

# 几乎无变量的微积分

纳纳米

二〇二二年四月三日



# 目录

前言	v
第一章 集与函数	1
1.1 集	1
1.2 关系与函数	4
1.3 函数的演算	9
第二章 连续函数	17
2.1 连续的定义	17
2.2 连续函数	21
第三章 导数	25
3.1 背景	25
参考文献	27



# 前言

定义 算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的“微积分”跟“分析学”不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为“微积分”就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、定积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并不是从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是怎样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了“几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘

教版八年级下册的算学课本的定义.

**定义** 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

**定义** 一般地, 如果变量  $y$  随着变量  $x$  而变化, 并且对于  $x$  取的每一个值,  $y$  都有唯一的一个值与它对应, 那么称  $y$  是  $x$  的**函数**, 记作  $y = f(x)$ . 这里的  $f(x)$  是胡话 a function of  $x$  (土话:  $x$  的函数) 的简记. 这时叫  $x$  作**自变量**, 叫  $y$  作**因变量**. 对于自变量  $x$  取的每一个值  $a$ , 称因变量  $y$  的对应值为**函数值**, 并记其作  $f(a)$ .

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触“函数”的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用“这种函数”讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用“有序对”定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话“变量”“对应”. 不过, 更严谨地看, “有序对”是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义  $(a, b)$  为  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ . 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号  $f$  (而不是  $f(x)$ ), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \text{ 或 } \frac{d}{dx}f(x);$$

我们计算不定积分时, 用的记号是

$$\int f(x) dx;$$

我们计算定积分时, 用的记号是

$$\int_a^b f(x) dx.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链式法则为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

这里  $u = f(x)$ ,  $y = f(u) = f(g(x))$ . 视导数为“变率”, 那这就是在说,  $y$  关于  $x$  的变率等于  $y$  关于  $u$  的变率与  $u$  关于  $x$  的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的  $\frac{11}{10}$  (也就是说, A 比 B 快  $\frac{1}{10}$ ), 而 B 的速率是 C 的速率的  $\frac{9}{10}$  (也就是说, B 比 C 慢  $\frac{1}{10}$ ), 那么 A 的速率是 C 的速率的  $\frac{99}{100}$ ; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: “有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?” 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用  $D$  表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说,  $D \exp = \exp$ ,  $D \cos = -\sin$ ,  $D \sin = \cos$ . 不过, 当我想表达  $D \ln$  时, 我意识到了一个问题: “已知  $D \ln x = 1/x$ . 左边的  $\ln x$  就是  $\ln$ , 可右边的  $1/x$  应该是什么?” 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \text{rec}: \mathbb{R} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写  $D \ln = \text{rec}$ . 不过, 我还是没法好好地表示  $D \arcsin$  跟  $D \arctan$ . 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的“什么也不干”的函数

$$\begin{aligned} \text{fdn}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量定积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的“读书报告”: 这本书“浪费了”巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 前几日, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些“优良传统”也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些“优良传统”是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

<https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables>

<https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables>

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

二〇二二年四月三日



# 第一章 集与函数

我先简单地介绍一下基础概念吧.

## 1.1 集

**定义 1.1** 集是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为元.

**注 1.2** 事实上, 集与元是所谓的“原始概念”. 我们至多描述集或元是什么; 我们无法定义集或元.

**定义 1.3** 无元的集是空集.

**注 1.4** 或许您在别的地方能看到形如  $\emptyset$  的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

**注 1.5** 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

**定义 1.6** 一般地, 若集  $A$  由元  $a, b, c, \dots$  作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号. 设集  $A$  是由具有某种性质  $p$  的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

**定义 1.7** 若  $a$  是集  $A$  的元, 则写  $a \in A$  或  $A \ni a$ , 说  $a$  属于  $A$  或  $A$  包含  $a$ . 若  $a$  不是集  $A$  的元, 则写  $a \notin A$  或  $A \not\ni a$ , 说  $a$  不属于  $A$  或  $A$  不包含  $a$ .

**注 1.8** “属于”也是原始概念.

**定义 1.9** 若任取  $a \in A$ , 都有  $a \in B$ , 则写  $A \subset B$  或  $B \supset A$ , 说  $A$  是  $B$  的子集或  $B$  是  $A$  的超集. 假如有一个  $b \in B$  不是  $A$  的元, 可以用“真”形容之.

**注 1.10** 或许, 您在别的地方能看到形如  $\subseteq$ ,  $\subsetneq$  或  $\subsetneqq$  的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用  $A \subset B$  表示  $A$  是  $B$  的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说  $A$  是  $B$  的真子集, 我们再加上  $A \neq B$  即可.

**例 1.11** 设  $B = \{0, 1, 2\}$ ,  $C = \{0\}$ . 不难看出,  $0 \in C$ ,  $1 \notin C$ ,  $C \subset B$ .

**注 1.12** 空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

**定义 1.13** 若集  $A$  与  $B$  包含的元完全一样, 则  $A$  与  $B$  是同一集. 我们说  $A$  等于  $B$ , 写  $A = B$ . 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

**定义 1.14** 集  $A$  与  $B$  的交是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说,  $A \cap B$  恰由  $A$  与  $B$  的公共元作成.

集  $A$  与  $B$  的并是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说,  $A \cup B$  恰包含  $A$  与  $B$  的全部元.

类似地, 可定义多个集的交与并.

**例 1.15** 设  $E$  是全体偶数作成的集; 设  $O$  是全体奇数作成的集. 不难看出,  $E \cap O$  为空集, 而  $E \cup O$  恰为全体整数作成的集.

**定义 1.16** 设  $A, B$  是集. 定义

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

**注 1.17** 值得注意的是, 我们没说  $B \subset A$ .

**例 1.15** (续页 2) 不难看出,  $E - O$  跟  $O - E$  都是空集, 故  $E - O = O - E$ . 不过, 这个  $-$  不是减法, 故当然不能由此推出 “ $E + E = O + O$ ”, 更不能推出  $E = O$ .

**定义 1.18** 设  $A, B$  是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里,  $(a, b)$  是**有序对**. 我们规定, 二个有序对  $(a, b)$  与  $(c, d)$  相等相当于  $a = c$  且  $b = d$ .

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$  与  $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$  相等, 相当于  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$ .

**注 1.19** 一般地,  $A \times B \neq B \times A$ .

**注 1.20** 设  $A, B$  分别有  $m, n$  个元. 则  $A \times B$  有  $mn$  个元.

**定义 1.21** 一般地,  $\mathbb{N}$  指全体非负整数作成的集;  $\mathbb{Z}$  指全体整数作成的集;  $\mathbb{Q}$  指全体有理数作成的集;  $\mathbb{R}$  指全体实数作成的集;  $\mathbb{C}$  指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**定义 1.22** 在微积分里,  $\mathbb{R}$  的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数  $a, b$ , 其中  $a < b$ . 那么我们记:

- (1)  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$
- (2)  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$
- (3)  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$
- (4)  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$
- (5)  $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$
- (6)  $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$

$$(7) (-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$$

$$(8) (a, +\infty) = \{x \mid a < x\};$$

$$(9) [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}.$$

统称这九类子集为**区间**.  $a$  是区间  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$  的**左端点**;  $b$  是区间  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$  的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为  $\{a\}$  是**退化为一点的区间**  $[a, a]$ ; 我们认为空集是**空区间**  $[a, a)$ ,  $(a, a)$ ,  $[a, a)$ ,  $[b, a)$ ,  $(b, a)$ ,  $(b, a]$  或  $[b, a]$ . 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

**注 1.23** 设  $a, b, c$  是实数. 说  $b$  介于  $a$  跟  $c$  之间, 就是说  $a \leq b \leq c$  或  $c \leq b \leq a$  (简单地, 就是  $(b-a)(b-c) \leq 0$ ). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为“区间”. 那么, 显而易见地, 任给一个区间  $I$ , 任取  $I$  的二个相异实数  $a, b$ , 则每个介于  $a$  跟  $b$  之间的实数必为  $I$  的元. 反过来, 若  $\mathbb{R}$  的子集  $I$  适合“任取  $I$  的二个相异实数, 每个介于  $a$  跟  $b$  之间的实数必为  $I$  的元”, 则  $I$  是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

## 1.2 关系与函数

**定义 1.24** 设  $A, B$  是集.  $A \times B$  的子集称为  $A$  到  $B$  的**关系**.

**定义 1.25** 设  $A, B$  是集. 若  $A$  到  $B$  的关系  $f$  适合下述性质, 则说  $f$  是  $A$  到  $B$  的**函数** (或**映射**):

- 任取  $a \in A$ , 必有  $b \in B$  使  $(a, b) \in f$ ;
- 若  $(a, b)$  与  $(a, c)$  均为  $f$  的元, 则  $b = c$ .

设  $(a, b) \in f$ . 我们记此事为  $b = f[a]$ , 并说  $b$  是  $a$  在函数  $f$  下的**像**,  $a$  是  $b$  在函数  $f$  下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数  $f$ :

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

“ $f: A \rightarrow B$ ”是“ $f$  是  $A$  到  $B$  的函数”的简写.

**注 1.26** 一般地, 我们写  $a$  在函数  $f$  下的像为  $f(a)$ , 而不是  $f[a]$ . 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

**例 1.27** 设  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ . 显然,  $A \times B$  有 6 个元. 不难看出,  $A \times B$  有 64 个子集, 故  $A$  到  $B$  的关系共有 64 个. 不过,  $A$  到  $B$  的函数只有 8 个.

**定义 1.28** 在本书, 我们为“什么也不干”的函数起一个名字. 具体地说, 设  $A \subset B$ . 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中  $\iota$  是希腊字母 iota.

我们简单地写  $\iota_{A,A}$  为  $\iota_A$ . 有时, 若既不必指出  $A$ , 也不必指出  $B$ , 我们直接写  $\iota$ . 换句话说:  $\iota$  (或者带下标的  $\iota_A, \iota_{A,B}$ ) 啥也不干, 即  $\iota[x] = x$ , 其中  $x$  可以是任意文字.

一般也称  $\iota$  为**恒等函数**.

**定义 1.29** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 称  $A$  为  $f$  的**定义域**; 称  $B$  为  $f$  的**陪域**.

**定义 1.30** 设  $C \subset A$ . 设  $f: A \rightarrow B$ . 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称  $f[A]$  为  $f$  的**值域**. 显然  $f$  的值域是  $f$  的陪域的子集.

**注 1.31** 设  $f: A \rightarrow B$ . 若  $D \subset C \subset A$ , 则  $f[D] \subset f[C]$ .

**定义 1.32** 设  $f, g$  都是  $A$  到  $B$  的函数. 若任取  $a \in A$ , 都有  $f[a] = g[a]$ , 则说  $f = g$ .

可写  $f = g$  的否定为  $f \neq g$ . 具体地说, 若存在  $a \in A$  使  $f[a] \neq g[a]$ , 则说  $f \neq g$ .

**定义 1.33** 设  $R$  是  $A$  到  $B$  的关系.  $B$  到  $A$  的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为  $R$  的**反关系**.

**定义 1.34** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 若  $f$  的反关系  $g$  是  $B$  到  $A$  的函数, 则称  $g$  是  $f$  的**反函数**. 我们写  $f$  的反函数为  $f^{[-1]}$ .

**注 1.35** 不难验证, 若  $g$  是  $f$  的反函数, 则  $f$  也一定是  $g$  的反函数. 这是因为  $R$  的反关系的反关系是  $R$ .

**定义 1.36** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数,  $g$  是  $C$  到  $D$  的函数, 且  $f[A] \subset C$ . 任取  $A$  的元  $a$ . 按照函数的定义, 存在唯一的  $b \in f[A]$  使  $(a, b) \in f$ . 既然  $b \in f[A] \subset C$ , 再根据函数的定义, 存在唯一的  $d \in g[C] \subset D$  使  $(b, d) \in g$ . 这样的  $d$  可用  $g[f[a]]$  表示. 作  $A$  到  $D$  的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是  $A$  到  $D$  的函数. 我们称函数  $g \circ f$  为  $f$  与  $g$  的**复合**.

**注 1.37** 设  $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$ , 且  $f[A] \subset C$ . 设  $E \subset A$ . 那么  $f[E] \subset f[A] \subset C$ , 故  $g[f[E]]$  是有意义的. 我们说,  $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$ .

取  $d \in g[f[E]]$ . 按定义, 存在  $t \in f[E]$  使  $g[t] = d$ . 对这个  $t$  而言, 又存在  $e \in E$  使  $f[e] = t$ .  $(g \circ f)[e]$ , 按定义, 等于  $g[f[e]]$ , 也就是  $g[t]$ , 也就是  $d$ . 所以  $d \in (g \circ f)[E]$ . 这说明  $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$ .

取  $d' \in (g \circ f)[E]$ . 按定义, 存在  $e' \in E$  使  $(g \circ f)[e'] = d'$ . 所以  $t' = f[e'] \in f[E]$ . 那么  $g[t'] = d'$ . 所以  $d' \in g[f[E]]$ . 这说明  $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$ .

既然  $g[f[E]]$  跟  $(g \circ f)[E]$  相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了  $a \in A$  时  $(g \circ f)[a]$  就是  $g[f[a]]$ , 可我们并没有**定义**  $(g \circ f)[E]$  是  $g[f[E]]$ . 大算学家 John von Neumann 说过: “Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.” 所以, 习惯就好了.

**注 1.38** 设  $f: A \rightarrow B$ . 那么  $f \circ \iota_A = f$ , 且  $\iota_B \circ f = f$ .

**注 1.39** 一般地,  $g \circ f \neq f \circ g$ . 一方面,  $g \circ f$  有定义时,  $f \circ g$  可能无定义; 另一方面, 即使  $g \circ f$  与  $f \circ g$  都有定义, 二者也不一定相等.

**定理 1.40** 函数的复合是**结合的**. 具体地说, 设  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: C \rightarrow D$ ,  $h: E \rightarrow F$ , 且  $f[A] \subset C$ ,  $g[C] \subset E$ . 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为  $h \circ g \circ f$ .

**证**  $q = g \circ f$  是  $A$  到  $D$  的函数, 且  $p = h \circ g$  是  $C$  到  $E$  的函数. 因  $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$ , 故  $h \circ q = h \circ (g \circ f)$  是  $A$  到  $F$  的函数; 因  $f[A] \subset C$ , 故  $p \circ f = (h \circ g) \circ f$  也是  $A$  到  $F$  的函数. 任取  $a \in A$ . 则

$$(h \circ (g \circ f))[a] = h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],$$

$$((h \circ g) \circ f)[a] = (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]]. \quad \text{证毕.}$$

**定义 1.41** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数.

- 若任取  $A$  的相异二元  $a$  与  $a'$ , 都有  $f[a] \neq f[a']$ , 则称  $f$  是**单函数**.
- 若对任意  $b \in B$ , 都存在  $a \in A$  使  $f[a] = b$ , 则称  $f$  是**满函数**.

**例 1.42** 设  $A \subset B$ .  $A$  到  $B$  的函数  $\iota_{A,B}$  总是单函数. 不过, 若  $A \neq B$ , 则  $\iota_{A,B}$  不是满函数.

**注 1.43** 设  $B \subset C$ . 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数,  $g$  是  $A$  到  $C$  的函数, 且对任意  $a \in A$ ,  $f[a] = g[a]$ . 那么,  $f$  是单函数的一个必要与充分条件是:  $g$  是单函数. 若  $f$  不是满函数, 则  $g$  也不是.

若  $f$  是满函数, 则  $g$  也是满函数的一个必要与充分条件是:  $B = C$ .

**定理 1.44** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 设  $B$  到  $A$  的函数  $g$  适合如下性质:

- 对任意  $a \in A$ ,  $g[f[a]] = a$ ; 也就是说,  $g \circ f = \iota_A$ .
- 对任意  $b \in B$ ,  $f[g[b]] = b$ ; 也就是说,  $f \circ g = \iota_B$ .

则:

- 至多有一个这样的  $g$ ;

- $g$  是  $f$  的反函数.

**证** 至多只有一个这样的  $g$  是显然的. 具体地, 若  $g': B \rightarrow A$  适合  $g' \circ f = \mathbf{1}_A$ , 且  $f \circ g' = \mathbf{1}_B$ , 则

$$g = g \circ \mathbf{1}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathbf{1}_A \circ g' = g'.$$

下证  $g$  是  $f$  的反函数. 事实上, 若  $h$  是  $f$  的反函数, 则不难验证  $h$  适合上述二条性质. 所以  $g = h$ . 证毕.

**定理 1.45** 设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow C$  的反函数分别是  $f^{[-1]}: B \rightarrow A$  与  $g^{[-1]}: C \rightarrow B$ . 则  $g \circ f: A \rightarrow C$  有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

**证** 记  $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}: C \rightarrow A$ ; 记  $p = g \circ f$ . 不难用结合律验证  $q \circ p = \mathbf{1}_A$ , 且  $p \circ q = \mathbf{1}_B$ . 这里以  $q \circ p$  为例:

$$\begin{aligned} q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\ &= (q \circ g) \circ f \\ &= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ \mathbf{1}_B) \circ f \\ &= f^{[-1]} \circ f \\ &= \mathbf{1}_A. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

**注 1.46** 不难看出, 函数  $f$  有反函数的一个必要与充分条件是:  $f$  是单函数, 且  $f$  是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

**定义 1.47** 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数. 设  $C \subset A$ . 作  $C$  到  $B$  的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知,  $f_C$  是  $C$  到  $B$  的函数. 我们说,  $f_C$  是  $f$  在  $C$  上的**限制**.



## 1.3 函数的演算

**注** 本节的语言或许比较混乱.

本节讨论  $\mathbb{R}$  的子集到  $\mathbb{R}$  的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是“几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

**定义 1.48** 设  $f: A \rightarrow B$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  且  $0 \in B$ . 若存在  $a \in A$  使  $f[a] = 0$ , 就说  $a$  是  $f$  的一个根.

现在我们介绍一些“基本初等函数”.

**定义 1.49** 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \text{id}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\rightarrow \{c\}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$$

其中  $c$  是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty), \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 余弦函数:

$$\begin{aligned}\cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};\end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan: \{x \mid \cos[x] \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln: (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right], \\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中  $s$  指  $\sin$  在  $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$  上的限制  $\sin_I: I \rightarrow [-1, 1]$ ,  $2\pi$  是  $\cos$  的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan: \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right), \\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中  $t$  指  $\tan$  在  $J = (-2\pi/4, 2\pi/4)$  上的限制  $\tan_J: J \rightarrow \mathbb{R}$ ;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\text{abs}: \mathbb{R} &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\text{sqrt}: [0, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

**注 1.50** 在本书,  $2\pi$  是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

**例 1.51** 设  $A = [1, +\infty)$ . 设

$$\begin{aligned}f: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right].\end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达  $f$  的定义. 具体地,

$$f = \exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A.$$

这里,  $\ln_A$  自然是  $\ln$  在  $A$  上的限制.

不过, 复合并不够用.

**例 1.52** 设  $A = [1, +\infty)$ . 设

$$\begin{aligned}g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3.\end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达  $g$  的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写  $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$  跟  $\sin[x]$  为  $\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A$  与  $\sin_A$ ; 可是, 我们要怎么写  $x^3$ ? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

**定义 1.53** 设  $A, B, C$  是  $\mathbb{R}$  的子集. 设  $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$ . 设  $*$  是文字  $+, -, \cdot$  的任意一个. 定义

$$\begin{aligned}f * g: A &\rightarrow D, \\ x &\mapsto f[x] * g[x],\end{aligned}$$

其中陪域  $D \subset \mathbb{R}$  可视具体情况待定. 一般地, 若  $*$  是乘号, 则可被省略. 可写  $0_A - f$  为  $-f$ ; 这里  $0_A$  当然是常函数 0 在  $A$  上的限制.

若对任意  $x \in A$ , 都有  $f[x] \neq 0$ , 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}: A &\rightarrow E, \\ x &\mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域  $E \subset \mathbb{R}$  可视具体情况待定.

若对任意  $x \in A$ ,  $f[x]^{g[x]}$  有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g: A &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域  $F \subset \mathbb{R}$  可视具体情况待定.

**例 1.54** 设  $A = [1, +\infty)$ . 设

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写  $x^3$  为  $(\iota_A)^3_A$ . 所以

$$g = (\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^3_A;$$

这里, 我们取陪域为  $\mathbb{R}$ .

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的  $g$  还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取  $B = (0, 1)$ . 令

$$\begin{aligned} h: B &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \text{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与“对应法则”. 不过, 您不妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如“函数  $f(x) = \sqrt{1+x} + \ln(1-x)$ ”这样的文字时, 我们其实视这个  $f$  的定义域为全体使  $f(x)$  有意义的一切实数作成的集 (也就是  $[-1, 1)$ ); 当我们看到形如“函数  $g(x) = 1-x$  ( $x \in [-1, 0]$ )”的文字时, 我们认为  $g$  的定义域为已经提到的集  $[-1, 0]$ .  $f$  跟  $g$  的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, “万能的”  $\mathbb{R}$ ).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取  $\mathbb{R}$ .

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的  $h$  为

$$h = \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 - \iota} + \text{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

**定义 1.55** 我们称定义域为  $A$  的函数为 (定义在)  $A$  上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

**定义 1.56** 若  $B \subset A$ ,  $f$  是  $A$  上的函数, 我们说  $f$  在  $B$  上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} f + g &= g + f, & fg &= gf, \\ (f + g) + h &= f + (g + h), & (fg)h &= f(gh), \\ f(g + h) &= fg + fg, & (f + g)h &= fh + gh. \end{aligned}$$

这里  $f, g, h$  都是  $A$  上的函数.

设函数  $\ell$  的值域是  $A$  的子集. 记  $f/g = \frac{f}{g}$ ,  $f \wedge g = f^g$ . 设  $*$  是五文字  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $\wedge$  的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned} ((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]] \\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x]. \end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于  $+$  与  $\cdot$  的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中 useful, 故我建议您好好看看它.

**例 1.57** 我们知道, 对任意实数  $x$ , 都有  $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$ . 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

**例 1.58** 我们可写“二倍角公式”为

$$\begin{aligned} \sin \circ 2t &= 2 \cos \sin, \\ \cos \circ 2t &= \cos^2 - \sin^2 \\ &= 2 \cos^2 - 1 = 1 - 2 \sin^2 \\ &= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\ \tan \circ 2t &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2t \\ &= \frac{2 \cos \sin}{\cos^2 - \sin^2} \\ &= \frac{2 \tan}{1 - \tan^2} \\ &= \frac{2t}{1 - t^2} \circ \tan. \end{aligned}$$

**例 1.59** 值得注意的是,  $f(g + h)$  并不是  $f \circ (g + h)$ :

$$\begin{aligned} 2 \cos(\cos + \sin) &= 2 \cos^2 + 2 \cos \sin \\ &= (\cos + \sin - 1) \circ 2t \\ &= (\cos + \sin) \circ 2t - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(1 - \frac{2\pi}{8}\right) \circ 2t - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(2t - \frac{2\pi}{8}\right) - 1. \end{aligned}$$

**例 1.60** 值得注意的是, 本书的  $\sin^{-1}$  不是  $\arcsin$ ,  $\tan^{-1}$  也不是  $\arctan$ . 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\ &= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\ &= \frac{1 - \cos}{\sin} \\ &= \frac{2 \sin^2}{2 \cos \sin} \circ \frac{1}{2} \\ &= \tan \circ \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 1.61** 我们看一些关于  $\arcsin$  跟  $\arctan$  的等式. 在本例, 我们约定,  $\sin, \tan$  分别表示  $\sin_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}$  与  $\tan_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}$ . 这样,

$$\sin \circ \arcsin = \mathbf{1}_{[-1, 1]},$$

$$\tan \circ \arctan = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}.$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$\begin{aligned}\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\mathbf{1}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]} \circ \arcsin) \\ &= (\cos \circ \mathbf{1}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}) \circ \arcsin \\ &= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{t}^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\ &= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{t}^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\ &= \text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{t}^2).\end{aligned}$$

这里的  $\mathbf{t}$  自然是  $\mathbf{t}_{[-1, 1]}$ .

类似地,

$$\begin{aligned}\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\mathbf{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)} \circ \arctan) \\ &= (\cos \circ \mathbf{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}) \circ \arctan \\ &= \left( \text{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2} \right) \circ \arctan \\ &= \left( \text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathbf{t}^2} \circ \tan \right) \circ \arctan\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos \tan) \circ \arctan = \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

**注 1.62** 或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号:  $g[f]$  表示  $g \circ f$ . 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$\begin{aligned}
\cos[\arcsin] &= \text{sqrt}[1 - \mathfrak{t}^2], \\
\cos[\arctan] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 + \mathfrak{t}^2]}, \\
\sin[\arctan] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 + \mathfrak{t}^2]}, \\
\tan[\arcsin] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 - \mathfrak{t}^2]}.
\end{aligned}$$

虽然我已经用  $f[a]$  表示  $a$  在  $f$  下的像了, 我自然地也用  $f[C]$  表示  $C$  的每个元在  $f$  下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用  $g[f]$  表示  $g \circ f$ . 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.



## 第二章 连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础.  
若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是  $\mathbb{R}$  的子集.

### 2.1 连续的定义

**定义 2.1** 设  $x \in \mathbb{R}$ . 设  $\delta$  为正数. 则  $N[x; \delta] = (x - \delta, x + \delta)$  是  $x$  的一个邻域. 称  $N[x; \delta] - \{x\} = (x - \delta, x) \cup (x, x + \delta)$  是  $x$  的一个去心邻域.

不难看出,  $N[x; \delta]$  就是  $\{t \mid |t - x| < \delta\}$ , 而  $N[x; \delta] - \{x\}$  就是  $\{t \mid 0 < |t - x| < \delta\}$ .

下面的不等式十分有用.

**定理 2.2** 对任意实数  $x, y$ , 有

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数  $a, b, c$ ,

$$|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

**证** 注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0. \quad \text{证毕.}$$

**定义 2.3** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 若任给正数  $\epsilon$ , 存在正数  $\delta$  使  $f[A \cap N[x; \delta]] \subset N[f(x); \epsilon]$ , 则说  $f$  于  $x$  连续.

不难看出,  $f$  于  $x$  连续的一个必要与充分条件是: 任给正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\delta$  使  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时, 必有  $|f[t] - f[x]| < \varepsilon$ .

**定理 2.4** 设  $f, g$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 设  $f, g$  都于  $x$  连续. 设  $*$  是三文字  $+, -, \cdot$  的任意一个. 则  $f * g$  也于  $x$  连续.

**证** 以  $*$  为  $+$  或  $-$  时为例. 任取  $\varepsilon > 0$ . 这样, 因为  $f$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta_1$  使

$$|t - x| < \delta_1 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为  $g$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta_2$  使

$$|t - x| < \delta_2 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取  $\delta$  为  $\delta_1, \delta_2$  的较小者. 这样,  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时,

$$\begin{aligned} |(f * g)[t] - (f * g)[x]| &= |(f[t] * g[t]) - (f[x] * g[x])| \\ &= |(f[t] - f[x]) * (g[t] - g[x])| \\ &\leq |f[t] - f[x]| + |g[t] - g[x]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$*$  为  $\cdot$  时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned} (fg)[t] - (fg)[x] &= f[t]g[t] - f[x]g[x] \\ &= (f[t] - f[x] + f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x] + g[t]) \\ &= (f[t] - f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x]). \end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使  $(f[t] - f[x])g[t]$  跟  $f[x](g[t] - g[x])$  的绝对值都不超过  $\frac{\varepsilon}{2}$  就好. 首先, 存在正数  $\delta_3$  使

$$|t - x| < \delta_3 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |f[x]|)}.$$

其次, 存在正数  $\delta_4$  使

$$|t - x| < \delta_4 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < 1.$$

由此可知,  $|t - x| < \delta_4$  且  $t \in A$  时,

$$|g[t]| = |g[x] + (g[t] - g[x])| < |g[x]| + 1.$$

最后, 存在正数  $\delta_5$  使

$$|t - x| < \delta_5 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |g[x]|)}.$$

取  $\delta$  为  $\delta_3, \delta_4, \delta_5$  的最小者. 这样,  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时,

$$\begin{aligned} & |(fg)[t] - (fg)[x]| \\ &= |(f[t] - f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x])| \\ &\leq |f[t] - f[x]| \cdot |g[t]| + |f[x]| \cdot |g[t] - g[x]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |g[x]|)} \cdot (|g[x]| + 1) + |f[x]| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |f[x]|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

**定理 2.5** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 设  $f$  于  $x$  连续. 若  $f[x] \neq 0$ , 则  $f^{-1}$  于  $x$  连续.

**证** 任取  $\varepsilon > 0$ . 注意到

$$f^{-1}[t] - f^{-1}[x] = -\frac{f[t] - f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明  $|f[t]f[x]|$  比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然  $f[x] \neq 0$ , 那么  $|f[x]|$  当然是正数. 所以, 存在正数  $\delta_1$  使

$$|t - x| < \delta_1 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leq |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以,  $|t - x| < \delta_1$  且  $t \in A$  时,

$$|f[t]f[x]| > \frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使  $|f[t] - f[x]| < \frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$  即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

**注 2.6** 一般地, 设  $f$  是  $A$  上的函数,  $x \in A$ , 且  $f$  于  $x$  连续. 若  $f[x] \neq 0$ , 则存在  $x$  的邻域  $N[x; \delta]$  使  $t \in A \cap N[x; \delta]$  时必有

$$\frac{1}{2} < \frac{f[t]}{f[x]} < \frac{3}{2}.$$

取  $\varepsilon = |f[x]|/2$ ; 然后,

$$\left| \frac{f[t]}{f[x]} - 1 \right| = \frac{|f[t] - f[x]|}{|f[x]|} < \frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到  $|a - b| < c$  相当于  $a - c < b < a + c$ .

**定理 2.7** 设  $f, g$  是  $A$  上的函数. 设  $x \in A$ . 设  $f, g$  都于  $x$  连续. 设  $f[x] \neq 0$ . 则  $g/f$  也于  $x$  连续.

**证** 注意到  $g/f = g \cdot f^{-1}$ .

证毕.

**定理 2.8** 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ . 若  $f$  于  $x$  连续, 且  $g$  于  $f[x]$  连续, 则  $g \circ f: A \rightarrow C$  于  $x$  连续.

**证** 任取正数  $\varepsilon$ . 那么, 存在正数  $\delta'$  使

$$|v - f[x]| < \delta' \text{ 且 } v \in B \implies |g[v] - g[f[x]]| < \varepsilon.$$

也存在正数  $\delta$  使

$$|t - x| < \delta \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \delta'.$$

显然  $f[t] \in B$ . 所以,  $|t - x| < \delta$  且  $t \in A$  时,

$$|(g \circ f)[t] - (g \circ f)[x]| = |g[f[t]] - g[f[x]]| < \varepsilon.$$

证毕.

## 2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

**定义 2.9** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 若  $f$  于  $A$  的每一点都连续, 则  $f$  是 ( $A$  上的) **连续函数**.

**注 2.10** 显然, 若  $B \subset A$ , 那么  $f$  在  $B$  上的限制  $f_B$  也是连续函数.

利用上节的结论, 我们下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我不证了.

**定理 2.11** 设  $f, g$  都是  $A$  上的连续函数. 则:

- (1)  $f * g$  是连续函数, 这里  $*$  是三文字  $+, -, \cdot$  的任意一个.
- (2) 若  $f$  不取零值 (也就是说,  $f$  无根), 则  $g/f$  是连续函数.

**定理 2.12** 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  都是连续函数. 则  $g \circ f: A \rightarrow C$  也是连续函数.

**例 2.13** 常函数  $c: \mathbb{R} \rightarrow \{c\}$  是连续函数.

任取一点  $x$ . 注意到, 对任意非空集  $T \subset \mathbb{R}, c[T] = \{c\}$ . 所以, 任取正数  $\varepsilon$ , 对  $x$  的任意邻域  $N[x; \delta]$ , 都有  $c[N[x; \delta]] = \{c\} \subset N[c; \varepsilon] = N[c[x]; \varepsilon]$ .

**例 2.14**  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数.

任取一点  $x$ . 注意到, 对任意集  $T \subset \mathbb{R}, \text{id}[T] = T$ . 所以, 任取正数  $\varepsilon$ , 取  $x$  的  $\varepsilon$  邻域  $N[x; \varepsilon]$ , 即得  $\text{id}[N[x; \varepsilon]] = N[x; \varepsilon] = N[\text{id}[x]; \varepsilon] \subset N[\text{id}[x]; \varepsilon]$ .

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

**定理 2.15** 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n}{a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m}$$

(其中  $m, n$  为非负整数, 且  $a_0, a_1, \dots, a_m$  是不全为零的实数,  $b_0, b_1, \dots, b_n$  是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

**定义 2.16** 设  $f$  是  $A$  上的函数. 若任取  $A$  的相异二元  $x, y$ , 都有  $(x - y)(f[x] - f[y]) \geq 0$ , 则说  $f$  **增** (也说  $f$  是**增函数**); 若任取  $A$  的相异二元  $x, y$ , 都有  $(x - y)(f[x] - f[y]) > 0$ , 则说  $f$  **严增** (也说  $f$  是**严增函数**).

若  $-f$  增, 则  $f$  **减** (也说  $f$  是**减函数**); 若  $-f$  严增, 则  $f$  **严减** (也说  $f$  是**严减函数**).

若  $f$  增或  $f$  减, 则  $f$  **单调** (也说  $f$  是**单调函数**); 若  $f$  严增或  $f$  严减, 则  $f$  **严单调** (也说  $f$  是**严单调函数**).

简单地, 说  $f$  增 (严增), 就是说对任意适合  $x \in A, y \in A$  且  $x < y$  的  $x, y$ , 必有  $f[x] \leq f[y]$  ( $f[x] < f[y]$ ); 说  $f$  减 (严减), 就是说对任意适合  $x \in A, y \in A$  且  $x < y$  的  $x, y$ , 必有  $f[x] \geq f[y]$  ( $f[x] > f[y]$ ).

**例 2.17** 设  $a$  为非零实数,  $b$  为实数. 则  $ax + b$  是  $\mathbb{R}$  上的严单调函数. 任取二个相异实数  $x, y$ , 则

$$\begin{aligned} & (x - y)((ax + b) - (ay + b)) \\ &= (x - y)(ax - ay) \\ &= a(x - y)^2. \end{aligned}$$

由此可知,  $a > 0$  时  $ax + b$  严增, 而  $a < 0$  时  $ax + b$  严减.

可以验证,  $(ax + b)^{[-1]} = \frac{1}{a}$ , 且  $(1 + b)^{[-1]} = 1 - b$ . 所以

$$\begin{aligned} (ax + b)^{[-1]} &= ((1 + b) \circ (ax))^{[-1]} \\ &= (ax)^{[-1]} \circ (1 + b)^{[-1]} \\ &= \frac{1}{a} \circ (1 - b) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

不难看出,  $(ax + b)^{[-1]}$  跟  $ax + b$  同严增 (或严减).

**定理 2.18** 设  $f$  是  $A$  上的严单调函数. 则  $f$  是单函数.

**证** 任取  $A$  的相异二元  $x, y$ . 则

$$f[x] - f[y] = \frac{(x - y)(f[x] - f[y])}{x - y} \neq 0. \quad \text{证毕.}$$

我们知道, 若  $f: A \rightarrow B$  是单函数, 且  $f[A] = B$ , 则  $f$  有反函数  $f^{-1}: B \rightarrow A$ . 特别地, 适当选取陪域后, 每个严单调函数都有反函数.

**定理 2.19** 设  $f: A \rightarrow B$  是满的严增 (严减) 函数. 则  $f^{-1}: B \rightarrow A$  也是满的严增 (严减) 函数.

**证** 依假定,  $f$  是双函数, 故有反函数  $f^{-1}$ , 且  $f^{-1}$  当然是既满亦单的. 无妨设  $f$  严增;  $f$  严减时, 您可类似地论证  $f^{-1}$  亦严减.

下设  $f$  严增. 任取  $B$  的相异二元  $x', y'$ . 令  $x = f^{-1}[x']$ ,  $y = f^{-1}[y']$ . 易见  $x \neq y$ , 且  $x' = f[x]$ ,  $y' = f[y]$ . 因  $f$  严增, 故

$$(f[x] - f[y])(x - y) = (x - y)(f[x] - f[y]) > 0.$$

从而

$$\begin{aligned} & (x' - y')(f^{-1}[x'] - f^{-1}[y']) \\ &= (f[x] - f[y])(x - y) > 0. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

下面的结论十分重要.

**定理 2.20** 设  $I$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  是满的严单调函数. 则  $f$  是连续函数的一个必要与充分条件是:  $J$  是区间.

**证** 无妨设  $f$  严增.

先看必要性. 设  $f$  连续. 用反证法. 若  $J = f[I]$  不是区间, 则存在  $J$  的相异二元  $x', y'$  使  $x' < y'$  且  $J \cap (x', y')$  为空集. 设  $f[x] = x'$ ; 设  $f[y] = y'$ . 显然  $x < y$ . 任取  $I$  的大于  $x$  的元  $u$ . 因为  $f$  严增, 故  $f[u] > f[x] = x'$ ; 因为  $f[u] \notin (x', y')$ , 故  $f[u] \geq y'$ . 所以,  $f[u] - f[x] \geq y' - x'$ . 因为  $f$  于  $x$  连续, 故存在正数  $\delta$  使  $|t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,

$$|f[t] - f[x]| < y' - x'.$$

因为  $I$  是区间, 且  $x, y \in I$ , 故  $[x, y] \subset I$ ; 特别地, 这说明, 存在适合条件  $0 < v - x < \delta$  且  $v \in I$  的数  $v$ . 故

$$y' - x' > |f[v] - f[x]| = f[v] - f[x] \geq y' - x'.$$

这是矛盾.

再看充分性. 设  $J$  是区间. 任取  $x \in I$ . 我们证明  $f$  于  $x$  连续.

先设  $x$  是  $I$  的左端点. 那么, 对每个  $w > x, w \in I$ , 都有  $f[w] > f[x]$ . 于是,  $f[x]$  也是  $J$  的左端点. 任取正数  $\varepsilon$ , 必存在正数  $e < \varepsilon$  使  $f[x] + e \in J$ . 令  $q = f^{[-1]}[f[x] + e]$ , 则必有  $x < q$ . 从而, 当  $x \leq t < q$  时,  $f[x] \leq f[t] < f[x] + e$ . 这么看来, 存在正数  $\delta = q - x$ , 当  $t \in N[x; \delta] \cap I = [x, q)$  时, 必有

$$|f[t] - f[x]| = f[t] - f[x] < e < \varepsilon.$$

类似地, 当  $x$  是  $I$  的右端点时, 您也可用完全类似的套路论证  $f$  于  $x$  连续.

现设  $x$  既不是  $I$  的左端点, 也不是  $I$  的右端点. 这样, 存在正数  $d$  使  $x - d, x + d \in I$ . 所以  $f[x - d], f[x + d] \in J$ , 且  $f[x - d] < f[x] < f[x + d]$ . 故  $f[x]$  也不是  $J$  的端点. 所以, 任取正数  $\varepsilon$ , 必存在正数  $e < \varepsilon$  使  $f[x] - e, f[x] + e \in J$ . 令  $p = f^{[-1]}[f[x] - e], q = f^{[-1]}[f[x] + e]$ . 那么  $p < x < q$ . 取  $\delta$  为  $x - p$  与  $q - x$  的较小者. 则  $|t - x| < \delta$  且  $t \in I$  时,

$$p \leq x - \delta < t < x + \delta \leq q,$$

从而

$$f[x] - e = f[p] \leq f[x - \delta] < f[t] < f[x + \delta] \leq f[q] = f[x] + e,$$

即

$$|f[t] - f[x]| \leq e < \varepsilon. \quad \text{证毕.}$$

由此, 我们可以得到如下关于反函数的定理.

**定理 2.21** 设  $I$  为区间. 设  $f: I \rightarrow J$  是满的严单调函数. 设  $f$  是连续函数. 则  $f^{[-1]}: J \rightarrow I$  也是连续函数.

**证** 设  $f: I \rightarrow J$  是满的严单调函数. 因为  $I$  是区间, 且  $f$  是连续函数, 故  $J = f[I]$  也是区间. 因为  $f^{[-1]}$  也是满的严单调函数, 且  $I = f^{[-1]}[J]$  是区间, 故  $f^{[-1]}$  是连续函数. 证毕.



## 第三章 导数

### 3.1 背景

我们先简单地提一提导数是何物.

**定义 3.1** 设  $I$  为区间. 设  $x \in I$ . 设  $f$  为  $I$  上的函数.



## 参考文献

- [1] Menger K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.
- [2] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.
- [3] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/>.
- [4] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/>.
- [5] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/>.
- [6] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables [EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/>.
- [7] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/>.
- [8] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/>.

- [9] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/>.