

几乎无变量的微积分

纳纳米

二〇二二年三月三十一日

目录

前言	v
第一章 集与函数	1
1.1 集	1
1.2 关系与函数	4
1.3 函数的演算	9
第二章 导数	17
2.1 背景	17
参考文献	19

前言

定义 算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的“微积分”跟“分析学”不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为“微积分”就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、定积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并不是从零教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是怎样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了“几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘

教版八年级下册的算学课本的定义.

定义 在讨论的问题中, 取值会发生变化的量称为**变量**, 取值固定不变的量称为**常量** (或**常数**).

定义 一般地, 如果变量 y 随着变量 x 而变化, 并且对于 x 取的每一个值, y 都有唯一的一个值与它对应, 那么称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是胡话 a function of x (土话: x 的函数) 的简记. 这时把 x 叫作**自变量**, 把 y 叫作**因变量**. 对于自变量 x 取的每一个值 a , 因变量 y 的对应值称为**函数值**, 记作 $f(a)$.

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触“函数”的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用“这种函数”讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用“有序对”定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话“变量”“对应”. 不过, 更严谨地看, “有序对”是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义 (a, b) 为 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号 f (而不是 $f(x)$), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \text{ 或 } \frac{d}{dx}f(x);$$

我们计算不定积分时, 用的记号是

$$\int f(x) dx;$$

我们计算定积分时, 用的记号是

$$\int_a^b f(x) dx.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链式法则为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

这里 $u = f(x)$, $y = f(u) = f(g(x))$. 视导数为“变率”, 那这就是在说, y 关于 x 的变率等于 y 关于 u 的变率与 u 关于 x 的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的 $\frac{11}{10}$ (也就是说, A 比 B 快 $\frac{1}{10}$), 而 B 的速率是 C 的速率的 $\frac{9}{10}$ (也就是说, B 比 C 慢 $\frac{1}{10}$), 那么 A 的速率是 C 的速率的 $\frac{99}{100}$; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: “有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?” 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用 D 表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说, $D \exp = \exp$, $D \cos = -\sin$, $D \sin = \cos$. 不过, 当我想表达 $D \ln$ 时, 我意识到了一个问题: “已知 $D \ln x = 1/x$. 左边的 $\ln x$ 就是 \ln , 可右边的 $1/x$ 应该是什么?” 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \text{rec}: \mathbb{R} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写 $D \ln = \text{rec}$. 不过, 我还是没法好好地表示 $D \arcsin$ 跟 $D \arctan$. 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的“什么也不干”的函数

$$\begin{aligned} \text{fdn}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量定积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的“读书报告”: 这本书“浪费了”巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 前几日, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些“优良传统”也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些“优良传统”是不重要的.

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

二〇二二年三月三十一日

第一章 集与函数

我先简单地介绍一下基础概念吧.

1.1 集

定义 1.1 集是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 其对象称为元.

注 1.2 事实上, 很多说汉语的算学家似乎更喜欢说“集合”而不是“集”, 尤其当“集”前无限定词时. 这多半是因为所谓“汉语”其实是现代汉语, 而现代汉语喜“双音节词”. 比方说, 曾表示“人的脸色”的“颜色”被用来指胡话的 color; 单独的“色”似乎是胡话的 erotic. 当然了, 我的汉语也不好, 我是语言的门外汉. 总之, 大家视“集”为一个跟胡话的 set 同义的文字即可; 类似地, 视“元”为一个跟胡话的 element 同义的文字即可.

注 1.3 事实上, 集与元是所谓的“原始概念”. 我们至多描述集或元是什么; 我们无法定义集或元.

定义 1.4 无元的集是空集.

注 1.5 或许您在别的地方能看到形如 \emptyset 的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

注 1.6 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

定义 1.7 一般地, 若集 A 由元 a, b, c, \dots 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

定义 1.8 若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a 属于 A 或 A 包含 a . 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a 不属于 A 或 A 不包含 a .

注 1.9 “属于”也是原始概念.

定义 1.10 若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的子集或 B 是 A 的超集. 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用“真”形容之.

注 1.11 或许, 您在别的地方能看到形如 \subseteq, \subsetneq 或 \subsetneq 的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说 A 是 B 的真子集, 我们再加上 $A \neq B$ 即可.

例 1.12 设 $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$. 不难看出, $0 \in C$, $1 \notin C$, $C \subset B$.

注 1.13 空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

定义 1.14 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A 等于 B , 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

定义 1.15 集 A 与 B 的交是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的并是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集의交与并.

例 1.16 设 E 是全体偶数作成的集; 设 O 是全体奇数作成的集. 不难看出, $E \cap O$ 为空集, 而 $E \cup O$ 恰为全体整数作成的集.

定义 1.17 设 A, B 是集. 定义

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

注 1.18 值得注意的是, 我们没说 $B \subset A$.

例 1.16 (续页 3) 不难看出, $E - O$ 跟 $O - E$ 都是空集, 故 $E - O = O - E$. 不过, 这个 $-$ 不是减法, 故当然不能由此推出 “ $E + E = O + O$ ”, 更不能推出 $E = O$.

定义 1.19 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里, (a, b) 是**有序对**. 我们规定, 二个有序对 (a, b) 与 (c, d) 相等相当于 $a = c$ 且 $b = d$.

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

(a_1, a_2, \cdots, a_n) 与 (b_1, b_2, \cdots, b_n) 相等, 相当于 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

注 1.20 一般地, $A \times B \neq B \times A$.

注 1.21 设 A, B 分别有 m, n 个元. 则 $A \times B$ 有 mn 个元.

定义 1.22 一般地, \mathbb{N} 指全体非负整数作成的集; \mathbb{Z} 指全体整数作成的集; \mathbb{Q} 指全体有理数作成的集; \mathbb{R} 指全体实数作成的集; \mathbb{C} 指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 1.23 在微积分里, \mathbb{R} 的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数 a, b , 其中 $a < b$. 那么我们记:

$$(1) [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$$

$$(2) [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$$

$$(3) (a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

$$(4) (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$$

$$(5) (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(6) (-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$

$$(7) (-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$$

$$(8) (a, +\infty) = \{x \mid a < x\};$$

$$(9) [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}.$$

这九类子集统称为**区间**.

注 1.24 可以验证, 若 c, d 是某区间 I 的任意二个相异元, 且 $c < d$, 则 $[c, d] \subset I$. 反过来, 若 $A \subset \mathbb{R}$, 且任取 A 的二个相异元 p, q , 必有 $[m, M] \subset A$, 则 A 为区间; 这里 m, M 分别是 p, q 的较小者与较大者.

1.2 关系与函数

定义 1.25 设 A, B 是集. $A \times B$ 的子集称为 A 到 B 的**关系**.

定义 1.26 设 A, B 是集. 若 A 到 B 的关系 f 适合下述性质, 则说 f 是 A 到 B 的**函数** (或**映射**):

- 任取 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $(a, b) \in f$;
- 若 (a, b) 与 (a, c) 均为 f 的元, 则 $b = c$.

设 $(a, b) \in f$. 我们记此事为 $b = f[a]$, 并说 b 是 a 在函数 f 下的**像**, a 是 b 在函数 f 下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数 f :

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

“ $f: A \rightarrow B$ ”是“ f 是 A 到 B 的函数”的简写.

注 1.27 一般地, 我们写 a 在函数 f 下的像为 $f(a)$, 而不是 $f[a]$. 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

例 1.28 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$. 显然, $A \times B$ 有 6 个元. 不难看出, $A \times B$ 有 64 个子集, 故 A 到 B 的关系共有 64 个. 不过, A 到 B 的函数只有 8 个.

定义 1.29 在本书, 我们为“什么也不干”的函数起一个名字. 具体地说, 设集 A, B 非空, 且 $A \subset B$. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中 ι 是希腊字母 iota.

我们简单地写 $\iota_{A,A}$ 为 ι_A . 有时, 若既不必指出 A , 也不必指出 B , 我们直接写 ι . 换句话说: ι (或者带下标的 $\iota_A, \iota_{A,B}$) 啥也不干, 即 $\iota[x] = x$, 其中 x 可以是任意文字.

一般也称 ι 为**恒等函数**.

定义 1.30 设 f 是 A 到 B 的函数. 称 A 为 f 的**定义域**; 称 B 为 f 的**陪域**.

定义 1.31 设 $C \subset A$. 设 $f: A \rightarrow B$. 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称 $f[A]$ 为 f 的**值域**. 显然 f 的值域是 f 的陪域的子集.

注 1.32 设 $f: A \rightarrow B$. 若 $D \subset C \subset A$, 则 $f[D] \subset f[C]$.

定义 1.33 设 f, g 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 都有 $f[a] = g[a]$, 则说 $f = g$.

可写 $f = g$ 的否定为 $f \neq g$. 具体地说, 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] \neq g[a]$, 则说 $f \neq g$.

定义 1.34 设 R 是 A 到 B 的关系. B 到 A 的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为 R 的**反关系**.

定义 1.35 设 f 是 A 到 B 的函数. 若 f 的反关系 g 是 B 到 A 的函数, 则称 g 是 f 的**反函数**. 我们写 f 的反函数为 $f^{[-1]}$.

注 1.36 不难验证, 若 g 是 f 的反函数, 则 f 也一定是 g 的反函数. 这是因为 R 的反关系的反关系是 R .

定义 1.37 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 C 到 D 的函数, 且 $f[A] \subset C$. 任取 A 的元 a . 按照函数的定义, 存在唯一的 $b \in f[A]$ 使 $(a, b) \in f$. 既然 $b \in f[A] \subset C$, 再根据函数的定义, 存在唯一的 $d \in g[C] \subset D$ 使 $(b, d) \in g$. 这样的 d 可用 $g[f[a]]$ 表示. 作 A 到 D 的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是 A 到 D 的函数. 我们称函数 $g \circ f$ 为 f 与 g 的**复合**.

注 1.38 设 $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$, 且 $f[A] \subset C$. 设 $E \subset A$. 那么 $f[E] \subset f[A] \subset C$, 故 $g[f[E]]$ 是有意义的. 我们说, $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$.

取 $d \in g[f[E]]$. 按定义, 存在 $t \in f[E]$ 使 $g[t] = d$. 对这个 t 而言, 又存在 $e \in E$ 使 $f[e] = t$. $(g \circ f)[e]$, 按定义, 等于 $g[f[e]]$, 也就是 $g[t]$, 也就是 d . 所以 $d \in (g \circ f)[E]$. 这说明 $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$.

取 $d' \in (g \circ f)[E]$. 按定义, 存在 $e' \in E$ 使 $(g \circ f)[e'] = d'$. 所以 $t' = f[e'] \in f[E]$. 那么 $g[t'] = d'$. 所以 $d' \in g[f[E]]$. 这说明 $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$.

既然 $g[f[E]]$ 跟 $(g \circ f)[E]$ 相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了 $a \in A$ 时 $(g \circ f)[a]$ 就是 $g[f[a]]$, 可我们并没有定义 $(g \circ f)[E]$ 是 $g[f[E]]$. 大算学家 John von Neumann 说过:

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.

所以, 习惯就好了.

注 1.39 设 $f: A \rightarrow B$. 那么 $f \circ 1_A = f$, 且 $1_B \circ f = f$.

注 1.40 一般地, $g \circ f \neq f \circ g$. 一方面, $g \circ f$ 有定义时, $f \circ g$ 可能无定义; 另一方面, 即使 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 都有定义, 二者也不一定相等.

定理 1.41 函数的复合是结合的. 具体地说, 设 $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$, $h: E \rightarrow F$, 且 $f[A] \subset C$, $g[C] \subset E$. 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $h \circ g \circ f$.

证 $q = g \circ f$ 是 A 到 D 的函数, 且 $p = h \circ g$ 是 C 到 E 的函数. 因 $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$, 故 $h \circ q = h \circ (g \circ f)$ 是 A 到 F 的函数; 因 $f[A] \subset C$, 故 $p \circ f = (h \circ g) \circ f$ 也是 A 到 F 的函数. 任取 $a \in A$. 则

$$(h \circ (g \circ f))[a] = h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],$$

$$((h \circ g) \circ f)[a] = (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]]. \quad \text{证毕.}$$

定义 1.42 设 f 是 A 到 B 的函数.

- 若任取 A 的相异二元 a 与 a' , 都有 $f[a] \neq f[a']$, 则称 f 是**单函数**.
- 若对任意 $b \in B$, 都存在 $a \in A$ 使 $f[a] = b$, 则称 f 是**满函数**.

例 1.43 设 $A \subset B$, 且 A 非空. A 到 B 的函数 $\iota_{A,B}$ 总是单函数. 不过, 若 $A \neq B$, 则 $\iota_{A,B}$ 不是满函数.

注 1.44 一般地, 设 A, B, C 是三个非空集, 且 $B \subset C$. 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 A 到 C 的函数, 且对任意 $a \in A$, $f[a] = g[a]$. 那么, f 是单函数的一个必要与充分条件是: g 是单函数. 若 f 不是满函数, 则 g 也不是.

若 f 是满函数, 则 g 也是满函数的一个必要与充分条件是: $B = C$.

定理 1.45 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 B 到 A 的函数 g 适合如下性质:

- 对任意 $a \in A$, $g[f[a]] = a$; 也就是说, $g \circ f = \iota_A$.
- 对任意 $b \in B$, $f[g[b]] = b$; 也就是说, $f \circ g = \iota_B$.

则:

- 至多有一个这样的 g ;
- g 是 f 的反函数.

证 至多只有一个这样的 g 是显然的. 具体地, 若 $g': B \rightarrow A$ 适合 $g' \circ f = \mathbf{1}_A$, 且 $f \circ g' = \mathbf{1}_B$, 则

$$g = g \circ \mathbf{1}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathbf{1}_A \circ g' = g'.$$

下证 g 是 f 的反函数. 事实上, 若 h 是 f 的反函数, 则不难验证 h 适合上述二条性质. 所以 $g = h$. 证毕.

定理 1.46 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$ 的反函数分别是 $f^{[-1]}: B \rightarrow A$ 与 $g^{[-1]}: C \rightarrow B$. 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

证 记 $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}: C \rightarrow A$; 记 $p = g \circ f$. 不难用结合律验证 $q \circ p = \mathbf{1}_A$, 且 $p \circ q = \mathbf{1}_B$. 这里以 $q \circ p$ 为例:

$$\begin{aligned} q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\ &= (q \circ g) \circ f \\ &= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ \mathbf{1}_B) \circ f \\ &= f^{[-1]} \circ f \\ &= \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

证毕.

注 1.47 不难看出, 函数 f 有反函数的一个必要与充分条件是: f 是单函数, 且 f 是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

定义 1.48 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 $C \subset A$. 作 C 到 B 的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知, f_C 是 C 到 B 的函数. 我们说, f_C 是 f 在 C 上的**限制**.

1.3 函数的演算

注 本节的语言或许比较混乱.

本节讨论 \mathbb{R} 的子集到 \mathbb{R} 的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是“几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

定义 1.49 设 $f: A \rightarrow B$, $B \subset \mathbb{R}$ 且 $0 \in B$. 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] = 0$, 就说 a 是 f 的一个根.

现在我们介绍一些“基本初等函数”.

定义 1.50 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \text{id}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常数函数:

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\rightarrow \{c\}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$$

其中 c 是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty), \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 余弦函数:

$$\begin{aligned}\cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};\end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan: \{x \mid \cos[x] \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln: (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right], \\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 s 指 \sin 在 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$ 上的限制 $\sin_I: I \rightarrow [-1, 1]$, 2π 是 \cos 的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan: \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right), \\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 t 指 \tan 在 $J = (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 上的限制 $\tan_J: J \rightarrow \mathbb{R}$;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\text{abs}: \mathbb{R} &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\text{sqrt}: [0, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

注 1.51 在本书, 2π 是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

例 1.52 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned}f: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right].\end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达 f 的定义. 具体地,

$$f = \exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A.$$

这里, \ln_A 自然是 \ln 在 A 上的限制.

不过, 复合并不够用.

例 1.53 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned}g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3.\end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达 g 的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写 $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$ 跟 $\sin[x]$ 为 $\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A$ 与 \sin_A ; 可是, 我们要怎么写 x^3 ? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

定义 1.54 设 A, B, C 是 \mathbb{R} 的非空子集. 设 $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$. 设 $*$ 是文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$\begin{aligned}f * g: A &\rightarrow D, \\ x &\mapsto f[x] * g[x],\end{aligned}$$

其中陪域 $D \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定. 一般地, 若 $*$ 是乘号, 则可被省略. 可写 $0_A - f$ 为 $-f$; 这里 0_A 当然是常数函数 0 在 A 上的限制.

若对任意 $x \in A$, 都有 $f[x] \neq 0$, 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}: A &\rightarrow E, \\ x &\mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $E \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

若对任意 $x \in A$, $f[x]^{g[x]}$ 有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g: A &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $F \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

例 1.55 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写 x^3 为 $(\iota_A)^3_A$. 所以

$$g = (\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^3_A;$$

这里, 我们取陪域为 \mathbb{R} .

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的 g 还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取 $B = (0, 1)$. 令

$$\begin{aligned} h: B &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \text{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与“对应法则”. 不过, 您不妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如“函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \ln(1-x)$ ”这样的文字时, 我们其实视这个 f 的定义域为全体使 $f(x)$ 有意义的一切实数作成的集 (也就是 $[-1, 1)$); 当我们看到形如“函数 $g(x) = 1-x$ ($x \in [-1, 0]$)”的文字时, 我们认为 g 的定义域为已经提到的集 $[-1, 0]$. f 跟 g 的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, “万能的” \mathbb{R}).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取 \mathbb{R} .

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的 h 为

$$h = \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 - t} + \text{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

定义 1.56 我们称定义域为 A 的函数为 (定义在) A 上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

定义 1.57 若 $B \subset A$, f 是 A 上的函数, 我们说 f 在 B 上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} f + g &= g + f, & fg &= gf, \\ (f + g) + h &= f + (g + h), & (fg)h &= f(gh); \end{aligned}$$

这里 f, g, h 都是 A 上的函数.

设函数 ℓ 的值域是 A 的子集. 记 $f/g = \frac{f}{g}$, $f \wedge g = f^g$. 设 $*$ 是五文字 $+$, $-$, \cdot , $/$, \wedge 的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned} ((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]] \\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x]. \end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于 $+$ 与 \cdot 的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中 useful, 故我建议您好好看看它.

例 1.58 我们知道, 对任意实数 x , 都有 $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$. 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

例 1.59 对任意实数 x , 都有 $\exp[x] \cdot \exp[-x] = 1$. 所以

$$\exp(\exp \circ -\mathbf{i}) = 1.$$

例 1.60 我们可写“二倍角公式”为

$$\begin{aligned}\sin \circ 2\mathbf{i} &= 2 \cos \sin, \\ \cos \circ 2\mathbf{i} &= \cos^2 - \sin^2 \\ &= 2 \cos^2 - 1 = 1 - 2 \sin^2 \\ &= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\ \tan \circ 2\mathbf{i} &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2\mathbf{i} \\ &= \frac{2 \cos \sin}{\cos^2 - \sin^2} \\ &= \frac{2 \tan}{1 - \tan^2} \\ &= \frac{2\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}^2} \circ \tan.\end{aligned}$$

例 1.61 值得注意的是, $f(g + h)$ 并不是 $f \circ (g + h)$:

$$\begin{aligned}2 \cos(\cos + \sin) &= 2 \cos^2 + 2 \cos \sin \\ &= (\cos + \sin - 1) \circ 2\mathbf{i} \\ &= (\cos + \sin) \circ 2\mathbf{i} - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(1 - \frac{2\pi}{8}\right) \circ 2\mathbf{i} - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(2\mathbf{i} - \frac{2\pi}{8}\right) - 1.\end{aligned}$$

例 1.62 值得注意的是, 本书的 \sin^{-1} 不是 \arcsin , \tan^{-1} 也不是 \arctan . 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\ &= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\ &= \frac{1 - \cos}{\sin} \\ &= \frac{2 \sin^2}{2 \cos \sin} \circ \frac{1}{2} \\ &= \tan \circ \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 1.63 我们看一些关于 \arcsin 跟 \arctan 的等式. 在本例, 我们约定, \sin, \tan 分别表示 $\sin_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}$ 与 $\tan_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}$. 这样,

$$\sin \circ \arcsin = \mathbf{1}_{[-1, 1]},$$

$$\tan \circ \arctan = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}.$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$\begin{aligned}\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\mathbf{1}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]} \circ \arcsin) \\ &= (\cos \circ \mathbf{1}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}) \circ \arcsin \\ &= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{t}^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\ &= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{t}^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\ &= \text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{t}^2).\end{aligned}$$

这里的 \mathbf{t} 自然是 $\mathbf{t}_{[-1, 1]}$.

类似地,

$$\begin{aligned}\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\mathbf{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)} \circ \arctan) \\ &= (\cos \circ \mathbf{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}) \circ \arctan \\ &= \left(\text{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2} \right) \circ \arctan \\ &= \left(\text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathbf{t}^2} \circ \tan \right) \circ \arctan\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos \tan) \circ \arctan = \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

注 1.64 或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号: $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$\begin{aligned}
\cos[\arcsin] &= \text{sqrt}[1 - \mathfrak{t}^2], \\
\cos[\arctan] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 + \mathfrak{t}^2]}, \\
\sin[\arctan] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 + \mathfrak{t}^2]}, \\
\tan[\arcsin] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 - \mathfrak{t}^2]}.
\end{aligned}$$

虽然我已经用 $f[a]$ 表示 a 在 f 下的像了, 我自然地也用 $f[C]$ 表示 C 的每个元在 f 下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用 $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 这是 Marian 先生提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.

第二章 导数

2.1 背景

我们先简单地提一提导数是何物.

定义 2.1 设 $x \in \mathbb{R}$. 设 δ 为正数. 则 $N[x, \delta] = (x - \delta, x + \delta)$ 是 x 的一个邻域. 称 $N[x, \delta] - \{x\} = (x - \delta, x) \cup (x, x + \delta)$ 是 x 的一个去心邻域.

参考文献

- [1] Menger K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.
- [2] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/>.
- [3] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/>.
- [4] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/>.
- [5] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables[EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/>.
- [6] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/>.
- [7] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/>.

- [8] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/>.