几乎无变量的微积分

纳纳米

二〇二二年四月二日

目录

前言

定义　算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的 “微积分” 跟 “分析学” 不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为 “微积分” 就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、定积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并**不是**从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是什么样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了 “几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘

教版八年级下册的算学课本的定义.

定义 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

定义 一般地, 如果变量 y 随着变量 x 而变化, 并且对于 x 取的每一个值, y 都有唯一的一个值与它对应, 那么称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是胡话 a function of x (土话: x 的函数) 的简记. 这时叫 x 作**自变量**, 叫 y 作**因变量**. 对于自变量 x 取的每一个值 a, 称因变量 y 的对应值为**函数值**, 并记其作 $f(a)$.

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触 "函数" 的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用 "这种函数" 讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用 "有序对" 定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话 "变量" "对应". 不过, 更严谨地看, "有序对" 是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义 (a, b) 为 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号 f (而不是 $f(x)$), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x);$$

我们计算不定积分时, 用的记号是

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x;$$

我们计算定积分时, 用的记号是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链式法则为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

这里 $u=f(x)$, $y=f(u)=f(g(x))$. 视导数为 "变率", 那这就是在说, y 关于 x 的变率等于 y 关于 u 的变率与 u 关于 x 的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的 $\frac{11}{10}$ (也就是说, A 比 B 快 $\frac{1}{10}$), 而 B 的速率是 C 的速率的 $\frac{9}{10}$ (也就是说, B 比 C 慢 $\frac{1}{10}$), 那么 A 的速率是 C 的速率的 $\frac{99}{100}$; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: "有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?" 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用 D 表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说, $\mathrm{D}\exp=\exp$, $\mathrm{D}\cos=-\sin$, $\mathrm{D}\sin=\cos$. 不过, 当我想表达 $\mathrm{D}\ln$ 时, 我意识到了一个重要的问题: "已知 $\mathrm{D}\ln x=1/x$. 左边的 $\ln x$ 就是 ln, 可右边的 $1/x$ 应该是什么?" 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned}\mathrm{rec}\colon\quad \mathbb{R}-\{0\}&\to\mathbb{R}-\{0\},\\ x&\mapsto\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

这样, 我就可以写 $\mathrm{D}\ln=\mathrm{rec}$. 不过, 我还是没法好好地表示 $\mathrm{D}\arcsin$ 跟 $\mathrm{D}\arctan$. 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的 "什么也不干" 的函数

$$\begin{aligned}\mathrm{fdn}\colon\quad \mathbb{R}&\to\mathbb{R},\\ x&\mapsto x\end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量定积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的 "读书报告": 这本书 "浪费了" 巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 前几日, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些 "优良传统" 也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些 "优良传统" 是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

`https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

`https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

二〇二二年四月二日

第一章　集与函数

我先简单地介绍一下基础概念吧.

1.1　集

定义 1.1　**集**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为**元**.

注 1.2　事实上, 很多说汉语的算学家似乎更喜欢说 “集合” 而不是 “集”, 尤其当 “集” 前无限定词时. 这多半是因为所谓 “汉语” 其实是现代汉语, 而现代汉语喜 “双音节词”. 比方说, 曾表示 “人的脸色” 的 “颜色” 被用来指胡话的 color; 单独的 “色” 似乎是胡话的 erotic. 当然了, 我的汉语也不好, 我是语言的门外汉. 总之, 大家视 “集” 为一个跟胡话的 set 同义的文字即可; 类似地, 视 “元” 为一个跟胡话的 element 同义的文字即可.

注 1.3　事实上, 集与元是所谓的 “原始概念”. 我们至多**描述**集或元是什么; 我们无法**定义**集或元.

定义 1.4　无元的集是**空集**.

注 1.5　或许您在别的地方能看到形如 $\varnothing$ 的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

注 1.6　一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

定义 1.7　一般地, 若集 A 由元 $a, b, c, \cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \cdots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

定义 1.8　若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a **属于** A 或 A **包含** a. 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a **不属于** A 或 A **不包含** a.

注 1.9　“属于” 也是原始概念.

定义 1.10　若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的**子集**或 B 是 A 的**超集**. 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用 “真” 形容之.

注 1.11　或许, 您在别的地方能看到形如 $\subseteq$, $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说 A 是 B 的真子集, 我们再加上 $A \neq B$ 即可.

例 1.12　设 $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$. 不难看出, $0 \in C$, $1 \notin C$, $C \subset B$.

注 1.13　空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

定义 1.14　若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A **等于** B, 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

定义 1.15　集 A 与 B 的**交**是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的**并**是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集的交与并.

例 1.16 设 E 是全体偶数作成的集; 设 O 是全体奇数作成的集. 不难看出, $E \cap O$ 为空集, 而 $E \cup O$ 恰为全体整数作成的集.

定义 1.17 设 A, B 是集. 定义

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

注 1.18 值得注意的是, 我们没说 $B \subset A$.

例 1.16 (续页 3) 不难看出, $E-O$ 跟 $O-E$ 都是空集, 故 $E-O=O-E$. 不过, 这个 $-$ 不是减法, 故当然不能由此推出 "$E+E=O+O$", 更不能推出 $E=O$.

定义 1.19 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里, (a, b) 是**有序对**. 我们规定, 二个有序对 (a, b) 与 (c, d) 相等相当于 $a=c$ 且 $b=d$.

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 相等, 相当于 $a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$.

注 1.20 一般地, $A \times B \neq B \times A$.

注 1.21 设 A, B 分别有 m, n 个元. 则 $A \times B$ 有 mn 个元.

定义 1.22 一般地, $\mathbb{N}$ 指全体非负整数作成的集; $\mathbb{Z}$ 指全体整数作成的集; $\mathbb{Q}$ 指全体有理数作成的集; $\mathbb{R}$ 指全体实数作成的集; $\mathbb{C}$ 指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 1.23 在微积分里, $\mathbb{R}$ 的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数 a, b, 其中 $a<b$. 那么我们记:

(1) $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

(2) $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;

(3) $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;

(4) $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;

(5) $(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$;

(6) $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$;

(7) $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$;

(8) $(a,+\infty) = \{x \mid a < x\}$;

(9) $[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$.

统称这九类子集为**区间**. a 是区间 $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ 的**左端点**; b 是区间 $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ 的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为 $\{a\}$ 是**退化为一点的区间** $[a,a]$; 我们认为空集是**空区间** $[a,a)$, (a,a), $[a,a)$, $[b,a)$, (b,a), $(b,a]$ 或 $[b,a]$. 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

注 1.24 设 a, b, c 是实数. 说 b 介于 a 跟 c 之间, 就是说 $a \leqslant b \leqslant c$ 或 $c \leqslant b \leqslant a$ (简单地, 就是 $(b-a)(b-c) \leqslant 0$). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为 "区间". 那么, 显而易见地, 任给一个区间 I, 任取 I 的二个相异实数 a, b, 则每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元. 反过来, 若 $\mathbb{R}$ 的子集 I 适合 "任取 I 的二个相异实数, 每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元", 则 I 是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

1.2 关系与函数

定义 1.25 设 A, B 是集. $A \times B$ 的子集称为 A 到 B 的**关系**.

定义 1.26 设 A, B 是集. 若 A 到 B 的关系 f 适合下述性质, 则说 f 是 A 到 B 的**函数** (或**映射**):

- 任取 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $(a,b) \in f$;
- 若 (a,b) 与 (a,c) 均为 f 的元, 则 $b = c$.

设 $(a,b) \in f$. 我们记此事为 $b = f[a]$, 并说 b 是 a 在函数 f 下的**像**, a 是 b 在

函数 f 下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数 f:

$$\begin{aligned} f\colon\quad & A \to B, \\ & a \mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

"$f\colon A \to B$" 是 "f 是 A 到 B 的函数" 的简写.

注 1.27　一般地, 我们写 a 在函数 f 下的像为 $f(a)$, 而不是 $f[a]$. 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

例 1.28　设 $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1\}$. 显然, $A \times B$ 有 6 个元. 不难看出, $A \times B$ 有 64 个子集, 故 A 到 B 的关系共有 64 个. 不过, A 到 B 的函数只有 8 个.

定义 1.29　在本书, 我们为 "什么也不干" 的函数起一个名字. 具体地说, 设 $A \subset B$. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}\colon\quad & A \to B, \\ & a \mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中 ι 是希腊字母 iota.

我们简单地写 $\iota_{A,A}$ 为 ι_A. 有时, 若既不必指出 A, 也不必指出 B, 我们直接写 ι. 换句话说: ι (或者带下标的 ι_A, $\iota_{A,B}$) 啥也不干, 即 $\iota[x] = x$, 其中 x 可以是任意文字.

一般也称 ι 为**恒等函数**.

定义 1.30　设 f 是 A 到 B 的函数. 称 A 为 f 的**定义域**; 称 B 为 f 的**陪域**.

定义 1.31　设 $C \subset A$. 设 $f\colon A \to B$. 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称 $f[A]$ 为 f 的**值域**. 显然 f 的值域是 f 的陪域的子集.

注 1.32　设 $f\colon A \to B$. 若 $D \subset C \subset A$, 则 $f[D] \subset f[C]$.

定义 1.33 设 f, g 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 都有 $f[a] = g[a]$, 则说 $f = g$.

可写 $f = g$ 的否定为 $f \neq g$. 具体地说, 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] \neq g[a]$, 则说 $f \neq g$.

定义 1.34 设 R 是 A 到 B 的关系. B 到 A 的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为 R 的**反关系**.

定义 1.35 设 f 是 A 到 B 的函数. 若 f 的反关系 g 是 B 到 A 的函数, 则称 g 是 f 的**反函数**. 我们写 f 的反函数为 $f^{[-1]}$.

注 1.36 不难验证, 若 g 是 f 的反函数, 则 f 也一定是 g 的反函数. 这是因为 R 的反关系的反关系是 R.

定义 1.37 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 C 到 D 的函数, 且 $f[A] \subset C$. 任取 A 的元 a. 按照函数的定义, 存在唯一的 $b \in f[A]$ 使 $(a, b) \in f$. 既然 $b \in f[A] \subset C$, 再根据函数的定义, 存在唯一的 $d \in g[C] \subset D$ 使 $(b, d) \in g$. 这样的 d 可用 $g[f[a]]$ 表示. 作 A 到 D 的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是 A 到 D 的函数. 我们称函数 $g \circ f$ 为 f 与 g 的**复合**.

注 1.38 设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, 且 $f[A] \subset C$. 设 $E \subset A$. 那么 $f[E] \subset f[A] \subset C$, 故 $g[f[E]]$ 是有意义的. 我们说, $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$.

取 $d \in g[f[E]]$. 按定义, 存在 $t \in f[E]$ 使 $g[t] = d$. 对这个 t 而言, 又存在 $e \in E$ 使 $f[e] = t$. $(g \circ f)[e]$, 按定义, 等于 $g[f[e]]$, 也就是 $g[t]$, 也就是 d. 所以 $d \in (g \circ f)[E]$. 这说明 $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$.

取 $d' \in (g \circ f)[E]$. 按定义, 存在 $e' \in E$ 使 $(g \circ f)[e'] = d'$. 所以 $t' = f[e'] \in f[E]$. 那么 $g[t'] = d'$. 所以 $d' \in g[f[E]]$. 这说明 $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$.

既然 $g[f[E]]$ 跟 $(g \circ f)[E]$ 相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了 $a \in A$ 时 $(g \circ f)[a]$ 就是 $g[f[a]]$, 可我们并没有**定义** $(g \circ f)[E]$ 是 $g[f[E]]$. 大算学家 John von Neumann 说过: "Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them." 所以, 习惯就好了.

注 1.39 设 $f\colon A \to B$. 那么 $f \circ \iota_A = f$, 且 $\iota_B \circ f = f$.

注 1.40 一般地, $g \circ f \neq f \circ g$. 一方面, $g \circ f$ 有定义时, $f \circ g$ 可能无定义; 另一方面, 即使 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 都有定义, 二者也不一定相等.

定理 1.41 函数的复合是**结合的**. 具体地说, 设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $h\colon E \to F$, 且 $f[A] \subset C$, $g[C] \subset E$. 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $h \circ g \circ f$.

证 $q = g \circ f$ 是 A 到 D 的函数, 且 $p = h \circ g$ 是 C 到 E 的函数. 因 $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$, 故 $h \circ q = h \circ (g \circ f)$ 是 A 到 F 的函数; 因 $f[A] \subset C$, 故 $p \circ f = (h \circ g) \circ f$ 也是 A 到 F 的函数. 任取 $a \in A$. 则

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))[a] &= h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],\\ ((h \circ g) \circ f)[a] &= (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]].\end{aligned}$$

证毕.

定义 1.42 设 f 是 A 到 B 的函数.

- 若任取 A 的相异二元 a 与 a', 都有 $f[a] \neq f[a']$, 则称 f 是**单函数**.
- 若对任意 $b \in B$, 都存在 $a \in A$ 使 $f[a] = b$, 则称 f 是**满函数**.

例 1.43 设 $A \subset B$. A 到 B 的函数 $\iota_{A,B}$ 总是单函数. 不过, 若 $A \neq B$, 则 $\iota_{A,B}$ 不是满函数.

注 1.44 设 $B \subset C$. 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 A 到 C 的函数, 且对任意 $a \in A$, $f[a] = g[a]$. 那么, f 是单函数的一个必要与充分条件是: g 是单函数. 若 f 不是满函数, 则 g 也不是.

若 f 是满函数, 则 g 也是满函数的一个必要与充分条件是: $B = C$.

定理 1.45 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 B 到 A 的函数 g 适合如下性质:

- 对任意 $a \in A$, $g[f[a]] = a$; 也就是说, $g \circ f = \iota_A$.
- 对任意 $b \in B$, $f[g[b]] = b$; 也就是说, $f \circ g = \iota_B$.

则:

- 至多有一个这样的 g;
- g 是 f 的反函数.

证 至多只有一个这样的 g 是显然的. 具体地, 若 $g'\colon B \to A$ 适合 $g' \circ f = \iota_A$, 且 $f \circ g' = \iota_B$, 则

$$g = g \circ \iota_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \iota_A \circ g' = g'.$$

下证 g 是 f 的反函数. 事实上, 若 h 是 f 的反函数, 则不难验证 h 适合上述二条性质. 所以 $g = h$. 证毕.

定理 1.46 设 $f\colon A \to B$ 与 $g\colon B \to C$ 的反函数分别是 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 与 $g^{[-1]}\colon C \to B$. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

证 记 $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}\colon C \to A$; 记 $p = g \circ f$. 不难用结合律验证 $q \circ p = \iota_A$, 且 $p \circ q = \iota_B$. 这里以 $q \circ p$ 为例:

$$\begin{aligned}
q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\
&= (q \circ g) \circ f \\
&= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\
&= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\
&= (f^{[-1]} \circ \iota_B) \circ f \\
&= f^{[-1]} \circ f \\
&= \iota_A.
\end{aligned}$$

证毕.

注 1.47 不难看出, 函数 f 有反函数的一个必要与充分条件是: f 是单函数, 且 f 是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

定义 1.48 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 $C \subset A$. 作 C 到 B 的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知, f_C 是 C 到 B 的函数. 我们说, f_C 是 f 在 C 上的**限制**.

1.3 函数的演算

注 本节的语言或许比较混乱.

本节讨论 $\mathbb{R}$ 的子集到 $\mathbb{R}$ 的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是 "几乎无变量的微积分". 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

定义 1.49 设 $f\colon A \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ 且 $0 \in B$. 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] = 0$, 就说 a 是 f 的一个**根**.

现在我们介绍一些 "基本初等函数".

定义 1.50 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \iota\colon \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c\colon \quad \mathbb{R} &\to \{c\}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$$

其中 c 是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp\colon \quad \mathbb{R} &\to (0, +\infty), \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned}\sin\colon\quad \mathbb{R} &\to [-1,1],\\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};\end{aligned}$$

(5) 馀弦函数:

$$\begin{aligned}\cos\colon\quad \mathbb{R} &\to [-1,1],\\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};\end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan\colon\quad \{x \mid \cos[x]\neq 0\} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln\colon\quad (0,+\infty) &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin\colon\quad [-1,1] &\to \left[-\frac{2\pi}{4},\frac{2\pi}{4}\right],\\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 s 指 sin 在 $I=[-2\pi/4,2\pi/4]$ 上的限制 $\sin_I\colon I\to[-1,1]$, 2π 是 cos 的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan\colon\quad \mathbb{R} &\to \left(-\frac{2\pi}{4},\frac{2\pi}{4}\right),\\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 t 指 tan 在 $J=(-2\pi/4,2\pi/4)$ 上的限制 $\tan_J\colon J\to\mathbb{R}$;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{abs}\colon\quad \mathbb{R} &\to [0,+\infty),\\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geqslant 0;\\ -x, & x < 0.\end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{sqrt}\colon\quad [0,+\infty) &\to [0,+\infty),\\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

注 1.51 在本书, 2π 是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

例 1.52 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned}f\colon\quad A &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right].\end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达 f 的定义. 具体地,

$$f = \exp\circ\mathrm{sqrt}\circ\ln_A.$$

这里, $\ln_A$ 自然是 $\ln$ 在 A 上的限制.

不过, 复合并不够用.

例 1.53 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned}g\colon\quad A &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]+\sin[x]+x^3.\end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达 g 的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写 $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$ 跟 $\sin[x]$ 为 $\exp\circ\mathrm{sqrt}\circ\ln_A$ 与 $\sin_A$; 可是, 我们要怎么写 x^3? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

定义 1.54　设 A, B, C 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$. 设 $*$ 是文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$\begin{aligned} f * g\colon \quad & A \to D, \\ & x \mapsto f[x] * g[x], \end{aligned}$$

其中陪域 $D \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定. 一般地, 若 $*$ 是乘号 $\cdot$, 则可被省略. 可写 $0_A - f$ 为 $-f$; 这里 0_A 当然是常函数 0 在 A 上的限制.

若对任意 $x \in A$, 都有 $f[x] \neq 0$, 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}\colon \quad & A \to E, \\ & x \mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $E \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

若对任意 $x \in A$, $f[x]^{g[x]}$ 有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g\colon \quad & A \to F, \\ & x \mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $F \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

例 1.55　设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g\colon \quad & A \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写 x^3 为 $(\iota_A)^{3_A}$. 所以

$$g = (\exp \circ \mathrm{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^{3_A};$$

这里, 我们取陪域为 $\mathbb{R}$.

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上

例的 g 还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取 $B = (0, 1)$. 令

$$\begin{aligned} h\colon\quad & B \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \mathrm{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与 “对应法则”. 不过, 您无妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如 “函数 $f(x) = \sqrt{1 + x} + \ln(1 - x)$” 这样的文字时, 我们其实视这个 f 的定义域为全体使 $f(x)$ 有意义的一切实数作成的集 (也就是 $[-1, 1)$); 当我们看到形如 “函数 $g(x) = 1 - x$ ($x \in [-1, 0]$)” 的文字时, 我们认为 g 的定义域为已经提到的集 $[-1, 0]$. f 跟 g 的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, “万能的” $\mathbb{R}$).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取 $\mathbb{R}$.

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的 h 为

$$h = \ln \circ \frac{\iota - \sin}{1 - \iota} + \mathrm{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

定义 1.56 我们称定义域为 A 的函数为 (定义在) A 上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

定义 1.57 若 $B \subset A$, f 是 A 上的函数, 我们说 f 在 B 上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} & f + g = g + f, && fg = gf, \\ & (f + g) + h = f + (g + h), && (fg)h = f(gh), \\ & f(g + h) = fg + fg, && (f + g)h = fh + gh. \end{aligned}$$

这里 f, g, h 都是 A 上的函数.

设函数 ℓ 的值域是 A 的子集. 记 $f\,/\,g = \frac{f}{g}$, $f \wedge g = f^g$. 设 $*$ 是五文字 $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\wedge$ 的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned}((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]] \\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x].\end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于 $+$ 与 $\cdot$ 的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中有用, 故我建议您好好看看它.

例 1.58 我们知道, 对任意实数 x, 都有 $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$. 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

例 1.59 对任意实数 x, 都有 $\exp[x] \cdot \exp[-x] = 1$. 所以

$$\exp\,(\exp \circ -\iota) = 1.$$

例 1.60 我们可写 "二倍角公式" 为

$$\begin{aligned}\sin \circ 2\iota &= 2\cos\sin, \\ \cos \circ 2\iota &= \cos^2 - \sin^2 \\ &= 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 \\ &= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\ \tan \circ 2\iota &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2\iota \\ &= \frac{2\cos\sin}{\cos^2 - \sin^2} \\ &= \frac{2\tan}{1 - \tan^2} \\ &= \frac{2\iota}{1 - \iota^2} \circ \tan.\end{aligned}$$

例 1.61 值得注意的是, $f(g+h)$ 并不是 $f\circ(g+h)$:

$$\begin{aligned}2\cos(\cos+\sin) &= 2\cos^2+2\cos\sin\\ &= (\cos+\sin-1)\circ 2\iota\\ &= (\cos+\sin)\circ 2\iota-1\\ &= \sqrt{2}\cos\circ\left(\iota-\frac{2\pi}{8}\right)\circ 2\iota-1\\ &= \sqrt{2}\cos\circ\left(2\iota-\frac{2\pi}{8}\right)-1.\end{aligned}$$

例 1.62 值得注意的是, 本书的 $\sin^{-1}$ 不是 arcsin, $\tan^{-1}$ 也不是 arctan. 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}\sin^{-1}-\tan^{-1} &= \frac{1}{\sin}-\frac{1}{\tan}\\ &= \frac{1}{\sin}-\frac{\cos}{\sin}\\ &= \frac{1-\cos}{\sin}\\ &= \frac{2\sin^2}{2\cos\sin}\circ\frac{\iota}{2}\\ &= \tan\circ\frac{\iota}{2}.\end{aligned}$$

例 1.63 我们看一些关于 arcsin 跟 arctan 的等式. 在本例, 我们约定, sin, tan 分别表示 $\sin_{[-2\pi/4,2\pi/4]}$ 与 $\tan_{(-2\pi/4,2\pi/4)}$. 这样,

$$\begin{aligned}\sin\circ\arcsin &= \iota_{[-1,1]},\\ \tan\circ\arctan &= \iota_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$\begin{aligned}\cos\circ\arcsin &= \cos\circ(\iota_{[-2\pi/4,2\pi/4]}\circ\arcsin)\\ &= (\cos\circ\iota_{[-2\pi/4,2\pi/4]})\circ\arcsin\\ &= (\mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2)\circ\sin)\circ\arcsin\\ &= (\mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2))\circ(\sin\circ\arcsin)\\ &= \mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2).\end{aligned}$$

这里的 ι 自然是 $\iota_{[-1,1]}$.

类似地,

$$\begin{aligned}
\cos\circ\arctan &= \cos\circ(\iota_{(-2\pi/4,2\pi/4)}\circ\arctan) \\
&= (\cos\circ\iota_{(-2\pi/4,2\pi/4)})\circ\arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt}\circ\frac{\cos^2}{\cos^2+\sin^2}\right)\circ\arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt}\circ\frac{1}{1+\iota^2}\circ\tan\right)\circ\arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt}\circ\frac{1}{1+\iota^2}\right)\circ(\tan\circ\arctan) \\
&= \frac{1}{\mathrm{sqrt}\circ(1+\iota^2)}.
\end{aligned}$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$\begin{aligned}
\sin\circ\arctan &= (\cos\tan)\circ\arctan = \frac{\iota}{\mathrm{sqrt}\circ(1+\iota^2)}, \\
\tan\circ\arcsin &= \frac{\sin}{\cos}\circ\arcsin = \frac{\iota}{\mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2)}.
\end{aligned}$$

注 1.64　或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号: $g[f]$ 表示 $g\circ f$. 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$\begin{aligned}
\cos[\arcsin] &= \mathrm{sqrt}[1-\iota^2], \\
\cos[\arctan] &= \frac{1}{\mathrm{sqrt}[1+\iota^2]}, \\
\sin[\arctan] &= \frac{\iota}{\mathrm{sqrt}[1+\iota^2]}, \\
\tan[\arcsin] &= \frac{\iota}{\mathrm{sqrt}[1-\iota^2]}.
\end{aligned}$$

虽然我已经用 $f[a]$ 表示 a 在 f 下的像了, 我自然地也用 $f[C]$ 表示 C 的每个元在 f 下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用 $g[f]$ 表示 $g\circ f$. 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.

第二章　连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础.

若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是 $\mathbb{R}$ 的子集.

2.1　连续的定义

定义 2.1　设 $x \in \mathbb{R}$. 设 δ 为正数. 则 $N[x, \delta] = (x - \delta, x + \delta)$ 是 x 的一个**邻域**. 称 $N[x, \delta] - \{x\} = (x - \delta, x) \cup (x, x + \delta)$ 是 x 的一个**去心邻域**.

不难看出, $N[x, \delta]$ 就是 $\{t \mid |t - x| < \delta\}$, 而 $N[x, \delta] - \{x\}$ 就是 $\{t \mid 0 < |t - x| < \delta\}$.

下面的不等式十分有用.

定理 2.2　对任意实数 x, y, 有

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数 a, b, c,

$$|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leqslant |a - b| + |b - c|.$$

证　注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geqslant 0. \qquad \text{证毕.}$$

定义 2.3　设 f 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 若任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $f[A \cap N[x, \delta]] \subset N[f[x], \varepsilon]$, 则说 f 于 x **连续**.

不难看出, f 于 x 连续的一个必要与充分条件是: 任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时, 必有 $|f[t]-f[x]|<\varepsilon$.

定理 2.4 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 则 $f*g$ 也于 x 连续.

证 以 $*$ 为 $+$ 或 $-$ 时为例. 任取 $\varepsilon>0$. 这样, 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 g 于 x 连续, 故存在正数 δ_2 使

$$|t-x|<\delta_2 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1, δ_2 的较小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}|(f*g)[t]-(f*g)[x]| &= |(f[t]*g[t])-(f[x]*g[x])|\\ &= |(f[t]-f[x])*(g[t]-g[x])|\\ &\leqslant |f[t]-f[x]|+|g[t]-g[x]|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$*$ 为 $\cdot$ 时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned}&(fg)[t]-(fg)[x]\\ &= f[t]g[t]-f[x]g[x]\\ &= (f[t]-f[x]+f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]+g[t])\\ &= (f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]).\end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使 $(f[t]-f[x])g[t]$ 跟 $f[x](g[t]-g[x])$ 的绝对值都不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ 就好. 首先, 存在正数 δ_3 使

$$|t-x|<\delta_3 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)}.$$

其次, 存在正数 δ_4 使

$$|t-x|<\delta_4 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<1.$$

由此可知, $|t-x|<\delta_4$ 且 $t\in A$ 时,

$$|g[t]| = |g[x]+(g[t]-g[x])| < |g[x]|+1.$$

最后, 存在正数 δ_5 使

$$|t-x|<\delta_5 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}.$$

取 δ 为 $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ 的最小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}
&|(fg)[t]-(fg)[x]| \\
&= |(f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x])| \\
&\leqslant |f[t]-f[x]|\cdot|g[t]|+|f[x]|\cdot|g[t]-g[x]| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}\cdot(|g[x]|+1)+|f[x]|\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.5 设 f 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则 f^{-1} 于 x 连续.

证 任取 $\varepsilon>0$. 注意到

$$f^{-1}[t]-f^{-1}[x] = -\frac{f[t]-f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明 $|f[t]f[x]|$ 比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然 $f[x]\neq 0$, 那么 $|f[x]|$ 当然是正数. 所以, 存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]| < \frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]| = |f[t]-(f[t]-f[x])| \leqslant |f[t]|+|f[t]-f[x]| < |f[t]|+\frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]|-\frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, $|t-x|<\delta_1$ 且 $t\in A$ 时,

$$|f[t]f[x]|>\frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使 $|f[t]-f[x]|<\frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$ 即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

注 2.6 一般地, 设 f 是 A 上的函数, $x\in A$, 且 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则存在 x 的邻域 $N[x,\delta]$ 使 $t\in A\cap N[x,\delta]$ 时必有

$$\frac{1}{2}<\frac{f[t]}{f[x]}<\frac{3}{2}.$$

取 $\varepsilon=|f[x]|/2$; 然后,

$$\left|\frac{f[t]}{f[x]}-1\right|=\frac{|f[t]-f[x]|}{|f[x]|}<\frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到 $|a-b|<c$ 相当于 $a-c<b<a+c$.

定理 2.7 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $f[x]\neq 0$. 则 g/f 也于 x 连续.

证 注意到 $g/f=g\cdot f^{-1}$. 证毕.

定理 2.8 设 $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$. 若 f 于 x 连续, 且 g 于 $f[x]$ 连续, 则 $g\circ f\colon A\to C$ 于 x 连续.

证 任取正数 ε. 那么, 存在正数 δ' 使

$$|v-f[x]|<\delta' \text{ 且 } v\in B \implies |g[v]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

也存在正数 δ 使

$$|t-x|<\delta \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\delta'.$$

显然 $f[t]\in B$. 所以, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$|(g\circ f)[t]-(g\circ f)[x]|=|g[f[t]]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

证毕.

2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

定义 2.9 设 f 是 A 上的函数. 若 f 于 A 的每一点都连续, 则 f 是 (A 上的) **连续函数**.

注 2.10 显然, 若 $B \subset A$, 那么 f 在 B 上的限制 f_B 也是连续函数.

利用上节的结论, 我们有下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我就不证了.

定理 2.11 设 f, g 都是 A 上的连续函数. 则:
(1) $f * g$ 是连续函数, 这里 $*$ 是三文字 $+$, $-$, $\cdot$ 的任意一个.
(2) 若 f 不取零值 (也就是说, f 无根), 则 g/f 是连续函数.

定理 2.12 设 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ 都是连续函数. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 也是连续函数.

例 2.13 常函数 $c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意非空集 $T \subset \mathbb{R}$, $c[T] = \{c\}$. 所以, 任取正数 ε, 对 x 的**任意**邻域 $N[x, \delta]$, 都有 $c[N[x, \delta]] = \{c\} \subset N[c, \varepsilon] = N[c[x], \varepsilon]$.

例 2.14 $\imath\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意集 $T \subset \mathbb{R}$, $\imath[T] = T$. 所以, 任取正数 ε, 取 x 的 ε 邻域 $N[x, \varepsilon]$, 即得 $\imath[N[x, \varepsilon]] = N[x, \varepsilon] = N[\imath[x], \varepsilon] \subset N[\imath[x], \varepsilon]$.

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

定理 2.15 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1\imath + \cdots + b_n\imath^n}{a_0 + a_1\imath + \cdots + a_m\imath^m}$$

(其中 m, n 为非负整数, 且 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 是不全为零的实数, $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

定义 2.16 设 f 是 A 上的函数. 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y]) \geqslant 0$, 则说 f **增** (也说 f 是**增函数**); 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y]) > 0$, 则说 f **严增** (也说 f 是**严增函数**).

若 $-f$ 增, 则 f **减** (也说 f 是**减函数**); 若 $-f$ 严增, 则 f **严减** (也说 f 是**严减函数**).

若 f 增或 f 减, 则 f **单调** (也说 f 是 **单调函数**); 若 f 严增或 f 严减, 则 f **严单调** (也说 f 是 **严单调函数**).

简单地, 说 f 增 (严增), 就是说对任意适合 $x \in A$, $y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y, 必有 $f[x] \leqslant f[y]$ ($f[x] < f[y]$); 说 f 减 (严减), 就是说对任意适合 $x \in A$, $y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y, 必有 $f[x] \geqslant f[y]$ ($f[x] > f[y]$).

第三章　导数

3.1　背景

我们先简单地提一提导数是何物.

定义 3.1　设 I 为区间. 设 $x \in I$. 设 f 为 I 上的函数.

参考文献

[1] MENGER K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.

[2] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.

[3] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/.

[4] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/.

[5] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/.

[6] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables[EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/.

[7] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/.

[8] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/.

[9] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/.