

# 几乎无变量的微积分

---

78 分快速上手

纳纳米

版本 6, 2022 年 4 月 12 日



# 目录

前言	iii
<b>第一章 集与函数</b>	<b>1</b>
1.1 集 . . . . .	1
1.2 关系与函数 . . . . .	4
1.3 函数的演算 . . . . .	8
<b>第二章 连续函数</b>	<b>17</b>
2.1 连续的定义 . . . . .	17
2.2 连续函数 . . . . .	21
2.3 连续函数的积分 . . . . .	25
<b>第三章 导数</b>	<b>29</b>
3.1 背景 . . . . .	29
3.2 无变量的导数计算 . . . . .	36
<b>第四章 不定积分</b>	<b>41</b>
4.1 原函数与不定积分 . . . . .	41
4.2 函数集的演算 . . . . .	44
4.3 不定积分的演算 . . . . .	52
<b>第五章 积分</b>	<b>67</b>
5.1 不定积分与积分 . . . . .	67
5.2 计算积分 . . . . .	72



# 前言

定义 算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的“微积分”跟“分析学”不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为“微积分”就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并不是从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是怎样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

本书的副标题是《78 分快速上手》. 其实, 您不必太在意这个副标题里的“78 分”; 这只是一个“旧客” (胡话: joke). 假如忽略本书的标题页、目录、前言、参考文献, 那么本书就只有 78 页. 我假定您至多用 1 分 (即 60 秒) 看 1 页. 这么看来, 您至多用 78 分就可以了解最基本的微积分. 不过, 认真地, 若我至多用 1 分看 1 页**算学书**, 我可能学不到什么东西.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了“几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才

开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘教版八年级下册的算学课本的定义.

**定义** 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

**定义** 一般地, 如果变量  $y$  随着变量  $x$  而变化, 并且对于  $x$  取的每一个值,  $y$  都有唯一的一个值与它对应, 那么称  $y$  是  $x$  的**函数**, 记作  $y = f(x)$ . 这里的  $f(x)$  是胡话 a function of  $x$  (土话:  $x$  的函数) 的简记. 这时叫  $x$  作**自变量**, 叫  $y$  作**因变量**. 对于自变量  $x$  取的每一个值  $a$ , 称因变量  $y$  的对应值为**函数值**, 并记其作  $f(a)$ .

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触“函数”的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用“这种函数”讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用“有序对”定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话“变量”“对应”. 不过, 更严谨地看, “有序对”是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义  $(a, b)$  为  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ . 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号  $f$  (而不是  $f(x)$ ), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \text{ 或 } \frac{d}{dx}f(x);$$

我们计算不定积分时,用的记号是

$$\int f(x) dx;$$

我们计算积分时,用的记号是

$$\int_a^b f(x) dx.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链规则为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

这里  $u = f(x)$ ,  $y = g(u) = g(f(x))$ . 视导数为“变率”, 那这就是在说,  $y$  关于  $x$  的变率等于  $y$  关于  $u$  的变率与  $u$  关于  $x$  的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的  $\frac{11}{10}$  (也就是说, A 比 B 快  $\frac{1}{10}$ ), 而 B 的速率是 C 的速率的  $\frac{9}{10}$  (也就是说, B 比 C 慢  $\frac{1}{10}$ ), 那么 A 的速率是 C 的速率的  $\frac{99}{100}$ ; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: “有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?” 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用  $D$  表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说,  $D \exp = \exp$ ,  $D \cos = -\sin$ ,  $D \sin = \cos$ . 不过, 当我想表达  $D \ln$  时, 我意识到了一个问题: “已知  $D \ln x = 1/x$ . 左边的  $\ln x$  就是  $\ln$ , 可右边的  $1/x$  应该是什么?” 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \text{rec}: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写  $D \ln = \text{rec}$ . 不过, 我还是没法好好地表示  $D \arcsin$  跟  $D \arctan$ . 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名

字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的“什么也不干”的函数

$$\begin{aligned} \text{fdn}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的“读书报告”: 这本书“浪费了”巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 最近, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些“优良传统”也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些“优良传统”是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

<https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables>

<https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables>

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

2022 年 4 月 12 日



# 第一章 集与函数

我先简单地介绍一下基本概念吧.

## 1.1 集

**定义 1.1** 集是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为元.

**注 1.2** 事实上, 集与元是所谓的“原始概念”. 我们至多描述集或元是什么; 我们无法定义集或元.

**定义 1.3** 无元的集是空集.

**注 1.4** 或许您在别的地方能看到形如  $\emptyset$  的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

**注 1.5** 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

**定义 1.6** 一般地, 若集  $A$  由元  $a, b, c, \dots$  作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号. 设集  $A$  是由具有某种性质  $p$  的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

**定义 1.7** 若  $a$  是集  $A$  的元, 则写  $a \in A$  或  $A \ni a$ , 说  $a$  属于  $A$  或  $A$  包含  $a$ . 若  $a$  不是集  $A$  的元, 则写  $a \notin A$  或  $A \not\ni a$ , 说  $a$  不属于  $A$  或  $A$  不包含  $a$ .

**注 1.8** “属于”也是原始概念.

**定义 1.9** 若任取  $a \in A$ , 都有  $a \in B$ , 则写  $A \subset B$  或  $B \supset A$ , 说  $A$  是  $B$  的子集或  $B$  是  $A$  的超集. 假如有一个  $b \in B$  不是  $A$  的元, 可以用“真”形容之.

**注 1.10** 或许, 您在别的地方能看到形如  $\subseteq$ ,  $\subsetneq$  或  $\subsetneq$  的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用  $A \subset B$  表示  $A$  是  $B$  的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说  $A$  是  $B$  的真子集, 我们再加上  $A \neq B$  即可.

**例 1.11** 设  $B = \{0, 1, 2\}$ ,  $C = \{0\}$ . 不难看出,  $0 \in C$ ,  $1 \notin C$ ,  $C \subset B$ .

**注 1.12** 空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

**定义 1.13** 若集  $A$  与  $B$  包含的元完全一样, 则  $A$  与  $B$  是同一集. 我们说  $A$  等于  $B$ , 写  $A = B$ . 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

**定义 1.14** 集  $A$  与  $B$  的交是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说,  $A \cap B$  恰由  $A$  与  $B$  的公共元作成.

集  $A$  与  $B$  的并是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说,  $A \cup B$  恰包含  $A$  与  $B$  的全部元.

类似地, 可定义多个集之交与并.

**例 1.15** 设  $E$  是全体偶数作成的集; 设  $O$  是全体奇数作成的集. 不难看出,  $E \cap O$  为空集, 而  $E \cup O$  恰为全体整数作成的集.

**定义 1.16** 设  $A, B$  是集. 定义

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

**注 1.17** 值得注意的是, 我们没说  $B \subset A$ .

**定义 1.18** 设  $A, B$  是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里,  $(a, b)$  是**有序对**. 我们规定, 二个有序对  $(a, b)$  与  $(c, d)$  相等相当于  $a = c$  且  $b = d$ .

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$  与  $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$  相等, 相当于  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$ .

**注 1.19** 一般地,  $A \times B \neq B \times A$ .

**注 1.20** 设  $A, B$  分别有  $m, n$  个元. 则  $A \times B$  有  $mn$  个元.

**定义 1.21** 一般地,  $\mathbb{N}$  指全体非负整数作成的集;  $\mathbb{Z}$  指全体整数作成的集;  $\mathbb{Q}$  指全体有理数作成的集;  $\mathbb{R}$  指全体实数作成的集;  $\mathbb{C}$  指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**定义 1.22** 在微积分里,  $\mathbb{R}$  的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数  $a, b$ , 其中  $a < b$ . 那么我们记:

- (1)  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$
- (2)  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$
- (3)  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$
- (4)  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$
- (5)  $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$
- (6)  $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$
- (7)  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$
- (8)  $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\};$
- (9)  $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}.$

统称这九类子集为**区间**.  $a$  是区间  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$  的**左端点**;  $b$  是区间  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$  的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为  $\{a\}$  是**退化为一点的区间**  $[a, a]$ ; 我们认为空集是**空区间**  $[a, a)$ ,  $(a, a)$ ,  $[a, a)$ ,  $[b, a)$ ,  $(b, a)$ ,  $(b, a]$  或  $[b, a]$ . 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

**注 1.23** 设  $a, b, c$  是实数. 说  $b$  介于  $a$  跟  $c$  之间, 就是说  $a \leq b \leq c$  或  $c \leq b \leq a$  (简单地, 就是  $(b-a)(b-c) \leq 0$ ). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为“区间”. 那么, 显而易见地, 任给一个区间  $I$ , 任取  $I$  的二个相异实数  $a, b$ , 则每个介于  $a$  跟  $b$  之间的实数必为  $I$  的元. 反过来, 若  $\mathbb{R}$  的子集  $I$  适合“任取  $I$  的二个相异实数, 每个介于  $a$  跟  $b$  之间的实数必为  $I$  的元”, 则  $I$  是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

## 1.2 关系与函数

**定义 1.24** 设  $A, B$  是集.  $A \times B$  的子集称为  $A$  到  $B$  的**关系**.

**定义 1.25** 设  $A, B$  是集. 若  $A$  到  $B$  的关系  $f$  适合下述性质, 则说  $f$  是  $A$  到  $B$  的**函数** (或**映射**):

- 任取  $a \in A$ , 必有  $b \in B$  使  $(a, b) \in f$ ;
- 若  $(a, b)$  与  $(a, c)$  均为  $f$  的元, 则  $b = c$ .

设  $(a, b) \in f$ . 我们记此事为  $b = f[a]$ , 并说  $b$  是  $a$  在函数  $f$  下的**像**,  $a$  是  $b$  在函数  $f$  下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数  $f$ :

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

“ $f: A \rightarrow B$ ”是“ $f$  是  $A$  到  $B$  的函数”的简写.

**注 1.26** 一般地, 我们写  $a$  在函数  $f$  下的像为  $f(a)$ , 而不是  $f[a]$ . 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

**例 1.27** 设  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ . 显然,  $A \times B$  有 6 个元. 不难看出,  $A \times B$  有 64 个子集, 故  $A$  到  $B$  的关系共有 64 个. 不过,  $A$  到  $B$  的函数只有 8 个.

**定义 1.28** 在本书, 我们为“什么也不干”的函数起一个名字. 具体地说, 设  $A \subset B$ . 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中  $\iota$  是希腊字母 iota.

我们简单地写  $\iota_{A,A}$  为  $\iota_A$ . 有时, 若既不必指出  $A$ , 也不必指出  $B$ , 我们直接写  $\iota$ . 换句话说:  $\iota$  (或者带下标的  $\iota_A, \iota_{A,B}$ ) 啥也不干, 即  $\iota[x] = x$ , 其中  $x$  可以是任意文字.

一般也称  $\iota$  为**恒等函数**.

**定义 1.29** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 称  $A$  为  $f$  的**定义域**; 称  $B$  为  $f$  的**陪域**.

**定义 1.30** 设  $C \subset A$ . 设  $f: A \rightarrow B$ . 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称  $f[A]$  为  $f$  的**值域**. 显然  $f$  的值域是  $f$  的陪域的子集.

**注 1.31** 设  $f: A \rightarrow B$ . 若  $D \subset C \subset A$ , 则  $f[D] \subset f[C]$ .

**定义 1.32** 设  $f, g$  都是  $A$  到  $B$  的函数. 若任取  $a \in A$ , 都有  $f[a] = g[a]$ , 则说  $f = g$ .

可写  $f = g$  的否定为  $f \neq g$ . 具体地说, 若存在  $a \in A$  使  $f[a] \neq g[a]$ , 则说  $f \neq g$ .

**定义 1.33** 设  $R$  是  $A$  到  $B$  的关系.  $B$  到  $A$  的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为  $R$  的**反关系**.

**定义 1.34** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 若  $f$  的反关系  $g$  是  $B$  到  $A$  的函数, 则称  $g$  是  $f$  的**反函数**. 我们写  $f$  的反函数为  $f^{[-1]}$ .

**注 1.35** 不难验证, 若  $g$  是  $f$  的反函数, 则  $f$  也一定是  $g$  的反函数. 这是因为  $R$  的反关系的反关系是  $R$ .

**定义 1.36** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数,  $g$  是  $C$  到  $D$  的函数, 且  $f[A] \subset C$ . 任取  $A$  的元  $a$ . 按照函数的定义, 存在唯一的  $b \in f[A]$  使  $(a, b) \in f$ . 既然  $b \in f[A] \subset C$ , 再根据函数的定义, 存在唯一的  $d \in g[C] \subset D$  使  $(b, d) \in g$ . 这样的  $d$  可用  $g[f[a]]$  表示. 作  $A$  到  $D$  的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是  $A$  到  $D$  的函数. 我们称函数  $g \circ f$  为  $f$  与  $g$  的**复合**.

**注 1.37** 设  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: C \rightarrow D$ , 且  $f[A] \subset C$ . 设  $E \subset A$ . 那么  $f[E] \subset f[A] \subset C$ , 故  $g[f[E]]$  是有意义的. 我们说,  $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$ .

取  $d \in g[f[E]]$ . 按定义, 存在  $t \in f[E]$  使  $g[t] = d$ . 对这个  $t$  而言, 又存在  $e \in E$  使  $f[e] = t$ .  $(g \circ f)[e]$ , 按定义, 等于  $g[f[e]]$ , 也就是  $g[t]$ , 也就是  $d$ . 所以  $d \in (g \circ f)[E]$ . 这说明  $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$ .

取  $d' \in (g \circ f)[E]$ . 按定义, 存在  $e' \in E$  使  $(g \circ f)[e'] = d'$ . 所以  $t' = f[e'] \in f[E]$ . 那么  $g[t'] = d'$ . 所以  $d' \in g[f[E]]$ . 这说明  $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$ .

既然  $g[f[E]]$  跟  $(g \circ f)[E]$  相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了  $a \in A$  时  $(g \circ f)[a]$  就是  $g[f[a]]$ , 可我们并没有**定义**  $(g \circ f)[E]$  是  $g[f[E]]$ . 大算学家 John von Neumann 说过: “Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.” 所以, 习惯就好了.

**注 1.38** 设  $f: A \rightarrow B$ . 那么  $f \circ \iota_A = f$ , 且  $\iota_B \circ f = f$ .

**注 1.39** 一般地,  $g \circ f \neq f \circ g$ . 一方面,  $g \circ f$  有定义时,  $f \circ g$  可能无定义; 另一方面, 即使  $g \circ f$  与  $f \circ g$  都有定义, 二者也不一定相等.

**定理 1.40** 函数的复合是**结合的**. 具体地说, 设  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: C \rightarrow D$ ,  $h: E \rightarrow F$ , 且  $f[A] \subset C$ ,  $g[C] \subset E$ . 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为  $h \circ g \circ f$ .

**证**  $q = g \circ f$  是  $A$  到  $D$  的函数, 且  $p = h \circ g$  是  $C$  到  $E$  的函数. 因  $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$ , 故  $h \circ q = h \circ (g \circ f)$  是  $A$  到  $F$  的函数; 因  $f[A] \subset C$ , 故  $p \circ f = (h \circ g) \circ f$  也是  $A$  到  $F$  的函数. 任取  $a \in A$ . 则

$$(h \circ (g \circ f))[a] = h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],$$

$$((h \circ g) \circ f)[a] = (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]]. \quad \text{证毕.}$$

**定义 1.41** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数.

- 若任取  $A$  的相异二元  $a$  与  $a'$ , 都有  $f[a] \neq f[a']$ , 则称  $f$  是**单函数**.
- 若对任意  $b \in B$ , 都存在  $a \in A$  使  $f[a] = b$ , 则称  $f$  是**满函数**.

**例 1.42** 设  $A \subset B$ .  $A$  到  $B$  的函数  $\iota_{A,B}$  总是单函数. 不过, 若  $A \neq B$ , 则  $\iota_{A,B}$  不是满函数.

**注 1.43** 设  $B \subset C$ . 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数,  $g$  是  $A$  到  $C$  的函数, 且对任意  $a \in A$ ,  $f[a] = g[a]$ . 那么,  $f$  是单函数的一个必要与充分条件是:  $g$  是单函数. 若  $f$  不是满函数, 则  $g$  也不是.

若  $f$  是满函数, 则  $g$  也是满函数的一个必要与充分条件是:  $B = C$ .

**定理 1.44** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 设  $B$  到  $A$  的函数  $g$  适合如下性质:

- 对任意  $a \in A$ ,  $g[f[a]] = a$ ; 也就是说,  $g \circ f = \iota_A$ .
- 对任意  $b \in B$ ,  $f[g[b]] = b$ ; 也就是说,  $f \circ g = \iota_B$ .

则:

- 至多有一个这样的  $g$ ;
- $g$  是  $f$  的反函数.

**证** 至多只有一个这样的  $g$  是显然的. 具体地, 若  $g': B \rightarrow A$  适合  $g' \circ f = \iota_A$ , 且  $f \circ g' = \iota_B$ , 则

$$g = g \circ \iota_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \iota_A \circ g' = g'.$$

下证  $g$  是  $f$  的反函数. 事实上, 若  $h$  是  $f$  的反函数, 则不难验证  $h$  适合上述二条性质. 所以  $g = h$ . 证毕.

**定理 1.45** 设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow C$  的反函数分别是  $f^{[-1]}: B \rightarrow A$  与  $g^{[-1]}: C \rightarrow B$ . 则  $g \circ f: A \rightarrow C$  有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

**证** 记  $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}: C \rightarrow A$ ; 记  $p = g \circ f$ . 不难用结合律验证  $q \circ p = \mathbf{1}_A$ , 且  $p \circ q = \mathbf{1}_B$ . 这里以  $q \circ p$  为例:

$$\begin{aligned} q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\ &= (q \circ g) \circ f \\ &= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ \mathbf{1}_B) \circ f \\ &= f^{[-1]} \circ f \\ &= \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

证毕.

**注 1.46** 不难看出, 函数  $f$  有反函数的一个必要与充分条件是:  $f$  是单函数, 且  $f$  是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

**定义 1.47** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 设  $C \subset A$ . 作  $C$  到  $B$  的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知,  $f_C$  是  $C$  到  $B$  的函数. 我们说,  $f_C$  是  $f$  在  $C$  上的**限制**.

## 1.3 函数的演算

**注** 本节的语言或许比较混乱.

本节讨论  $\mathbb{R}$  的子集到  $\mathbb{R}$  的子集的函数及其演算.



您应该还能想起, 本书的标题是“几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

**定义 1.48** 设  $f: A \rightarrow B$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  且  $0 \in B$ . 若存在  $a \in A$  使  $f[a] = 0$ , 就说  $a$  是  $f$  的一个根.

现在我们介绍一些“基本初等函数”.

**定义 1.49** 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \text{id}: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \{c\}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$$

其中  $c$  是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp: \quad \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty), \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin: \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 余弦函数:

$$\begin{aligned} \cos: \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}; \end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan: \{x \mid \cos[x] \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln: (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right], \\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中  $s$  指  $\sin$  在  $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$  上的限制  $\sin_I: I \rightarrow [-1, 1]$ ,  $2\pi$  是  $\cos$  的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan: \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right), \\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中  $t$  指  $\tan$  在  $J = (-2\pi/4, 2\pi/4)$  上的限制  $\tan_J: J \rightarrow \mathbb{R}$ ;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\text{abs}: \mathbb{R} &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\text{sqrt}: [0, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

**注 1.50** 在本书,  $2\pi$  是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

**例 1.51** 设  $A = [1, +\infty)$ . 设

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]. \end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达  $f$  的定义. 具体地,

$$f = \exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A.$$

这里,  $\ln_A$  自然是  $\ln$  在  $A$  上的限制.

不过, 复合并不够用.

**例 1.52** 设  $A = [1, +\infty)$ . 设

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达  $g$  的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写  $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$  跟  $\sin[x]$  为  $\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A$  与  $\sin_A$ ; 可是, 我们要怎么写  $x^3$ ? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

**定义 1.53** 设  $A, B, C$  是  $\mathbb{R}$  的子集. 设  $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$ . 设  $*$  是文字  $+, -, \cdot$  的任意一个. 定义

$$\begin{aligned} f * g: A &\rightarrow D, \\ x &\mapsto f[x] * g[x], \end{aligned}$$

其中陪域  $D \subset \mathbb{R}$  可视具体情况待定. 一般地, 若  $*$  是乘号  $\cdot$ , 则可被省略. 可写  $0_A - f$  为  $-f$ ; 这里  $0_A$  当然是常函数  $0$  在  $A$  上的限制.

若对任意  $x \in A$ , 都有  $f[x] \neq 0$ , 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}: A &\rightarrow E, \\ x &\mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域  $E \subset \mathbb{R}$  可视具体情况待定.

若对任意  $x \in A$ ,  $f[x]^{g[x]}$  有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g: A &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域  $F \subset \mathbb{R}$  可视具体情况待定.

**例 1.54** 设  $A = [1, +\infty)$ . 设

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写  $x^3$  为  $(\iota_A)^3_A$ . 所以

$$g = (\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^3_A;$$

这里, 我们取陪域为  $\mathbb{R}$ .

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的  $g$  还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取  $B = (0, 1)$ . 令

$$\begin{aligned} h: B &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \text{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与“对应法则”. 不过, 您不妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如“函数  $f(x) = \sqrt{1+x} + \ln(1-x)$ ”这样的文字时, 我们其实视这个  $f$  的定义域为全体使  $f(x)$  有意义的一切实数作成的集 (也就是  $[-1, 1)$ ); 当我们看到形如“函数  $g(x) = 1 - x$  ( $x \in$

$[-1, 0]$ ”的文字时, 我们认为  $g$  的定义域为已经提到的集  $[-1, 0]$ .  $f$  跟  $g$  的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, “万能的”  $\mathbb{R}$ ).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取  $\mathbb{R}$ .

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的  $h$  为

$$h = \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 - \iota} + \text{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

**定义 1.55** 我们称定义域为  $A$  的函数为 (定义在)  $A$  上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

**定义 1.56** 若  $B \subset A$ ,  $f$  是  $A$  上的函数, 我们说  $f$  在  $B$  上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} f + g &= g + f, & fg &= gf, \\ (f + g) + h &= f + (g + h), & (fg)h &= f(gh), \\ f(g + h) &= fg + fh, & (f + g)h &= fh + gh. \end{aligned}$$

这里  $f, g, h$  都是  $A$  上的函数.

设函数  $\ell$  的值域是  $A$  的子集. 记  $f / g = \frac{f}{g}$ ,  $f \wedge g = f^g$ . 设  $*$  是五文字  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $\wedge$  的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned} ((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]] \\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x]. \end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于  $+$  与  $\cdot$  的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中 useful, 故我建议您好好看看它.

**例 1.57** 我们知道, 对任意实数  $x$ , 都有  $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$ . 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

**例 1.58** 我们可写“二倍角公式”为

$$\begin{aligned}\sin \circ 2t &= 2 \cos \sin, \\ \cos \circ 2t &= \cos^2 - \sin^2 \\ &= 2 \cos^2 - 1 = 1 - 2 \sin^2 \\ &= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\ \tan \circ 2t &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2t \\ &= \frac{2 \cos \sin}{\cos^2 - \sin^2} \\ &= \frac{2 \tan}{1 - \tan^2} \\ &= \frac{2t}{1 - t^2} \circ \tan.\end{aligned}$$

**例 1.59** 值得注意的是,  $f(g + h)$  并不是  $f \circ (g + h)$ :

$$\begin{aligned}2 \cos(\cos + \sin) &= 2 \cos^2 + 2 \cos \sin \\ &= (\cos + \sin - 1) \circ 2t \\ &= (\cos + \sin) \circ 2t - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(1 - \frac{2\pi}{8}\right) \circ 2t - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(2t - \frac{2\pi}{8}\right) - 1.\end{aligned}$$

**例 1.60** 值得注意的是, 本书的  $\sin^{-1}$  不是  $\arcsin$ ,  $\tan^{-1}$  也不是  $\arctan$ . 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\ &= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\ &= \frac{1 - \cos}{\sin}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin^2}{2 \cos \sin} \circ \frac{1}{2} \\
&= \tan \circ \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**例 1.61** 我们看一些关于  $\arcsin$  跟  $\arctan$  的等式. 在本例, 我们约定,  $\sin, \tan$  分别表示  $\sin_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}$  与  $\tan_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}$ . 这样,

$$\sin \circ \arcsin = \mathfrak{t}_{[-1, 1]},$$

$$\tan \circ \arctan = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}.$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$\begin{aligned}
\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\mathfrak{t}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]} \circ \arcsin) \\
&= (\cos \circ \mathfrak{t}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}) \circ \arcsin \\
&= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\
&= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\
&= \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2).
\end{aligned}$$

这里的  $\mathfrak{t}$  自然是  $\mathfrak{t}_{[-1, 1]}$ .

类似地,

$$\begin{aligned}
\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\mathfrak{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)} \circ \arctan) \\
&= (\cos \circ \mathfrak{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}) \circ \arctan \\
&= \left( \text{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2} \right) \circ \arctan \\
&= \left( \text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \circ \tan \right) \circ \arctan \\
&= \left( \text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos \tan) \circ \arctan = \frac{\mathfrak{t}}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{\mathfrak{t}}{\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

**注 1.62** 或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号:  $g[f]$  表示  $g \circ f$ . 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$\begin{aligned}\cos[\arcsin] &= \text{sqrt}[1 - \iota^2], \\ \cos[\arctan] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 + \iota^2]}, \\ \sin[\arctan] &= \frac{\iota}{\text{sqrt}[1 + \iota^2]}, \\ \tan[\arcsin] &= \frac{\iota}{\text{sqrt}[1 - \iota^2]}.\end{aligned}$$

虽然我已经用  $f[a]$  表示  $a$  在  $f$  下的像了, 我自然地也用  $f[C]$  表示  $C$  的每个元在  $f$  下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用  $g[f]$  表示  $g \circ f$ . 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.



## 第二章 连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础. 若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是  $\mathbb{R}$  的子集.

### 2.1 连续的定义

**定义 2.1** 设  $x \in \mathbb{R}$ . 设  $\delta$  为正数. 则  $N[x; \delta] = (x - \delta, x + \delta)$  是  $x$  的一个邻域. 称  $N[x; \delta] \setminus \{x\} = (x - \delta, x) \cup (x, x + \delta)$  是  $x$  的一个去心邻域.

不难看出,  $N[x; \delta]$  就是  $\{t \mid |t - x| < \delta\}$ , 而  $N[x; \delta] \setminus \{x\}$  就是  $\{t \mid 0 < |t - x| < \delta\}$ .

下面的不等式十分有用.

**定理 2.2** 对任意实数  $x, y$ , 有

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数  $a, b, c$ ,

$$|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

**证** 注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0. \quad \text{证毕.}$$

**定义 2.3** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 若任给正数  $\epsilon$ , 存在正数  $\delta$  使  $f[A \cap N[x; \delta]] \subset N[f(x); \epsilon]$ , 则说  $f$  于  $x$  连续.

不难看出,  $f$  于  $x$  连续的一个必要与充分条件是: 任给正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\delta$  使  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时, 必有  $|f[t] - f[x]| < \varepsilon$ .

**定理 2.4** 设  $f, g$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 设  $f, g$  都于  $x$  连续. 设  $*$  是三文字  $+, -, \cdot$  的任意一个. 则  $f * g$  也于  $x$  连续.

**证** 以  $*$  为  $+$  或  $-$  时为例. 任取  $\varepsilon > 0$ . 这样, 因为  $f$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta_1$  使

$$|t - x| < \delta_1 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为  $g$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta_2$  使

$$|t - x| < \delta_2 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取  $\delta$  为  $\delta_1, \delta_2$  的较小者. 这样,  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时,

$$\begin{aligned} |(f * g)[t] - (f * g)[x]| &= |(f[t] * g[t]) - (f[x] * g[x])| \\ &= |(f[t] - f[x]) * (g[t] - g[x])| \\ &\leq |f[t] - f[x]| + |g[t] - g[x]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$*$  为  $\cdot$  时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned} (fg)[t] - (fg)[x] &= f[t]g[t] - f[x]g[x] \\ &= (f[t] - f[x] + f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x] + g[t]) \\ &= (f[t] - f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x]). \end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使  $(f[t] - f[x])g[t]$  跟  $f[x](g[t] - g[x])$  的绝对值都不超过  $\frac{\varepsilon}{2}$  就好. 首先, 存在正数  $\delta_3$  使

$$|t - x| < \delta_3 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |f[x]|)}.$$

其次, 存在正数  $\delta_4$  使

$$|t - x| < \delta_4 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < 1.$$

由此可知,  $|t - x| < \delta_4$  且  $t \in A$  时,

$$|g[t]| = |g[x] + (g[t] - g[x])| < |g[x]| + 1.$$

最后, 存在正数  $\delta_5$  使

$$|t - x| < \delta_5 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |g[x]|)}.$$

取  $\delta$  为  $\delta_3, \delta_4, \delta_5$  的最小者. 这样,  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时,

$$\begin{aligned} & |(fg)[t] - (fg)[x]| \\ &= |(f[t] - f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x])| \\ &\leq |f[t] - f[x]| \cdot |g[t]| + |f[x]| \cdot |g[t] - g[x]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |g[x]|)} \cdot (|g[x]| + 1) + |f[x]| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |f[x]|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

**定理 2.5** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 设  $f$  于  $x$  连续. 若  $f[x] \neq 0$ , 则  $f^{-1}$  于  $x$  连续.

**证** 任取  $\varepsilon > 0$ . 注意到

$$f^{-1}[t] - f^{-1}[x] = -\frac{f[t] - f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明  $|f[t]f[x]|$  比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然  $f[x] \neq 0$ , 那么  $|f[x]|$  当然是正数. 所以, 存在正数  $\delta_1$  使

$$|t - x| < \delta_1 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leq |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以,  $|t - x| < \delta_1$  且  $t \in A$  时,

$$|f[t]f[x]| > \frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使  $|f[t] - f[x]| < \frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$  即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

**注 2.6** 一般地, 设  $f$  是  $A$  上的函数,  $x \in A$ , 且  $f$  于  $x$  连续. 若  $f[x] \neq 0$ , 则存在  $x$  的邻域  $N[x; \delta]$  使  $t \in A \cap N[x; \delta]$  时必有

$$\frac{1}{2} < \frac{f[t]}{f[x]} < \frac{3}{2}.$$

取  $\varepsilon = |f[x]|/2$ ; 然后,

$$\left| \frac{f[t]}{f[x]} - 1 \right| = \frac{|f[t] - f[x]|}{|f[x]|} < \frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到  $|a - b| < c$  相当于  $a - c < b < a + c$ .

**定理 2.7** 设  $f, g$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 设  $f, g$  都于  $x$  连续. 设  $f[x] \neq 0$ . 则  $g/f$  也于  $x$  连续.

**证** 注意到  $g/f = g \cdot f^{-1}$ . 证毕.

**定理 2.8** 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ . 若  $f$  于  $x$  连续, 且  $g$  于  $f[x]$  连续, 则  $g \circ f: A \rightarrow C$  于  $x$  连续.

**证** 任取正数  $\varepsilon$ . 那么, 存在正数  $\delta'$  使

$$|v - f[x]| < \delta' \text{ 且 } v \in B \implies |g[v] - g[f[x]]| < \varepsilon.$$

也存在正数  $\delta$  使

$$|t - x| < \delta \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \delta'.$$

显然  $f[t] \in B$ . 所以,  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时,

$$|(g \circ f)[t] - (g \circ f)[x]| = |g[f[t]] - g[f[x]]| < \varepsilon. \quad \text{证毕.}$$

## 2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

**定义 2.9** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 若  $f$  于  $A$  的每一点都连续, 则  $f$  是 ( $A$  上的) **连续函数**.

**注 2.10** 显然, 若  $B \subset A$ , 那么  $f$  在  $B$  上的限制  $f_B$  也是连续函数.

利用上节的结论, 我们下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我不证了.

**定理 2.11** 设  $f, g$  都是  $A$  上的连续函数. 则:

- (1)  $f * g$  是连续函数, 这里  $*$  是三文字  $+, -, \cdot$  的任意一个.
- (2) 若  $f$  不取零值 (也就是说,  $f$  无根), 则  $g/f$  是连续函数.

**定理 2.12** 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  都是连续函数. 则  $g \circ f: A \rightarrow C$  也是连续函数.

**例 2.13** 常函数  $c: \mathbb{R} \rightarrow \{c\}$  是连续函数.

任取一点  $x$ . 注意到, 对任意非空集  $T \subset \mathbb{R}, c[T] = \{c\}$ . 所以, 任取正数  $\varepsilon$ , 对  $x$  的任意邻域  $N[x; \delta]$ , 都有  $c[N[x; \delta]] = \{c\} \subset N[c; \varepsilon] = N[c[x]; \varepsilon]$ .

**例 2.14**  $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数.

任取一点  $x$ . 注意到, 对任意集  $T \subset \mathbb{R}, \iota[T] = T$ . 所以, 任取正数  $\varepsilon$ , 取  $x$  的  $\varepsilon$  邻域  $N[x; \varepsilon]$ , 即得  $\iota[N[x; \varepsilon]] = N[x; \varepsilon] = N[\iota[x]; \varepsilon] \subset N[\iota[x]; \varepsilon]$ .

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

**定理 2.15** 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1 \iota + \cdots + b_n \iota^n}{a_0 + a_1 \iota + \cdots + a_m \iota^m}$$

(其中  $m, n$  为非负整数, 且  $a_0, a_1, \dots, a_m$  是不全为零的实数,  $b_0, b_1, \dots, b_n$  是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

**定义 2.16** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 若任取  $A$  的相异二元  $x, y$ , 都有  $(x - y)(f[x] - f[y]) \geq 0$ , 则说  $f$  **增** (也说  $f$  是**增函数**); 若任取  $A$  的相异二元  $x, y$ , 都有  $(x - y)(f[x] - f[y]) > 0$ , 则说  $f$  **严增** (也说  $f$  是**严增函数**).

若  $-f$  增, 则  $f$  **减** (也说  $f$  是**减函数**); 若  $-f$  严增, 则  $f$  **严减** (也说  $f$  是**严减函数**).

若  $f$  增或  $f$  减, 则  $f$  **单调** (也说  $f$  是**单调函数**); 若  $f$  严增或  $f$  严减, 则  $f$  **严单调** (也说  $f$  是**严单调函数**).

简单地, 说  $f$  增 (严增), 就是说对任意适合  $x \in A, y \in A$  且  $x < y$  的  $x, y$ , 必有  $f[x] \leq f[y]$  ( $f[x] < f[y]$ ); 说  $f$  减 (严减), 就是说对任意适合  $x \in A, y \in A$  且  $x < y$  的  $x, y$ , 必有  $f[x] \geq f[y]$  ( $f[x] > f[y]$ ).

**例 2.17** 设  $a$  为非零实数,  $b$  为实数. 则  $ax + b$  是  $\mathbb{R}$  上的严单调函数. 任取二个相异实数  $x, y$ , 则

$$\begin{aligned} & (x - y)((ax + b) - (ay + b)) \\ &= (x - y)(ax + b - ay - b) \\ &= a(x - y)^2. \end{aligned}$$

由此可知,  $a > 0$  时  $ax + b$  严增, 而  $a < 0$  时  $ax + b$  严减.

可以验证,  $(ax)^{[-1]} = \frac{1}{a}x$ , 且  $(x + b)^{[-1]} = x - b$ . 所以

$$\begin{aligned} (ax + b)^{[-1]} &= ((x + b) \circ (ax))^{[-1]} \\ &= (ax)^{[-1]} \circ (x + b)^{[-1]} \\ &= \frac{1}{a}x \circ (x - b) \\ &= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

不难看出,  $(ax + b)^{[-1]}$  跟  $ax + b$  同严增 (或严减).

**定理 2.18** 设  $f$  是  $A$  上的严单调函数. 则  $f$  是单函数.

**证** 任取  $A$  的相异二元  $x, y$ . 则

$$f[x] - f[y] = \frac{(x - y)(f[x] - f[y])}{x - y} \neq 0. \quad \text{证毕.}$$

我们知道, 若  $f: A \rightarrow B$  是单函数, 且  $f[A] = B$ , 则  $f$  有反函数  $f^{[-1]}: B \rightarrow A$ . 特别地, 适当选取陪域后, 每个严单调函数都有反函数.

**定理 2.19** 设  $f: A \rightarrow B$  是满的严增 (严减) 函数. 则  $f^{[-1]}: B \rightarrow A$  也是满的严增 (严减) 函数.

**证** 依假定,  $f$  是双函数, 故有反函数  $f^{[-1]}$ , 且  $f^{[-1]}$  当然是既满亦单的. 无妨设  $f$  严增;  $f$  严减时, 您可类似地论证  $f^{[-1]}$  亦严减.

下设  $f$  严增. 任取  $B$  的相异二元  $x', y'$ . 令  $x = f^{[-1]}[x']$ ,  $y = f^{[-1]}[y']$ . 易见  $x \neq y$ , 且  $x' = f[x]$ ,  $y' = f[y]$ . 因  $f$  严增, 故

$$(f[x] - f[y])(x - y) = (x - y)(f[x] - f[y]) > 0.$$

从而

$$\begin{aligned} & (x' - y')(f^{[-1]}[x'] - f^{[-1]}[y']) \\ &= (f[x] - f[y])(x - y) > 0. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

下面的结论十分重要.

**定理 2.20** 设  $I$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  是满的严单调函数. 则  $f$  是连续函数的一个必要与充分条件是:  $J$  是区间.

**证** 无妨设  $f$  严增.

先看必要性. 设  $f$  连续. 用反证法. 若  $J = f[I]$  不是区间, 则存在  $J$  的相异二元  $x', y'$  使  $x' < y'$  且  $J \cap (x', y')$  为空集. 设  $f[x] = x'$ ; 设  $f[y] = y'$ . 显然  $x < y$ . 任取  $I$  的大于  $x$  的元  $u$ . 因为  $f$  严增, 故  $f[u] > f[x] = x'$ ; 因为  $f[u] \notin (x', y')$ , 故  $f[u] \geq y'$ . 所以,  $f[u] - f[x] \geq y' - x'$ . 因为  $f$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta$  使  $|t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,

$$|f[t] - f[x]| < y' - x'.$$

因为  $I$  是区间, 且  $x, y \in I$ , 故  $[x, y] \subset I$ ; 特别地, 这说明, 存在适合条件  $0 < v - x < \delta$  且  $v \in I$  的数  $v$ . 故

$$y' - x' > |f[v] - f[x]| = f[v] - f[x] \geq y' - x'.$$

这是矛盾.

再看充分性. 设  $J$  是区间. 任取  $x \in I$ . 我们证明  $f$  于  $x$  连续.

先设  $x$  是  $I$  的左端点. 那么, 对每个  $w > x, w \in I$ , 都有  $f[w] > f[x]$ . 于是,  $f[x]$  也是  $J$  的左端点. 任取正数  $\varepsilon$ , 必存在正数  $e < \varepsilon$  使  $f[x] + e \in J$ . 令  $q = f^{[-1]}[f[x] + e]$ , 则必有  $x < q$ . 从而, 当  $x \leq t < q$  时,  $f[x] \leq f[t] < f[x] + e$ . 这么看来, 存在正数  $\delta = q - x$ , 当  $t \in N[x; \delta] \cap I = [x, q)$  时, 必有

$$|f[t] - f[x]| = f[t] - f[x] < e < \varepsilon.$$

类似地, 当  $x$  是  $I$  的右端点时, 您也可用完全类似的套路论证  $f$  于  $x$  连续.

现设  $x$  既不是  $I$  的左端点, 也不是  $I$  的右端点. 这样, 存在正数  $d$  使  $x - d, x + d \in I$ . 所以  $f[x - d], f[x + d] \in J$ , 且  $f[x - d] < f[x] < f[x + d]$ . 故  $f[x]$  也不是  $J$  的端点. 所以, 任取正数  $\varepsilon$ , 必存在正数  $e < \varepsilon$  使  $f[x] - e, f[x] + e \in J$ . 令  $p = f^{[-1]}[f[x] - e], q = f^{[-1]}[f[x] + e]$ . 那么  $p < x < q$ . 取  $\delta$  为  $x - p$  与  $q - x$  的较小者. 则  $|t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,

$$p \leq x - \delta < t < x + \delta \leq q,$$

从而

$$f[x] - e = f[p] \leq f[x - \delta] < f[t] < f[x + \delta] \leq f[q] = f[x] + e,$$

即

$$|f[t] - f[x]| \leq e < \varepsilon. \quad \text{证毕.}$$

由此, 我们可以得到如下关于反函数的定理.

**定理 2.21** 设  $I$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  是满的严单调函数. 设  $f$  是连续函数. 则  $f^{[-1]}: J \rightarrow I$  也是连续函数.

**证** 设  $f: I \rightarrow J$  是满的严单调函数. 因为  $I$  是区间, 且  $f$  是连续函数, 故  $J = f[I]$  也是区间. 因为  $f^{[-1]}$  也是满的严单调函数, 且  $I = f^{[-1]}[J]$  是区间, 故  $f^{[-1]}$  是连续函数. 证毕.

最后, 我不加论证地给出一些常见的连续函数. 您可以在任意一本分析教材里找到论证.



- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数  $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  也是满的严增函数 (当然也连续).
- $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  是满的连续函数. 记  $\sin$  在  $[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$  上的限制为  $s$ . 则  $s$  是满的严增函数. 故其反函数  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$  也是满的严增函数 (当然也连续).
- $\tan: \{x \mid \cos[x] \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  是满的连续函数. 记  $\tan$  在  $(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$  上的限制为  $t$ . 则  $t$  是满的严增函数. 故其反函数  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$  也是满的严增函数 (当然也连续).
- 设  $n$  是正偶数. 则  $\iota^n: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数  $\iota^{1/n}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写  $\iota^{1/n}[x]$  为  $\sqrt[n]{x}$  或  $x^{1/n}$ ; 一般写  $\sqrt[2]{x}$  为  $\sqrt{x}$ ; 一般写  $\iota^{1/2}$  为  $\text{sqrt}$ .
- 设  $n$  是正奇数. 则  $\iota^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数  $\iota^{1/n}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写  $\iota^{1/n}[x]$  为  $\sqrt[n]{x}$  或  $x^{1/n}$ ; 一般写  $\sqrt[1]{x}$  为  $x$ ; 一般写  $\iota^{1/1}$  为  $\iota$ .
- $\text{abs}: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  是连续函数.

## 2.3 连续函数的积分

我简单地介绍一下连续函数的积分.

传统地, 一本算学分析 (或高等算学) 教材会先讲导数 (微分学), 再讲如何反求导 (不定积分), 然后才是积分 (定积分). 不过, 为论证连续函数一定有“反导”, 就需要 (连续函数的) 积分的知识. 所以, 逻辑地, 我选择先说连续函数的积分论. 这里, 我就不加证明地列举本书用到的关于积分的结论. 如果您对这些结论的论证感兴趣, 您可以参考算学家梅加强的《数学分析》.

**定理 2.22** 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ , 且  $a < b$ . 作数列

$$A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$n \mapsto \begin{cases} 0, & n = 0; \\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right], & n \geq 1. \end{cases}$$

则存在唯一的实数  $\alpha$ , 使对任意正数  $\varepsilon$ , 存在非负整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $|A[n] - \alpha| < \varepsilon$ .

我们称  $\alpha$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的**积分**, 并记  $\alpha$  为

$$\int_a^b f.$$

**注 2.23** 传统地, 我们记上面的  $\alpha$  为

$$\int_a^b f(x) dx.$$

我并没有说老记号不好; 只不过, 我会展现一种不需要“变量  $x$ ”的积分法(如何无变量地计算积分), 故我在此使用新记号. 本注的目的是告诉您传统的记号跟本书的记号的区别.

**例 2.24** 设  $k$  为常函数. 则不难看出,

$$\int_a^b k = (b - a)k.$$

现在, 我们看积分的一些基本性质. 不过, 我们先作一个约定.

**定义 2.25** 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ , 且  $a < b$ . 规定

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

**定理 2.26** 设  $f, g$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ . 设  $k \in \mathbb{R}$ . 则

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b kf &= k \int_a^b f. \end{aligned}$$

**定义 2.27** 设  $*$  是文字  $>, <, \geq, \leq$  的任意一个. 设  $A$  是  $\mathbb{R}$  的子集. 设  $f, g$  都是  $A$  上的函数. 若对任意  $t \in A$ , 都有  $f[t] * g[t]$ , 则我们写  $f * g$ .

**注 2.28** 注意, 我们没说  $*$  可以是文字  $\neq$ ; 这是因为我们已经规定,  $f \neq g$  是  $f = g$  的**否定**.

**定理 2.29** 设  $f, g$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ , 且  $a < b$ . 设  $f \leq g$ . 则

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

**定义 2.30** 我们可简单地写  $\text{abs} \circ f$  为  $|f|$ ; 类似地, 我们也可简单地写  $\text{sqrt} \circ f$  为  $\sqrt{f}$ .

**例 2.31** 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ , 且  $a < b$ . 不难验证  $-|f| \leq f \leq |f|$ . 故

$$\int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

也就是

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

不难看出, 对任意  $a, b \in I$ ,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

**定理 2.32** 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b, c \in I$ . 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

下面的结论很重要; 之后会用到.

**定理 2.33** 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $x \in I$ . 作函数

$$F: I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \frac{1}{t-x} \int_x^t f, & t \neq x. \end{cases}$$

则  $F$  于  $x$  连续.

**证** 任取正数  $\varepsilon$ . 我们的目标是, 找到正数  $\delta$ , 使  $|t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,  $|F[t] - F[x]| < \varepsilon$ . 这相当于: 找到正数  $\delta$ , 使  $0 < |t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,

$$\left| \frac{1}{t-x} \int_x^t f - f[x] \right| < \varepsilon.$$

这不难. 首先, 注意到

$$f[x](t-x) = \int_x^t f[x],$$

故

$$\frac{1}{t-x} \int_x^t f - f[x] = \frac{1}{t-x} \int_x^t (f - f[x]).$$

取低于  $\varepsilon$  的正数  $e$ . 因为  $f$  于  $x$  连续, 故存在正数  $d$ , 使  $|t - x| < d$  且  $t \in I$  时,

$$|f[t] - f[x]| < e.$$

所以

$$\left| \int_x^t (f - f[x]) \right| \leq \left| \int_x^t |f - f[x]| \right| \leq \left| \int_x^t e \right| = |t - x|e.$$

也就是说,  $0 < |t - x| < d$  且  $t \in I$  时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t-x} \int_x^t f - f[x] \right| &= \frac{1}{|t-x|} \left| \int_x^t (f - f[x]) \right| \\ &\leq \frac{1}{|t-x|} \cdot |t-x|e \\ &= e < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

## 第三章 导数

本章简单地提及导数及其运算.

若无特别说明, 本章的函数的定义域都是区间.

### 3.1 背景

**定义 3.1** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的函数. 设  $x \in I$ . 若存在  $x$  的邻域  $N$ , 与  $N \cap I$  上的函数  $F$ , 使

$$f = f[x] + (t - x)F,$$

且  $F$  于  $x$  连续, 则说  $f$  于  $x$  **可导**, 并称  $F[x]$  为  $f$  于  $x$  的**导数**.

**注 3.2** 传统地, 我们用极限

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f[t] - f[x]}{t - x}$$

是否存在定义  $f$  是否于  $x$  可导; 极限存在时, 它的值就是  $f$  于  $x$  的导数. 可以证明, 这二个定义是等价的; 不过, 既然我花了不少篇幅讨论连续函数, 我将呈现一种不一样的微分学 (求导学). 我采取的定义来自希腊算学家 Constantin Carathéodory. 假如您对此事感兴趣, 您可以阅读美国算学家 Stephen Kuhn 的名为 *The Derivative á la Carathéodory* 的文章 (不过, 我想说, 标题的 *á la* 应该是 *à la*).

我们看导数的一些基本性质. 在定义里, 若  $f$  于  $x$  可导, 则  $f$  于  $x$  的导数似乎不止一个. 不过, 我们即将说明, 导数是唯一的.

**定理 3.3** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的函数. 设  $x \in I$ . 设存在  $x$  的邻域  $N_1$ , 与  $N_1 \cap I$  上的函数  $F_1$ , 使

$$f = f[x] + (t - x)F_1,$$

且  $F_1$  于  $x$  连续. 设存在  $x$  的邻域  $N_2$ , 与  $N_2 \cap I$  上的函数  $F_2$ , 使

$$f = f[x] + (t - x)F_2,$$

且  $F_2$  于  $x$  连续. 则  $F_1[x] = F_2[x]$ . 也就是说,  $f$  于  $x$  的导数, 若存在, 则唯一.

**证** 用反证法. 设  $F_1[x] \neq F_2[x]$ , 则  $\varepsilon = |F_1[x] - F_2[x]|$  是正数. 我们要由此推出矛盾.

因为  $N_1 \cap I$  是区间, 且  $F_1$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta_1$ , 使  $0 < |t - x| < \delta_1$  且  $t \in I$  时, 必有  $|F_1[t] - F_1[x]| < \varepsilon/2$ , 即

$$\left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为  $N_2 \cap I$  是区间, 且  $F_2$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta_2$ , 使  $0 < |t - x| < \delta_2$  且  $t \in I$  时, 必有  $|F_2[t] - F_2[x]| < \varepsilon/2$ , 即

$$\left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取  $\delta$  为  $\delta_1$  与  $\delta_2$  中的较小者. 则  $0 < |t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |F_1[x] - F_2[x]| \\ &= \left| \left( \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x] \right) - \left( \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x] \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x] \right| + \left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x] \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这是矛盾.

证毕.

**例 3.4** 设  $a, b$  为实数. 则  $a_1 + b$  于其定义域的任意一点都可导. 具体地,

$$a_1 + b = (a_1 + b)[x] + (1 - x)a,$$

而  $a$  是连续函数. 并且,  $a_1 + b$  于任意一点的导数都是  $a$ .

**定理 3.5** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的函数. 设  $x \in I$ . 设  $f$  于  $x$  可导. 则  $f$  于  $x$  连续.

**证** 因为  $f$  于  $x$  可导, 故存在  $x$  的邻域  $N$ , 与  $N \cap I$  上的函数  $F$ , 使

$$f = f[x] + (1 - x)F,$$

且  $F$  于  $x$  连续.

因为  $1 - x$  于  $x$  连续, 故  $(1 - x)F$  于  $x$  连续; 因为  $f[x]$  于  $x$  连续, 故  $f$  于  $x$  连续. 证毕.

**定理 3.6** 设  $I$  为区间. 设  $f, g$  为  $I$  上的函数. 设  $x \in I$ . 设  $f, g$  都于  $x$  可导. 则:

- $f + g$  于  $x$  可导, 且

$$(f + g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) + (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 设  $k$  为常数. 则  $kf$  于  $x$  可导, 且

$$(kf \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = k \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- $fg$  于  $x$  可导, 且

$$(fg \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot g[x] + f[x] \cdot (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 若  $f[x] \neq 0$ , 则  $g/f$  于  $x$  可导, 且

$$(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}.$$

**证** 因为  $f$  于  $x$  可导, 故存在  $x$  的邻域  $N_1$ , 与  $N_1 \cap I$  上的函数  $F$ , 使

$$f = f[x] + (1 - x)F,$$

且  $F$  于  $x$  连续. 类似地, 因为  $g$  于  $x$  可导, 故存在  $x$  的邻域  $N_2$ , 与  $N_2 \cap I$  上的函数  $G$ , 使

$$g = g[x] + (1 - x)G,$$

且  $G$  于  $x$  连续. 取  $N = N_1 \cap N_2$ , 则  $N$  也是  $x$  的邻域. 这里, 为方便, 不妨滥用记号, 视  $F, G$  分别是  $f, g$  在  $N \cap I$  上的限制. 此外, 注意到,  $f, g$  于  $x$  的导数分别为  $F[x], G[x]$ .

因为

$$\begin{aligned} f + g &= (f[x] + (1-x)F) + (g[x] + (1-x)G) \\ &= (f[x] + g[x]) + (1-x)(F + G) \\ &= (f + g)[x] + (1-x)(F + G), \end{aligned}$$

且  $F + G$  于  $x$  连续, 故  $f + g$  于  $x$  可导, 且导数为  $(F + G)[x] = F[x] + G[x]$ .

因为

$$\begin{aligned} kf &= k(f[x] + (1-x)F) \\ &= kf[x] + k(1-x)F \\ &= (kf)[x] + (1-x)(kF), \end{aligned}$$

且  $kF$  于  $x$  连续, 故  $kf$  于  $x$  可导, 且导数为  $(kF)[x] = k \cdot F[x]$ .

因为

$$\begin{aligned} fg &= (f[x] + (1-x)F)(g[x] + (1-x)G) \\ &= f[x]g[x] + f[x](1-x)G + (1-x)Fg[x] + (1-x)F(1-x)G \\ &= (fg)[x] + (F \cdot g[x] + f[x] \cdot G + FG(1-x))(1-x), \end{aligned}$$

且  $h = F \cdot g[x] + f[x] \cdot G + FG(1-x)$  于  $x$  连续, 故  $fg$  于  $x$  可导, 且导数为  $h[x] = F[x]g[x] + f[x]G[x]$ .

最后一个等式需要一点儿技巧. 首先, 既然  $f[x] \neq 0$ , 且  $f$  于  $x$  连续, 故存在  $x$  的邻域  $M$ , 使  $t \in M \cap I$  时,

$$|f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2},$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leq |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$



也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, 在  $M$  上,  $f$  不取零值. 从而, 在  $(M \cap N) \cap I$  上,

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f^{-1}[x] + \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{f[x]} \right) \\ &= f^{-1}[x] - \frac{f - f[x]}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] - \frac{(1-x)F}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] + (1-x) \cdot \left( -\frac{F}{f[x]f} \right). \end{aligned}$$

因为  $-F/(f[x]f)$  于  $x$  连续, 故  $f^{-1}$  于  $x$  可导, 且导数为  $-F[x]/(f^2[x])$ .

注意到  $g/f = g \cdot f^{-1}$ , 故  $g/f$  于  $x$  可导, 且

$$\begin{aligned} & (g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (gf^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f^{-1}[x] + g[x] \cdot (f^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot \frac{1}{f[x]} + g[x] \cdot \left( -\frac{(f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f[x]f[x]} \right) \\ &= \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

**例 3.7** 我们知道,  $ax + b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  于  $\mathbb{R}$  的任意一点  $x$  都可导, 且导数为  $a$ . 特别地, 常函数于  $x$  的导数为 0, 而  $1$  于  $x$  的导数为 1. 利用算学归纳法, 可算出, 当  $n$  为正整数时,  $x^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  于  $\mathbb{R}$  的任意一点  $x$  都可导, 且导数为  $nx^{n-1}$ . 由此, 多项式函数于  $\mathbb{R}$  的任意一点  $x$  都可导. 进而, 有理函数于有定义的点可导. 顺便一提, 即使  $n$  为负整数,  $x^n$  于非零的  $x$  的导数仍为  $nx^{n-1}$ .

**定理 3.8 (链规则)** 设  $I, J$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow K$ . 设  $x \in I$ . 设  $f$  于  $x$  可导, 且  $g$  于  $f[x]$  可导. 则  $g \circ f$  于  $x$  可导, 且

$$(g \circ f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (g \text{ 于 } f[x] \text{ 的导数}) \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

**证** 因为  $g$  于  $f[x]$  可导, 故存在  $f[x]$  的邻域  $M$ , 与  $M \cap J$  上的函数  $G$ , 使

$$g = g[f[x]] + (1 - f[x])G,$$

且  $G$  于  $f[x]$  连续; 同时,  $G[f[x]]$  即为  $g$  于  $f[x]$  的导数. 因为  $f$  于  $x$  可导, 故存在  $x$  的邻域  $N_1$ , 与  $N_1 \cap I$  上的函数  $F$ , 使

$$f = f[x] + (1 - x)F,$$

且  $F$  于  $x$  连续; 同时,  $F[x]$  即为  $f$  于  $x$  的导数.

因为  $f$  亦于  $x$  连续, 故对  $f[x]$  的邻域  $M$  来说, 必存在  $x$  的邻域  $N_2$ , 使  $f[N_2 \cap I] \subset M$ ; 又因为  $f$  的陪域为  $J$ , 故  $f[N_2 \cap I] \subset J$ . 所以,  $f[N_2 \cap I] \subset M \cap J$ . 取  $N = N_1 \cap N_2$ , 则  $N$  也是  $x$  的邻域, 且  $f[N \cap I] \subset M \cap J$ . 为方便, 不妨滥用记号, 视  $F, f$  分别是  $F, f$  在  $N \cap I$  上的限制. (事实上, 本段文字只是保证复合  $G \circ f$  有意义罢了.)

现在考察  $g \circ f$ :

$$\begin{aligned} g \circ f &= g[f[x]] + (f - f[x])(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (1 - x)F(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (1 - x) \cdot (G \circ f)F. \end{aligned}$$

因为  $G$  于  $f[x]$  连续, 而  $f$  于  $x$  连续, 故  $G \circ f$  于  $x$  连续; 又因  $F$  于  $x$  连续, 故  $(G \circ f)F$  于  $x$  连续. 所以  $g \circ f$  于  $x$  可导, 且导数为  $G[f[x]] \cdot F[x]$ . 证毕.

**定理 3.9** 设  $I, J$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  严单调, 且有反函数  $f^{[-1]}: J \rightarrow I$ . 设  $y \in J$ . 设  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  可导. 则  $f^{[-1]}$  于  $y$  可导的一个必要与充分条件是:  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  的导数非零.

若  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  的导数不等于零, 则

$$(f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}) = \frac{1}{(f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数})}.$$

**证** 先看必要性. 既然  $f^{[-1]}$  于  $y$  可导, 且  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  可导, 那么  $1_I = f \circ f^{[-1]}$  于  $y$  可导. 由链规则, 有

$$1 = (f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数}) \cdot (f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}).$$

从而  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  的导数非零.

再看充分性. 因为  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  可导, 故存在  $f^{[-1]}[y]$  的邻域  $N_1$ , 与  $N_1 \cap I$  上的函数  $F$ , 使

$$f = f[f^{[-1]}[y]] + (1 - f^{[-1]}[y])F,$$

且  $F$  于  $f^{[-1]}[y]$  连续. 依假定,  $f$  于  $f^{[-1]}[y]$  的导数  $F[f^{[-1]}[y]] \neq 0$ . 所以, 存在  $f^{[-1]}[y]$  的邻域  $N_2$ , 使在  $N_2 \cap (N_1 \cap I)$  上,  $F$  不取零值. 取  $N = N_2 \cap N_1$ , 则  $N$  也是  $f^{[-1]}[y]$  的邻域, 且在  $N \cap I$  上, 不但  $F$  不取零值, 且

$$f = y + (1 - f^{[-1]}[y])F.$$

因为  $f$  严格单调, 且  $I, J$  都是区间, 故  $f, f^{[-1]}$  都是连续函数. 特别地,  $f^{[-1]}$  于  $y$  连续. 故对  $f^{[-1]}[y]$  的邻域  $N$ , 存在  $y$  的邻域  $M$ , 使  $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N$ . 因为  $f^{[-1]}$  的值域为  $I$ , 故  $f^{[-1]}[M \cap J] \subset I$ . 也就是说,  $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N \cap I$ . (事实上, 这只是为保证复合  $F \circ f^{[-1]}$  有意义.) 那么, 在  $M \cap J$  上, 有

$$f \circ f^{[-1]} = y + (f^{[-1]} - f^{[-1]}[y])(F \circ f^{[-1]}),$$

即

$$f^{[-1]} = f^{[-1]}[y] + (1 - y) \cdot \frac{1}{F \circ f^{[-1]}}.$$

因为  $f^{[-1]}$  于  $y$  连续, 而  $F$  于  $f^{[-1]}[y]$  连续, 故  $F \circ f^{[-1]}$  于  $y$  连续; 因为 (在  $M \cap J$  上)  $F$  不取零值, 故  $1/(F \circ f^{[-1]})$  亦于  $y$  连续. 所以,  $f^{[-1]}$  于  $y$  可导, 且导数为  $1/F[f^{[-1]}[y]]$ . 证毕.

最后, 我给出一个十分有用的事实; 不过, 由于没有足够多的工具, 我就不论证了.

**定理 3.10** 指数函数、余弦函数、正弦函数于其定义域的每一点都可导. 具体地说:

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  于  $\mathbb{R}$  的任意一点  $x$  都可导, 且导数为  $\exp[x]$ .
- $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  于  $\mathbb{R}$  的任意一点  $x$  都可导, 且导数为  $-\sin[x]$ ,
- $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  于  $\mathbb{R}$  的任意一点  $x$  都可导, 且导数为  $\cos[x]$ .

## 3.2 无变量的导数计算

这是本章的重点; 这也是本书的一个重点. 不过, 不重要地, “无变量的导数计算”的“导数”跟前面的“导数”不是一个词, 但仍有联系.

**定义 3.11** 设  $f$  是区间  $I$  上的函数. 若  $f$  于  $I$  的每一点都可导, 则定义函数

$$\begin{aligned} D[f]: I &\rightarrow K, \\ x &\mapsto (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}), \end{aligned}$$

其中陪域  $K$  可视情况而定 (除非特别说明, 我们不在意陪域). 我们称  $D[f]$  为  $f$  的**导函数** (亦可简称其为  $f$  的**导数**).

抽象地,  $D[f]$  的  $D$  本身就是一个函数; 不过, 这是一个变函数为函数的函数 (有点儿绕). 有时, 在不引起误会的时候, 我们也可写  $D[f]$  为  $Df$ ; 毕竟, 至少在本书里,  $D$  也只跟函数“作用”.

当然, 我又忘记了一件事: 若  $f$  于  $I$  的每一点都可导, 我们就说  $f$  是  $I$  上的**可导函数**.

曾经, 我们写 “ $f$  于  $x$  的导数是  $\ell$ ”; 现在, 我们总算能简便地表此事以  $D[f][x] = \ell$  或  $Df[x] = \ell$ . 乘热打铁, 我们用简单的话转述前节的结论.

**定理 3.12** 设  $f, g$  都是区间  $I$  上的可导函数.

- $f + g$  也是  $I$  上的可导函数, 且

$$D[f + g] = Df + Dg.$$

- 设  $k$  为常数. 则  $kf$  也是  $I$  上的可导函数, 且

$$D[kf] = kDf.$$

- $fg$  也是  $I$  上的可导函数, 且

$$D[fg] = Df \cdot g + f \cdot Dg.$$

- 设  $f$  不取零值. 则  $g/f$  也是  $I$  上的可导函数, 且

$$D \frac{g}{f} = \frac{Dg \cdot f - g \cdot Df}{f^2}.$$

**定理 3.13** 设  $I, J$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow K$  都是可导函数. 则  $g \circ f$  也是可导函数, 且

$$D[g \circ f] = (Dg \circ f) \cdot Df.$$

**注 3.14** 有时, 我们也写  $g \circ f$  为  $g[f]$ ; 相应地, 也可写链规则为

$$D[g[f]] = Dg[f] \cdot Df.$$

我们约定  $Dg[f]$  表示  $(Dg)[f]$ ; 这跟  $Dg \circ f$  表示  $(Dg) \circ f$  是一致的. 不过, 由于  $Dg[f]$  比  $Dg \circ f$  紧凑, 我们省去了一对圆括号.

**定理 3.15** 设  $I, J$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  严格单调, 且有反函数  $f^{[-1]}: J \rightarrow I$ . 设  $f$  是可导函数, 且  $Df$  不取零值. 则  $f^{[-1]}$  也是可导函数, 且

$$Df^{[-1]} = \frac{1}{Df \circ f^{[-1]}}.$$

**定理 3.16** 导数表 I:

- $Dc = 0$ , 此处  $c$  为常函数.
- $Dt^n = n t^{n-1}$  ( $n$  为整数).
- $D \exp = \exp$ .
- $D \cos = -\sin$ .
- $D \sin = \cos$ .

用这四个定理, 我们可以清楚地、有条理地计算常见的函数的导(函)数. 我举一些例; 您可以拿本书的计算过程跟传统的导数计算过程比较.

**例 3.17** 因为  $\tan = \sin / \cos$ , 故

$$\begin{aligned} D \tan &= D \frac{\sin}{\cos} \\ &= \frac{D \sin \cdot \cos - \sin \cdot D \cos}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\ &= \cos^{-2} = 1 + \tan^2. \end{aligned}$$

**例 3.18** 因为  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  严增,  $\mathbb{R}, (0, +\infty)$  都是区间, 且  $D \exp = \exp > 0$ , 故  $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  也是可导函数, 且

$$D \ln = \frac{1}{D \exp \circ \ln} = \frac{1}{\exp \circ \ln} = \frac{1}{x}.$$

因为  $\sin: (-2\pi/4, 2\pi/4) \rightarrow (-1, 1)$  严增,  $(-2\pi/4, 2\pi/4), (-1, 1)$  都是区间, 且  $D \sin = \cos > 0$ , 故  $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-2\pi/4, 2\pi/4)$  也是可导函数, 且

$$D \arcsin = \frac{1}{D \sin \circ \arcsin} = \frac{1}{\cos \circ \arcsin} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因为  $\tan: (-2\pi/4, 2\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}$  严增,  $(-2\pi/4, 2\pi/4), \mathbb{R}$  都是区间, 且  $D \tan = 1 + \tan^2 > 0$ , 故  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-2\pi/4, 2\pi/4)$  也是可导函数, 且

$$D \arctan = \frac{1}{D \tan \circ \arctan} = \frac{1}{(1 + \tan^2) \circ \arctan} = \frac{1}{1+x^2}.$$

设  $n$  为正整数. 因为  $x^n: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  严增,  $(0, +\infty)$  是区间, 且  $D x^n = n \cdot x^{n-1} > 0$ , 故  $x^{1/n}: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  也是可导函数, 且

$$D x^{1/n} = \frac{1}{D x^n \circ x^{1/n}} = \frac{1}{(n \cdot x^{n-1}) \circ x^{1/n}} = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$

设  $m$  为整数. 则  $x^{m/n} = (x^{1/n})^m = x^{1/n} \circ x^{1/n} \circ \cdots \circ x^{1/n}$ . 故

$$D x^{m/n} = (D x^m \circ x^{1/n}) \cdot D x^{1/n} = ((m \cdot x^{m-1}) \circ x^{1/n}) \cdot \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.$$

也就是说, 对任意有理数  $r$ ,  $D x^r = r x^{r-1}$ .

**例 3.19** 定义符号函数:

$$\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \{1, 0, -1\},$$

$$t \mapsto \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

设  $I$  是某个不含 0 的区间. 故  $\text{sign}$  (在  $I$  上的限制) 是常函数, 且导数为 0.

不难看出,  $\text{abs} = \text{sign} \cdot x$ . 所以,

$$D \text{abs} = D \text{sign} \cdot x + \text{sign} \cdot D x = \text{sign} = \frac{\text{abs}}{x}.$$

由此, 我们可计算  $\ln \circ \text{abs}$  的导数:

$$D[\ln \circ \text{abs}] = (D \ln \circ \text{abs}) \cdot D \text{abs} = \left( \frac{1}{\text{abs}} \circ \text{abs} \right) \cdot \frac{\text{abs}}{\text{abs}} = \frac{1}{\text{abs}}.$$

我们添加上面的计算结果到导数表 I, 就得到了一张较为完善的导数表 II. 以后, 我们的导数计算十分依赖此表与导数表 I 前的三个定理.

**定理 3.20** 导数表 II:

- $Dc = 0$ , 此处  $c$  为常函数.
- $D\text{abs} = \frac{\text{abs}}{\text{abs}} = \text{sign}$ .
- $D\text{exp} = \text{exp}$ .
- $D\cos = -\sin$ .
- $D\sin = \cos$ .
- $D\tan = \sec^2 = 1 + \tan^2$ .
- $D\ln = D[\ln \circ \text{abs}] = \frac{1}{\text{abs}}$ .
- $D\arcsin = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{abs}^2}}$ .
- $D\arctan = \frac{1}{1 + \text{abs}^2}$ .
- $D\text{abs} = \text{abs}/\text{abs} = \text{sign}$ .
- $D\sqrt{\phantom{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\phantom{x}}}$ .

**例 3.21** 设  $f, g$  是区间  $I$  上的可导函数, 且  $f > 0$ . 求  $D[f^g]$ .

事实上,  $f^g$  就是  $e^{g(\ln f)}$ , 也就是  $\exp \circ (g(\ln \circ f)) = \exp \circ (g \ln[f])$ . 所以

$$\begin{aligned} D[f^g] &= D[\exp \circ (g \ln[f])] \\ &= (D \exp \circ (g \ln[f])) \cdot D[g \ln[f]] \\ &= (\exp \circ (g \ln[f])) \cdot (Dg \cdot \ln[f] + g \cdot D[\ln[f]]) \\ &= f^g \cdot Dg \cdot \ln[f] + f^g \cdot g \cdot (D \ln \circ f) \cdot Df \\ &= f^g \ln[f] Dg + g f^{g-1} Df. \end{aligned}$$

**例 3.22** 设

$$\begin{aligned} f: [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow \ln \left[ x^2 e^x + \sqrt{1 + x^3} \right]. \end{aligned}$$

求  $Df$ .

本问题定义  $f$  时, 使用了带变量的记号. 为了方便地计算  $f$  的导数, 我们不妨先无变量地表达  $f$ :

$$\begin{aligned} g &= t^2 \cdot \exp + \text{sqrt} \circ (1 + t^3), \\ f &= \ln \circ g. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} Df &= D[\ln \circ g] \\ &= (D \ln \circ g) \cdot Dg \\ &= g^{-1} \cdot D[t^2 \cdot \exp] + g^{-1} \cdot D[\text{sqrt} \circ (1 + t^3)] \\ &= g^{-1} \cdot (D t^2 \cdot \exp + t^2 \cdot D \exp) \\ &\quad + g^{-1} \cdot ((D \text{sqrt} \circ (1 + t^3)) \cdot D[1 + t^3]) \\ &= g^{-1} \cdot (2t + t^2) \cdot \exp + g^{-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^3}} \cdot 3t^2 \\ &= \frac{t(2+t)\exp + \frac{3t^2}{2\sqrt{1+t^3}}}{t^2 \exp + \sqrt{1+t^3}}. \end{aligned}$$



## 第四章 不定积分

上一章, 我们接触了导数; 这一章, 我们来考虑导数的“反操作”.

具体地, 设  $I$  为区间, 且  $f$  是  $I$  上的函数. 上一章的要点是: 已知  $f$ , 求  $Df$ ; 这一章的要点是: 已知  $I$  上的函数  $g$  适合  $Df = g$ , 求  $f$ .

### 4.1 原函数与不定积分

设  $I$  为区间. 不难看出,  $I$  上的常函数的导数是 0 (在  $I$  上的限制). 不过, 重要地, 此事反过来也对:

**定理 4.1** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的可导函数. 若  $Df = 0$ , 则  $f$  为常函数.

此事的论证可见于一般的分析教材, 所以我不证了 (或许, 当我变强的时候, 我就能在我的书里给出我自己的论证了).

此事的一个重要的转述如下:

**定理 4.2** 设  $I$  为区间. 设  $f_1, f_2$  为  $I$  上的可导函数. 若  $Df_1 = Df_2$ , 则存在常函数  $c$ , 使  $f_2 = f_1 + c$ .

**证** 考虑  $h = f_2 - f_1$ . 那么  $Dh = 0$ . 从而  $h$  是常函数. 证毕.

由此, 我们作如下定义.

**定义 4.3** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的函数. 若存在  $I$  上的可导函数  $F$  使  $DF = f$ , 则说  $F$  是  $f$  的一个原函数.

**定义 4.4** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的函数. 设  $f$  有一个原函数. 那么, 称  $f$  的全体原函数作成的集为  $f$  的不定积分, 即

$$\int f = \{g \mid g \text{ 是 } f \text{ 的原函数}\}.$$

**定理 4.5** 设  $I$  为区间. 设  $f$  为  $I$  上的函数. 设  $F$  是  $f$  的原函数. 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

**证** 设  $G$  是  $f$  的一个原函数. 则  $G = F + c$ , 其中  $c$  为某个常函数. 故

$$\int f \subset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

另一方面, 若  $c'$  是常函数, 显然有  $D[F + c'] = DF = f$ . 所以

$$\int f \supset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}. \quad \text{证毕.}$$

**例 4.6** 因为  $D \exp = \exp$ , 故

$$\int \exp = \{\exp + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

**例 4.7** 因为  $D[-\cos] = \sin$ , 故

$$\int \sin = \{-\cos + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

**例 4.8** 因为  $D \sin = \cos$ , 故

$$\int \cos = \{\sin + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

至此, 我们已经知道什么是不定积分. 不过, 我们也可以看到, 当前的表达不定积分的方式比较复杂. 所以, 我们很需要一种简写法; 我们将在下一节讨论此事.

我们知道, 若区间  $I$  上的函数有原函数, 那自然地有不定积分. 什么样的函数有原函数呢? 下面的结论给出了此问题的部分解答; 不过, 就算只是“部分”, 对本书而言, 也足够了.

**定理 4.9** 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 则存在  $I$  上的可导函数  $F$ , 使  $DF = f$ .

**证** 固定  $a \in I$ . 作函数

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \int_a^t f.$$

任取  $x \in I$ . 从而对任意  $t \in I$ ,

$$F[t] = \int_a^x f + \int_x^t f = F[x] + (t - x)Q[t],$$

其中

$$Q: I \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \frac{1}{t - x} \int_x^t f, & t \neq x. \end{cases}$$

取  $x$  的一个邻域  $N$ . 所以, 在  $N \cap I$  上, 有

$$F = F[x] + (t - x)Q,$$

且  $Q$  于  $x$  连续 (定理 2.33), 故  $F$  于  $x$  可导, 且  $F$  于  $x$  的导数为

$$Q[x] = f[x]. \quad \text{证毕.}$$

由此可得微积分的一个重要定理. 不过, 这不是本章的重点讨论对象.

**定理 4.10** (Newton-Leibniz) 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 设  $F$  是  $f$  的原函数. 则对任意  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

**证** 固定  $c \in I$ . 作函数

$$G: I \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \int_c^t f.$$

那么  $G$  是  $f$  的原函数, 且

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = G[b] - G[a].$$

既然  $F$  也是  $f$  的原函数, 那必定存在常函数  $\ell$ , 使  $G = F + \ell$ . 所以

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= G[b] - G[a] \\ &= (F + \ell)[b] - (F + \ell)[a] \\ &= (F[b] + \ell[b]) - (F[a] + \ell[a]) \\ &= (F[b] + \ell) - (F[a] + \ell) \\ &= F[b] - F[a]. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

## 4.2 函数集的演算

上节, 我们正式地定义了区间  $I$  上的函数  $f$  的不定积分是  $f$  的全体原函数作成的集. 随后, 我们知道, 若  $DF = f$ , 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

不过, 此表达似乎不是很简洁. 很少有人愿意每次写不定积分都要写上形如“ $c$  是  $I$  上的常函数”这样的话. 并且, 这种表达方式也不利于我们表达不定积分跟不定积分的关系.

**例 4.11** 设  $f, g$  都是区间  $I$  上的函数, 且不定积分存在. 我们看  $f + g$  是否有不定积分. 为回答这个问题, 无妨设  $F, G$  分别是  $f, g$  的原函数. 那么  $D[F + G] = f + g$ . 从而,  $f + g$  确实有不定积分

$$A = \int (f + g) = \{F + G + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

记

$$B = \left\{ u + v \mid u \in \int f, \text{ 且 } v \in \int g \right\}.$$

我们证明:  $A = B$ .

任取  $F + G + c \in A$ . 那么  $F \in \int f$ , 且  $G + c \in \int g$ . 所以  $F + G + c \in B$ . 这说明,  $A \subset B$ .

任取  $u + v \in B$ , 其中  $u \in \int f$ , 且  $v \in \int g$ . 那么存在常函数  $d_1, d_2$  使  $u = F + d_1, v = G + d_2$ . 所以  $u + v = F + G + (d_1 + d_2)$ . 二个常函数的和仍为常函数, 故  $u + v \in A$ . 这说明,  $A \supset B$ .

我们该怎样描述  $\int (f + g)$ ,  $\int f$  与  $\int g$  的关系? 您可能在其他的分析教材里见过形如

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

的文字. 不过, 上式右端的 “+” 是什么意思? 或者, 具体地, 焊接二个集的 “+” 是什么意思呢?

上例告诉我们, 我们很需要为函数集定义新的运算; 更确切地, 我们很需要搬函数的运算到函数集上.

**定义 4.12** 设  $A$  为集. 若任取  $A$  的元  $f$ ,  $f$  是一个函数, 就称  $A$  为**函数集**.

设  $P, Q$  为二个集. 若函数集  $A$  的每个元都是  $P$  上的函数, 就说  $A$  是  $P$  上的函数集. 若函数集  $A$  的每个元都是  $P$  到  $Q$  的函数 (定义域为  $P$ , 陪域为  $Q$ ), 则说  $A$  是  $P$  到  $Q$  的函数集. 此时, 我们也说, 函数集  $A$  的定义域为  $P$ , 陪域为  $Q$ .

**定义 4.13** 设  $A$  是  $P$  到  $Q$  的函数集,  $B$  是  $R$  到  $S$  的函数集, 且任取  $A$  的元  $a$ ,  $a$  的值域是  $R$  的子集. 于是, 任取  $B$  的元  $b, b \circ a: P \rightarrow S$  有意义. 定义

$$B \circ A = \{b \circ a \mid b \in B, a \in A\}.$$

不难看出,  $B \circ A$  就是  $P$  到  $S$  的函数集.

函数集的复合也有结合律.

**定理 4.14** 设  $A$  是  $P$  到  $Q$  的函数集,  $B$  是  $R$  到  $S$  的函数集,  $C$  是  $T$  到  $U$  的函数集. 设任取  $A$  的元  $a$ ,  $a$  的值域是  $R$  的子集; 设任取  $B$  的元  $b$ ,  $b$  的

值域是  $S$  的子集. 则

$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为  $C \circ B \circ A$ .

此事的论证不难; 不过, 我希望您能适应这种论证方式; 这样, 您就完全可以类似地论证其他的关于函数集的运算律.

**证** 取  $f \in C \circ (B \circ A)$ . 于是, 存在  $a \in A, b \in B, c \in C$  使  $f = c \circ (b \circ a)$ . 因为函数的复合适合结合律, 故

$$f = c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a \in (C \circ B) \circ A.$$

再取  $g \in (C \circ B) \circ A$ . 于是, 存在  $a' \in A, b' \in B, c' \in C$  使  $g = (c' \circ b') \circ a'$ . 因为函数的复合适合结合律, 故

$$g = (c' \circ b') \circ a' = c' \circ (b' \circ a') \in C \circ (B \circ A). \quad \text{证毕.}$$

就像为函数集引入复合那样, 对  $\mathbb{R}$  的子集到  $\mathbb{R}$  的子集的函数集, 我们还可引入  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $^$  等运算.

**定义 4.15** 设  $P, Q, S$  是  $\mathbb{R}$  的子集. 设  $A$  是  $P$  到  $Q$  的函数集,  $B$  是  $P$  到  $S$  的函数集. 设  $*$  为三文字  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  的任意一个. 定义

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中  $A * B$  的陪域可按需要决定. 一般地, 我们可写  $\{0\} - B$  为  $-B$ , 写  $A \cdot B$  为  $AB$ .

若任取函数集  $A$  的元  $a$ , 任取  $p \in P$ , 都有  $a[p] \neq 0$ , 则定义

$$\frac{B}{A} = \left\{ \frac{b}{a} \mid b \in B, a \in A \right\},$$

其中陪域可按需要决定.

若对任意  $a \in A, b \in B, p \in P$ ,  $a[p]^{b[p]}$  有意义, 则还可定义

$$A^B = \{a^b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中陪域可按需要决定.

现在,我邀请您证明函数集的如下性质. 我就不证明了; 因为我想, 我已经告诉您怎么论证了.

**定理 4.16** 设  $P$  是  $\mathbb{R}$  的子集. 设  $A, B, C$  都是  $P$  到 (某个)  $\mathbb{R}$  的子集的函数集. 则

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, & AB &= BA, \\ (A + B) + C &= A + (B + C), & (AB)C &= A(BC). \end{aligned}$$

**定理 4.17** 设  $P$  是  $\mathbb{R}$  的子集. 任取函数集  $L$  的元  $\ell$ ,  $\ell$  的值域都是  $P$  的子集. 设  $A, B$  是  $P$  上的函数集. 设  $*$  是五文字  $+, -, \cdot, /, ^$  的任意一个. 则

$$(A * B) \circ L = (A \circ L) * (B \circ L).$$

尽管函数集跟函数有类似的运算律, 不过, 这并不是说, 函数的每一个运算律都可被搬到函数集上.

**例 4.18** 设  $P \subset \mathbb{R}$ . 设  $0$  是  $P$  上的恒取零值的函数. 那么, 不难看出, 对任意  $p \in P$ :

- $p + 0 = p$ ;
- 存在  $q \in P$ , 使  $p + q = 0$  (取  $q$  为  $-p$  即可).

由此, 我们不难推出: 若  $p, q, r \in P$ , 且  $q + p = r + p$ , 则  $q = r$ ; 在等式二侧同时加  $-p$ , 利用结合律, 再利用  $0$  的性质即知. 我们姑且称这个性质为函数的加法的消去律.

函数集的加法也有消去律吗? 一般来说, 没有. 取  $A = \{1\}$ ; 取  $B, C$  为

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\},$$

这里的  $0, 1, -1, \dots$  都是  $P$  上的常函数. 那么, 不难验证,  $A + C = B + C = C$ . 可是,  $A \neq B$ .

现在我们考虑一类特殊的函数集; 这也是不定积分的演算重点考察的对象.

我们先为一种特殊的函数集引入方便的记号.

设  $P \subset \mathbb{R}$ . 考虑  $P$  上的函数. 任取实数  $c$ , 我们总可以作一个  $P$  上的常函数

$$\begin{aligned} c: P &\rightarrow \{c\}, \\ t &\mapsto c. \end{aligned}$$

反过来, 任取  $P$  上的一个 (实的) 常函数  $f$ , 我们也总能找到一个实数  $c$ , 使任取  $t \in P$ , 都有  $f[t] = c$ . 并且, 不同的实数 (常函数) 对应着不同的常函数 (实数). 我们记全体实数作成的集为  $\mathbb{R}$ ; 所以, 我们也无妨记全体  $P$  上的 (实的) 常函数作成的集为  $\mathbb{R}_P$ . 我们曾说, 除非有必要, 我们不严格区分函数及其限制; 也就是说, 在语境明确的时候, 我们也可写  $\mathbb{R}_P$  为  $\mathbb{R}$ .

下面的几条性质十分重要.

**定理 4.19** 设  $\mathbb{R}_P$  为  $P$  上的全体常函数作成的集. 则  $\mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$ .

**证** 任取  $f \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$ . 那么, 存在  $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_P$ , 使  $f = f_1 + f_2$ . 因为二个常函数的和还是常函数, 故  $f \in \mathbb{R}_P$ . 反过来, 任取  $g \in \mathbb{R}_P$ . 因为  $g = g + 0$ , 且  $0 \in \mathbb{R}_P$ , 故  $g \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$ . 证毕.

**定理 4.20** 设  $\mathbb{R}_P$  为  $P$  上的全体常函数作成的集.

- 若  $d \in \mathbb{R}_P$ , 则  $\{d\} + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$ .
- 若  $k \in \mathbb{R}_P$ , 且  $k \neq 0$ , 则  $\{k\} \cdot \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$ .

**证** 我在此处论证关于加的等式. 任取  $f \in \{d\} + \mathbb{R}_P$ . 那么, 存在  $e \in \mathbb{R}_P$  使  $f = d + e$ . 因为二个常函数的和还是常函数, 故  $f \in \mathbb{R}_P$ . 反过来, 任取  $g \in \mathbb{R}_P$ . 因为  $g = d + (g - d)$ , 且  $g - d \in \mathbb{R}_P$ , 故  $g \in \{d\} + \mathbb{R}_P$ .

论证关于乘的等式的方法是类似的. 不过, 要注意一些细节.  $k \neq 0$  的意思是  $k$  跟 0 作为函数不相等; 所以, 是存在  $p \in P$ , 使  $k[p] \neq 0[p]$ . 不过, 因为  $k$  跟 0 都是常函数, 故  $k \neq 0$  (实数的不相等). 所以  $k$  有倒数  $k^{-1}$ , 且  $k^{-1}$  也是常函数. 证毕.

**定理 4.21** 设  $\mathbb{R}_P$  为  $P$  上的全体常函数作成的集. 设函数集  $A$  的每一个函数的值域都是  $P$  的子集. 则  $\mathbb{R}_P \circ A = \mathbb{R}_P$ .

**证** 注意到对任意  $a \in A$ ,  $k \in \mathbb{R}_P$ , 必有  $k \circ a = k$ . 证毕.



设  $I$  是区间. 设  $f$  是  $I$  上的函数. 设  $F$  是  $f$  的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = \{F\} + \mathbb{R}.$$

您可能会觉得写  $\{F\}$  较繁. 所以, 我们再简化一下记号.

**例 4.22** 我假定您学过高中算学里的立体几何.

在高中, 您一开始就学了集与集的关系、运算. 自然地, 我们视平面为**点集** (每一个元都是点的集), 也视直线为**点集**. 那么, 点  $P$  在直线  $\ell$  上, 就是  $P \in \ell$ ; 点  $P$  不在直线  $\ell$  上, 就是  $P \notin \ell$ . 类似地, 点  $P$  在平面  $\Pi$  内, 就是  $P \in \Pi$ ; 点  $P$  不在平面  $\Pi$  内, 就是  $P \notin \Pi$ .

现在, 我们任取一个平面  $\Pi$  与一条直线  $\ell$ . 您也知道, 下面的三事, 有且只有一件能发生:

- $\ell$  上的每一个点都是  $\Pi$  的点. 我们可简单地记此事为  $\ell \subset \Pi$ .
- $\ell$  上的每一个点都不是  $\Pi$  的点. 我们说,  $\ell \cap \Pi$  是空集.
- 存在唯一的一点  $P$ , 使  $P \in \ell$ , 且  $P \in \Pi$ . 高中算学会这么写:  $\ell \cap \Pi = P$ .

Well. 正如您所见, 按道理, 我们应当写  $\ell \cap \Pi = \{P\}$ ; 毕竟, 我们说, 平面跟直线都是**点集**. 可是, 我们省略了  $\{\}$ . 也就是说, 我们简单地写刚好有一个元的集  $\{a\}$  为  $a$ . 不重要地, 高中算学一开始讲集时, 用  $A \subseteq B$  表达 “ $A$  是  $B$  的子集”, 用  $A \subsetneq B$  表达 “ $A$  是  $B$  的真子集”; where are you,  $\subset$ ?

当然了, 也不是每个高中算学老师都是 “盲人”. 假如您对此事感兴趣, 您可以参考阮龙培的《关于立体几何应用集合论符号的几点看法》与吴长庆的《立体几何使用 “集合语言” 的准确性》. 我承认, 这些文章都比我老.

借此机会, 我说一说我的观点吧. 我的有限的语言知识告诉我, 土话跟胡话都有不少多义词. 这里, “多义” 并不是指有 “很大的区别” 的解释, 而是说这些含义 “相似”, 但又不完全一样 (我加了引号, 因为我不知道怎么用行话表达我的想法). 就拿 “曲线” (胡话: curve) 为例吧. 在中学, 我们一般视曲线为点集. 所以, 我们说, (平面的) 曲线有隐方程  $F[x, y] = 0$ , 也有参数方程  $x = f[t]$ ,  $y = g[t]$ ,  $t \in A$  ( $A$  就是所谓的 “参数区间”). 这么看来, 曲线就是全体适合隐方程 (或参数方程) 的  $(x, y)$  作成的集. 在算学分析 (或高等算学)

里,您可能也学过怎么用积分算曲线的长.这个时候,曲线的方程可能更重要;这是因为,曲线的“几何性质”似乎对曲线的长的公式的推导没有帮助.我们计算曲线的长时,一般都要求“曲线的参数方程”的导数连续——这其实涉及到方程的分析性质了.(假如您对此事感兴趣,您可以参考美国算学家 Walter Rudin 的教材 *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed.)

目前,算学家都是人;不过,人类,似乎生来就想着偷懒.所以说,算学家也不例外.算学家一方面追求严谨;另一方面,假如记号不是很简洁,算学家自己写起来都费劲.所以,算学家会说:“在本书(或本文、本节、本章),为方便,我们约定文字(表达式、符号) $\times\times\times$ 表示……”不过,我觉得,可以先给出“稍繁琐的写法”,再给“简单的写法”;这或许能让学生体会到简单的写法为什么方便.可惜,我看了好几本新的高中算学书,都是一开始用 $\subseteq$ 表子集,而在立体几何里“借用” $\subset$ 表直线的每一点都在平面内;没有一本(高中算学)教材说“为方便,我们用 $\subset$ 表子集,并省去刚好有一个元的集 $\{a\}$ 外的花括号”.

好了,我就说这么多吧.严格地,这算是“私货”了;可是,这是一本告诉他人我(与一些算学家)的想法的微积分读物.假如我不带“私货”,那我要带什么呢?或许,我不如不写这本书.

现在,请允许我正式地作出这样的约定:在不引起混淆时,我们可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 $a$ .所以,像 $a \in a, a \subset \{a\}$ 的表达都是可被接受的.

设 $I$ 是区间.设 $f$ 是 $I$ 上的函数.设 $F$ 是 $f$ 的一个原函数.那么,我们就可以简单地写

$$\int f = F + \mathbb{R}.$$

代 $f$ 以 $DF$ ,就有

$$\int DF = F + \mathbb{R}.$$

不严格地,若忽视常函数,那么不定积分“抵消了”导数.反过来呢?

**定义 4.23** 设 $I$ 是区间.设 $A$ 是 $I$ 上的函数集,且 $A$ 的每个元都是可导函数.我们说, $A$ 是 $I$ 上的**可导函数集**.定义

$$D[A] = \{Da \mid a \in A\}.$$

有时, 我们也可简单地写  $D[A]$  为  $DA$ .

**例 4.24** 不难看出,  $D\mathbb{R} = \{0\} = 0$ .

设  $I$  是区间. 设  $f$  是  $I$  上的函数. 设  $F$  是  $f$  的一个原函数. 那么

$$\begin{aligned} D\left[\int f\right] &= D[\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}] \\ &= \{D[F + c] \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f\} = f. \end{aligned}$$

所以, 不严格地, 我们也可以说, 导数“抵消了”不定积分.

**定义 4.25** 设  $P \subset \mathbb{R}$ . 设  $A$  为  $P$  上的函数集. 若存在  $a \in A$  使  $P = \{a\} + \mathbb{R} = a + \mathbb{R}$ , 就说  $A$  是  $P$  上的**至多相差常函数的函数集**.

**注 4.26** 或许这样的函数集有更好的名字; 不过, 我姑且这么叫吧.

**定理 4.27** 设  $P \subset \mathbb{R}$ . 设  $f$  是  $P$  上的函数.

- 若  $g$  是  $P$  上的函数, 则

$$(f + \mathbb{R}) + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

- 若  $g$  是  $P$  上的函数, 则

$$f + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

特别地, 取  $g$  为常函数  $c$ , 则

$$f + \mathbb{R} = f + (c + \mathbb{R}) = (f + c) + \mathbb{R}.$$

- 若  $k \in \mathbb{R}$ , 且  $k \neq 0$ , 则

$$k(f + \mathbb{R}) = kf + \mathbb{R}.$$

- 若函数  $h$  的值域是  $P$  的子集, 则

$$(f + \mathbb{R}) \circ h = f \circ h + \mathbb{R}.$$

证 利用函数集的运算律与  $\mathbb{R}$  的性质, 有

$$\begin{aligned}
 (f + \mathbb{R}) + (g + \mathbb{R}) &= (\{f\} + \mathbb{R}) + (\{g\} + \mathbb{R}) \\
 &= ((\{f\} + \mathbb{R}) + \{g\}) + \mathbb{R} \\
 &= (\{f\} + (\mathbb{R} + \{g\})) + \mathbb{R} \\
 &= (\{f\} + (\{g\} + \mathbb{R})) + \mathbb{R} \\
 &= ((\{f\} + \{g\}) + \mathbb{R}) + \mathbb{R} \\
 &= (\{f + g\} + \mathbb{R}) + \mathbb{R} \\
 &= \{f + g\} + (\mathbb{R} + \mathbb{R}) \\
 &= (f + g) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 f + (g + \mathbb{R}) &= \{f\} + (\{g\} + \mathbb{R}) \\
 &= (\{f\} + \{g\}) + \mathbb{R} \\
 &= (f + g) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

取  $f_1 \in k(f + \mathbb{R})$ . 那么, 存在  $c \in \mathbb{R}$  使  $f_1 = k(f + c) = kf + kc \in kf + \mathbb{R}$ .  
 取  $f_2 \in kf + \mathbb{R}$ . 那么, 存在  $d \in \mathbb{R}$  使  $f_2 = kf + d$ . 因为  $k \neq 0$ , 故  
 $f_2 = kf + kk^{-1}d = k(f + k^{-1}d) \in k(f + \mathbb{R})$ .

最后一个也不难:

$$\begin{aligned}
 (f + \mathbb{R}) \circ h &= (\{f\} + \mathbb{R}) \circ \{h\} \\
 &= \{f\} \circ \{h\} + \mathbb{R} \circ \{h\} \\
 &= (f \circ h) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

证毕.

### 4.3 不定积分的演算

现在, 我们研究怎么算不定积分.

**定理 4.28** 设  $I$  是区间. 设  $F$  是  $I$  上的可导函数. 则

$$\int DF = F + \mathbb{R}.$$

**证** 我已经证过它了.

证毕.

这或许是最基本的计算法了. 一般来说, “简单的” 函数的不定积分都可以这么求出来.

**例 4.29** 设  $I$  是某个不含 0 的区间. 求  $\int \frac{1}{x}$ .

我们知道,  $D[\ln \circ \text{abs}] = \frac{1}{x}$ . 所以

$$\int \frac{1}{x} = \ln \circ \text{abs} + \mathbb{R}.$$

**定理 4.30** 设  $I$  是区间. 设  $f, g$  是  $I$  上的函数. 设  $f, g$  都有不定积分.

•  $f + g$  也有不定积分, 且

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

• 设  $k \in \mathbb{R}$ , 且  $k \neq 0$ . 则  $kf$  也有不定积分, 且

$$\int kf = k \int f.$$

**证** 设  $F, G$  分别是  $f, g$  的原函数. 那么

$$\int f = F + \mathbb{R}, \quad \int g = G + \mathbb{R}.$$

因为  $D[F + G] = f + g$ , 故

$$\begin{aligned} \int (f + g) &= (F + G) + \mathbb{R} \\ &= (F + \mathbb{R}) + (G + \mathbb{R}) \\ &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

类似地, 因为  $D[kF] = kf$ , 且  $k \neq 0$ , 故

$$\int kf = kF + \mathbb{R} = k(F + \mathbb{R}) = k \int f. \quad \text{证毕.}$$

**注 4.31** 注意到  $\int 0 = \mathbb{R}$ . 所以, 对任意  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\int kf = k \int f + \mathbb{R}.$$

**例 4.32** 设  $A$  是  $P \subset \mathbb{R}$  上的函数集. 那么, 不难验证,  $-A = (-1)A$ . 所以, 特别地, 有

$$\begin{aligned}\int (f - g) &= \int (f + (-1)g) \\ &= \int f + \int (-1)g \\ &= \int f + (-1) \int g \\ &= \int f - \int g.\end{aligned}$$

**例 4.33**

$$\begin{aligned}\int \cos &= \int D \sin = \sin + \mathbb{R}, \\ \int \sin &= \int (-1)D \cos = (-1) \int D \cos = -\cos + \mathbb{R}, \\ \int \exp &= \int D \exp = \exp + \mathbb{R}, \\ \int \mathfrak{t}^n &= \int \frac{1}{n+1} D \mathfrak{t}^{n+1} = \frac{\mathfrak{t}^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R} \quad (n \neq -1).\end{aligned}$$

**例 4.34**

$$\begin{aligned}\int (3 \cos - 4 \sin + 5 \exp) &= \int (3 \cos - 4 \sin) + \int 5 \exp \\ &= \int 3 \cos - \int 4 \sin + \int 5 \exp \\ &= 3 \int \cos - 4 \int \sin + 5 \int \exp \\ &= 3(\sin + \mathbb{R}) - 4(-\cos + \mathbb{R}) + 5(\exp + \mathbb{R}) \\ &= (3 \sin + \mathbb{R}) + (4 \cos + \mathbb{R}) + (5 \exp + \mathbb{R}) \\ &= ((3 \sin + 4 \cos) + \mathbb{R}) + (5 \exp + \mathbb{R}) \\ &= 3 \sin + 4 \cos + 5 \exp + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.35**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2} &= \int (1 + \tan^2) = \int D \tan = \tan + \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} &= \int D \arctan = \arctan + \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} &= \int D \arcsin = \arcsin + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.36**

$$\begin{aligned}\int \tan^2 &= \int (1 + \tan^2) - \int 1 \\ &= (\tan + \mathbb{R}) - (\mathfrak{t} + \mathbb{R}) \\ &= \tan - \mathfrak{t} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.37**

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{t}^4}{1 + \mathfrak{t}^2} &= \int \frac{\mathfrak{t}^4 - 1 + 1}{1 + \mathfrak{t}^2} \\ &= \int \left( \mathfrak{t}^2 - 1 + \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \right) \\ &= \int \mathfrak{t}^2 - \int 1 + \int \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \\ &= \left( \frac{\mathfrak{t}^3}{3} + \mathbb{R} \right) - (\mathfrak{t} + \mathbb{R}) + (\arctan + \mathbb{R}) \\ &= \frac{\mathfrak{t}^3}{3} - \mathfrak{t} + \arctan + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**定理 4.38** 设  $I, J$  为区间. 设  $g$  是  $J$  上的函数, 且有不定积分. 设  $f: I \rightarrow J$  是可导函数. 则  $(g \circ f) Df$  也有不定积分, 且

$$\int (g \circ f) Df = \left( \int g \right) \circ f.$$

**证** 设  $G$  是  $g$  的原函数. 则

$$D[G \circ f] = (DG \circ f) Df = (g \circ f) Df.$$

从而

$$\begin{aligned}\int (g \circ f) Df &= G \circ f + \mathbb{R} \\ &= (G + \mathbb{R}) \circ f \\ &= \left( \int g \right) \circ f.\end{aligned}\quad \text{证毕.}$$

**注 4.39** 作为对比, 我们看看怎么用传统的记号表示此事.

设  $I, J$  为区间. 设  $g$  是  $J$  上的函数, 且有不定积分

$$\int g(x) dx = G(x) + C.$$

设  $f: I \rightarrow J$  是可导函数. 则  $(g \circ f)f'$  也有不定积分

$$\int g(f(t))f'(t) dt = G(f(t)) + C.$$

一般称这种计算不定积分的方法为“第一**换元** (积分) 法”; 不过, 我认为, 可以称其为“第一**复合** (积分) 法”, 因为 (表面上) 我代“换元”以“复合”. 事实上, 传统的记号跟我在本书用的新记号表达的仍为同一件事. 所谓“第一换元法”的本质还是复合与链规则, 只不过, 传统的记号似乎不太允许“ $x = f(x)$ ”的写法, 故换一个文字是有必要的.

**例 4.40** 设  $g$  有不定积分. 设  $a, b \in \mathbb{R}$ , 且  $a \neq 0$ . 则

$$\begin{aligned}\int g \circ (a\mathbf{1} + b) &= \int \frac{1}{a} (g \circ (a\mathbf{1} + b)) D[a\mathbf{1} + b] \\ &= \int \left( \frac{g}{a} \circ (a\mathbf{1} + b) \right) D[a\mathbf{1} + b] \\ &= \left( \int \frac{g}{a} \right) \circ (a\mathbf{1} + b) \\ &= \left( \frac{1}{a} \int g \right) \circ (a\mathbf{1} + b).\end{aligned}$$



**例 4.41** 设  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 且  $a \neq 0$ . 则

$$\begin{aligned}\int \frac{c}{a\mathfrak{t} + b} &= \left( \frac{1}{a} \int \frac{c}{\mathfrak{t}} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left( \frac{c}{a} \int \frac{1}{\mathfrak{t}} + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left( \frac{c}{a} \ln \circ \text{abs} + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \frac{c}{a} \ln \circ \text{abs} \circ (a\mathfrak{t} + b) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地, 若  $n \neq -1$ , 则

$$\begin{aligned}\int c(a\mathfrak{t} + b)^n &= \left( \frac{1}{a} \int c\mathfrak{t}^n \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left( \frac{c}{a} \int \mathfrak{t}^n + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left( \frac{c}{a} \cdot \frac{\mathfrak{t}^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \frac{c(a\mathfrak{t} + b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**注 4.42** 以后, 若

$$k \int g = kG + \mathbb{R},$$

我们可直接写

$$\left( k \int g \right) \circ f = kG \circ f + \mathbb{R}.$$

**例 4.43** 利用三角公式, 有

$$\begin{aligned}\int \cos \sin &= \int \frac{1}{2} \sin \circ 2\mathfrak{t} \\ &= \left( \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \sin \right) \circ 2\mathfrak{t} \\ &= \left( \frac{1}{4} \int \sin \right) \circ 2\mathfrak{t} \\ &= -\frac{1}{4} \cos \circ 2\mathfrak{t} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

当然, 我们也可以这么解:

$$\begin{aligned}\int \cos \sin &= \int \sin D \sin \\ &= \left( \int 1 \right) \circ \sin \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.44** 设  $a \in \mathbb{R}$ , 且  $a > 0$ . 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} &= \int \frac{1/a}{\sqrt{1 - (t/a)^2}} \\ &= \left( \frac{1}{1/a} \int \frac{1/a}{\sqrt{1 - t^2}} \right) \circ \frac{1}{a} \\ &= \arcsin \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + t^2} &= \int \frac{1/a^2}{1 + (t/a)^2} \\ &= \left( \frac{1}{1/a} \int \frac{1/a^2}{1 + t^2} \right) \circ \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \arctan \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.45**

$$\begin{aligned}\int \tan &= \int \frac{\sin}{\cos} \\ &= \int \frac{-D \cos}{\cos} \\ &= \left( \int \frac{-1}{t} \right) \circ \cos \\ &= -\ln \circ \text{abs} \circ \cos + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.46**

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos}{\sin} &= \int \frac{D \sin}{\sin} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \sin + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**例 4.47** 设  $a \in \mathbb{R}$ , 且  $a \neq 0$ . 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{t^2 - a^2} &= \int \frac{1}{(t-a)(t+a)} \\
 &= \int \frac{(t+a) - (t-a)}{2a(t-a)(t+a)} \\
 &= \int \left( \frac{1}{2a(t-a)} - \frac{1}{2a(t+a)} \right) \\
 &= \int \frac{1}{2a(t-a)} - \int \frac{1}{2a(t+a)} \\
 &= \left( \int \frac{1}{2at} \right) \circ (t-a) - \left( \int \frac{1}{2at} \right) \circ (t+a) \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \circ \text{abs} \circ (t-a) - \frac{1}{2a} \ln \circ \text{abs} \circ (t+a) + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \left[ \frac{\text{abs} \circ (t-a)}{\text{abs} \circ (t+a)} \right] + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t-a}{t+a} + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

**例 4.48**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos} &= \int \frac{\cos}{\cos^2} \\
 &= \int \frac{D \sin}{1 - \sin^2} \\
 &= \left( \int \frac{1}{1-t^2} \right) \circ \sin \\
 &= -\frac{1}{2 \cdot 1} \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t-1}{t+1} \circ \sin + \mathbb{R} \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \circ \frac{1-\sin}{1+\sin} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1+\sin}{1-\sin} + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

**例 4.49**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin} &= \int \frac{1}{\cos \circ (2\pi/4 - t)} \\
 &= \left( \frac{1}{-1} \int \frac{1}{\cos} \right) \circ \left( \frac{2\pi}{4} - t \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 + \sin} \circ \left( \frac{2\pi}{4} - 1 \right) + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 - \cos}{1 + \cos} + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**定理 4.50** 设  $I, J$  为区间. 设  $g$  是  $J$  上的函数. 设  $f: I \rightarrow J$  是严单调的可导函数, 且  $Df$  不取零值. 若  $(g \circ f)Df$  有不定积分, 则  $g$  也有不定积分, 且

$$\int g = \left( \int (g \circ f) Df \right) \circ f^{[-1]}.$$

**证** 因为  $f: I \rightarrow J$  是严单调的可导函数, 且  $Df$  不取零值, 故  $f^{[-1]}$  也是严单调的可导函数. 设  $G$  是  $(g \circ f)Df$  的一个原函数. 则

$$\begin{aligned}
D[G \circ f^{[-1]}] &= (DG \circ f^{[-1]}) Df^{[-1]} \\
&= ((g \circ f) \circ f^{[-1]}) \cdot (Df \circ f^{[-1]}) \cdot \frac{1}{Df \circ f^{[-1]}} \\
&= (g \circ (f \circ f^{[-1]})) \cdot 1 \\
&= g \circ 1 = g.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\int g &= G \circ f^{[-1]} + \mathbb{R} \\
&= (G + \mathbb{R}) \circ f^{[-1]} \\
&= \left( \int (g \circ f) Df \right) \circ f^{[-1]}. \quad \text{证毕.}
\end{aligned}$$

上述结论有一个变体; 请您仔细比较二者的细微区别.

**定理 4.51** 设  $I, J$  为区间. 设  $J$  上的函数  $g$  有不定积分. 设  $f: I \rightarrow J$  可导. 设  $e: J \rightarrow I$  适合  $f \circ e = 1$ . 则

$$\int g = \left( \int (g \circ f) Df \right) \circ e.$$

**证** 因为  $J$  上的函数  $g$  有不定积分, 且  $f: I \rightarrow J$  是  $I$  上的可导函数, 故  $(g \circ f)Df$  有不定积分, 且

$$\left( \int g \right) \circ f = \int (g \circ f) Df.$$

从而

$$\begin{aligned}
 \int g &= \left( \int g \right) \circ \{1\} \\
 &= \left( \int g \right) \circ \{f \circ e\} \\
 &= \left( \int g \right) \circ (\{f\} \circ \{e\}) \\
 &= \left( \left( \int g \right) \circ f \right) \circ \{e\} \\
 &= \left( \int (g \circ f) Df \right) \circ e.
 \end{aligned}$$

证毕.

**例 4.52** 设  $a \in \mathbb{R}$ , 且  $a > 0$ . 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

记  $g = \sqrt{a^2 + t^2}: \mathbb{R} \rightarrow [a, +\infty)$ . 不难看出, 求解  $\int g^{-1}$  的最大障碍就是 sqrt (它一定存在, 因为  $g^{-1}$  是连续函数). 所以, 我们想一个办法消去根号. 什么东西跟  $g$  的复合可以不带 sqrt 呢? 联想到三角恒等式  $1 + \tan^2 = \cos^{-2}$ , 故我们可考虑令  $f = a \tan: (-2\pi/4, 2\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}$ . 则

$$\begin{aligned}
 (g^{-1} \circ f) Df &= \frac{a(1 + \tan^2)}{\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2}} \\
 &= \sqrt{1 + \tan^2} \\
 &= \frac{1}{\cos}.
 \end{aligned}$$

接下来就是要找一个  $e: \mathbb{R} \rightarrow (-2\pi/4, 2\pi/4)$ , 使  $f \circ e = 1$ . 事实上, 这样的  $e$  并不难找, 因为

$$\begin{aligned}
 f^{[-1]} &= (a1 \circ \tan)^{[-1]} \\
 &= \tan^{[-1]} \circ (a1)^{[-1]} \\
 &= \arctan \circ \frac{1}{a},
 \end{aligned}$$

故我们取  $e$  为  $f$  的反函数, 即有  $f \circ e = \text{id}$ . 故

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} &= \left( \int \frac{1}{\cos} \right) \circ \left( \arctan \circ \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \sin}{1 - \sin} \circ \left( \arctan \circ \frac{1}{a} \right) + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \text{id}}{1 - \text{id}} \circ (\sin \circ \arctan) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \left( \frac{1 + \text{id}}{1 - \text{id}} \circ \frac{\text{id}}{\sqrt{1 + \text{id}^2}} \right) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{\sqrt{1 + \text{id}^2} + \text{id}}{\sqrt{1 + \text{id}^2} - \text{id}} \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{(\sqrt{1 + \text{id}^2} + \text{id})^2}{(\sqrt{1 + \text{id}^2} - \text{id})(\sqrt{1 + \text{id}^2} + \text{id})} \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \left( \frac{1}{2} \ln \circ \text{id}^2 \right) \circ (\text{id} + \sqrt{1 + \text{id}^2}) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ \text{abs} \circ (\text{id} + \sqrt{1 + \text{id}^2}) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ (\text{id} + \sqrt{1 + \text{id}^2}) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ \left( \frac{\text{id} + \sqrt{a^2 + \text{id}^2}}{a} \right) + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ (\text{id} + \sqrt{a^2 + \text{id}^2}) - \ln[a] + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ (\text{id} + \sqrt{a^2 + \text{id}^2}) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

**例 4.53** 设  $a \in \mathbb{R}$ , 且  $a > 0$ . 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

我们先设  $g = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ . 假如我们算出  $g$  的不定积分是  $G + \mathbb{R}$ , 那么我们可以由此立得  $h = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (-\infty, a) \rightarrow (0, +\infty)$  的不定积分. 这是因为

$$h = g \circ (-\text{id}),$$

故

$$\begin{aligned}\int h &= \left( \frac{1}{-1} \int g \right) \circ (-\mathfrak{t}) \\ &= -G \circ (-\mathfrak{t}) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

对于  $g$ , 我们考虑  $f = a/\mathfrak{t}: (a, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ . 不难看出,  $f \circ f = \mathfrak{t}$ , 故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{t}^2 - a^2}} &= \left( \int \frac{Df}{\sqrt{f^2 - a^2}} \right) \circ f \\ &= \left( \int \frac{-1}{\mathfrak{t} \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} \right) \circ \frac{a}{\mathfrak{t}}.\end{aligned}$$

现在, 我们想办法计算

$$\int \frac{-1}{\mathfrak{t} \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}.$$

因为  $\sin: (0, 2\pi/4) \rightarrow (0, 1)$  可导, 且  $\sin \circ \arcsin = \mathfrak{t}$ , 故

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{\mathfrak{t} \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} &= \left( \int \frac{-D \sin}{\sin \cos} \right) \circ \arcsin \\ &= \left( \int \frac{-1}{\sin} \right) \circ \arcsin \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \mathfrak{t}}{1 - \mathfrak{t}} \circ (\cos \circ \arcsin) + \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \mathfrak{t}}{1 - \mathfrak{t}} \circ \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2} + \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}{1 - \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} + \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{(1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2})^2}{(1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2})(1 - \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2})} + \mathbb{R} \\ &= \left( \frac{1}{2} \ln \circ \mathfrak{t}^2 \right) \circ \frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}{\mathfrak{t}} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}{\mathfrak{t}} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= \left( \int \frac{-1}{t \sqrt{1 - t^2}} \right) \circ \frac{a}{t} \\ &= \ln \circ \text{abs} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t} \circ \frac{a}{t} \right) + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

这算出了  $g = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  的不定积分. 由此可知  $h = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (-\infty, -a) \rightarrow (0, +\infty)$  的不定积分是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= -\ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} \circ (-1) + \mathbb{R} \\ &= -\ln \circ \text{abs} \circ \frac{-t + \sqrt{(-t)^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{a}{-t + \sqrt{t^2 - a^2}} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{a(1 + \sqrt{t^2 - a^2})}{(-t + \sqrt{t^2 - a^2})(1 + \sqrt{t^2 - a^2})} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{-a} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

综上, 若区间  $J$  不包含  $[-a, a]$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ (t + \sqrt{t^2 - a^2}) - \ln[|a|] + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ (t + \sqrt{t^2 - a^2}) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**注 4.54** 设  $a \in \mathbb{R}$ , 且  $a > 0$ . 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln \circ \text{abs} \circ (t + \sqrt{t^2 \pm a^2}) + \mathbb{R}.$$



我再介绍一个解不定积分的法则.

**定理 4.55** 设  $I$  为区间,  $f, g$  都是  $I$  上的可导函数. 若  $gDf$  有不定积分, 则  $fDg$  也有不定积分, 且

$$\int fDg = fg - \int gDf.$$

**证** 设  $H$  是  $gDf$  的一个原函数. 则

$$\begin{aligned} D[fg - H] &= Df \cdot g + f \cdot Dg - DH \\ &= gDf + fDg - gDf \\ &= fDg. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \int fDg &= (fg - H) + \mathbb{R} \\ &= fg - (H + \mathbb{R}) \\ &= fg - \int gDf. \end{aligned}$$

证毕.

**例 4.56** 设整数  $m \neq 0$ . 则

$$\begin{aligned} \int x^{m-1} \ln x &= \int \ln x D \frac{x^m}{m} \\ &= \ln \frac{x^m}{m} - \int \frac{x^m}{m} D \ln x \\ &= \frac{x^m \ln x}{m} - \int \frac{x^{m-1}}{m} \\ &= \frac{x^m}{m^2} (m \ln x - 1) + \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**注 4.57**

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} &= \int \ln x D \ln x \\ &= \left( \int 1 \right) \circ \ln \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 x + \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**例 4.58** 设  $I, J$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  是严单调的可导函数, 且  $Df$  不取零值. 所以,  $f^{[-1]}$  也是严单调的可导函数. 从而

$$\begin{aligned}\int f^{[-1]} &= \int f^{[-1]} D\mathfrak{t} \\ &= f^{[-1]} \mathfrak{t} - \int \mathfrak{t} Df^{[-1]} \\ &= \mathfrak{t} f^{[-1]} - \int (f \circ f^{[-1]}) Df^{[-1]} \\ &= \mathfrak{t} f^{[-1]} - \left( \int f \right) \circ f^{[-1]}.\end{aligned}$$

**例 4.59** 我们可轻松地求解  $\arcsin$  的不定积分:

$$\begin{aligned}\int \arcsin &= \mathfrak{t} \arcsin - \left( \int \sin \right) \circ \arcsin \\ &= \mathfrak{t} \arcsin + \cos \circ \arcsin + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arcsin + \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \arctan &= \mathfrak{t} \arctan - \left( \int \tan \right) \circ \arctan \\ &= \mathfrak{t} \arctan - \ln \circ \text{abs} \circ \cos \circ \arctan + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan + \ln \circ \text{abs} \circ \text{sqrt}^{-1} \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan + \ln \circ \text{sqrt}^{-1} \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan - \ln \circ \text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan - \frac{1}{2} \ln \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

原则上, 我还可以再举一些例; 不过, 我感觉, 学而不思则罔, 思而不学则殆. 再者, 我假定您学过微积分, 所以您可以自行找高等算学 (或算学分析) 教材上的问题练习. 当然, 请试用我在本书讲的“无变量不定积分法”.

## 第五章 积分

本章讨论如何**计算**积分; 这里的“积分”是“定积分”, 虽然我觉得“定”有些多余.

我暂且用一会儿传统的记号, 告诉您我在本章会写什么东西吧.

具体地, 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数, 且  $a, b \in I$ . 积分论告诉我们,  $f$  在  $[a, b]$  上的积分 (或者,  $f$  在  $[b, a]$  上的积分的相反数)

$$\alpha = \int_a^b f(x) dx$$

存在. 所以, 我们可以专心地思考怎么算出结果 (而不必担心结果是否存在); 本章就告诉您一些计算积分的方法.

当然, 我还是会使用

$$\int_a^b f$$

表示  $\alpha$ ; 毕竟, 这是本书的一个大主题.

### 5.1 不定积分与积分

我们在上一章“乘热打铁地”证明了当时没用到的定理:

**定理 4.10** (Newton-Leibniz) 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 设  $F$  是  $f$  的原函数. 则对任意  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

原则上, 我们可以用这个定理计算很多积分了.

**例 5.1** 因为  $\cos$  的一个原函数是  $\sin$ , 故

$$\int_0^{2\pi/4} \cos = \sin[2\pi/4] - \sin[0] = 1.$$

**例 5.2** 因为  $\exp$  的一个原函数是  $\exp$ , 故

$$\int_0^1 \exp = \exp[1] - \exp[0] = e - 1.$$

**例 5.3** 因为  $1/(1+t^2)$  的一个原函数是  $\arctan$ , 故

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} = \arctan[1] - \arctan[-1] = \frac{2\pi}{4}.$$

不过, 我们不妨先探索不定积分跟积分的联系. 在建立一定的联系后, 我们可以更有条理地算积分.

定理 4.10 是 Newton-Leibniz 公式的一个经典说法; 它描述了**原函数**与**积分**的关系. 自然地, 就有这样的问题: 有没有**直接描述不定积分跟积分**的关系的说法呢?

姑且从传统的记号说起. 或许, 您还能想起来, 用传统的记号, 可写上述三个积分的计算为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/4} \cos x \, dx &= \sin x \Big|_0^{2\pi/4} = 1, \\ \int_0^1 \exp x \, dx &= \exp x \Big|_0^1 = e - 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{4}. \end{aligned}$$

这里,  $\exp x \Big|_0^1$  就是  $\exp 1 - \exp 0$  (或者, 按本书的记号,  $\exp[1] - \exp[0]$ ) 的省略. 所以, 我们也可定义一个类似的记号.

**定义 5.4** 设  $f$  是  $P \subset \mathbb{R}$  上的函数. 设  $a, b \in P$ . 定义

$$[f]_a^b = f[b] - f[a].$$

姑且称其为“**bracket 运算**”(土话: 方括号运算).

传统的记号在函数  $f(x)$  (这里, 为对照, 使用经典的函数记号) 的右侧画单条长竖线; 为清晰起见, 我用一对方括号包围函数  $f$ . 毕竟, 形如

$$1 + f(x) \Big|_a^b$$

的文字是有歧义的: 这是  $1 + (f(b) - f(a))$  还是  $(1 + f(b)) - (1 + f(a))$  呢?

**定理 5.5** 设  $f, g$  都是  $P \subset \mathbb{R}$  上的函数. 设  $a, b \in P$ . Bracket 运算适合如下性质:

- 二个函数的和的 bracket 等于二个函数的 bracket 的和, 即

$$[f + g]_a^b = [f]_a^b + [g]_a^b.$$

- 设  $k$  为  $P$  上的常函数. 则

$$[k]_a^b = 0.$$

- 设  $k$  为  $P$  上的常函数. 则

$$[kf]_a^b = k \cdot [f]_a^b.$$

- 设  $Q \subset \mathbb{R}$  上的函数  $h$  的值域是  $P$  的子集. 设  $c, d \in Q$ . 则

$$[f \circ h]_c^d = [f]_{h[c]}^{h[d]}.$$

**证** 按定义论证这四条即可.

$[f + g]_a^b$ , 按定义, 就是  $(f + g)[b] - (f + g)[a]$ . 不过, 我们知道,  $(f + g)[b] = f[b] + g[b]$ ; 类似地,  $(f + g)[a] = f[a] + g[a]$ . 所以, 二者的差就是

$$(f[b] + g[b]) - (f[a] + g[a]) = (f[b] - f[a]) + (g[b] - g[a]) = [f]_a^b + [g]_a^b.$$

$[k]_a^b$ , 按定义, 就是  $k[b] - k[a]$ . 可是,  $k[b] = k[a] = k$ , 故  $[k]_a^b = 0$ .

$[kf]_a^b$ , 按定义, 就是  $(kf)[b] - (kf)[a]$ . 不过,  $(kf)[b] = k[b] \cdot f[b] = k \cdot f[b]$ ; 类似地,  $(kf)[a] = k \cdot f[a]$ . 所以

$$k \cdot f[b] - k \cdot f[a] = k \cdot (f[b] - f[a]) = k \cdot [f]_a^b.$$

最后一个或许是最容易的:

$$\begin{aligned}[f \circ h]_c^d &= (f \circ h)[d] - (f \circ h)[c] \\ &= f[h[d]] - f[h[c]] \\ &= [f]_{h[c]}^{h[d]}. \quad \text{证毕.}\end{aligned}$$

利用 bracket 运算, 我们可“换汤不换药”地改写 Newton-Leibniz 公式:

**定理 5.6** (Newton-Leibniz) 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 设  $F$  是  $f$  的原函数. 则对任意  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f = [F]_a^b.$$

的确, 这个改写只是用“新鲜的”bracket 运算包装了函数在二点的差. 不过, 这还只是一小步; 我马上就要迈一大步了.

我刚定义了函数的 bracket 运算; 那么函数集有没有 bracket 运算呢?

这问题, 其实是废话: 有就是有, 没有就是没有. 的确, 我刚才只是定义了函数的 bracket 运算, 而没有定义函数集的 bracket 运算. 不过这是大问题吗? 我现在就定义它.

**定义 5.7** 设  $A$  是  $P \subset \mathbb{R}$  上的函数集. 设  $a, b \in P$ . 定义

$$\begin{aligned}[A]_a^b &= \left\{ [f]_a^b \mid f \in A \right\} \\ &= \{ f[b] - f[a] \mid f \in A \}.\end{aligned}$$

不难看出, bracket 运算变函数集为数集 (实数集的子集). 所以, 为研究函数集的 bracket 运算的性质, 我们要定义数集的运算.

**定义 5.8** 设  $P, Q$  为  $\mathbb{R}$  的子集. 设  $*$  是三文字  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  的任意一个. 定义

$$P * Q = \{ p * q \mid p \in P, q \in Q \}.$$

老样子, 可写  $P \cdot Q$  为  $PQ$ , 写  $\{0\} - P$  为  $-P$ .

若  $P$  的每一个元都不是零, 还可定义

$$\frac{Q}{P} = \left\{ \frac{q}{p} \mid q \in Q, p \in P \right\}.$$

若对任意  $p \in P, q \in Q, p^q$  有意义, 则还可定义

$$P^Q = \{p^q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

不意外地, 我们有如下性质.

**定理 5.9** 设  $P, Q, S$  都是  $\mathbb{R}$  的子集. 则

$$\begin{aligned} P + Q &= Q + P, & PQ &= QP, \\ (P + Q) + S &= P + (Q + S), & (PQ)S &= P(QS). \end{aligned}$$

由此, 我们就有如下的函数集的 bracket 运算律:

**定理 5.10** 设  $A, B$  都是  $P \subset \mathbb{R}$  上的函数集. 设  $a, b \in P$ .

• 二个函数集的和的 bracket 等于二个函数集的 bracket 的和, 即

$$[A + B]_a^b = [A]_a^b + [B]_a^b.$$

• 设函数集  $C$  的每一个元都是  $P$  上的常函数. 则

$$[C]_a^b = \{0\}.$$

• 设  $k$  为  $P$  上的常函数. 则

$$[\{k\}A]_a^b = \{k\} \cdot [A]_a^b.$$

• 设  $Q \subset \mathbb{R}$  上的函数  $h$  的值域是  $P$  的子集. 设  $c, d \in Q$ . 则

$$[A \circ \{h\}]_c^d = [A]_{h[c]}^{h[d]}.$$

**证** 还是老套路: 相互包含. 由于我已经建立了函数的 bracket 运算律, 所以您的论证应该不会太长. 证毕.

在上一章, 我曾说, 在不引起混淆时, 可写恰含一个元的集  $\{a\}$  为  $a$ . 现在我又要采用这个约定了.

**定理 5.11** 设  $P \subset \mathbb{R}$ . 设  $f$  是  $P$  上的函数. 设  $\mathbb{R}_P$  是  $P$  上的所有 (实的) 常函数作成的集 (当然, 也可简单地写其为  $\mathbb{R}$ ). 设  $a, b \in P$ . 则

$$[f + \mathbb{R}]_a^b = [f]_a^b.$$

**证** 直接验证; 不过, 您还是要注意一些细节的.

$$\begin{aligned} [f + \mathbb{R}]_a^b &= [\{f\} + \mathbb{R}]_a^b \\ &= [\{f\}]_a^b + [\mathbb{R}]_a^b \\ &= [\{f\}]_a^b + \{0\} \\ &= [\{f\}]_a^b \\ &= [f]_a^b. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

下面的命题更直接地焊接了不定积分与积分.

**定理 5.12** (Newton-Leibniz) 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 则对任意  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f = \left[ \int f \right]_a^b.$$

**注 5.13** 严谨地 (但不重要地), 我们应当写

$$\left\{ \int_a^b f \right\} = \left[ \int f \right]_a^b.$$

**证** 因为  $f$  是  $I$  上的连续函数, 故  $f$  有一个原函数  $F$ , 且  $\int f = F + \mathbb{R}$ . 从而

$$\left[ \int f \right]_a^b = [F + \mathbb{R}]_a^b = [F]_a^b = \int_a^b f. \quad \text{证毕.}$$

## 5.2 计算积分

在上一节, 我们得到了新的 Newton-Leibniz 公式:



**定理 5.12** (Newton-Leibniz) 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 则对任意  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f = \left[ \int f \right]_a^b.$$

这将是本节的重点; 毕竟, 在大多数场合, **具体**计算积分时, 还是要用它.

我们先从积分论**借**三个公式. 它们比 Newton-Leibniz 公式更基础; 或者说, 在论证 Newton-Leibniz 公式时, 我们已经用到它们了.

**定理 2.26** 设  $f, g$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ . 设  $k \in \mathbb{R}$ . 则

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b kf &= k \int_a^b f. \end{aligned}$$

**定理 2.32** 设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数. 设  $a, b, c \in I$ . 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

我们曾建立了不定积分的运算律; 现在, 我们试建立积分的更多的运算律.

先定义一个术语.

**定义 5.14** 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的可导函数. 若  $Df$  还是  $I$  上的连续函数, 则说  $f$  **连导**.

**定理 5.15** 设  $I, J$  为区间. 设  $g$  是  $J$  上的**连续函数**. 设  $f: I \rightarrow J$  **连导**. 设  $a, b \in I$ . 则

$$\int_a^b (g \circ f) Df = \int_{f[a]}^{f[b]} g.$$

请您注意上述定理的**被强调的词**; 为保证积分有意义 (请注意, 在本书, 我们只讨论**连续函数**的积分论), 我要求函数的性质好一些; 不过, 这并不是很影响实际应用.

**证** 因为  $f$  连导, 故  $f$  跟  $Df$  都是连续函数. 因为  $g$  是连续函数, 故  $h = (g \circ f)Df$  也是连续函数. 所以, 可用 Newton-Leibniz 公式计算  $h$  的积分. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b (g \circ f)Df &= \left[ \int (g \circ f)Df \right]_a^b \\ &= \left[ \left( \int g \right) \circ f \right]_a^b \\ &= \left[ \int g \right]_{f[a]}^{f[b]} \\ &= \int_{f[a]}^{f[b]} g.\end{aligned}\quad \text{证毕.}$$

我们不妨再看一遍命题的论证. 首先, 我们明确  $(g \circ f)Df$  是连续函数, 故可用 Newton-Leibniz 公式计算积分; 然后, 我们用不定积分的运算律转化为  $g$  的积分 (因为  $g$  是连续函数).

其实, 在实际的计算中, 我们**并不需要**每一次都变不定积分的 bracket 运算为积分. 一般地, 我们用 Newton-Leibniz 公式算积分. 为书写方便, 我们一般用长竖线 (当然, 在本书, 用 bracket 运算) 代替函数在二点的值的差. 因为本书定义了函数集的 bracket 运算, 故我们可直接变积分为函数集的 bracket. 在方括号内, 就是我们已经熟知的不定积分. 所以, 不定积分与 bracket 运算就能解决大多数积分问题. (当然, Newton-Leibniz 公式也不是万能的.)

**例 5.16** 我拿简单的  $\sin \cos$  举例吧.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/4} \sin \cos &= \int_0^{2\pi/4} \sin D \sin = \int_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} 1 \\ &= \left[ \int 1 \right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} = \left[ \frac{1^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若充分利用 bracket 运算的性质, 我们可以这么写:

$$\int_0^{2\pi/4} \sin \cos = \left[ \int \sin \cos \right]_0^{2\pi/4}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \int \sin D \sin \right]_0^{2\pi/4} = \left[ \left( \int \mathfrak{t} \right) \circ \sin \right]_0^{2\pi/4} \\
&= \left[ \int \mathfrak{t} \right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} \\
&= \left[ \frac{\mathfrak{t}^2}{2} + \mathbb{R} \right]_0^1 = \left[ \frac{\mathfrak{t}^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

当然, 因为  $\mathbb{R}$  的 bracket 为 0, 故计算积分时不必写出来.

**定理 5.17** 设  $I, J$  为区间. 设  $J$  上的函数  $g$  连续. 设  $f: I \rightarrow J$  连导. 设  $e: J \rightarrow I$  适合  $f \circ e = \mathfrak{t}$ . 任取  $c, d \in J$ . 则

$$\int_c^d g = \int_{e[c]}^{e[d]} (g \circ f) Df.$$

**证** 注意到  $g$  与  $(g \circ f) Df$  都是连续函数. 所以

$$\begin{aligned}
\int_c^d g &= \left[ \int g \right]_c^d \\
&= \left[ \left( \int (g \circ f) Df \right) \circ e \right]_c^d \\
&= \left[ \int (g \circ f) Df \right]_{e[c]}^{e[d]} \\
&= \int_{e[c]}^{e[d]} (g \circ f) Df.
\end{aligned}$$

证毕.

**例 5.18** 计算

$$\int_{-1}^1 \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2).$$

设  $J = [-1, 1]$ . 设  $g = \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)$  为  $J$  上的函数. 为计算此积分, 我们不妨考虑找一个合适的区间  $I$ , 与一个  $I$  到  $J$  的连导函数  $f$ , 使  $(g \circ f) Df$  简单一些; 当然, 还要找一个  $J$  到  $I$  的函数  $e$ , 使  $f \circ e = \mathfrak{t}$ . 我们不妨取  $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$ ,  $f = \sin$ . 那么,  $Df = \cos$ , 且  $g \circ f = \cos$ . 并且, 不难看出,

取  $e = \arcsin$ , 即得  $f \circ e = \mathfrak{t}$ . 故

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) &= \left[ \int \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) \right]_{-1}^1 \\
 &= \left[ \left( \int (\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) \circ \sin) D \sin \right) \circ \arcsin \right]_{-1}^1 \\
 &= \left[ \int \cos^2 \right]_{\arcsin[-1]}^{\arcsin[1]} \\
 &= \left[ \int \frac{1 + \cos}{2} \circ 2\mathfrak{t} \right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
 &= \left[ \left( \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos}{2} \right) \circ 2\mathfrak{t} \right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
 &= \left[ \int \frac{1 + \cos}{4} \right]_{2\mathfrak{t}[-2\pi/4]}^{2\mathfrak{t}[2\pi/4]} \\
 &= \left[ \frac{\mathfrak{t} + \sin}{4} \right]_{-2\pi/2}^{2\pi/2} \\
 &= \frac{2\pi/2 + 0}{4} - \frac{-2\pi/2 + 0}{4} \\
 &= \frac{2\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

**定理 5.19** 设  $I$  为区间,  $f, g$  都是  $I$  上的连导函数. 设  $a, b \in I$ . 则

$$\int_a^b f Dg = [fg]_a^b - \int_a^b g Df.$$

**证**  $f Dg$  与  $g Df$  都是连续函数. 从而

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f Dg &= \left[ \int f Dg \right]_a^b = \left[ fg - \int g Df \right]_a^b \\
 &= [fg]_a^b - \left[ \int g Df \right]_a^b = [fg]_a^b - \int_a^b f Dg. \quad \text{证毕.}
 \end{aligned}$$

**例 5.20** 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \sin \exp.$$

注意到  $D \exp = \exp$ . 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi/2} \sin \exp &= \int_0^{2\pi/2} \sin D \exp \\
 &= [\sin \exp]_0^{2\pi/2} - \int_0^{2\pi/2} \exp D \sin \\
 &= 0 - \int_0^{2\pi/2} \cos \exp \\
 &= - \int_0^{2\pi/2} \cos D \exp \\
 &= -[\cos \exp]_0^{2\pi/2} + \int_0^{2\pi/2} \exp D \cos \\
 &= (1 + \exp[2\pi/2]) - \int_0^{2\pi/2} \sin \exp.
 \end{aligned}$$

由此可知

$$\int_0^{2\pi/2} \sin \exp = \frac{1 + \exp[2\pi/2]}{2}.$$

最后, 我再讲一个小技巧吧.

**定理 5.21** 设  $I$  为区间. 设  $f$  是  $I$  上的连续函数. 设  $a, b \in I$ . 则

$$\int_a^b f = \int_a^b f \circ (a + b - \iota) = \frac{1}{2} \int_a^b (f + f \circ (a + b - \iota)).$$

**证** 我们证明前一个等号成立即可; 至于后一个等号, 利用“二个相等的数的平均数跟其相等”即可.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f \circ (a + b - \iota) &= \int_a^b -f \circ (a + b - \iota) \cdot (-1) \\
 &= \int_a^b (-f \circ (a + b - \iota)) D(a + b - \iota) \\
 &= \int_{(a+b-\iota)[a]}^{(a+b-\iota)[b]} -f \\
 &= - \int_b^a f = \int_a^b f.
 \end{aligned}$$

证毕.

## 例 5.22 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \frac{\imath \sin}{2 - \sin^2}.$$

设

$$f = \frac{\imath \sin}{2 - \sin^2}.$$

按照以往的经验, 您可能会试着先找  $f$  的不定积分. 注意,  $f$  甚至可以是  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 所以  $f$  的不定积分**一定存在**. 只不过, 您是否能顺利地写出来, 就是另一个问题. 我承认, 我自己也写不出初等函数  $F$ , 使  $DF = f$ .

既然找原函数不太行, 那就试着用小技巧. 注意到

$$\sin = \sin \circ \left( \frac{2\pi}{2} - \imath \right),$$

故

$$f \circ \left( 0 + \frac{2\pi}{2} - \imath \right) = \frac{(2\pi/2 - \imath) \sin}{2 - \sin^2}.$$

从而

$$\begin{aligned} g &= f + f \circ \left( 0 + \frac{2\pi}{2} - \imath \right) \\ &= \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{2 - \sin^2} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{1 + (-\cos)^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/2} f &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi/2} g \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} \int_0^{2\pi/2} \frac{D[-\cos]}{1 + (-\cos)^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-\cos[0]}^{-\cos[2\pi/2]} \frac{1}{1 + \imath^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-1}^1 D \arctan \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{(2\pi)^2}{16}. \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] Menger K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.
- [2] Rudin W. Principles of mathematical analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976: 136-137, 141-142.
- [3] 阮龙培. 关于立体几何应用集合论符号的几点看法[J]. 数学通报, 1986, 1: 31.
- [4] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.
- [5] Kuhn S. The derivative à la Carathéodory[J]. The American Mathematical Monthly, 1991, 98(1): 40-44.
- [6] 吴长庆. 立体几何使用“集合语言”的准确性[J]. 唐山师范学院学报, 1997, 5: 76.
- [7] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/>.
- [8] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/>.
- [9] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/>.

- [10] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables [EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/>.
- [11] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/>.
- [12] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23) [2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/>.
- [13] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/>.
- [14] 梅加强. 数学分析[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 66-77.