是迅速经细胞膜吸收. 小肠中较高的 pH 促进了药物的电离, 从而减缓了药物在小肠中的吸收. 过量服用时药物会凝结, 所以吸收更慢, 血浆浓度在服用后 24 时内都会上升.

血液中的水杨酸有 50–80% 与白蛋白结合, 其余是具有活性的电离态. 药物和蛋白质的结合和浓度有关. 结合位点饱和以后游离态的水杨酸就会增加, 其毒性也会增强. 药物的分布体积是 0.1–0.2 升每千克. 酸中毒会增强水杨酸向组织中的渗透, 从而增加药物的分布体积.

若按治疗剂量服用, 则有多达 80% 的水杨酸在肝脏中代谢. 它和甘氨酸反应生成水杨酰胺乙酸, 但这种代谢途径容量有限. 少量水杨酸也会羟基化形成龙胆酸. 大剂量服用时, 药物代谢从一级反应变为零级反应, 因为代谢途径已饱和, 肾脏的排出变得更加重要.

水杨酸主要通过肾脏作为水杨酰胺乙酸 (75%)、游离水杨酸 (10%)、水杨酸苯酚 (10%)、酰基葡萄糖醛酸苷 (5%)、龙胆酸 (<1%)、2,3-二羟基苯甲酸排泄. 当摄入低剂量时 (小于 250 毫克, 成人), 所有途径都通过一级动力学, 消除半衰期约为 2.0 至 4.5 时. 当摄入高剂量水杨酸时 (大于 4 000 毫克), 半衰期会延长至 15–30 时, 因为水杨酰胺乙酸和水杨酚醛葡糖苷酸的生物转化途径已饱和. 代谢途径的饱和使得肾脏对水杨酸的排泄更加重要, 而尿液酸碱

度对其影响也更为敏感. 当尿液的 pH 值从 5 升至 8 时, 肾脏对水杨酸的清除能力会提升 10–20 倍. 通过碱化尿液来增加水杨酸的清除率便是利用了这一点.

B.7　历史

自古以来, 人们就知道含有活性成分水杨酸的植物提取物 (如柳树皮和绣线菊属植物) 能够镇痛、退烧. 希波克拉底 (约前 460 年—前 377 年) 留下的历史记录就描述了柳树的树皮和树叶磨成的粉能够缓解以上症状.

1763 年英国牧师爱德华·斯通在牛津发现阿司匹林的活性成分水杨酸. 法国化学家查尔斯·弗雷德里克·格哈特首先于 1853 年合成了乙酰水杨酸. 他在制取和研究各种酸酐的性质时, 混合乙酰氯和水杨酸钠, 二者发生剧烈反应, 熔化后又很快凝固了. 因为当时还没有分子结构理论, 格哈特称所得的化合物为 “水杨酸乙酸酐” (wasserfreie Salicylsäure-Essigsäure). 他为撰写关于酸酐的论文进行了很多反应, 这个制备阿司匹林的反应只是其中之一, 后来他也没有进一步研究.

六年之后的 1859 年, 冯·基尔姆让水杨酸和乙酰氯反应, 制得了分析纯的乙酰水杨酸, 他称之为 “乙酰化水杨酸” (acetylierte Salicylsäure). 1869 年, 施罗德、普林兹霍恩和克劳特重复了格哈特 (利用水杨酸钠) 的和基尔姆 (利用水杨酸) 的合成方式, 结果证实二个反应产物相同——乙酰水杨酸. 他们第一次确定了产物的正确结构——乙酰基和酚基上的氧相连.

1897 年拜耳公司的化学家修饰旋果蚊子草 (拉丁话: Filipendula ulmaria) 合成的水杨苷后, 合成了一种药物, 它比纯净的水杨酸对消化道刺激更小. 这个项目由哪个化学家领衔存在争议. 拜耳说合成是由费利克斯·霍夫曼完成的, 但后来犹太化学家阿瑟·艾兴格林声称他才是首席研究员, 而他的贡献记录被纳粹政权抹去了. 这种药学名叫乙酰水杨酸, 拜耳公司称它为阿司匹林 (Aspirin), 这来自于旋果蚊子草的植物名. 到了 1899 年, 拜耳已在全球市场销售此药. 二十世纪上半叶, 阿司匹林越来越受欢迎, 这是因为人们认为它在 1918 年流感大流行中发挥了作用. 然而最近的研究却显示, 它也是流感致死率高的部分原因, 不过这种说法颇受争议, 未被广泛认可. 阿司匹林带来的丰厚利润使药厂激烈竞争, 该药的各种品牌和产品像雨后春笋般冒

了出来, 在 1917 年拜耳公司的美国专利过期了以后更是如此.

对乙酰氨基酚和布洛芬于 1956 年和 1959 年相继问世以后, 阿司匹林的使用率开始下降. 60 和 70 年代, 约翰·范恩等人发现了阿司匹林的作用机理, 60 至 80 年代的其他研究和临床试验证明该药有抗凝血的药效, 可降低血栓疾病的发病率. 由于广泛用于预防心脏病和中风, 阿司匹林的销量从 20 世纪末开始复苏, 21 世纪以来持续向好.

B.7.1 商标

德国在一战中投降后, 1919 年各国签订的凡尔赛条约中战后赔偿的部分规定阿司匹林 (Aspirin) 连同海洛因在法国、俄罗斯、英国和美国不再是注册商标, 而成为了通用名称. 现在 aspirin (a 小写) 在澳大利亚、法国、印度、爱尔兰、新西兰、巴基斯坦、牙买加、哥伦比亚、菲律宾、南非、英国和美国是通用名称, 而 Aspirin (a 大写) 在德国、加拿大、墨西哥等 80 多个国家还是拜耳公司的注册商标. 公司在所有市场上出售的药物成分都是乙酰水杨酸, 但包装和物理性质则在各个市场都不相同.

B.8 兽用

兽医有时用阿司匹林来镇痛或抗血栓, 主要给狗用, 有时给马用, 不过现在一般会用副作用较少的新疗法.

狗和马都会出现水杨酸产生的胃肠道副作用, 不过阿司匹林可以用来治疗老年狗的关节炎, 也有治疗马的蹄叶炎的可能. 不过现在该药已很少用于治疗蹄叶炎, 因为可能适得其反. 阿司匹林应该只在兽医的直接指导下使用, 特别是猫, 因其缺乏有助于药物排出的葡萄糖醛酸, 用药比较危险. 连续 4 周每 48 时给猫服用 25 毫克/千克体重的阿司匹林并不产生临床中毒症状. 推荐用于猫的解热镇痛剂量是每 48 时 10 毫克/千克体重.

附录 C　在爪哇里读写文字文件

注　本章是用来测试排版的.

注　本章讨论的文件都是文字文件, 而不是所谓的 “二进制文件”.

爪哇是一门比较繁琐的电脑话. 所以, 在别的电脑话里简单的任务对爪哇而言不一定简单. 我姑且展现一下用相当基础的爪哇辛读或写文字文件会怎样罢.

首先, 我们需要一个包处理异常.

```
import java.io.IOException;
```

C.1　读文件

读文件基本上算是比较容易的. 首先, 导入二个跟读文件相关的包.

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.FileReader;
```

然后, 我们就可以施加魔法了.

```
public static String read(String txtFile,
        String fallback) {
    try (FileReader fr = new FileReader(txtFile);
            BufferedReader br = new BufferedReader(fr)) {
        StringBuffer sb = new StringBuffer();
        String s = null;
        while ((s = br.readLine()) != null) {
```

```
            sb.append(s).append("\n");
        }
        return sb.toString();
    } catch (IOException e) {
        return fallback;
    }
}
```

这里, 我姑且提一提 try 后的圆括号. 在括号里, 我们可追加一些 "需要被关闭的东西" (具体地, 就是有 close() 方法的对象), 它们可被自动地关闭. 曾经, 我们可能要这么写代码:

```
public static String read(String txtFile,
        String fallback) {
    FileReader fr = null;
    BufferedReader br = null;
    try {
        fr = new FileReader(txtFile);
        br = new BufferedReader(fr);
        StringBuffer sb = new StringBuffer();
        String s = null;
        while ((s = br.readLine()) != null) {
            sb.append(s).append("\n");
        }
        return sb.toString();
    } catch (IOException e) {
        return fallback;
    } finally {
        if (br != null) {
            try {
                br.close();
            } catch (IOException e) {
                e.printStackTrace();
```

```
            } finally {
                if (fr != null) {
                    try {
                        fr.close();
                    } catch (IOException e) {
                        e.printStackTrace();
                    }
                }
            }
        }
    }
}
```

可以看到, 为了避免资源泄露 (胡话: resource leak), 要写不少 try. 这里, 我们还只是使用简单的 BufferedReader 跟 FileReader; 如果我们要实现更细致的需求, 那可能要关闭更多的资源, 从而要嵌套更多的代码.

C.2 写文件

写文件就稍复杂一些. 首先, 导入三个跟写文件相关的包.

```
import java.io.BufferedWriter;
import java.io.File;
import java.io.FileReader;
```

我们暂且不考虑所谓的 "权限". 假如我们欲写入的文件已存在, 我们是想覆盖它, 还是想添加内容到文件末尾呢 (当然, 也会有其他的需求; 不过, 我们暂且不考虑它们)? 考虑到这二种模式很常用, 故在方法里加一个参数是个明智的选择.

```
public static boolean write(String txtFile,
        String str,
        boolean append) {
    File f = new File(txtFile);
```

```
    try {
        f.getParentFile().mkdirs();
        f.createNewFile();
    } catch (Exception e) {
        e.printStackTrace();
        return false;
    }
    try (FileWriter fw = new FileWriter(f, append);
            BufferedWriter bw = new BufferedWriter(fw)) {
        bw.write(str);
        return true;
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
        return false;
    }
}
```

此处有一个小小的细节. 我使用了二个 try: 前一个 try 创建文件 (若其不存在), 而后一个 try 向文件写入内容.

无妨假定我们想创建一个名为 ./test/hi 的文字文件 f, 并向其写入 HI!. 那么, f.getParentFile() 就是 ./test 目录 (姑且称其为 g). 假如 g 存在, 那么 g.mkdirs() 相当于不干任何事; 不过, 若其不存在, 则 g.mkdirs() 可建立此目录. 类似地, 若文件 f 已存在, 则 f.createNewFile() 相当于不干任何事; 不过, 若其不存在, 则 f.createNewFile() 可建立此文件. 值得注意的是, 若 g 不存在, 则 f.createNewFile() 是不可正常工作的.

若 f 不存在, 则 new FileWriter(f, append) 无法正常工作. 所以, 前一个 try 是不可少的.

C.3 添加一些细节

我们可考虑封装读文件的方法与写文件的方法为一个类; 这样, 我们就可以方便地复用代码. 同时, 为了方便他人阅码, 我们最好加入一些注释. 这

样, 我们就得到了如下代码.

码 C.1: ./listings/ReadAndWrite.java

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.BufferedWriter;
import java.io.File;
import java.io.FileReader;
import java.io.FileWriter;
import java.io.IOException;

public class ReadAndWrite {

    /**
     * Read a txt file.
     *
     * @param txtFile  the path of the txt file.
     * @param fallback the string to be returned if the txt
     *                 file does not exists.
     * @return the string form of the file content (or the
     *         fallback if such file does not exist).
     */
    public static String read(String txtFile,
            String fallback) {
        try (FileReader fr = new FileReader(txtFile);
                BufferedReader br = new BufferedReader(fr)) {
            StringBuffer sb = new StringBuffer();
            String s = null;
            while ((s = br.readLine()) != null) {
                sb.append(s).append("\n");
            }
            return sb.toString();
        } catch (IOException e) {
```

```
            return fallback;
        }
    }

    /**
     * Write a string to a file.
     *
     * @param txtFile the txt file to be written to.
     * @param str     the string to be written.
     * @param append  if {@code true}, then data will be
     *                written to the end of the file rather
     *                than overriding the original file.
     * @return {@code true} if and only if the operation
     *         is executed successfully.
     */
    public static boolean write(String txtFile,
            String str,
            boolean append) {
        File f = new File(txtFile);
        try {
            /* create folders if necessary */
            f.getParentFile().mkdirs();
            f.createNewFile();
        } catch (Exception e) {
            e.printStackTrace();
            return false;
        }
        /* "catch" does nothing */
        try (FileWriter fw = new FileWriter(f, append);
                BufferedWriter bw = new BufferedWriter(fw)) {
            bw.write(str);
```

```
            return true;
        } catch (IOException e) {
            e.printStackTrace();
            return false;
        }
    }

}
```

最后, 我也要指出:

- 我的实现不一定好; 我的实现也不是很 “简单” (跟蟒蛇比).
- 我用的爪哇辛也比较老了. 我也说过, 我一般用视觉工作室代码写文字文件 (当然包括代码). 为了使视工代提供的**爪哇话插件**工作, 我得使用爪哇 11 或更高版本的爪哇. 可是, 我在桌面环境里安装了桌面宠物 (图 C.2), 而这需要较低版本的爪哇才可正常地工作. 所以, 我的解决办法也很简单: “安装” 爪哇辛, 且为视工代单独准备一个 “免安装版” 爪哇 17.
- 应该不会有人想从本章学写爪哇罢?
- 应该不会有人想从本书学算学罢 (确信).

(a) レイ

(b) ルカ

图 C.1: Two *Kotonoha Amrilato* characters

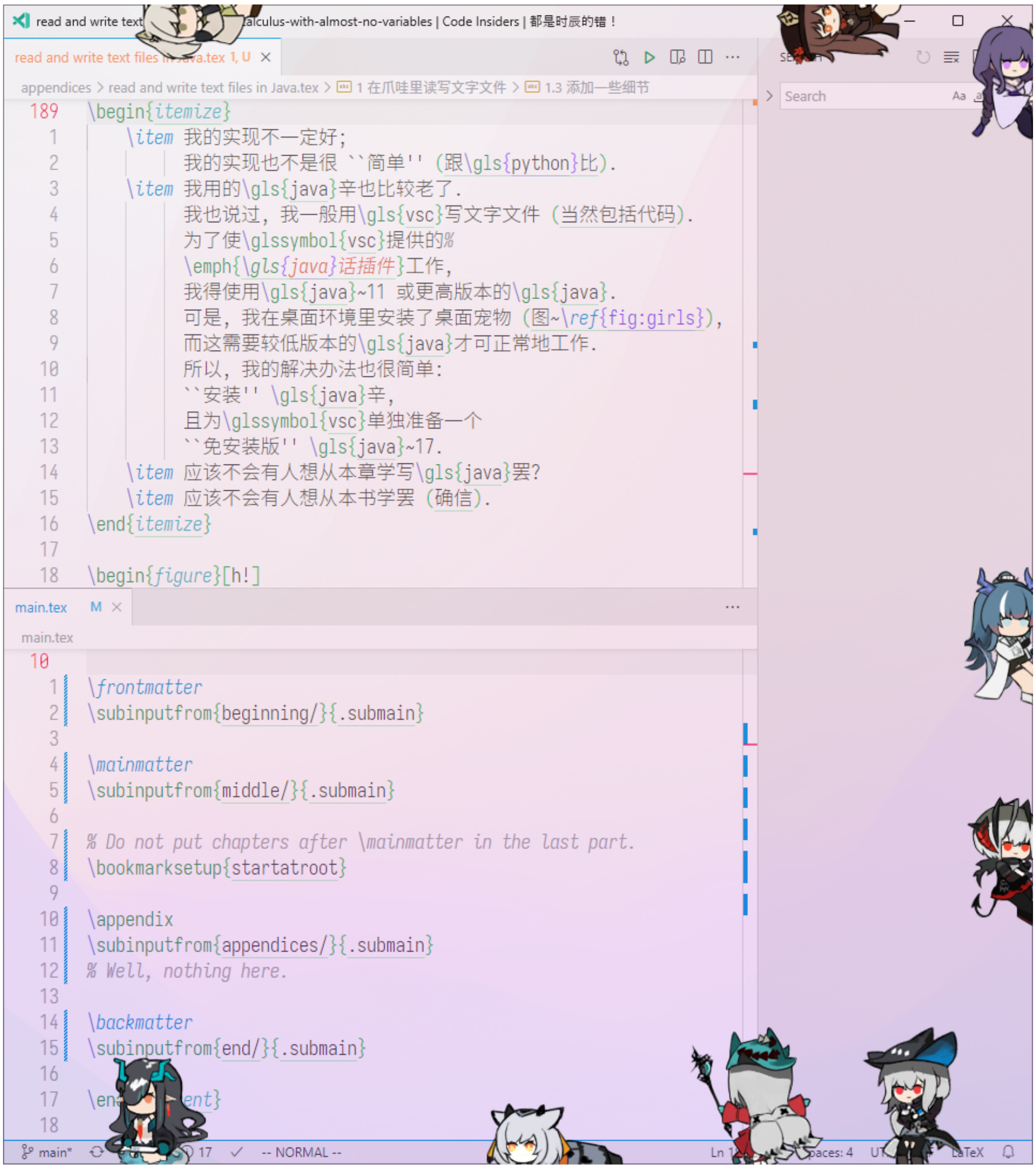
read and write text files in Java.tex 1, U
appendices > read and write text files in Java.tex > 1 在爪哇里读写文字文件 > 1.3 添加一些细节
\begin{itemize}
\item 我的实现不一定好；
我的实现也不是很 ``简单'' （跟\gls{python}比）.
\item 我用的\gls{java}辛也比较老了.
我也说过，我一般用\gls{vsc}写文字文件（当然包括代码）.
为了使\glssymbol{vsc}提供的%
\emph{\gls{java}话插件}工作，
我得使用\gls{java}~11 或更高版本的\gls{java}.
可是，我在桌面环境里安装了桌面宠物（图~\ref{fig:girls}），
而这需要较低版本的\gls{java}才可正常地工作.
所以，我的解决办法也很简单：
``安装'' \gls{java}辛，
且为\glssymbol{vsc}单独准备一个
``免安装版'' \gls{java}~17.
\item 应该不会有人想从本章学写\gls{java}罢?
\item 应该不会有人想从本书学罢（确信）.
\end{itemize}
\begin{figure}[h!]
main.tex M
\frontmatter
\subinputfrom{beginning/}{.submain}
\mainmatter
\subinputfrom{middle/}{.submain}
% Do not put chapters after \mainmatter in the last part.
\bookmarksetup{startatroot}
\appendix
\subinputfrom{appendices/}{.submain}
% Well, nothing here.
\backmatter
\subinputfrom{end/}{.submain}
Search
main* -- NORMAL --

图 C.2: 桌面宠物

附录 D　纳纳米论乳胶

注　本章是用来测试排版的.

我将在本章讨论跟乳胶有关的东西.

D.1　一些说明

我建议您安装乳胶; 这样, 您就可以跟着我 (或者, 本书) 操作了.

怎么装乳胶呢? 您可以去看一看王然的《一份简短的关于 LaTeX 安装的介绍》; 我认为这份安装说明还是挺好理解的.

我现在假定您**安装了乳胶**, 并且您**能用乳胶写简单的小文档**; 同时, 我还假定您最近更新了乳胶的包 (假如您不知道怎么更新乳胶的包, 请参考上面提到的乳胶安装指南的 "升级宏包" 的部分).

我提一提路径的事项. 您现在应该在阅一个叫 `main.pdf` 的文件, 对罢? 我称这个文件所在的目录为 `./` . 那么, `./main.pdf` 就是您正在读的文件. 类似地, `./main.tex` 就是 `./main.pdf` 的 "父亲"; 具体地, 乳胶可编 `./main.tex` (与别的一些文件) 为 `./main.pdf` . 在 `./` 下, 您可以看到一些别的目录; 别的目录下也会有一些文件. 比如, `./listings/sparrow.tex` 就是一只 "乳胶麻雀" (我在后面还会提到此事).

本书涉及的所有文字文件的编码都是**统一码转换格式辛**; 同时, 我使用如下的指令编译乳胶代码:

码 D.1: 本书用到的乳胶编译设定

```
latexmk -xelatex -shell-escape -file-line-error -norc -synctex=1
    -interaction=nonstopmode <file>
```

其中 <*file*> 就是待编译的乳胶文件的名字 (不含后缀 .tex); 具体一些, 是指含 \begin{document} 与 \end{document} 的文件. 比如, 为编译此书, 可执行

```
latexmk -xelatex -shell-escape -file-line-error -norc -synctex=1
    -interaction=nonstopmode ./main
```

(当然, 您可能需要适当地调整 ./ , 使其含一个名为 main.tex 的文件.)

一般地, 我不会详细地讨论一个乳胶包; 所以, 欲了解更多的信息, 可在终端里执行

码 D.2: 阅乳胶包的文档

```
texdoc <name_of_the_package>
```

以阅包的文档; 其中 <*name_of_the_package*> 就是包的名字. 例如, 若我想了解可自由定制页眉跟页脚的包 fancyhdr 的信息, 我可以在终端执行

```
texdoc fancyhdr
```

稍等片刻, 您就可以看到一个名为 fancyhdr.pdf 的文档.

值得一提的是, 大部分包的文档都是用胡话写的 (如 fancyhdr); 所以, 您最好具备一定的读胡话的能力. 当然了, 也有不少**土话的资料**.

本章提及的代码要么在 ./appendices/discussions on LaTeX.tex 里 (较短的代码), 要么在 ./listings/ 目录下的文件里 (较长的代码). 使用任何一个文字编辑器即可看到代码. 建议您善用文字编辑器为您提供的查找功能. 一般地, 按 Ctrl 键不放 (假如您使用水果系统, 请按 Command 键), 再按 f 键, 最后释放这二个键, 应该就可以搜索文件内的文字了. 假如您用维姆或依麦克斯文字编辑器, 想必您比我更懂如何查找文字, 对罢?

一般地, 我推荐使用视觉工作室代码写乳胶文件. 视工代是一个现代的、美观的、强大的文字编辑器; 您可以在互联网上找到关于它的更多信息.

我假定您安装了这款编辑器, 并打算用它写乳胶. 那么, 按 F1 键, 删去大于号 > , 输入

```
ext install james-yu.latex-workshop
```

再按 Enter 键, 即可安装视工代的乳胶插件 LaTeX Workshop. 然后, 按 F1 键, 输入 open settings json , 触发 “Preferences: Open Settings (UI)”, 就可以看

到一个名为 `settings.json` 的文字文件. 在最外层的 { 与 } 里, 追加

码 D.3: 为视工代准备的乳胶编译设定

```
"latex-workshop.latex.recipe.default": "latexmk",
"latex-workshop.latex.recipes": [
    {
        "name": "latexmk",
        "tools": [
            "latexmk"
        ]
    }
],
"latex-workshop.latex.tools": [
    {
        "args": [
            "-xelatex",
            "-shell-escape",
            "-file-line-error",
            "-norc",
            "-synctex=1",
            "-interaction=nonstopmode",
            "%DOCFILE%"
        ],
        "command": "latexmk",
        "name": "latexmk"
    }
],
```

假如您看到 “Expected comma” 的错误, 那么, 在

```
"latex-workshop.latex.recipe.default": "latexmk",
```

的上一行的末尾加一个 `,` (逗号). 最后, 记得保存文件. 这样, 您就不必每次都输入较长的编译命令了.

您可以自行在互联网上了解 LaTeX Workshop 的用法; 我就不继续展开了. (当然, 假如您愿意, 此插件自带的胡话文档就很不错.)

D.2 麻雀

或许, 您知道, 麻雀是一种小但完整的生物. That is to say, a sparrow is something small but complete in every detail. 在学习新的东西时, 麻雀是一种对初学者相当友好的东西; 我喜欢, 您应该也不讨厌.

下面就是一只乳胶麻雀 (胡话: LaTeX sparrow). 具体地, 下面的代码虽小, 但充分体现了用乳胶写**土话**的**书**时的基本要素.

码 D.4: ./listings/sparrow.tex

```
\documentclass[fontset=fandol]{ctexbook}

\title{这是书的标题}
\author{这是作者}
\date{这是日期}

\begin{document}% 正式开始文档.

\frontmatter

\maketitle

\tableofcontents

\listoftables

\chapter{前言}

我想向乳胶问好.

```

```
\mainmatter

\part{甲}

\chapter{我向乳胶问好}

您好，乳胶\footnote{胡话里，乳胶就是 ``latex''.}!
或许，我应该叫您的原名，\LaTeX{}.

I want%
    to learn
        100\% about \LaTeX{}.

\section{指数与三角}

据说，指数 $\exp$ 跟三角 $\cos$，$\sin$ 间有这样的联系：
\begin{equation}\label{eq:Euler}
    \mathrm{e}^{\mathrm{i} x} = \cos {x} + \mathrm{i} \sin {x}.
\end{equation}
不过，这到底是什么意思呢？

似乎还是要给定义的.
指数函数的定义是
\[
    \mathrm{e}^{z} = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!}
    + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots.
\]
$\cos$ 的定义是
\[
    \cos {z}
    = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} z}
```

```
    + \mathrm{e}^{-\mathrm{i} z}}{2},
\]
而 $\sin$ 的定义是
\[
    \sin {z}
    = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} z}
    - \mathrm{e}^{-\mathrm{i} z}}{2\mathrm{i}}.
\]

所以，根据定义，
\[
    \cos {x} + \mathrm{i} \sin {x}
    = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} x}
    + \mathrm{e}^{-\mathrm{i} x}}{2}
    + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} x}
    - \mathrm{e}^{-\mathrm{i} x}}{2}
    = \mathrm{e}^{\mathrm{i} x}.
\]

\section{算学家: Leonhard Euler}

据说，算学家 Leonhard Euler 早就发现式~(\ref{eq:Euler}).
今日，大家一般都叫它 Euler 公式.

Euler 是谁?
他是 18~世纪的瑞士\footnote{一个欧洲国家.}算学家.\\
1707~年 4~月 15~日出生于瑞士巴塞尔;\\
1783~年 9~月 18~日逝世于俄国\footnote{一个欧洲国家.}圣彼得堡.

事实上，有很多 Euler 公式;\par
不过，我就不多说了.
```

```
\clearpage% 分页.

可用 \verb/\clearpage/ 手动换页.

顺便, 也总算看到奇数页的非空页眉了\footnote{也就是说,
    奇数页的非空页眉的左侧是节标题, 右侧是页码.}.

\chapter{不知道写什么了}

\section{摆了}

我问不下去了啊\footnote{因为真没什么东西可问了.}.

我暂且列出一些术语罢 (表~\ref{tab:glossaries}).

\begin{table}[h!]
    \centering
    \caption{术语表}\label{tab:glossaries}
    \begin{tabular}{l l}
        \hline
        胡话   & English       \\
        土话   & Chinese       \\
        乳胶   & \LaTeX{}      \\
        算学   & mathematics   \\
        算学家 & mathematician \\
        \hline
    \end{tabular}
\end{table}

没别的了.
```

```
\part{乙}

\chapter{章}

\section{节}

\subsection{小节}

\subsubsection{小小节}

差不多了.
其实还有 \verb|paragraph| 跟 \verb-subparagraph-,
但似乎也没什么用.
很多书一般不会分这么多层罢\footnote{应该不会罢.}.

\paragraph{段}

您好. 我紧跟着 ``段''\footnote{确实.}.

\subparagraph{小段}

您好. 我也紧跟着 ``小段''. 我还缩进了.

\subparagraph{段小}

您好. 我也紧跟着 ``段小''. 我还缩进了.

\clearpage

就这样罢.
```

```
\appendix

\chapter{乳胶的历史}

\section{什么是乳胶?}

乳胶 (胡话: \LaTeX{}) 是
Leslie Lamport\footnote{一个美国人.}
作出的一种排版应用.

\backmatter

\chapter{后记}

麻雀虽小, 五脏俱全.

\end{document}% 结束文档.
```

既然您可以正常地用乳胶, 那就试编译这只乳胶麻雀罢. 您也不必手动复制本章的代码; 我早已准备了一个独立的乳胶文件供您编译 (首行代码的上面的那行字告诉您这只麻雀的家在哪儿).

您应该能编出一个 23 页的**可携带文档格式**文件, 对罢? 如果没有问题, 我就继续讲解了.

一般地, 一个完整的乳胶文件由二个部分作成: 导言区 (胡话: preamble) 与文档区. 所谓导言区, 就是 `\begin{document}` 前面的内容. 这么看来, 这只乳胶麻雀的导言区就是

```
\documentclass[fontset=fandol]{ctexbook}

\title{这是书的标题}
\author{这是作者}
\date{这是日期}
```

可以看到, `\documentclass` 后面接了一些东西. `{ctexbook}` 告诉乳胶, 这个文件使用名为 `ctexbook` 的文档类 (土话的书); `[fontset=fandol]` 是所谓的 “可选参数” (按需求加). 具体地, `fontset=fandol` 指使用名为 fandol 的一套 (用于土话的) 字体. 原则上, 我可以不加这个可选参数; 不过, 我还是加上了它. 为什么呢? 其实这得问问宏硬公司为什么**胡话**的窗不带黑体、楷体与仿宋罢. 假如您使用**土话**的窗, 那么您可以删去麻雀的 `[fontset=fandol]`, 再试着编译, 以证明这确实只是一个 “可选参数”.

后面的 `\title`, `\author` 跟 `\date` 的作用就很明显了. 就算您看不懂长长的胡话文档, 您也一定能看出, 这分别是 “标题” “作者” “日期” 的意思. 使用方法也很简单: 在花括号里输入对应的信息即可. 值得一提, 假如您不希望指定日期, 您可以留白; 也就是说, 写 `\date{}` 即可. 假如您希望指定今日的日期, 您可以向花括号内写入 `\today`; 也就是说, 写 `\date{\today}` 即可. 那么, 您今日编它是一个结果, 而明日编它就又是另一个结果.

这只麻雀的导言区倒是没什么亮点; 所以, 现在看一看文档区. 文档区就是 `\begin{document}` 到 `\end{document}` 的内容. 具体地, 就是码 D.4 去除其导言区后的内容.

我们深入文档区罢.

我先说一下 `%` 的作用. **一般地**, 假如乳胶代码的一行里出现了 `%`, 那么从 `%` 到该行的末尾的所有字符都会被忽视. 所以, *% 正式开始文档.* 就是不会被乳胶所处理的内容. 我们可利用此特性, 为乳胶代码插入注释. 当然, 假如我们需要在文档里输入百分号, 可输入 `\%`; 这里, 反斜线 `\` 起到了 “转义” 的作用: 原本乳胶会忽视一行内 `%` 到行尾的字符, 但 `\` 却 “改变” 了 `%` 的含义, 使百分号被输出.

一般地, 一本书有三个部分: 正文前的资料 (胡话: front matter), 正文的主要部分 (胡话: main matter), 正文后的附加资料 (胡话: back matter). 正文前的资料一般包括封面、目录、前言等内容. 正文的主要部分一般就是书的主体. 正文后的附加资料一般包括参考文献、索引、后记等内容. 跟正文的主要部分相比, 正文前的资料与正文后的附加资料一般都不带章的编号 (直白地, 书有第一章, 第二章等章节, 但一般都不说 “目录是第几章” “后记是第几章”, 对罢?). 并且, 经验告诉我们, 正文前的资料的页码一般不用 1, 2, 3, 而是用罗马数字 i, ii, iii. 然后, 正文的主要部分的页码一般会被重置为 1, 并使用

阿拉伯数字. 最后, 正文后的附加资料的页码一般不会被重置, 而是延续正文的主要部分的页码的风格.

现在您应该不难理解 `\frontmatter` 的作用了. 它就是告诉乳胶, 如果不遇见 `\mainmatter`, 那么不给章编号, 且页码使用罗马数字. 具体地, 在这只麻雀里, 下面的内容都是 "正文前的资料":

```
\maketitle% 利用导言区的信息作一个简洁的封面.

\tableofcontents% 作一个目录.

\listoftables% 作一个展示书的表格的位置的目录.

\chapter{前言}% 插入新的一章. 注意, 本章不被编号.

% 下面的都是前言里的内容.
我想向乳胶问好.
```

您可能会注意到, 跟码 D.4 相比, 我添加了一些以 `%` 开头的文字: 这些都相当于是注释, 解释了命令的功能. (所以, 原则上, 我完全可在码 D.4 里加入这些东西; 不过, 为了简洁, 我还是选择单独提取相应的代码加注释.)

有一个小细节值得一提: "目录" 跟 "前言" 前都有空白页. 这是因为, 乳胶默认会使章从奇数页 (右手边) 开始. 当然, 有简单的办法取消这个设定; 不过, 我暂时不提此事. 具体地, 这只麻雀的第 ii, iv, vi, viii 页都是空的.

好. 现在我们进入 `\mainmatter`. 从这儿到 `\backmatter` 前的章都会被编号; 并且, 页码被重置, 且使用阿拉伯数字编号. 具体地, 这只麻雀的第 viii 页的下一页就是第 1 页.

又有一个小细节值得一提: 虽然这只麻雀的 "第一部分 甲" 下方标注的页码为 1, 但您的可携带文档格式文件阅读器会认为它在第 9 页. 同时, 这只麻雀的封面并不在第 i 页, 而是在第 1 页. 作为对比, 您现在正在看的 `main.pdf` 就没有这个虫; 本书的封面在第 i 页. 此虫可被一个名为 bookmark 的包修复. 具体地, 在导言区里加入一行字

```
\usepackage{bookmark}
```

保存文件, 然后再试着编译 `./listings/sparrow.tex`. 那么, 这只麻雀所显

示的页码就会与可携带文档格式文件阅读器的页码保持一致. 顺便, 您还会发现, 这只麻雀还多了一些 “书签”; 您用鼠鼠点一点, 阅读器就会跳到您刚点的地方.

我顺便提一提 \usepackage 罢. 正如其字面意思那样, 这句话可导入被 { 与 } 所包围的那个包. 当然, 一般地, 就像文档类有可选参数那样, 包也有可选参数. 在 \usepackage 后加入一对方括号, 然后向方括号内填入需要的东西, 就可以实现自己想要的效果. 可向方括号内写入的内容一般都会被包的文档提及 (您还记得怎么看一个包的文档吗?).

我们看 “第一章　我向乳胶问好”. 您可能会注意到, “您好, 乳胶” 的右上角有一个小小的数字 1; 这其实是所谓的脚注编号. 往脚 (页底) 看, 您就会看到一条注解, “解释了” 乳胶为何物. 命令 \footnote 即可实现此事; 在需要脚注的地方后写 \footnote , 再写一对花括号, 再往花括号里填脚注即可. 您可能会问: “1” 在哪儿? 为什么不需要指定编号呢? 一般地, 乳胶会自动地计算编号; 您一般也不愿手动指定 1, 2, 3 罢.

您可能经常看到像 “LaTeX” 这样交错的五字母; 这算是乳胶的 “彩蛋” 罢. 事实上, 单独的 \LaTeX 就可输出这样的文字. 那么, 为什么还要一对花括号呢? 那是因为有些人打字时, 胡话跟土话间是不带空格的:

```
\documentclass[fontset=fandol]{ctexbook}

\begin{document}
打游戏还是得用Windows系统
\end{document}
```

您可试编译上面的乳胶代码; 因为它比较简短, 我就不单独提供文件了. 不出意外, 您可以看到 “打游戏还是得用 Windows 系统”. 在代码里, 我没加空格; 不过, 它的输出里, “Windows” 的前后都有空白.

那么, 假如他想输出 “我觉得 LaTeX 真不错”, 会怎么打? 一个可能的版本如下:

```
\documentclass[fontset=fandol]{ctexbook}

\begin{document}
我觉得\LaTeX真不错
```

```
\end{document}
```

您可试编译上面的乳胶代码; 因为它比较简短, 我就不单独提供文件了. 不出意外, 您会 "逝世". 事实上, 这么打代码, 乳胶会认为 `\LaTeX真不错` 是一个命令; 可惜, 这是一个未被定义的东西, 故乳胶无法编译上面的乳胶代码.

对此, 他有三种解决办法. 他可以加空格:

```
我觉得 \LaTeX 真不错
```

当然, 假如他不想加太多空格, 则可考虑

```
我觉得\LaTeX 真不错
```

假如他就是不想加空格, 那就得这样了:

```
我觉得\LaTeX{}真不错
```

这里, `{}` 就隔开了命令 `\LaTeX` 跟后面的文字 `真不错`.

值得注意的是, 这只麻雀的第 1 章的第 1 段是

> 您好, 乳胶[1]! 或许, 我应该叫您的原名, LaTeX.

而不是

> 您好, 乳胶[1]!

为什么呢?

您用过词儿或 WPS 文字罢? 当您在一段里输入较多文字时, 您会发现, 词儿或 WPS 文字自动地断行. 毕竟, 这是所谓的 "所见即所得" 的文字处理应用. 不过, 我们一般都是用各种各样的文字编辑器写乳胶. 所以, 就会有这样的情况: 有的文字编辑器不支持自动地断行 (也就是说, 就算一行文字很长, 超过了屏幕的显示范围, 它还是不会断此行); 有的文字编辑器支持自动地断行, 不过, 因为各种各样的原因, 这个功能并没有被启用. 至少, 我很清楚, 不少主流的代码编辑器都不会自动地断行, 除非您自己更改这个设定. 不过, 据我所知, 初始设定的力量还是很强大的: 很多人不用 "更好用的设定", 仅仅是因为初始的设定不是 "更好用的设定" 罢了. 而且, "更好用的" 往往因人而异.

乳胶就 "照顾" 那些不自动地断行的文字编辑器. 具体地, **简单地 "换行" 只是加空格, 而 "二次换行" 才是另起一段.** 也就是说, 一般地, 在乳胶里, 我们用空行隔开二段. 所以,

I wantto learn 100% about LaTeX.

是第 2 段.

或许您会好奇, 为什么这只麻雀给出 “wantto”. 这也很简单: 我在 `want` 后加了 `%` . 您还记得 `%` 的作用罢? 一般地, 假如乳胶代码的一行里出现了 `%` , 那么从 `%` 到该行的末尾的所有字符都会被忽视. 这么看来, 这里的 `%` 只是忽视了自身才对呀? 您还记得, “一次换行” 只是加空格罢? `%` 其实也忽视了这个 “相当于空格的换行”. 并且, 乳胶**一般**会忽视行首的空白. 所以, 就算 `to` 前有 4 个空格, 它还是无作用. 所以, 这只麻雀给出 “wantto”. 这也顺便解释了为什么 `100\%` 前的 8 个空格被忽略.

可用 `\section` 插入新的一节. 它的用法跟 `\chapter` 的类似, 所以我不细说了.

接下来, 您可以看到一些算学公式. 我不在这里教您输入**具体的**算学公式; 也就是说, **我不教您算学符号与乳胶指令的对应关系.** 您可以参考别的资料学习它. 我简单说几句话. 一般地, 算学公式有 “显示型”, 还有 “行内型”. “显示型” 一般是独立成行的公式的样式; “行内型” 一般是被嵌入于内文的公式的样式.

一般地, 欲输入行内公式, 用二个 `$` 包围公式即可. 不被二个 `$` 包围, `ABC` 就只是普通的一个胡话词 ABC; 被二个 `$` 包围, `$ABC$` 就是算学公式 ABC.

一般地, 欲输入显示公式, 有二个常用的方法. 一个是不带编号的 `\[` 与 `\]` ; 一个是带编号的 `equation` 环境. 假如您希望您待输入的公式无编号, 用 `\[` 与 `\]` 包围它; 假如您希望您待输入的公式有编号, 用 `\begin{equation}` 与 `\end{equation}` 包围它.

一般地, 您还可方便地引用带编号的公式. 实现此事需二步: 加标签, 再引用它. 在 `\begin{equation}` 后, 加入 `\label` , 再写一对花括号, 再往花括号里填一个 (唯一的) 标签. 如:

```
\begin{equation}\label{eq:Euler}
    \mathrm{e}^{\mathrm{i} x} = \cos {x} + \mathrm{i} \sin {x}.
\end{equation}
```

我使用了 `eq:Euler` . 我推荐您像我一样为公式加标签. `eq` 告诉我, 这是公式 (胡话: equation); `Euler` 告诉我, 这是跟算学家 Euler 有关的公式. 于是, 我可如此引用此公式:

```
据说，算学家 Leonhard Euler 早就发现式~(\ref{eq:Euler}).
今日，大家一般都叫它 Euler 公式.
```

这二行字给出

> 据说, 算学家 Leonhard Euler 早就发现式 (1.1). 今日, 大家一般都叫它 Euler 公式.

可以看到, 一般地, `\ref{eq:Euler}` 给出 "纯的编号": 不带 "式", 也不带括号.

我顺便解释一下 ~ 是什么罢. 它其实就是一个空格. 不过, 它是一个 "不可被断行的" 空格. 在什么时候有用呢? 譬如, "式 (1.1)" 的 "(1.1)" 不宜出现于行首, 是罢? "Mrs. Mori" 也不宜跨越二行, 对罢? 这个时候, 可用 ~ ; 它告诉乳胶, 不要在此处断行.

我们接着看这只麻雀. 不出意外, 您应该会在下一页看到二条脚注. 不出意外, 二条脚注的编号分别为 2 与 3. 一般地, 乳胶按章为脚注编号, 而不是按页.

您会发现, 若在一行后插入 `\\` , 则乳胶强行在此处断行 (但不分段); 若在一行后插入 `\par` , 则乳胶强行在此处分段 (自然地, 也断行了). 我曾说, **一般地**, 一次换行是加空格, 而二次换行是分段. 现在, 您也知道了, 也有强制断行与分段的方法. 不过, 一般地, 不要用它们太多次.

类似地, 您可用 `\clearpage` 强行换页.

不过, 有意思地, 为什么

```
可用 \verb/\clearpage/ 手动换页.
```

里的 `\clearpage` 不换页呢? 这是一个好问题; 好问题值得有好解答. 很简单: 可用 `\verb` 输出一些需 "原样打印" (胡话: to be printed verbatim) 的文字. 您可能会问: 假如待原样打印的文字带 / 怎么办? 很简单; 换别的. `\verb:g/f:` 就是 `g/f` . 当然了, `\verb+g/f+` 也是 `g/f` ; 类似地, `\verb?g/f?` 还是 `g/f` . 一般地, 待原样打印的文字里, 总有没被用到的符号罢? 挑一个没被用到的符号 s, 再使待原样打印的文字被二个 s 包围即可.

我也提一提乳胶的书的页眉与页脚的初始设定. 一般地, 章从右边 (奇数页) 开始. 章的首页的页眉无内容, 页脚有被居中放置的页码. 章的偶数页的页脚无内容, 页眉为页码跟章名. 章的奇数页 (除首页) 的页脚无内容, 页

眉为节名跟页码. 章名与节名都被设为斜体 (不过, 土话除外). 章名与节名都被全部大写.

我们看完了 “第一章”. 接着, 我们看 “第二章　不知道写什么了”.

可以看到, “我问不下去了啊” 的右上角有一个小小的 1. 没错, 这是脚注; 也正如我所言, 一般地, 脚注按章编号.

您还能看到一个表格. 一般地, 在乳胶里, 欲作一个表格, 用 tabular 环境. 譬如, 用

```
\begin{tabular}{l c r}
    胡话   & English       & 1   \\
    土话   & Chinese       & 22  \\
    乳胶   & \LaTeX{}      & 333 \\
    算学   & mathematics   & 4   \\
    算学家 & mathematician & 05  \\
\end{tabular}
```

可作出如下表格:

胡话	English	1
土话	Chinese	22
乳胶	$\LaTeX$	333
算学	mathematics	4
算学家	mathematician	05

一般地, 用 & 分隔表格的列, 用 \\ 分隔表格的行 (当然, 您可能还记得 \\ 的其他的用途).

可以看到, 这个表格无任何边框, 且第 1, 2, 3 列分别左、中、右对齐. l , c , r 分别对应胡话的 left, center, right.

假如我们要为表格绘外边框, 可用

```
\begin{tabular}{|l c r|}
    \hline
    胡话   & English       & 1   \\
    土话   & Chinese       & 22  \\
    乳胶   & \LaTeX{}      & 333 \\
```

```
    算学   & mathematics   & 4   \\
    算学家 & mathematician & 05  \\
    \hline
\end{tabular}
```

这可作出

胡话	English	1
土话	Chinese	22
乳胶	LaTeX	333
算学	mathematics	4
算学家	mathematician	05

当然, 我们还可作出稍复杂的表格:

```
\begin{tabular}{||l c|r||}
    \hline\hline
    胡话   & English       & 1   \\
    土话   & Chinese       & 22  \\
    乳胶   & \LaTeX{}      & 333 \\
    算学   & mathematics   & 4   \\
    \hline
    算学家 & mathematician & 05  \\
    \hline\hline
\end{tabular}
```

这可作出

胡话	English	1
土话	Chinese	22
乳胶	LaTeX	333
算学	mathematics	4
算学家	mathematician	05

总之, 在表格的行的相应位置插入 \hline, 可绘制水平的线; 而在紧跟 \begin{tabular} 后的 { 跟 } 里, 用 | 可绘制竖直的线; 空格代表此处不绘制竖直的线.

我就不继续讲制表的细节了; 这不是我的主要任务. 您可以考虑阅专门的乳胶教程.

您还看到了 “表 2.1: 术语表” 罢? 我讲讲如何作出这样的东西.

事实上, `tabular` 是一个相对简单的表环境. 它无法处理稍复杂的需求. 所以, 我们要组合多个环境. 可用 `table` 环境为表加题注与 (自动) 编号:

```
\begin{table}[h!]
    \caption{术语表}
    \begin{tabular}{l c|r}
        \hline
        胡话   & English       & 1  \\
        算学家 & mathematician & 05 \\
        \hline
    \end{tabular}
\end{table}
```

这可作出

表 D.1: 术语表

胡话	English	1
算学家	mathematician	05

这里, 紧跟 `\begin{table}` 后的 `[h!]` 告诉乳胶, 若空间允许, 则在 “此处” (胡话: here) 插入表格. 假如您不加 `[h!]`, 那么它可能会跑到页的上方. `\centering` 要求乳胶居中表格. 用 `\caption` 即可为表添加题注. 因为我置它于 `tabular` 前, 故题注在表的上方.

那么, 又要如何提及表格呢? 您可能还记得, 可用 `\label` 为公式加标注, 并用 `\ref` 提及公式. 我们也可施此法于表格. 具体地, 在 `\caption{`*<您的题注>*`}` 后加 `\label`, 再写一对花括号, 再往花括号里填一个 (唯一的) 标签. 引用时, 用 `\ref`.

这是一个具体的例:

```
我在表~\ref{tab:terms} 列出了一些被我用,
但在其他场合不常被见到的术语.
```

```
\begin{table}[h!]
    \centering
    \begin{tabular}{l c|r}
        \hline
        胡话   & English       & 1  \\
        算学家 & mathematician & 05 \\
        \hline
    \end{tabular}
    \caption{术语表}\label{tab:terms}
\end{table}
```

这可作出

我在表 D.2 列出了一些被我用, 但在其他场合不常被见到的术语.

胡话	English	1
算学家	mathematician	05

表 D.2: 术语表

我就说这么多作表的事罢.

接下来, 就是 “第二部分　乙”. 其实这没什么亮点: 我也只是展现关于 `\part` , `\chapter` , `\section` , `\subsection` , `\subsubsection` , `\paragraph` , `\subparagraph` 的用法而已.

接下来, 您可以看到 “附录 A　乳胶的历史”. 这是 `\appendix` 干的好事. 原本, 这应当是 “第四章　乳胶的历史”; 不过, 我加了魔法, 故从此之后 (到 `\backmatter` 前) 章被编号为 A, B, C 等大写字母. 相应地, 节就是 A.1, A.2, A.3 等. 不过, 页码并没有被重置.

最后, 您可以看到 “后记”; 因为我加了 `\backmatter` , 故此章不被编号.

或许, 我该指出一个事实: `\frontmatter` , `\mainmatter` , `\appendix` , `\backmatter` 都不是必要的. 毕竟, 不是所有的书都有附录; 不是所有的书都

会在最后一个带编号的章后加不带编号的章; 也不是所有的书都要目录 (尤其是小篇幅的作品). 我在前面举的一些例里没说这四句话.

好了. 我觉得我已经讲完了这只麻雀. 我希望本节能帮您更好地理解乳胶.

D.3　各种各样的东西

接下来, 我简单地提及我怎么作出本书罢.

我使用 ctexbook 写书. 事实上, 这并不是一个特别好用的文档类. 据我所知, 专业的有 memoir 跟 KOMA-Script. 不过, 它们对土话的支持没有 ctexbook 的那么好. 这是一本土话书, 所以, 我还是决定, 充分利用自己的蹩脚的胡话阅包的文档与 LaTeX Stack Exchange. 毕竟, 乳胶是胡人的东西; 而且, 跟词儿或 WPS 文字相比, 乳胶确实不那么好上手. 而且, 要想用好乳胶, 最好自己有一定的动手能力.

在下面的讨论里, 我假定您按码 D.1 或码 D.3 编译乳胶文件; 我假定您的目标是写一本以土话为主的书; 我假定您也用 ctexbook.

D.3.1　修改字体

本书选用了一些跟初始字体不一样的字体.

简单地, 可用 `\setmainfont` 修改胡话的字体, 用 `\setCJKmainfont` 修改土话的字体; 不过, 具体地, 因为 ctexbook 有 “默认土话字体”, 故我们要先取消它们. 此事不难: 指定 ctexbook 的一个选项即可:

```
\documentclass[fontset=none]{ctexbook}
```

当然, 若您指定了其他的选项, 您自行添上相关设定即可. 譬如, 我假定您已使用如下的设定:

```
\documentclass[a4paper,UTF8]{ctexbook}
```

那么, 您在 `[` 后加入 `fontset=none,` , 即

```
\documentclass[fontset=none,a4paper,UTF8]{ctexbook}
```

假如您已经指定了 `fontset` , 那么请改其值为 `none` . 最后, 在导言区添加

```
\setmainfont{XITS}
\setCJKmainfont{Source Han Serif CN}
```

即可改主要的胡话的字体为 XITS, 且改主要的土话的字体为 Source Han Serif CN (思源宋体).

Well. To be continued.
I have been busy with other things in real life.
I will come back.

The Unlicense

This is free and unencumbered software released into the public domain.

Anyone is free to copy, modify, publish, use, compile, sell, or distribute this software, either in source code form or as a compiled binary, for any purpose, commercial or non-commercial, and by any means.

In jurisdictions that recognize copyright laws, the author or authors of this software dedicate any and all copyright interest in the software to the public domain. We make this dedication for the benefit of the public at large and to the detriment of our heirs and successors. We intend this dedication to be an overt act of relinquishment in perpetuity of all present and future rights to this software under copyright law.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

For more information, please refer to `<http://unlicense.org/>`

CC0 1.0 Universal

CREATIVE COMMONS CORPORATION IS NOT A LAW FIRM AND DOES NOT PROVIDE LEGAL SERVICES. DISTRIBUTION OF THIS DOCUMENT DOES NOT CREATE AN ATTORNEY-CLIEN RELATIONSHIP. CREATIVE COMMONS PROVIDES THIS INFORMATION ON AN "AS-IS" BASIS. CREATIVE COMMONS MAKES NO WARRANTIES REGARDING THE USE OF THIS DOCUMENT OR THE INFORMATION OR WORKS PROVIDED HEREUNDER, AND DISCLAIMS LIABILITY FOR DAMAGES RESULTING FROM THE USE OF THIS DOCUMENT OR THE INFORMATION OR WORKS PROVIDED HEREUNDER.

Statement of Purpose

The laws of most jurisdictions throughout the world automatically confer exclusive Copyright and Related Rights (defined below) upon the creator and subsequent owner(s) (each and all, an "owner") of an original work of authorship and/or a database (each, a "Work").

Certain owners wish to permanently relinquish those rights to a Work for the purpose of contributing to a commons of creative, cultural and scientific works ("Commons") that the public can reliably and without fear of later claims of infringement build upon, modify, incorporate in other works, reuse and redistribute as freely as possible in any form whatsoever and for any purposes, including without limitation commercial purposes. These owners may contribute to the Commons to promote the ideal of a free culture and the further production of creative, cultural and scientific works, or to gain reputation or greater distribution for their Work in part through the use and efforts of others.

For these and/or other purposes and motivations, and without any expectation of additional consideration or compensation, the person associating CC0 with a Work (the “Affirmer”), to the extent that he or she is an owner of Copyright and Related Rights in the Work, voluntarily elects to apply CC0 to the Work and publicly distribute the Work under its terms, with knowledge of his or her Copyright and Related Rights in the Work and the meaning and intended legal effect of CC0 on those rights.

1. Copyright and Related Rights. A Work made available under CC0 may be protected by copyright and related or neighboring rights (“Copyright and Related Rights”). Copyright and Related Rights include, but are not limited to, the following:

i. the right to reproduce, adapt, distribute, perform, display, communicate, and translate a Work;
ii. moral rights retained by the original author(s) and/or performer(s);
iii. publicity and privacy rights pertaining to a person's image or likeness depicted in a Work;
iv. rights protecting against unfair competition in regards to a Work, subject to the limitations in paragraph 4(a), below;
v. rights protecting the extraction, dissemination, use and reuse of data in a Work;
vi. database rights (such as those arising under Directive 96/9/EC of the European Parliament and of the Council of 11 March 1996 on the legal protection of databases, and under any national implementation thereof, including any amended or successor version of such directive); and
vii. other similar, equivalent or corresponding rights throughout the world based on applicable law or treaty, and any national implementations thereof.

2. Waiver. To the greatest extent permitted by, but not in contravention of, applicable law, Affirmer hereby overtly, fully, permanently, irrevocably and unconditionally waives, abandons, and surrenders all of Affirmer's Copyright and Related Rights and associated claims and causes of action, whether now known or unknown (including existing as well as future claims and causes of action), in the Work (i) in all territories worldwide, (ii) for the maximum duration provided by applicable law or treaty (including future time extensions), (iii) in any current or future medium and for any number of copies, and (iv) for any purpose whatsoever, including without limitation commercial, advertising or promotional purposes (the “Waiver”). Affirmer makes the Waiver for the benefit of each member of the public at large and to the detriment of Affirmer's heirs and successors, fully intending that such Waiver shall not be subject to revocation, rescission, cancellation, termination, or any other legal or equitable action to disrupt the quiet enjoyment of the Work by the public as contemplated by Affirmer's express Statement of Purpose.

3. Public License Fallback. Should any part of the Waiver for any reason be judged legally invalid or ineffective under applicable law, then the Waiver shall be preserved to the maximum extent permitted taking into account Affirmer's express Statement of Purpose. In addition, to the extent the Waiver is so judged Affirmer hereby grants to each affected person a royalty-free, non transferable, non sublicensable, non exclusive, irrevocable and unconditional license to exercise Affirmer's Copyright and Related Rights in the Work (i) in all territories worldwide, (ii) for the maximum duration provided by applicable law or treaty (including future time extensions), (iii) in any current or future medium and for any number of copies, and (iv) for any purpose whatsoever, including without limitation commercial, advertising or promotional purposes (the “License”). The License shall be deemed effective as of the date CC0 was applied by Affirmer to the Work. Should any part of the License for any reason be judged legally invalid or ineffective under applicable law, such partial invalidity or ineffectiveness shall not invalidate the remainder of the License, and in such case Affirmer hereby affirms that he or she will not (i) exercise any of his or her remaining Copyright and Related Rights in the Work or (ii) assert any associated claims and causes of action with respect to the Work, in either case contrary to Affirmer's express Statement of Purpose.

4. Limitations and Disclaimers.

a. No trademark or patent rights held by Affirmer are waived, abandoned, surrendered, licensed or otherwise affected by this document.
b. Affirmer offers the Work as-is and makes no representations or warranties of any kind concerning the Work, express, implied, statutory or otherwise, including without limitation warranties of title, merchantability, fitness for a particular purpose, non infringement, or the absence of latent or other defects, accuracy, or the present or absence of errors, whether or not discoverable, all to the greatest extent permissible under applicable law.
c. Affirmer disclaims responsibility for clearing rights of other persons that may apply to the Work or any use thereof, including without limitation any person's Copyright and Related Rights in the Work. Further, Affirmer disclaims responsibility for obtaining any necessary consents, permissions or other rights required for any use of the Work.
d. Affirmer understands and acknowledges that Creative Commons is not a party to this document and has no duty or obligation with respect to this CC0 or use of the Work.

I Have a Dream

注 本章是用来测试排版的.

注 Martin Luther King the Younger gave his nameknown speech *I Have a Dream* in Washingtonburg on the twenty-eighth of Weedmonth in 1963.

I am happy to gather with you today in what will go down as the greatest throng for freedom in our homeland's tale. Five score years ago, a great American, in whose betokening shadow we stand today, underwrote his name on the deed giving freedom to the black thrall. This timely boding came as a great beacon light of hope to black thralls in their micklereds who had been seared in the wilms of withering wronghood. A frovering daybreak it was to end the long night of thralldom.

But one hundred years later, the black man still is not free. One hundred years later, the life of the black man is still sadly crippled in the shackles of beshedding, One hundred years later, the black man lives on a lonely iland of warmth in the midst of a wide forblowing fivelway. One hundred years on, the black man is still ailing in the herns of American fellowship, spurned in his own land. And so we've come here today to unhele a shameful fettle.

In a way we have come to our homeland's headtown to call in a draught. When our ledewealth's draughtsmen outspent the words of Lawwrit and Selfhood, they were pledging a ledger to which every American was to fall erve from. This was the begetting that all men, yes, black men as well as white men, would be indowed the “Shendless Rights” of “Life, Freedom and the seeking of Happiness.” Needless to edmind that America has since lied on her oath, insofar as her black fellowmen can reckon.

The deed was a hight that all men, yes, black and white would have life's yieldless rights, freedom and the right to seek eadiness.

It is fair to see today that Americans have been found wanting in fairness, doing little on this hightful deed in their dealings with their black brothers. Rather than holding worthiness firmly in their hearts in following up this hallowed call to right a wrong, America has given its black folk a ungood draught. A draught that has come back with the words “not enough fee.”

But we unwilling to believe that the horden is without fairness or fee. We also are unwilling to believe that there is not enough fee in this land's great hordern. So we have come to take in fee this draught, a draught that will give upon asking freedom's boons and hele's fairness.

We have also come to this hallowed spot to bring to America's mind again Now's pressing need. This is not the time to take a cooling-off sop or the calming healthdrug of let's go forward little-by-little.

Now is the time to make true this mighty hight.

Now it is the time for the black folk to rise from aparthood's darkness and lonely hollow into fair- go's sunlit path.

Now it is time to lift our homeland out of this folkstrandish quicksand onto the rock of brotherly steadfastness.

Now is the time to give a fair deal to all God's children.

It would be dooming for the homeland to stay deaf to the black folk's thronging call for freedoms and rights and underguess their steadfastness in seeking them now. Their sweltering summer's lawful gladlessness will not go-away until there is freedom with fairness. Nineteen sixty-three is not the end but a beginning. Those who hoped that the black American needed only to let-off some steam and will now be fulfilled will have a stark mindjarring awakening if the homeland goes back to its old, unfair ways.

There will be neither be a frithsome soughing over America until the black American is given his full rights. The uprising, like a windwhirl, will shake our folkdom's frame until the sun shines fairly and evenly on all.

We can never be fulfilled as long as our bodies, weighed down and tired with the day's wayfaring cannot get board and lodging in inns along our highways and in our great towns.

We cannot be fulfilled as long as the black folks leave small wretchsteads to end-up only in larger wretchsteads.

We can never be fulfilled as long as our bairns have taken from them their self-worth and have their selfhood reaved from them by boards that read “for whites only.”

We cannot be fulfilled as long as a black folk in Mississippi cannot folk-aye and black folk in New York believe that they have nothing for which to folk-aye.

No, no we are not fulfilled and we will not be fulfilled until fairness flows on downwards like waters and righteousness fares forth like a mighty stream.

I am not unmindful that many have come here today ordeal-wearied and sorely smited. Others have come from steads where seeking your freedoms has left you harried and hounded, and smitten by harshness' biting winds, wrought upon you by those given to uphold your rights and freedoms.

You have been old-hands at finding understanding and insight in bearing the burden. Go on with your work with the belief that dreeing an unearned weird will make you free.

Go back to Mississippi, go back to Alabama, go back to South Carolina, go back to Georgia, go back to Louisiana, go back to the wretchsteads, to the small black townships throughout our now great towns, knowing that somehow this wrong can and will be made right.

Let us not wallow in the yesterday's waned and withered hopes. I say to you, my friends, we have the burdens in our heart and toils in our the mind, today and tomorrow.

I have a dream. It is a foresight deeply and longly rooted in the American mind.

I have a dream that one day this folkdom will rise up and live out the true meaning of its belief that all men are made even.

I have a dream that one day in Georgia's red hills one-time thralls' sons and one-time thrall-owners' sons will sit down together at brotherhood's table.

I have a mindsight that one day Mississippi shire, a shire sweltering under downtrodden-ness' heat, will be shaped otherwisely into an lush well, brimming with freedom and fairness.

I have a dream that my four little children will one day live in a land where they will be deemed not by their hue, but by their deeds.

I have a dream today.

I have a dream that one day down in Alabama, with it's evil-willed hindering haters, its leader having his lips dripping with the words of “getting in the way” and “overturning”; that one day right there in Alabama little black children, carls and frows, can link hands with little white carls and frows, as sisters and brothers.

I have a dream today.

I have a dream that every dale shall be swallowed-up, every hill shall be lifted up and every berg shall be made low, the rough places will be made smooth, and the crooked places will be made straight and the Lord's greatness shall be made for all to see and all flesh shall see it together.

This is our hope. This is the belief that I will go back to the South filled with. With this belief we will have the strength to hew out from hopelessness' hill, hope's stone.

With this hope we can shape anew our heart clattering, sadly beating for our land asundered, into a brotherhood gladdened and gleeful.

With this belief we can work together, make our beseeching to God together, to dree together, to be locked-up together, to climb up for freedom together, knowing that we will be free one day.

This will be the day when all God's bairns will sing with new understanding “My land 'tis of thee, sweet land of freedom, of thee I sing. Land where my fathers died, land of the wayfarer's pride, from every fellside, let freedom ring!”

And if America is to be a great land, this must become true. So let freedom ring from the hilltops in New Hampshire. And let freedom from New York's mighty bergs ring.

Let freedom ring from the heightening Alleghenies in Pennsylvania.

Let freedom ring from the snow-topped Rockies in Colorado.

Let freedom ring from California's wendsome slopes.

But not only that, let freedom ring from Georgia's Stony berg.

Let freedom ring from every hill and molehill throughout Mississippi and along every bergside.

When we let freedom ring, when we let it ring from every boarding- house and every small hamlet, from every shire and every great town, we can speed up the day when all God's children, black and white, Jew and un-Jews, Romish-church men and those who are not Romish churchmen, can link hands and sing the old song, in words sung by this land's enthralled black folk, Free at last, free at last. “Thank God Almighty, we are free at last.”

The Speeches of Professor Xenofon Zolotas

注 本章是用来测试排版的.

注 In 1957 and 1959, the Greek economist Professor Xenofon Zolotas, Governor of the bank of Greece and Governor of the Funds for Greece, delivered two speeches in English using Greek words only. As Prof. Zolotas said:

"I always wished to address this Assembly in Greek, but I realized that it would have been indeed Greek to all present in this room. I found out, however, that I could make my address in Greek which would still be English to everybody. With your permission, Mr. Chairman, I shall do it now, using with the exception of articles and prepositions only Greek words."

The First Speech

Kyrie,

I eulogize the archons of the Panethnic Numismatic Thesaurus and the Ecumenical Trapeza for the orthodoxy of their axioms, methods and policies, although there is an episode of cacophony of the Trapeza with Hellas.

With enthusiasm we dialogue and synagonize at the synods of our didymous Organizations in which polymorphous economic ideas and dogmas are analyzed and synthesized.

Our critical problems such as the numismatic plethora generate some agony and melancholy. This phenomenon is characteristic of our epoch. But, to my thesis, we have the dynamism to program therapeutic practices as a prophylaxis from chaos and catastrophe.

In parallel, a panethnic unhypocritical economic synergy and harmonization in a democratic climate is basic.

I apologize for my eccentric monologue. I emphasize my eucharistia to you Kyrie, to the eugenic and generous American Ethnos and to the organizers and protagonists of this Amphictyony and the gastronomic symposia.

September 26, 1957

The Second Speech

Kyrie,

It is Zeus' anathema on our epoch for the dynamism of our economies and the heresy of our economic methods and policies that we should agonise between the Scylla of numismatic plethora and the Charybdis of economic anaemia.

It is not my idiosyncrasy to be ironic or sarcastic but my diagnosis would be that politicians are rather cryptoplethorists. Although they emphatically stigmatize numismatic plethora, energize it through their tactics and practices.

Our policies have to be based more on economic and less on political criteria.

Our gnomon has to be a metron between political, strategic and philanthropic scopes. Political magic has always been antieconomic.

In an epoch characterised by monopolies, oligopolies, menopsonies, monopolistic antagonism and polymorphous inelasticities, our policies have to be more orthological. But this should not be metamorphosed into plethorophobia which is endemic among academic economists.

Numismatic symmetry should not antagonize economic acme.

A greater harmonization between the practices of the economic and numismatic archons is basic.

Parallel to this, we have to synchronize and harmonize more and more our economic and numismatic policies panethnically.

These scopes are more practical now, when the prognostics of the political and economic barometer are halcyonic.

The history of our didymous organisations in this sphere has been didactic and their gnostic practices will always be a tonic to the polyonymous and idiomorphous ethnical economics. The genesis of the programmed organisations will dynamize these policies. I sympathise, therefore, with the aposties and the hierarchy of our organisations in their zeal to programme orthodox economic and numismatic policies, although I have some logomachy with them.

I apologize for having tyrannized you with my hellenic phraseology.

In my epilogue, I emphasize my eulogy to the philoxenous autochthons of this cosmopolitan metropolis and my encomium to you, Kyrie, and the stenographers.

October 2, 1959

参考文献

[1] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/.

[2] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/.

[3] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/.

[4] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/.

[5] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/.

[6] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/.

[7] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables [EB/OL]. (2014-02-01) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/.

[8] MENGER K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.

[9] KUHN S. The derivative á la Carathéodory[J]. The American Mathematical Monthly, 1991, 98(1): 40-44.

[10] 阮龙培. 关于立体几何应用集合论符号的几点看法[J]. 数学通报, 1986, 1: 31.

[11] 吴长庆. 立体几何使用 “集合语言” 的准确性[J]. 唐山师范学院学报, 1997, 5: 76.

[12] RUDIN W. Principles of mathematical analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976: 136-137, 141-142.

[13] 梅加强. 数学分析[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 66-77.

[14] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.

[15] SukeraSparo. ことのはアムリラート[CP/OL]. 1.05a. (2018-11-09) [2022-05-20]. http://sukerasparo.com/amrilato/.

[16] SukeraSparo. いつかのメモラージョ 〜ことのはアムリラート〜 [CP/OL]. 1.1.1. (2019-07-26) [2022-05-20]. http://sukerasparo.com/memorajxo/.

[17] Unlicense.org » Unlicense yourself: set your code free[EB/OL]. (2019-02-11) [2022-05-20]. https://unlicense.org/.

[18] Creative Commons legal code[EB/OL]. (2020-07-21) [2022-05-20]. https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/legalcode.

[19] KNUTH D E. The TEXbook: vol. A[M]. 16th. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1989.

[20] MITTELBACH F, GOOSSENS M, BRAAMS J L, et al. The LATEX companion 2[M]. second. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Professional, 2004.

[21] CTEX.ORG, et al. ctex: LATEX classes and packages for Chinese typesetting [CP/OL]. 2.5.8. (2021-12-12) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/ctex.

[22] UMEKI H, CARLISLE D. geometry: Flexible and complete interface to document dimensions[CP/OL]. 5.9. (2020-01-02) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/geometry.

[23] ARSENEAU D. import: Establish input relative to a directory[CP/OL]. 6.2. (2020-04-01) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/import.

[24] GREGORIO E. xpatch: Extending etoolbox patching commands [CP/OL]. 0.3a. (2020-03-25) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/xpatch.

[25] GREGORIO E. imakeidx: A package for producing multiple indexes [CP/OL]. 1.3e. (2016-10-15) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/imakeidx.

[26] OBERDIEK H. hologo: A collection of logos with bookmark support [CP/OL]. 1.15. (2021-11-16) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/hologo.

[27] LaTeX3 Project, American Mathematical Society. amsmath: AMS mathematical facilities for LaTeX[CP/OL]. 2.1. (2021-11-15) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/amsmath.

[28] HØGHOLM M, MADSEN L, PROJECT L. mathtools: Mathematical tools to use with amsmath[CP/OL]. 1.28a. (2022-02-27) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/mathtools.

[29] ROBERTSON W, STEPHANI P, WRIGHT J, et al. unicode-math: Unicode mathematics support for XeTeX and LuaTeX[CP/OL]. 0.8q. (2020-01-31) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/unicode-math.

[30] American Mathematical Society. amsthm: Typesetting theorems (AMS style)[CP/OL]. 2.20.3. (2020-05-29) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/amsthm.

[31] SCHWARZ U M, CHOU Y. thmtools: Extensions to theorem environments[CP/OL]. 0.72. (2020-08-01) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/thmtools.

[32] RAHTZ S, OBERDIEK H, PROJECT L. hyperref: Extensive support for hypertext in LaTeX[CP/OL]. 7.00q. (2022-05-17) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/hyperref.

[33] OBERDIEK H. bookmark: A new bookmark (outline) organization for hyperref[CP/OL]. 1.29. (2020-11-06) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/bookmark.

[34] FAIRBAIRNS R, MITTELBACH F. footmisc: A range of footnote options [CP/OL]. 6.0d. (2022-03-08) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/footmisc.

[35] Van OOSTRUM P. fancyhdr: Extensive control of page headers and footers in LaTeX 2_ε[CP/OL]. 4.0.3. (2022-05-18) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/fancyhdr.

[36] WETTE K. emptypage: Make empty pages really empty[CP/OL]. 1.2. (2010-04-30) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/emptypage.

[37] BOSISIO F. evenpage: Ensure that the total number of pages is even [CP/OL]. 1.0. (1998-01-21) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/evenpage.

[38] BEZOS J. enumitem: Control layout of itemize, enumerate, description[CP/OL]. 3.9. (2019-06-20) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/enumitem.

[39] LEHMAN P, JOSEPH W, AUDREY B, et al. BibLaTeX: Sophisticated bibliographies in LaTeX[CP/OL]. 3.17. (2022-02-02) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/biblatex.

[40] 胡振震. biblatex-gb7714-2015: 符合 GB/T 7714-2015 标准的 BibLaTeX 参考文献样式[CP/OL]. 1.1i. (2022-05-17) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/biblatex-gb7714-2015.

[41] HEINZ C, MOSES B, HOFFMANN J. listings: Typeset source code listings using LaTeX[CP/OL]. 1.8d. (2020-03-24) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/listings.

[42] CARLISLE D, RAHTZ S, PROJECT L. graphicx: Enhanced support for graphics[CP/OL]. 1.2d. (2021-09-16) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/graphicx.

[43] SOMMERFELDT A. subcaption: Support for sub-captions[CP/OL]. 1.5. (2022-02-20) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/subcaption.

[44] SEGLETES S B. readarray: Read, store and recall array-formatted data [CP/OL]. 3.1. (2021-09-17) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/readarray.

[45] TALBOT N. glossaries-extra: An extension to the glossaries package [CP/OL]. 1.48. (2021-11-22) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/glossaries-extra.

[46] WILSON P R, MADSEN L. memoir: Typeset fiction, non-fiction and mathematical books[CP/OL]. 3.7q. (2022-02-20) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/memoir.

[47] KOHM M. KOMA-Script: A bundle of versatile classes and packages [CP/OL]. 3.36. (2022-05-08) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/koma-script.

[48] 曾祥东. zhlipsum: 中文乱数假文 (Lorem ipsum)[CP/OL]. 1.2.0. (2020-04-10) [2022-05-20]. https://ctan.org/pkg/zhlipsum.

[49] The Anglish Moot. List of lores[EB/OL]. (2021-07-09) [2022-05-20]. https://anglish.fandom.com/wiki/List_of_Lores.

[50] The Anglish Moot. List of greens, ovets, and crouds[EB/OL]. (2020-09-02) [2022-05-20]. https://anglish.fandom.com/wiki/List_of_Greens,_Ovets,_and_Crouds.

[51] KING M L, Jr. I have a dream[EB/OL]. (2017-06-19) [2022-05-20]. https://anglish.fandom.com/wiki/I_Have_a_Dream.

[52] ZOLOTAS X. The speeches of Professor Xenofon Zolotas[EB/OL]. (2020-06-30) [2022-05-20]. https://www.explorecrete.com/various/greek-zolotas.htm.

[53] 维基百科. 乙酰水杨酸[EB/OL]. (2020-04-10) [2022-05-20]. https://zh.wikipedia.org/zh-cn/%E4%B9%99%E9%85%B0%E6%B0%B4%E6%9D%A8%E9%85%B8.

[54] 鲁迅. 祝福[M/OL]//彷徨. 1924 [2022-05-20]. https://www.marxists.org/chinese/reference-books/luxun/04/001.htm.

[55] YANG X, YANG G. The new year's sacrifice[M/OL]//Selected Stories of Lu Hsun. Beijing: Foreign Languages Press, 1961 [2022-05-20]. https://www.marxists.org/archive/lu-xun/1924/02/07.htm.

[56] 辰鸽鸽鸽咕[EB/OL]. (2021-12-25) [2022-05-20]. https://space.bilibili.com/167378770.

[57] 王然. 一份简短的关于 LaTeX 安装的介绍[A/OL]. 2022.5.1. (2022-05-01) [2022-05-20]. http://mirrors.ctan.org/info/install-latex-guide-zh-cn/install-latex-guide-zh-cn.pdf.

[58] 刘海洋. LaTeX 入门[M]. 北京: 电子工业出版社, 2013.

[59] 包太雷. LaTeX notes: 雷太赫排版系统简介[A/OL]. 2.62. 一品文化教育. (2021-09-21) [2022-05-20]. https://github.com/huangxg/lnotes.

[60] 吴康隆. 简单粗暴 LaTeX[A/OL]. 1.6.4-pre. (2019-12-15) [2022-05-20]. https://github.com/wklchris/Note-by-LaTeX.

[61] OETIKER T, PARTL H, HYNA I, et al. The not so short introduction to LaTeX 2_ε: Or LaTeX 2_ε in 139 minutes[A/OL]. 6.4. (2021-09-21) [2022-05-20]. http://mirrors.ctan.org/info/lshort/english/lshort.pdf.

[62] CTeX 开发小组. 一份 (不太) 简短的 LaTeX 2_ε 介绍: 或 111 分钟了解 LaTeX 2_ε[A/OL]. 6.03. (2021-11-20) [2022-05-20]. http://mirrors.ctan.org/info/lshort/chinese/lshort-zh-cn.pdf.

List of Vegetables, Fruits and Spices

下面是一些蔬菜、水果、香辛料的名字. 这没什么用处; 我只是在测试索引的排版而已.

索引

跋

嘛.

曾经, 我还是个有 “大梦想” 的人, 恨不得向每个人宣传自己写的关于 “(几乎) 无变量的微积分”; 不过, 效果并不是很好. 我想了想, 这应该是自己的原因; 毕竟, 传统的记号如此成熟, 本书的新记号也不够吸引人. 这么看来, 我不如大方地承认本书作为算学书是相当失败的. 不过, 我也不愿意就这么放弃一切; 所以, 我添加了很多东西, 展现了一些简单的乳胶技艺, 并希望这些对初学者来说是有用的.

写书很累; 毕竟, 就算我站在 “巨人的肩膀” 上, 我还是遇到了很多阻止本书被正常编译的错误. 乳胶确实难啊. 之后, 我会越来越忙. 我还要处理很多现实生活中的重要的或紧急的事. 写书, 至多是一个爱好罢. 我应该会在很长一段时间里都不写书了. 毕竟, 我的热情几乎没有了. 我至多维护我的作品. 嘛; 其实, 这也 “不算是” 我的作品了. 我都不要版权了呀. 毕竟, 我用了 the Unlicense 跟 CC0.

姑且就说这么多罢; 因为, 我也不知道该说些什么了.

纳纳米
2022 年 5 月 22 日

Well, you have reached the very last page.
Farewell, my readers.