

几乎无变量的微积分

78 分快速上手

纳纳米

版本 6, 2022 年 4 月 13 日

目录

前言	iii
第一章 集与函数	1
1.1 集	1
1.2 关系与函数	4
1.3 函数的演算	8
第二章 连续函数	17
2.1 连续的定义	17
2.2 连续函数	21
2.3 连续函数的积分	25
第三章 导数	29
3.1 背景	29
3.2 无变量的导数计算	36
第四章 不定积分	41
4.1 原函数与不定积分	41
4.2 函数集的演算	44
4.3 不定积分的演算	52
第五章 积分	67
5.1 不定积分与积分	67
5.2 计算积分	72

前言

定义 算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的“微积分”跟“分析学”不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为“微积分”就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并不是从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是怎样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

本书的副标题是《78 分快速上手》. 其实, 您不必太在意这个副标题里的“78 分”; 这只是一个“旧客” (胡话: joke). 假如忽略本书的标题页、目录、前言、参考文献, 那么本书就只有 78 页. 我假定您至多用 1 分 (即 60 秒) 看 1 页. 这么看来, 您至多用 78 分就可以了解最基本的微积分. 不过, 认真地, 若我至多用 1 分看 1 页**算学书**, 我可能学不到什么东西.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了“几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才

开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘教版八年级下册的算学课本的定义.

定义 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

定义 一般地, 如果变量 y 随着变量 x 而变化, 并且对于 x 取的每一个值, y 都有唯一的一个值与它对应, 那么称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是胡话 a function of x (土话: x 的函数) 的简记. 这时叫 x 作**自变量**, 叫 y 作**因变量**. 对于自变量 x 取的每一个值 a , 称因变量 y 的对应值为**函数值**, 并记其作 $f(a)$.

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触 “函数” 的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用 “这种函数” 讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用 “有序对” 定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话 “变量” “对应”. 不过, 更严谨地看, “有序对” 是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义 (a, b) 为 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号 f (而不是 $f(x)$), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \text{ 或 } \frac{d}{dx}f(x);$$

我们计算不定积分时,用的记号是

$$\int f(x) dx;$$

我们计算积分时,用的记号是

$$\int_a^b f(x) dx.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链规则为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

这里 $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$. 视导数为“变率”, 那这就是在说, y 关于 x 的变率等于 y 关于 u 的变率与 u 关于 x 的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的 $\frac{11}{10}$ (也就是说, A 比 B 快 $\frac{1}{10}$), 而 B 的速率是 C 的速率的 $\frac{9}{10}$ (也就是说, B 比 C 慢 $\frac{1}{10}$), 那么 A 的速率是 C 的速率的 $\frac{99}{100}$; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: “有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?” 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用 D 表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说, $D \exp = \exp$, $D \cos = -\sin$, $D \sin = \cos$. 不过, 当我想表达 $D \ln$ 时, 我意识到了一个问题: “已知 $D \ln x = 1/x$. 左边的 $\ln x$ 就是 \ln , 可右边的 $1/x$ 应该是什么?” 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \text{rec}: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写 $D \ln = \text{rec}$. 不过, 我还是没法好好地表示 $D \arcsin$ 跟 $D \arctan$. 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名

字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的“什么也不干”的函数

$$\begin{aligned} \text{fdn}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的“读书报告”: 这本书“浪费了”巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 最近, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些“优良传统”也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些“优良传统”是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

<https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables>

<https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables>

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

2022 年 4 月 13 日

第一章 集与函数

我先简单地介绍一下基本概念吧.

1.1 集

定义 1.1 集是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为元.

注 1.2 事实上, 集与元是所谓的“原始概念”. 我们至多描述集或元是什么; 我们无法定义集或元.

定义 1.3 无元的集是空集.

注 1.4 或许您在别的地方能看到形如 \emptyset 的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

注 1.5 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

定义 1.6 一般地, 若集 A 由元 a, b, c, \dots 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

定义 1.7 若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a 属于 A 或 A 包含 a . 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a 不属于 A 或 A 不包含 a .

注 1.8 “属于”也是原始概念.

定义 1.9 若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的子集或 B 是 A 的超集. 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用“真”形容之.

注 1.10 或许, 您在别的地方能看到形如 \subseteq , \subsetneq 或 \subsetneq 的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说 A 是 B 的真子集, 我们再加上 $A \neq B$ 即可.

例 1.11 设 $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$. 不难看出, $0 \in C$, $1 \notin C$, $C \subset B$.

注 1.12 空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

定义 1.13 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A 等于 B , 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

定义 1.14 集 A 与 B 的交是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的并是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集之交与并.

例 1.15 设 E 是全体偶数作成的集; 设 O 是全体奇数作成的集. 不难看出, $E \cap O$ 为空集, 而 $E \cup O$ 恰为全体整数作成的集.

定义 1.16 设 A, B 是集. 定义

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

注 1.17 值得注意的是, 我们没说 $B \subset A$.

定义 1.18 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里, (a, b) 是**有序对**. 我们规定, 二个有序对 (a, b) 与 (c, d) 相等相当于 $a = c$ 且 $b = d$.

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

(a_1, a_2, \cdots, a_n) 与 (b_1, b_2, \cdots, b_n) 相等, 相当于 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

注 1.19 一般地, $A \times B \neq B \times A$.

注 1.20 设 A, B 分别有 m, n 个元. 则 $A \times B$ 有 mn 个元.

定义 1.21 一般地, \mathbb{N} 指全体非负整数作成的集; \mathbb{Z} 指全体整数作成的集; \mathbb{Q} 指全体有理数作成的集; \mathbb{R} 指全体实数作成的集; \mathbb{C} 指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 1.22 在微积分里, \mathbb{R} 的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数 a, b , 其中 $a < b$. 那么我们记:

- (1) $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$
- (2) $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$
- (3) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$
- (4) $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$
- (5) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$
- (6) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$
- (7) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$
- (8) $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\};$
- (9) $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}.$

统称这九类子集为**区间**. a 是区间 $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ 的**左端点**; b 是区间 $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为 $\{a\}$ 是**退化为一点的区间** $[a, a]$; 我们认为空集是**空区间** $[a, a)$, (a, a) , $[a, a)$, $[b, a)$, (b, a) , $(b, a]$ 或 $[b, a]$. 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

注 1.23 设 a, b, c 是实数. 说 b 介于 a 跟 c 之间, 就是说 $a \leq b \leq c$ 或 $c \leq b \leq a$ (简单地, 就是 $(b-a)(b-c) \leq 0$). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为“区间”. 那么, 显而易见地, 任给一个区间 I , 任取 I 的二个相异实数 a, b , 则每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元. 反过来, 若 \mathbb{R} 的子集 I 适合“任取 I 的二个相异实数, 每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元”, 则 I 是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

1.2 关系与函数

定义 1.24 设 A, B 是集. $A \times B$ 的子集称为 A 到 B 的**关系**.

定义 1.25 设 A, B 是集. 若 A 到 B 的关系 f 适合下述性质, 则说 f 是 A 到 B 的**函数** (或**映射**):

- 任取 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $(a, b) \in f$;
- 若 (a, b) 与 (a, c) 均为 f 的元, 则 $b = c$.

设 $(a, b) \in f$. 我们记此事为 $b = f[a]$, 并说 b 是 a 在函数 f 下的**像**, a 是 b 在函数 f 下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数 f :

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

“ $f: A \rightarrow B$ ”是“ f 是 A 到 B 的函数”的简写.

注 1.26 一般地, 我们写 a 在函数 f 下的像为 $f(a)$, 而不是 $f[a]$. 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

例 1.27 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$. 显然, $A \times B$ 有 6 个元. 不难看出, $A \times B$ 有 64 个子集, 故 A 到 B 的关系共有 64 个. 不过, A 到 B 的函数只有 8 个.

定义 1.28 在本书, 我们为“什么也不干”的函数起一个名字. 具体地说, 设 $A \subset B$. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}: A &\rightarrow B, \\ a &\mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中 ι 是希腊字母 iota.

我们简单地写 $\iota_{A,A}$ 为 ι_A . 有时, 若既不必指出 A , 也不必指出 B , 我们直接写 ι . 换句话说: ι (或者带下标的 $\iota_A, \iota_{A,B}$) 啥也不干, 即 $\iota[x] = x$, 其中 x 可以是任意文字.

一般也称 ι 为**恒等函数**.

定义 1.29 设 f 是 A 到 B 的函数. 称 A 为 f 的**定义域**; 称 B 为 f 的**陪域**.

定义 1.30 设 $C \subset A$. 设 $f: A \rightarrow B$. 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称 $f[A]$ 为 f 的**值域**. 显然 f 的值域是 f 的陪域的子集.

注 1.31 设 $f: A \rightarrow B$. 若 $D \subset C \subset A$, 则 $f[D] \subset f[C]$.

定义 1.32 设 f, g 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 都有 $f[a] = g[a]$, 则说 $f = g$.

可写 $f = g$ 的否定为 $f \neq g$. 具体地说, 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] \neq g[a]$, 则说 $f \neq g$.

定义 1.33 设 R 是 A 到 B 的关系. B 到 A 的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为 R 的**反关系**.

定义 1.34 设 f 是 A 到 B 的函数. 若 f 的反关系 g 是 B 到 A 的函数, 则称 g 是 f 的**反函数**. 我们写 f 的反函数为 $f^{[-1]}$.

注 1.35 不难验证, 若 g 是 f 的反函数, 则 f 也一定是 g 的反函数. 这是因为 R 的反关系的反关系是 R .

定义 1.36 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 C 到 D 的函数, 且 $f[A] \subset C$. 任取 A 的元 a . 按照函数的定义, 存在唯一的 $b \in f[A]$ 使 $(a, b) \in f$. 既然 $b \in f[A] \subset C$, 再根据函数的定义, 存在唯一的 $d \in g[C] \subset D$ 使 $(b, d) \in g$. 这样的 d 可用 $g[f[a]]$ 表示. 作 A 到 D 的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是 A 到 D 的函数. 我们称函数 $g \circ f$ 为 f 与 g 的**复合**.

注 1.37 设 $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$, 且 $f[A] \subset C$. 设 $E \subset A$. 那么 $f[E] \subset f[A] \subset C$, 故 $g[f[E]]$ 是有意义的. 我们说, $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$.

取 $d \in g[f[E]]$. 按定义, 存在 $t \in f[E]$ 使 $g[t] = d$. 对这个 t 而言, 又存在 $e \in E$ 使 $f[e] = t$. $(g \circ f)[e]$, 按定义, 等于 $g[f[e]]$, 也就是 $g[t]$, 也就是 d . 所以 $d \in (g \circ f)[E]$. 这说明 $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$.

取 $d' \in (g \circ f)[E]$. 按定义, 存在 $e' \in E$ 使 $(g \circ f)[e'] = d'$. 所以 $t' = f[e'] \in f[E]$. 那么 $g[t'] = d'$. 所以 $d' \in g[f[E]]$. 这说明 $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$.

既然 $g[f[E]]$ 跟 $(g \circ f)[E]$ 相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了 $a \in A$ 时 $(g \circ f)[a]$ 就是 $g[f[a]]$, 可我们并没有**定义** $(g \circ f)[E]$ 是 $g[f[E]]$. 大算学家 John von Neumann 说过: “Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.” 所以, 习惯就好了.

注 1.38 设 $f: A \rightarrow B$. 那么 $f \circ \iota_A = f$, 且 $\iota_B \circ f = f$.

注 1.39 一般地, $g \circ f \neq f \circ g$. 一方面, $g \circ f$ 有定义时, $f \circ g$ 可能无定义; 另一方面, 即使 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 都有定义, 二者也不一定相等.

定理 1.40 函数的复合是**结合的**. 具体地说, 设 $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$, $h: E \rightarrow F$, 且 $f[A] \subset C$, $g[C] \subset E$. 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $h \circ g \circ f$.

证 $q = g \circ f$ 是 A 到 D 的函数, 且 $p = h \circ g$ 是 C 到 E 的函数. 因 $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$, 故 $h \circ q = h \circ (g \circ f)$ 是 A 到 F 的函数; 因 $f[A] \subset C$, 故 $p \circ f = (h \circ g) \circ f$ 也是 A 到 F 的函数. 任取 $a \in A$. 则

$$(h \circ (g \circ f))[a] = h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],$$

$$((h \circ g) \circ f)[a] = (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]]. \quad \text{证毕.}$$

定义 1.41 设 f 是 A 到 B 的函数.

- 若任取 A 的相异二元 a 与 a' , 都有 $f[a] \neq f[a']$, 则称 f 是**单函数**.
- 若对任意 $b \in B$, 都存在 $a \in A$ 使 $f[a] = b$, 则称 f 是**满函数**.

例 1.42 设 $A \subset B$. A 到 B 的函数 $\iota_{A,B}$ 总是单函数. 不过, 若 $A \neq B$, 则 $\iota_{A,B}$ 不是满函数.

注 1.43 设 $B \subset C$. 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 A 到 C 的函数, 且对任意 $a \in A$, $f[a] = g[a]$. 那么, f 是单函数的一个必要与充分条件是: g 是单函数. 若 f 不是满函数, 则 g 也不是.

若 f 是满函数, 则 g 也是满函数的一个必要与充分条件是: $B = C$.

定理 1.44 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 B 到 A 的函数 g 适合如下性质:

- 对任意 $a \in A$, $g[f[a]] = a$; 也就是说, $g \circ f = \iota_A$.
- 对任意 $b \in B$, $f[g[b]] = b$; 也就是说, $f \circ g = \iota_B$.

则:

- 至多有一个这样的 g ;
- g 是 f 的反函数.

证 至多只有一个这样的 g 是显然的. 具体地, 若 $g': B \rightarrow A$ 适合 $g' \circ f = \iota_A$, 且 $f \circ g' = \iota_B$, 则

$$g = g \circ \iota_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \iota_A \circ g' = g'.$$

下证 g 是 f 的反函数. 事实上, 若 h 是 f 的反函数, 则不难验证 h 适合上述二条性质. 所以 $g = h$. 证毕.

定理 1.45 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$ 的反函数分别是 $f^{[-1]}: B \rightarrow A$ 与 $g^{[-1]}: C \rightarrow B$. 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

证 记 $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}: C \rightarrow A$; 记 $p = g \circ f$. 不难用结合律验证 $q \circ p = \mathbf{1}_A$, 且 $p \circ q = \mathbf{1}_B$. 这里以 $q \circ p$ 为例:

$$\begin{aligned} q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\ &= (q \circ g) \circ f \\ &= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ \mathbf{1}_B) \circ f \\ &= f^{[-1]} \circ f \\ &= \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

证毕.

注 1.46 不难看出, 函数 f 有反函数的一个必要与充分条件是: f 是单函数, 且 f 是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

定义 1.47 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 $C \subset A$. 作 C 到 B 的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知, f_C 是 C 到 B 的函数. 我们说, f_C 是 f 在 C 上的**限制**.

1.3 函数的演算

注 本节的语言或许比较混乱.

本节讨论 \mathbb{R} 的子集到 \mathbb{R} 的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是“几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

定义 1.48 设 $f: A \rightarrow B$, $B \subset \mathbb{R}$ 且 $0 \in B$. 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] = 0$, 就说 a 是 f 的一个根.

现在我们介绍一些“基本初等函数”.

定义 1.49 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \text{id}: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \{c\}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$$

其中 c 是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp: \quad \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty), \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin: \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 余弦函数:

$$\begin{aligned} \cos: \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}; \end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan: \{x \mid \cos[x] \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln: (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right], \\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 s 指 \sin 在 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$ 上的限制 $\sin_I: I \rightarrow [-1, 1]$, 2π 是 \cos 的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan: \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right), \\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 t 指 \tan 在 $J = (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 上的限制 $\tan_J: J \rightarrow \mathbb{R}$;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\text{abs}: \mathbb{R} &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\text{sqrt}: [0, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), \\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

注 1.50 在本书, 2π 是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

例 1.51 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]. \end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达 f 的定义. 具体地,

$$f = \exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A.$$

这里, \ln_A 自然是 \ln 在 A 上的限制.

不过, 复合并不够用.

例 1.52 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达 g 的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写 $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$ 跟 $\sin[x]$ 为 $\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A$ 与 \sin_A ; 可是, 我们要怎么写 x^3 ? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

定义 1.53 设 A, B, C 是 \mathbb{R} 的子集. 设 $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$. 设 $*$ 是文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$\begin{aligned} f * g: A &\rightarrow D, \\ x &\mapsto f[x] * g[x], \end{aligned}$$

其中陪域 $D \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定. 一般地, 若 $*$ 是乘号 \cdot , 则可被省略. 可写 $0_A - f$ 为 $-f$; 这里 0_A 当然是常函数 0 在 A 上的限制.

若对任意 $x \in A$, 都有 $f[x] \neq 0$, 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}: A &\rightarrow E, \\ x &\mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $E \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

若对任意 $x \in A$, $f[x]^{g[x]}$ 有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g: A &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $F \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

例 1.54 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写 x^3 为 $(\iota_A)^3_A$. 所以

$$g = (\exp \circ \text{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^3_A;$$

这里, 我们取陪域为 \mathbb{R} .

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的 g 还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取 $B = (0, 1)$. 令

$$\begin{aligned} h: B &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \text{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与“对应法则”. 不过, 您不妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如“函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \ln(1-x)$ ”这样的文字时, 我们其实视这个 f 的定义域为全体使 $f(x)$ 有意义的一切实数作成的集 (也就是 $[-1, 1)$); 当我们看到形如“函数 $g(x) = 1 - x$ ($x \in$

$[-1, 0]$ ”的文字时, 我们认为 g 的定义域为已经提到的集 $[-1, 0]$. f 跟 g 的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, “万能的” \mathbb{R}).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取 \mathbb{R} .

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的 h 为

$$h = \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 - \iota} + \text{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

定义 1.55 我们称定义域为 A 的函数为 (定义在) A 上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

定义 1.56 若 $B \subset A$, f 是 A 上的函数, 我们说 f 在 B 上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} f + g &= g + f, & fg &= gf, \\ (f + g) + h &= f + (g + h), & (fg)h &= f(gh), \\ f(g + h) &= fg + fh, & (f + g)h &= fh + gh. \end{aligned}$$

这里 f, g, h 都是 A 上的函数.

设函数 ℓ 的值域是 A 的子集. 记 $f / g = \frac{f}{g}$, $f \wedge g = f^g$. 设 $*$ 是五文字 $+$, $-$, \cdot , $/$, \wedge 的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned} ((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]] \\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x]. \end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于 $+$ 与 \cdot 的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中 useful, 故我建议您好好看看它.

例 1.57 我们知道, 对任意实数 x , 都有 $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$. 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

例 1.58 我们可写“二倍角公式”为

$$\begin{aligned}\sin \circ 2\mathfrak{t} &= 2 \cos \sin, \\ \cos \circ 2\mathfrak{t} &= \cos^2 - \sin^2 \\ &= 2 \cos^2 - 1 = 1 - 2 \sin^2 \\ &= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\ \tan \circ 2\mathfrak{t} &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2\mathfrak{t} \\ &= \frac{2 \cos \sin}{\cos^2 - \sin^2} \\ &= \frac{2 \tan}{1 - \tan^2} \\ &= \frac{2\mathfrak{t}}{1 - \mathfrak{t}^2} \circ \tan.\end{aligned}$$

例 1.59 值得注意的是, $f(g + h)$ 并不是 $f \circ (g + h)$:

$$\begin{aligned}2 \cos (\cos + \sin) &= 2 \cos^2 + 2 \cos \sin \\ &= (\cos + \sin - 1) \circ 2\mathfrak{t} \\ &= (\cos + \sin) \circ 2\mathfrak{t} - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(\mathfrak{t} - \frac{2\pi}{8}\right) \circ 2\mathfrak{t} - 1 \\ &= \sqrt{2} \cos \circ \left(2\mathfrak{t} - \frac{2\pi}{8}\right) - 1.\end{aligned}$$

例 1.60 值得注意的是, 本书的 \sin^{-1} 不是 \arcsin , \tan^{-1} 也不是 \arctan . 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\ &= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\ &= \frac{1 - \cos}{\sin}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin^2}{2 \cos \sin} \circ \frac{1}{2} \\
&= \tan \circ \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 1.61 我们看一些关于 \arcsin 跟 \arctan 的等式. 在本例, 我们约定, \sin, \tan 分别表示 $\sin_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}$ 与 $\tan_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}$. 这样,

$$\sin \circ \arcsin = \mathfrak{t}_{[-1, 1]},$$

$$\tan \circ \arctan = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}.$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$\begin{aligned}
\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\mathfrak{t}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]} \circ \arcsin) \\
&= (\cos \circ \mathfrak{t}_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}) \circ \arcsin \\
&= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\
&= (\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\
&= \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2).
\end{aligned}$$

这里的 \mathfrak{t} 自然是 $\mathfrak{t}_{[-1, 1]}$.

类似地,

$$\begin{aligned}
\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\mathfrak{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)} \circ \arctan) \\
&= (\cos \circ \mathfrak{t}_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}) \circ \arctan \\
&= \left(\text{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2} \right) \circ \arctan \\
&= \left(\text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \circ \tan \right) \circ \arctan \\
&= \left(\text{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos \tan) \circ \arctan = \frac{\mathfrak{t}}{\text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{\mathfrak{t}}{\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2)}.
\end{aligned}$$

注 1.62 或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号: $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$\begin{aligned}\cos[\arcsin] &= \text{sqrt}[1 - \iota^2], \\ \cos[\arctan] &= \frac{1}{\text{sqrt}[1 + \iota^2]}, \\ \sin[\arctan] &= \frac{\iota}{\text{sqrt}[1 + \iota^2]}, \\ \tan[\arcsin] &= \frac{\iota}{\text{sqrt}[1 - \iota^2]}.\end{aligned}$$

虽然我已经用 $f[a]$ 表示 a 在 f 下的像了, 我自然地也用 $f[C]$ 表示 C 的每个元在 f 下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用 $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.

第二章 连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础.
若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是 \mathbb{R} 的子集.

2.1 连续的定义

定义 2.1 设 $x \in \mathbb{R}$. 设 δ 为正数. 则 $N[x; \delta] = (x - \delta, x + \delta)$ 是 x 的一个邻域. 称 $N[x; \delta] \setminus \{x\} = (x - \delta, x) \cup (x, x + \delta)$ 是 x 的一个去心邻域.

不难看出, $N[x; \delta]$ 就是 $\{t \mid |t - x| < \delta\}$, 而 $N[x; \delta] \setminus \{x\}$ 就是 $\{t \mid 0 < |t - x| < \delta\}$.

下面的不等式十分有用.

定理 2.2 对任意实数 x, y , 有

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数 a, b, c ,

$$|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

证 注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0. \quad \text{证毕.}$$

定义 2.3 设 f 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 若任给正数 ϵ , 存在正数 δ 使 $f[A \cap N[x; \delta]] \subset N[f(x); \epsilon]$, 则说 f 于 x 连续.

不难看出, f 于 x 连续的一个必要与充分条件是: 任给正数 ε , 存在正数 δ 使 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in A$ 时, 必有 $|f[t] - f[x]| < \varepsilon$.

定理 2.4 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 则 $f * g$ 也于 x 连续.

证 以 $*$ 为 $+$ 或 $-$ 时为例. 任取 $\varepsilon > 0$. 这样, 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ_1 使

$$|t - x| < \delta_1 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 g 于 x 连续, 故存在正数 δ_2 使

$$|t - x| < \delta_2 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1, δ_2 的较小者. 这样, $|t - x| < \delta$ 且 $t \in A$ 时,

$$\begin{aligned} |(f * g)[t] - (f * g)[x]| &= |(f[t] * g[t]) - (f[x] * g[x])| \\ &= |(f[t] - f[x]) * (g[t] - g[x])| \\ &\leq |f[t] - f[x]| + |g[t] - g[x]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$*$ 为 \cdot 时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned} (fg)[t] - (fg)[x] &= f[t]g[t] - f[x]g[x] \\ &= (f[t] - f[x] + f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x] + g[t]) \\ &= (f[t] - f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x]). \end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使 $(f[t] - f[x])g[t]$ 跟 $f[x](g[t] - g[x])$ 的绝对值都不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ 就好. 首先, 存在正数 δ_3 使

$$|t - x| < \delta_3 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |f[x]|)}.$$

其次, 存在正数 δ_4 使

$$|t - x| < \delta_4 \text{ 且 } t \in A \implies |g[t] - g[x]| < 1.$$

由此可知, $|t - x| < \delta_4$ 且 $t \in A$ 时,

$$|g[t]| = |g[x] + (g[t] - g[x])| < |g[x]| + 1.$$

最后, 存在正数 δ_5 使

$$|t - x| < \delta_5 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |g[x]|)}.$$

取 δ 为 $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ 的最小者. 这样, $|t - x| < \delta$ 且 $t \in A$ 时,

$$\begin{aligned} & |(fg)[t] - (fg)[x]| \\ &= |(f[t] - f[x])g[t] + f[x](g[t] - g[x])| \\ &\leq |f[t] - f[x]| \cdot |g[t]| + |f[x]| \cdot |g[t] - g[x]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |g[x]|)} \cdot (|g[x]| + 1) + |f[x]| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |f[x]|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

定理 2.5 设 f 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 设 f 于 x 连续. 若 $f[x] \neq 0$, 则 f^{-1} 于 x 连续.

证 任取 $\varepsilon > 0$. 注意到

$$f^{-1}[t] - f^{-1}[x] = -\frac{f[t] - f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明 $|f[t]f[x]|$ 比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然 $f[x] \neq 0$, 那么 $|f[x]|$ 当然是正数. 所以, 存在正数 δ_1 使

$$|t - x| < \delta_1 \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leq |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, $|t - x| < \delta_1$ 且 $t \in A$ 时,

$$|f[t]f[x]| > \frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使 $|f[t] - f[x]| < \frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$ 即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

注 2.6 一般地, 设 f 是 A 上的函数, $x \in A$, 且 f 于 x 连续. 若 $f[x] \neq 0$, 则存在 x 的邻域 $N[x; \delta]$ 使 $t \in A \cap N[x; \delta]$ 时必有

$$\frac{1}{2} < \frac{f[t]}{f[x]} < \frac{3}{2}.$$

取 $\varepsilon = |f[x]|/2$; 然后,

$$\left| \frac{f[t]}{f[x]} - 1 \right| = \frac{|f[t] - f[x]|}{|f[x]|} < \frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到 $|a - b| < c$ 相当于 $a - c < b < a + c$.

定理 2.7 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $f[x] \neq 0$. 则 g/f 也于 x 连续.

证 注意到 $g/f = g \cdot f^{-1}$. 证毕.

定理 2.8 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$. 若 f 于 x 连续, 且 g 于 $f[x]$ 连续, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 于 x 连续.

证 任取正数 ε . 那么, 存在正数 δ' 使

$$|v - f[x]| < \delta' \text{ 且 } v \in B \implies |g[v] - g[f[x]]| < \varepsilon.$$

也存在正数 δ 使

$$|t - x| < \delta \text{ 且 } t \in A \implies |f[t] - f[x]| < \delta'.$$

显然 $f[t] \in B$. 所以, $|t - x| < \delta$ 且 $t \in A$ 时,

$$|(g \circ f)[t] - (g \circ f)[x]| = |g[f[t]] - g[f[x]]| < \varepsilon. \quad \text{证毕.}$$

2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

定义 2.9 设 f 是 A 上的函数. 若 f 于 A 的每一点都连续, 则 f 是 (A 上的) **连续函数**.

注 2.10 显然, 若 $B \subset A$, 那么 f 在 B 上的限制 f_B 也是连续函数.

利用上节的结论, 我们下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我不证了.

定理 2.11 设 f, g 都是 A 上的连续函数. 则:

- (1) $f * g$ 是连续函数, 这里 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个.
- (2) 若 f 不取零值 (也就是说, f 无根), 则 g/f 是连续函数.

定理 2.12 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 都是连续函数. 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 也是连续函数.

例 2.13 常函数 $c: \mathbb{R} \rightarrow \{c\}$ 是连续函数.

任取一点 x . 注意到, 对任意非空集 $T \subset \mathbb{R}, c[T] = \{c\}$. 所以, 任取正数 ε , 对 x 的任意邻域 $N[x; \delta]$, 都有 $c[N[x; \delta]] = \{c\} \subset N[c; \varepsilon] = N[c[x]; \varepsilon]$.

例 2.14 $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数.

任取一点 x . 注意到, 对任意集 $T \subset \mathbb{R}, \iota[T] = T$. 所以, 任取正数 ε , 取 x 的 ε 邻域 $N[x; \varepsilon]$, 即得 $\iota[N[x; \varepsilon]] = N[x; \varepsilon] = N[\iota[x]; \varepsilon] \subset N[\iota[x]; \varepsilon]$.

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

定理 2.15 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1 \iota + \cdots + b_n \iota^n}{a_0 + a_1 \iota + \cdots + a_m \iota^m}$$

(其中 m, n 为非负整数, 且 a_0, a_1, \dots, a_m 是不全为零的实数, b_0, b_1, \dots, b_n 是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

定义 2.16 设 f 是 A 上的函数. 若任取 A 的相异二元 x, y , 都有 $(x - y)(f[x] - f[y]) \geq 0$, 则说 f **增** (也说 f 是**增函数**); 若任取 A 的相异二元 x, y , 都有 $(x - y)(f[x] - f[y]) > 0$, 则说 f **严增** (也说 f 是**严增函数**).

若 $-f$ 增, 则 f **减** (也说 f 是**减函数**); 若 $-f$ 严增, 则 f **严减** (也说 f 是**严减函数**).

若 f 增或 f 减, 则 f **单调** (也说 f 是**单调函数**); 若 f 严增或 f 严减, 则 f **严单调** (也说 f 是**严单调函数**).

简单地, 说 f 增 (严增), 就是说对任意适合 $x \in A, y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y , 必有 $f[x] \leq f[y]$ ($f[x] < f[y]$); 说 f 减 (严减), 就是说对任意适合 $x \in A, y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y , 必有 $f[x] \geq f[y]$ ($f[x] > f[y]$).

例 2.17 设 a 为非零实数, b 为实数. 则 $ax + b$ 是 \mathbb{R} 上的严单调函数. 任取二个相异实数 x, y , 则

$$\begin{aligned} & (x - y)((ax + b) - (ay + b)) \\ &= (x - y)(ax + b - ay - b) \\ &= a(x - y)^2. \end{aligned}$$

由此可知, $a > 0$ 时 $ax + b$ 严增, 而 $a < 0$ 时 $ax + b$ 严减.

可以验证, $(ax)^{[-1]} = \frac{1}{a}x$, 且 $(x + b)^{[-1]} = x - b$. 所以

$$\begin{aligned} (ax + b)^{[-1]} &= ((x + b) \circ (ax))^{[-1]} \\ &= (ax)^{[-1]} \circ (x + b)^{[-1]} \\ &= \frac{1}{a}x \circ (x - b) \\ &= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

不难看出, $(ax + b)^{[-1]}$ 跟 $ax + b$ 同严增 (或严减).

定理 2.18 设 f 是 A 上的严单调函数. 则 f 是单函数.

证 任取 A 的相异二元 x, y . 则

$$f[x] - f[y] = \frac{(x - y)(f[x] - f[y])}{x - y} \neq 0. \quad \text{证毕.}$$

我们知道, 若 $f: A \rightarrow B$ 是单函数, 且 $f[A] = B$, 则 f 有反函数 $f^{[-1]}: B \rightarrow A$. 特别地, 适当选取陪域后, 每个严单调函数都有反函数.

定理 2.19 设 $f: A \rightarrow B$ 是满的严增 (严减) 函数. 则 $f^{[-1]}: B \rightarrow A$ 也是满的严增 (严减) 函数.

证 依假定, f 是双函数, 故有反函数 $f^{[-1]}$, 且 $f^{[-1]}$ 当然是既满亦单的. 无妨设 f 严增; f 严减时, 您可类似地论证 $f^{[-1]}$ 亦严减.

下设 f 严增. 任取 B 的相异二元 x', y' . 令 $x = f^{[-1]}[x']$, $y = f^{[-1]}[y']$. 易见 $x \neq y$, 且 $x' = f[x]$, $y' = f[y]$. 因 f 严增, 故

$$(f[x] - f[y])(x - y) = (x - y)(f[x] - f[y]) > 0.$$

从而

$$\begin{aligned} & (x' - y')(f^{[-1]}[x'] - f^{[-1]}[y']) \\ &= (f[x] - f[y])(x - y) > 0. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

下面的结论十分重要.

定理 2.20 设 I 为区间. 设 $f: I \rightarrow J$ 是满的严单调函数. 则 f 是连续函数的一个必要与充分条件是: J 是区间.

证 无妨设 f 严增.

先看必要性. 设 f 连续. 用反证法. 若 $J = f[I]$ 不是区间, 则存在 J 的相异二元 x', y' 使 $x' < y'$ 且 $J \cap (x', y')$ 为空集. 设 $f[x] = x'$; 设 $f[y] = y'$. 显然 $x < y$. 任取 I 的大于 x 的元 u . 因为 f 严增, 故 $f[u] > f[x] = x'$; 因为 $f[u] \notin (x', y')$, 故 $f[u] \geq y'$. 所以, $f[u] - f[x] \geq y' - x'$. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ 使 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < y' - x'.$$

因为 I 是区间, 且 $x, y \in I$, 故 $[x, y] \subset I$; 特别地, 这说明, 存在适合条件 $0 < v - x < \delta$ 且 $v \in I$ 的数 v . 故

$$y' - x' > |f[v] - f[x]| = f[v] - f[x] \geq y' - x'.$$

这是矛盾.

再看充分性. 设 J 是区间. 任取 $x \in I$. 我们证明 f 于 x 连续.

先设 x 是 I 的左端点. 那么, 对每个 $w > x, w \in I$, 都有 $f[w] > f[x]$. 于是, $f[x]$ 也是 J 的左端点. 任取正数 ε , 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] + e \in J$. 令 $q = f^{[-1]}[f[x] + e]$, 则必有 $x < q$. 从而, 当 $x \leq t < q$ 时, $f[x] \leq f[t] < f[x] + e$. 这么看来, 存在正数 $\delta = q - x$, 当 $t \in N[x; \delta] \cap I = [x, q)$ 时, 必有

$$|f[t] - f[x]| = f[t] - f[x] < e < \varepsilon.$$

类似地, 当 x 是 I 的右端点时, 您也可用完全类似的套路论证 f 于 x 连续.

现设 x 既不是 I 的左端点, 也不是 I 的右端点. 这样, 存在正数 d 使 $x - d, x + d \in I$. 所以 $f[x - d], f[x + d] \in J$, 且 $f[x - d] < f[x] < f[x + d]$. 故 $f[x]$ 也不是 J 的端点. 所以, 任取正数 ε , 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] - e, f[x] + e \in J$. 令 $p = f^{[-1]}[f[x] - e], q = f^{[-1]}[f[x] + e]$. 那么 $p < x < q$. 取 δ 为 $x - p$ 与 $q - x$ 的较小者. 则 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$p \leq x - \delta < t < x + \delta \leq q,$$

从而

$$f[x] - e = f[p] \leq f[x - \delta] < f[t] < f[x + \delta] \leq f[q] = f[x] + e,$$

即

$$|f[t] - f[x]| \leq e < \varepsilon. \quad \text{证毕.}$$

由此, 我们可以得到如下关于反函数的定理.

定理 2.21 设 I 为区间. 设 $f: I \rightarrow J$ 是满的严单调函数. 设 f 是连续函数. 则 $f^{[-1]}: J \rightarrow I$ 也是连续函数.

证 设 $f: I \rightarrow J$ 是满的严单调函数. 因为 I 是区间, 且 f 是连续函数, 故 $J = f[I]$ 也是区间. 因为 $f^{[-1]}$ 也是满的严单调函数, 且 $I = f^{[-1]}[J]$ 是区间, 故 $f^{[-1]}$ 是连续函数. 证毕.

最后, 我不加论证地给出一些常见的连续函数. 您可以在任意一本分析教材里找到论证.

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 是满的连续函数. 记 \sin 在 $[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 上的限制为 s . 则 s 是满的严增函数. 故其反函数 $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- $\tan: \{x \mid \cos[x] \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ 是满的连续函数. 记 \tan 在 $(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 上的限制为 t . 则 t 是满的严增函数. 故其反函数 $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- 设 n 是正偶数. 则 $\iota^n: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[2]{x}$ 为 \sqrt{x} ; 一般写 $\iota^{1/2}$ 为 sqrt .
- 设 n 是正奇数. 则 $\iota^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[1]{x}$ 为 x ; 一般写 $\iota^{1/1}$ 为 ι .
- $\text{abs}: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ 是连续函数.

2.3 连续函数的积分

我简单地介绍一下连续函数的积分.

传统地, 一本算学分析 (或高等算学) 教材会先讲导数 (微分学), 再讲如何反求导 (不定积分), 然后才是积分 (定积分). 不过, 为论证连续函数一定有“反导”, 就需要 (连续函数的) 积分的知识. 所以, 逻辑地, 我选择先说连续函数的积分论. 这里, 我就不加证明地列举本书用到的关于积分的结论. 如果您对这些结论的论证感兴趣, 您可以参考算学家梅加强的《数学分析》.

定理 2.22 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 作数列

$$A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$n \mapsto \begin{cases} 0, & n = 0; \\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right], & n \geq 1. \end{cases}$$

则存在唯一的实数 α , 使对任意正数 ε , 存在非负整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|A[n] - \alpha| < \varepsilon$.

我们称 α 为 f 在 $[a, b]$ 上的**积分**, 并记 α 为

$$\int_a^b f.$$

注 2.23 传统地, 我们记上面的 α 为

$$\int_a^b f(x) dx.$$

我并没有说老记号不好; 只不过, 我会展现一种不需要“变量 x ”的积分法(如何无变量地计算积分), 故我在此使用新记号. 本注的目的是告诉您传统的记号跟本书的记号的区别.

例 2.24 设 k 为常函数. 则不难看出,

$$\int_a^b k = (b - a)k.$$

现在, 我们看积分的一些基本性质. 不过, 我们先作一个约定.

定义 2.25 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 规定

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

定理 2.26 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b kf &= k \int_a^b f. \end{aligned}$$

定义 2.27 设 $*$ 是文字 $>, <, \geq, \leq$ 的任意一个. 设 A 是 \mathbb{R} 的子集. 设 f, g 都是 A 上的函数. 若对任意 $t \in A$, 都有 $f[t] * g[t]$, 则我们写 $f * g$.

注 2.28 注意, 我们没说 $*$ 可以是文字 \neq ; 这是因为我们已经规定, $f \neq g$ 是 $f = g$ 的**否定**.

定理 2.29 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 设 $f \leq g$. 则

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

定义 2.30 我们可简单地写 $\text{abs} \circ f$ 为 $|f|$; 类似地, 我们也可简单地写 $\text{sqrt} \circ f$ 为 \sqrt{f} .

例 2.31 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 不难验证 $-|f| \leq f \leq |f|$. 故

$$\int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

也就是

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

不难看出, 对任意 $a, b \in I$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

定理 2.32 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

下面的结论很重要; 之后会用到.

定理 2.33 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $x \in I$. 作函数

$$F: I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \frac{1}{t-x} \int_x^t f, & t \neq x. \end{cases}$$

则 F 于 x 连续.

证 任取正数 ε . 我们的目标是, 找到正数 δ , 使 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时, $|F[t] - F[x]| < \varepsilon$. 这相当于: 找到正数 δ , 使 $0 < |t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$\left| \frac{1}{t-x} \int_x^t f - f[x] \right| < \varepsilon.$$

这不难. 首先, 注意到

$$f[x](t-x) = \int_x^t f[x],$$

故

$$\frac{1}{t-x} \int_x^t f - f[x] = \frac{1}{t-x} \int_x^t (f - f[x]).$$

取低于 ε 的正数 e . 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 d , 使 $|t - x| < d$ 且 $t \in I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < e.$$

所以

$$\left| \int_x^t (f - f[x]) \right| \leq \left| \int_x^t |f - f[x]| \right| \leq \left| \int_x^t e \right| = |t - x|e.$$

也就是说, $0 < |t - x| < d$ 且 $t \in I$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t-x} \int_x^t f - f[x] \right| &= \frac{1}{|t-x|} \left| \int_x^t (f - f[x]) \right| \\ &\leq \frac{1}{|t-x|} \cdot |t-x|e \\ &= e < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

第三章 导数

本章简单地提及导数及其运算.

若无特别说明, 本章的函数的定义域都是区间.

3.1 背景

定义 3.1 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 若存在 x 的邻域 N , 与 $N \cap I$ 上的函数 F , 使

$$f = f[x] + (t - x)F,$$

且 F 于 x 连续, 则说 f 于 x **可导**, 并称 $F[x]$ 为 f 于 x 的**导数**.

注 3.2 传统地, 我们用极限

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f[t] - f[x]}{t - x}$$

是否存在定义 f 是否于 x 可导; 极限存在时, 它的值就是 f 于 x 的导数. 可以证明, 这二个定义是等价的; 不过, 既然我花了不少篇幅讨论连续函数, 我将呈现一种不一样的微分学 (求导学). 我采取的定义来自希腊算学家 Constantin Carathéodory. 假如您对此事感兴趣, 您可以阅读美国算学家 Stephen Kuhn 的名为 *The Derivative á la Carathéodory* 的文章 (不过, 我想说, 标题的 *á la* 应该是 *à la*).

我们看导数的一些基本性质. 在定义里, 若 f 于 x 可导, 则 f 于 x 的导数似乎不止一个. 不过, 我们即将说明, 导数是唯一的.

定理 3.3 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设存在 x 的邻域 N_1 , 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F_1 , 使

$$f = f[x] + (t - x)F_1,$$

且 F_1 于 x 连续. 设存在 x 的邻域 N_2 , 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 F_2 , 使

$$f = f[x] + (t - x)F_2,$$

且 F_2 于 x 连续. 则 $F_1[x] = F_2[x]$. 也就是说, f 于 x 的导数, 若存在, 则唯一.

证 用反证法. 设 $F_1[x] \neq F_2[x]$, 则 $\varepsilon = |F_1[x] - F_2[x]|$ 是正数. 我们要由此推出矛盾.

因为 $N_1 \cap I$ 是区间, 且 F_1 于 x 连续, 故存在正数 δ_1 , 使 $0 < |t - x| < \delta_1$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_1[t] - F_1[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $N_2 \cap I$ 是区间, 且 F_2 于 x 连续, 故存在正数 δ_2 , 使 $0 < |t - x| < \delta_2$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_2[t] - F_2[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1 与 δ_2 中的较小者. 则 $0 < |t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |F_1[x] - F_2[x]| \\ &= \left| \left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x] \right) - \left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x] \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x] \right| + \left| \frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x] \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这是矛盾.

证毕.

例 3.4 设 a, b 为实数. 则 $a_1 + b$ 于其定义域的任意一点都可导. 具体地,

$$a_1 + b = (a_1 + b)[x] + (1 - x)a,$$

而 a 是连续函数. 并且, $a_1 + b$ 于任意一点的导数都是 a .

定理 3.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导. 则 f 于 x 连续.

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N , 与 $N \cap I$ 上的函数 F , 使

$$f = f[x] + (1 - x)F,$$

且 F 于 x 连续.

因为 $1 - x$ 于 x 连续, 故 $(1 - x)F$ 于 x 连续; 因为 $f[x]$ 于 x 连续, 故 f 于 x 连续. 证毕.

定理 3.6 设 I 为区间. 设 f, g 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f, g 都于 x 可导. 则:

- $f + g$ 于 x 可导, 且

$$(f + g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) + (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 设 k 为常数. 则 kf 于 x 可导, 且

$$(kf \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = k \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- fg 于 x 可导, 且

$$(fg \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot g[x] + f[x] \cdot (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 若 $f[x] \neq 0$, 则 g/f 于 x 可导, 且

$$(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}.$$

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1 , 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F , 使

$$f = f[x] + (1 - x)F,$$

且 F 于 x 连续. 类似地, 因为 g 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_2 , 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 G , 使

$$g = g[x] + (1 - x)G,$$

且 G 于 x 连续. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域. 这里, 为方便, 不妨滥用记号, 视 F, G 分别是 F, G 在 $N \cap I$ 上的限制. 此外, 注意到, f, g 于 x 的导数分别为 $F[x], G[x]$.

因为

$$\begin{aligned} f + g &= (f[x] + (1-x)F) + (g[x] + (1-x)G) \\ &= (f[x] + g[x]) + (1-x)(F + G) \\ &= (f + g)[x] + (1-x)(F + G), \end{aligned}$$

且 $F + G$ 于 x 连续, 故 $f + g$ 于 x 可导, 且导数为 $(F + G)[x] = F[x] + G[x]$.

因为

$$\begin{aligned} kf &= k(f[x] + (1-x)F) \\ &= kf[x] + k(1-x)F \\ &= (kf)[x] + (1-x)(kF), \end{aligned}$$

且 kF 于 x 连续, 故 kf 于 x 可导, 且导数为 $(kF)[x] = k \cdot F[x]$.

因为

$$\begin{aligned} fg &= (f[x] + (1-x)F)(g[x] + (1-x)G) \\ &= f[x]g[x] + f[x](1-x)G + (1-x)Fg[x] + (1-x)F(1-x)G \\ &= (fg)[x] + (F \cdot g[x] + f[x] \cdot G + FG(1-x))(1-x), \end{aligned}$$

且 $h = F \cdot g[x] + f[x] \cdot G + FG(1-x)$ 于 x 连续, 故 fg 于 x 可导, 且导数为 $h[x] = F[x]g[x] + f[x]G[x]$.

最后一个等式需要一点儿技巧. 首先, 既然 $f[x] \neq 0$, 且 f 于 x 连续, 故存在 x 的邻域 M , 使 $t \in M \cap I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2},$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leq |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, 在 M 上, f 不取零值. 从而, 在 $(M \cap N) \cap I$ 上,

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f^{-1}[x] + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f[x]} \right) \\ &= f^{-1}[x] - \frac{f - f[x]}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] - \frac{(1-x)F}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] + (1-x) \cdot \left(-\frac{F}{f[x]f} \right). \end{aligned}$$

因为 $-F/(f[x]f)$ 于 x 连续, 故 f^{-1} 于 x 可导, 且导数为 $-F[x]/(f^2[x])$.

注意到 $g/f = g \cdot f^{-1}$, 故 g/f 于 x 可导, 且

$$\begin{aligned} & (g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (gf^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f^{-1}[x] + g[x] \cdot (f^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot \frac{1}{f[x]} + g[x] \cdot \left(-\frac{(f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f[x]f[x]} \right) \\ &= \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

例 3.7 我们知道, $a1 + b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 于 \mathbb{R} 的任意一点 x 都可导, 且导数为 a . 特别地, 常函数于 x 的导数为 0, 而 1 于 x 的导数为 1. 利用算学归纳法, 可算出, 当 n 为正整数时, $1^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 于 \mathbb{R} 的任意一点 x 都可导, 且导数为 nx^{n-1} . 由此, 多项式函数于 \mathbb{R} 的任意一点 x 都可导. 进而, 有理函数于有定义的点可导. 顺便一提, 即使 n 为负整数, 1^n 于非零的 x 的导数仍为 nx^{n-1} .

定理 3.8 (链规则) 设 I, J 为区间. 设 $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow K$. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导, 且 g 于 $f[x]$ 可导. 则 $g \circ f$ 于 x 可导, 且

$$(g \circ f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (g \text{ 于 } f[x] \text{ 的导数}) \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

证 因为 g 于 $f[x]$ 可导, 故存在 $f[x]$ 的邻域 M , 与 $M \cap J$ 上的函数 G , 使

$$g = g[f[x]] + (1 - f[x])G,$$

且 G 于 $f[x]$ 连续; 同时, $G[f[x]]$ 即为 g 于 $f[x]$ 的导数. 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1 , 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F , 使

$$f = f[x] + (1 - x)F,$$

且 F 于 x 连续; 同时, $F[x]$ 即为 f 于 x 的导数.

因为 f 亦于 x 连续, 故对 $f[x]$ 的邻域 M 来说, 必存在 x 的邻域 N_2 , 使 $f[N_2 \cap I] \subset M$; 又因为 f 的陪域为 J , 故 $f[N_2 \cap I] \subset J$. 所以, $f[N_2 \cap I] \subset M \cap J$. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域, 且 $f[N \cap I] \subset M \cap J$. 为方便, 不妨滥用记号, 视 F, f 分别是 F, f 在 $N \cap I$ 上的限制. (事实上, 本段文字只是保证复合 $G \circ f$ 有意义罢了.)

现在考察 $g \circ f$:

$$\begin{aligned} g \circ f &= g[f[x]] + (f - f[x])(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (1 - x)F(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (1 - x) \cdot (G \circ f)F. \end{aligned}$$

因为 G 于 $f[x]$ 连续, 而 f 于 x 连续, 故 $G \circ f$ 于 x 连续; 又因 F 于 x 连续, 故 $(G \circ f)F$ 于 x 连续. 所以 $g \circ f$ 于 x 可导, 且导数为 $G[f[x]] \cdot F[x]$. 证毕.

定理 3.9 设 I, J 为区间. 设 $f: I \rightarrow J$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}: J \rightarrow I$. 设 $y \in J$. 设 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导. 则 $f^{[-1]}$ 于 y 可导的一个必要与充分条件是: f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

若 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数不等于零, 则

$$(f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}) = \frac{1}{(f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数})}.$$

证 先看必要性. 既然 $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 那么 $1_I = f \circ f^{[-1]}$ 于 y 可导. 由链规则, 有

$$1 = (f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数}) \cdot (f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}).$$

从而 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

再看充分性. 因为 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 故存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_1 , 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F , 使

$$f = f[f^{[-1]}[y]] + (1 - f^{[-1]}[y])F,$$

且 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续. 依假定, f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数 $F[f^{[-1]}[y]] \neq 0$. 所以, 存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_2 , 使在 $N_2 \cap (N_1 \cap I)$ 上, F 不取零值. 取 $N = N_2 \cap N_1$, 则 N 也是 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域, 且在 $N \cap I$ 上, 不但 F 不取零值, 且

$$f = y + (1 - f^{[-1]}[y])F.$$

因为 f 严格单调, 且 I, J 都是区间, 故 $f, f^{[-1]}$ 都是连续函数. 特别地, $f^{[-1]}$ 于 y 连续. 故对 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N , 存在 y 的邻域 M , 使 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N$. 因为 $f^{[-1]}$ 的值域为 I , 故 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset I$. 也就是说, $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N \cap I$. (事实上, 这只是为保证复合 $F \circ f^{[-1]}$ 有意义.) 那么, 在 $M \cap J$ 上, 有

$$f \circ f^{[-1]} = y + (f^{[-1]} - f^{[-1]}[y])(F \circ f^{[-1]}),$$

即

$$f^{[-1]} = f^{[-1]}[y] + (1 - y) \cdot \frac{1}{F \circ f^{[-1]}}.$$

因为 $f^{[-1]}$ 于 y 连续, 而 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续, 故 $F \circ f^{[-1]}$ 于 y 连续; 因为 (在 $M \cap J$ 上) F 不取零值, 故 $1/(F \circ f^{[-1]})$ 亦于 y 连续. 所以, $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且导数为 $1/F[f^{[-1]}[y]]$. 证毕.

最后, 我给出一个十分有用的事实; 不过, 由于没有足够多的工具, 我就不论证了.

定理 3.10 指数函数、余弦函数、正弦函数于其定义域的每一点都可导. 具体地说:

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 于 \mathbb{R} 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\exp[x]$.
- $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 于 \mathbb{R} 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $-\sin[x]$,
- $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 于 \mathbb{R} 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\cos[x]$.

3.2 无变量的导数计算

这是本章的重点; 这也是本书的一个重点. 不过, 不重要地, “无变量的导数计算”的“导数”跟前面的“导数”不是一个词, 但仍有联系.

定义 3.11 设 f 是区间 I 上的函数. 若 f 于 I 的每一点都可导, 则定义函数

$$\begin{aligned} D[f]: I &\rightarrow K, \\ x &\mapsto (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}), \end{aligned}$$

其中陪域 K 可视情况而定 (除非特别说明, 我们不在意陪域). 我们称 $D[f]$ 为 f 的**导函数** (亦可简称其为 f 的**导数**).

抽象地, $D[f]$ 的 D 本身就是一个函数; 不过, 这是一个变函数为函数的函数 (有点儿绕). 有时, 在不引起误会的时候, 我们也可写 $D[f]$ 为 Df ; 毕竟, 至少在本书里, D 也只跟函数“作用”.

当然, 我又忘记了一件事: 若 f 于 I 的每一点都可导, 我们就说 f 是 I 上的**可导函数**.

曾经, 我们写 “ f 于 x 的导数是 ℓ ”; 现在, 我们总算能简便地表此事以 $D[f][x] = \ell$ 或 $Df[x] = \ell$. 乘热打铁, 我们用简单的话转述前节的结论.

定理 3.12 设 f, g 都是区间 I 上的可导函数.

- $f + g$ 也是 I 上的可导函数, 且

$$D[f + g] = Df + Dg.$$

- 设 k 为常数. 则 kf 也是 I 上的可导函数, 且

$$D[kf] = kDf.$$

- fg 也是 I 上的可导函数, 且

$$D[fg] = Df \cdot g + f \cdot Dg.$$

- 设 f 不取零值. 则 g/f 也是 I 上的可导函数, 且

$$D \frac{g}{f} = \frac{Dg \cdot f - g \cdot Df}{f^2}.$$

定理 3.13 设 I, J 为区间. 设 $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow K$ 都是可导函数. 则 $g \circ f$ 也是可导函数, 且

$$D[g \circ f] = (Dg \circ f) \cdot Df.$$

注 3.14 有时, 我们也写 $g \circ f$ 为 $g[f]$; 相应地, 也可写链规则为

$$D[g[f]] = Dg[f] \cdot Df.$$

我们约定 $Dg[f]$ 表示 $(Dg)[f]$; 这跟 $Dg \circ f$ 表示 $(Dg) \circ f$ 是一致的. 不过, 由于 $Dg[f]$ 比 $Dg \circ f$ 紧凑, 我们省去了一对圆括号.

定理 3.15 设 I, J 为区间. 设 $f: I \rightarrow J$ 严格单调, 且有反函数 $f^{[-1]}: J \rightarrow I$. 设 f 是可导函数, 且 Df 不取零值. 则 $f^{[-1]}$ 也是可导函数, 且

$$Df^{[-1]} = \frac{1}{Df \circ f^{[-1]}}.$$

定理 3.16 导数表 I:

- $Dc = 0$, 此处 c 为常函数.
- $Dt^n = n t^{n-1}$ (n 为整数).
- $D \exp = \exp$.
- $D \cos = -\sin$.
- $D \sin = \cos$.

用这四个定理, 我们可以清楚地、有条理地计算常见的函数的导(函)数. 我举一些例; 您可以拿本书的计算过程跟传统的导数计算过程比较.

例 3.17 因为 $\tan = \sin / \cos$, 故

$$\begin{aligned} D \tan &= D \frac{\sin}{\cos} \\ &= \frac{D \sin \cdot \cos - \sin \cdot D \cos}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\ &= \cos^{-2} = 1 + \tan^2. \end{aligned}$$

例 3.18 因为 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 严增, $\mathbb{R}, (0, +\infty)$ 都是区间, 且 $D \exp = \exp > 0$, 故 $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 也是可导函数, 且

$$D \ln = \frac{1}{D \exp \circ \ln} = \frac{1}{\exp \circ \ln} = \frac{1}{x}.$$

因为 $\sin: (-2\pi/4, 2\pi/4) \rightarrow (-1, 1)$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4), (-1, 1)$ 都是区间, 且 $D \sin = \cos > 0$, 故 $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$D \arcsin = \frac{1}{D \sin \circ \arcsin} = \frac{1}{\cos \circ \arcsin} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因为 $\tan: (-2\pi/4, 2\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4), \mathbb{R}$ 都是区间, 且 $D \tan = 1 + \tan^2 > 0$, 故 $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$D \arctan = \frac{1}{D \tan \circ \arctan} = \frac{1}{(1 + \tan^2) \circ \arctan} = \frac{1}{1+x^2}.$$

设 n 为正整数. 因为 $x^n: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 严增, $(0, +\infty)$ 是区间, 且 $D x^n = n \cdot x^{n-1} > 0$, 故 $x^{1/n}: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 也是可导函数, 且

$$D x^{1/n} = \frac{1}{D x^n \circ x^{1/n}} = \frac{1}{(n \cdot x^{n-1}) \circ x^{1/n}} = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$

设 m 为整数. 则 $x^{m/n} = (x^{1/n})^m = x^{1/n} \circ x^{1/n} \circ \cdots \circ x^{1/n}$. 故

$$D x^{m/n} = (D x^m \circ x^{1/n}) \cdot D x^{1/n} = ((m \cdot x^{m-1}) \circ x^{1/n}) \cdot \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.$$

也就是说, 对任意有理数 r , $D x^r = r x^{r-1}$.

例 3.19 定义符号函数:

$$\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \{1, 0, -1\},$$

$$t \mapsto \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

设 I 是某个不含 0 的区间. 故 sign (在 I 上的限制) 是常函数, 且导数为 0.

不难看出, $\text{abs} = \text{sign} \cdot x$. 所以,

$$D \text{abs} = D \text{sign} \cdot x + \text{sign} \cdot D x = \text{sign} = \frac{\text{abs}}{x}.$$

由此, 我们可计算 $\ln \circ \text{abs}$ 的导数:

$$D[\ln \circ \text{abs}] = (D \ln \circ \text{abs}) \cdot D \text{abs} = \left(\frac{1}{\text{abs}} \circ \text{abs} \right) \cdot \frac{\text{abs}}{\text{abs}} = \frac{1}{\text{abs}}.$$

我们添加上面的计算结果到导数表 I, 就得到了一张较为完善的导数表 II. 以后, 我们的导数计算十分依赖此表与导数表 I 前的三个定理.

定理 3.20 导数表 II:

- $Dc = 0$, 此处 c 为常函数.
- $D \text{t}^r = r \text{t}^{r-1}$ (r 为有理数).
- $D \exp = \exp$.
- $D \cos = -\sin$.
- $D \sin = \cos$.
- $D \tan = \cos^{-2} = 1 + \tan^2$.
- $D \ln = D[\ln \circ \text{abs}] = \text{t}^{-1}$.
- $D \arcsin = \text{sqrt}^{-1} \circ (1 - \text{t}^2)$.
- $D \arctan = 1/(1 + \text{t}^2)$.
- $D \text{abs} = \text{abs}/\text{abs} = \text{sign}$.
- $D \text{sqrt} = \text{t}^{-1} \circ (2 \text{sqrt})$.

例 3.21 设 f, g 是区间 I 上的可导函数, 且 $f > 0$. 求 $D[f^g]$.

事实上, f^g 就是 $e^{g(\ln \circ f)}$, 也就是 $\exp \circ (g(\ln \circ f)) = \exp \circ (g \ln[f])$. 所以

$$\begin{aligned} D[f^g] &= D[\exp \circ (g \ln[f])] \\ &= (D \exp \circ (g \ln[f])) \cdot D[g \ln[f]] \\ &= (\exp \circ (g \ln[f])) \cdot (Dg \cdot \ln[f] + g \cdot D[\ln[f]]) \\ &= f^g \cdot Dg \cdot \ln[f] + f^g \cdot g \cdot (D \ln \circ f) \cdot Df \\ &= f^g \ln[f] Dg + g f^{g-1} Df. \end{aligned}$$

例 3.22 设

$$\begin{aligned} f: [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow \ln \left[x^2 e^x + \sqrt{1+x^3} \right]. \end{aligned}$$

求 Df .

本问题定义 f 时, 使用了带变量的记号. 为了方便地计算 f 的导数, 我们不妨先无变量地表达 f :

$$\begin{aligned} g &= t^2 \cdot \exp + \text{sqrt} \circ (1 + t^3), \\ f &= \ln \circ g. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} Df &= D[\ln \circ g] \\ &= (D \ln \circ g) \cdot Dg \\ &= g^{-1} \cdot D[t^2 \cdot \exp] + g^{-1} \cdot D[\text{sqrt} \circ (1 + t^3)] \\ &= g^{-1} \cdot (D t^2 \cdot \exp + t^2 \cdot D \exp) \\ &\quad + g^{-1} \cdot ((D \text{sqrt} \circ (1 + t^3)) \cdot D[1 + t^3]) \\ &= g^{-1} \cdot (2t + t^2) \cdot \exp + g^{-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^3}} \cdot 3t^2 \\ &= \frac{t(2+t)\exp + \frac{3t^2}{2\sqrt{1+t^3}}}{t^2 \exp + \sqrt{1+t^3}}. \end{aligned}$$

第四章 不定积分

上一章, 我们接触了导数; 这一章, 我们来考虑导数的“反操作”.

具体地, 设 I 为区间, 且 f 是 I 上的函数. 上一章的要点是: 已知 f , 求 Df ; 这一章的要点是: 已知 I 上的函数 g 适合 $Df = g$, 求 f .

4.1 原函数与不定积分

设 I 为区间. 不难看出, I 上的常函数的导数是 0 (在 I 上的限制). 不过, 重要地, 此事反过来也对:

定理 4.1 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的可导函数. 若 $Df = 0$, 则 f 为常函数.

此事的论证可见于一般的分析教材, 所以我不证了 (或许, 当我变强的时候, 我就能在我的书里给出我自己的论证了).

此事的一个重要的转述如下:

定理 4.2 设 I 为区间. 设 f_1, f_2 为 I 上的可导函数. 若 $Df_1 = Df_2$, 则存在常函数 c , 使 $f_2 = f_1 + c$.

证 考虑 $h = f_2 - f_1$. 那么 $Dh = 0$. 从而 h 是常函数. 证毕.

由此, 我们作如下定义.

定义 4.3 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 若存在 I 上的可导函数 F 使 $DF = f$, 则说 F 是 f 的一个**原函数**.

定义 4.4 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 f 有一个原函数. 那么, 称 f 的全体原函数作成的集为 f 的不定积分, 即

$$\int f = \{g \mid g \text{ 是 } f \text{ 的原函数}\}.$$

定理 4.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 F 是 f 的原函数. 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

证 设 G 是 f 的一个原函数. 则 $G = F + c$, 其中 c 为某个常函数. 故

$$\int f \subset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

另一方面, 若 c' 是常函数, 显然有 $D[F + c'] = DF = f$. 所以

$$\int f \supset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}. \quad \text{证毕.}$$

例 4.6 因为 $D \exp = \exp$, 故

$$\int \exp = \{\exp + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

例 4.7 因为 $D[-\cos] = \sin$, 故

$$\int \sin = \{-\cos + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

例 4.8 因为 $D \sin = \cos$, 故

$$\int \cos = \{\sin + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

至此, 我们已经知道什么是不定积分. 不过, 我们也可以看到, 当前的表达不定积分的方式比较复杂. 所以, 我们很需要一种简写法; 我们将在下一节讨论此事.

我们知道, 若区间 I 上的函数有原函数, 那自然地有不定积分. 什么样的函数有原函数呢? 下面的结论给出了此问题的部分解答; 不过, 就算只是“部分”, 对本书而言, 也足够了.

定理 4.9 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则存在 I 上的可导函数 F , 使 $DF = f$.

证 固定 $a \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} F: I &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \int_a^t f. \end{aligned}$$

任取 $x \in I$. 从而对任意 $t \in I$,

$$F[t] = \int_a^x f + \int_x^t f = F[x] + (t - x)Q[t],$$

其中

$$\begin{aligned} Q: I &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \frac{1}{t - x} \int_x^t f, & t \neq x. \end{cases} \end{aligned}$$

取 x 的一个邻域 N . 所以, 在 $N \cap I$ 上, 有

$$F = F[x] + (t - x)Q,$$

且 Q 于 x 连续 (定理 2.33), 故 F 于 x 可导, 且 F 于 x 的导数为

$$Q[x] = f[x]. \quad \text{证毕.}$$

由此可得微积分的一个重要定理. 不过, 这不是本章的重点讨论对象.

定理 4.10 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

证 固定 $c \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} G: I &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \int_c^t f. \end{aligned}$$

那么 G 是 f 的原函数, 且

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = G[b] - G[a].$$

既然 F 也是 f 的原函数, 那必定存在常函数 ℓ , 使 $G = F + \ell$. 所以

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= G[b] - G[a] \\ &= (F + \ell)[b] - (F + \ell)[a] \\ &= (F[b] + \ell[b]) - (F[a] + \ell[a]) \\ &= (F[b] + \ell) - (F[a] + \ell) \\ &= F[b] - F[a]. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

4.2 函数集的演算

上节, 我们正式地定义了区间 I 上的函数 f 的不定积分是 f 的全体原函数作成的集. 随后, 我们知道, 若 $DF = f$, 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

不过, 此表达似乎不是很简洁. 很少有人愿意每次写不定积分都要写上形如“ c 是 I 上的常函数”这样的话. 并且, 这种表达方式也不利于我们表达不定积分跟不定积分的关系.

例 4.11 设 f, g 都是区间 I 上的函数, 且不定积分存在. 我们看 $f + g$ 是否有不定积分. 为回答这个问题, 无妨设 F, G 分别是 f, g 的原函数. 那么 $D[F + G] = f + g$. 从而, $f + g$ 确实有不定积分

$$A = \int (f + g) = \{F + G + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

记

$$B = \left\{ u + v \mid u \in \int f, \text{ 且 } v \in \int g \right\}.$$

我们证明: $A = B$.

任取 $F + G + c \in A$. 那么 $F \in \int f$, 且 $G + c \in \int g$. 所以 $F + G + c \in B$. 这说明, $A \subset B$.

任取 $u + v \in B$, 其中 $u \in \int f$, 且 $v \in \int g$. 那么存在常函数 d_1, d_2 使 $u = F + d_1, v = G + d_2$. 所以 $u + v = F + G + (d_1 + d_2)$. 二个常函数的和仍为常函数, 故 $u + v \in A$. 这说明, $A \supset B$.

我们该怎样描述 $\int (f + g)$, $\int f$ 与 $\int g$ 的关系? 您可能在其他的分析教材里见过形如

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

的文字. 不过, 上式右端的 “+” 是什么意思? 或者, 具体地, 焊接二个集的 “+” 是什么意思呢?

上例告诉我们, 我们很需要为函数集定义新的运算; 更确切地, 我们很需要搬函数的运算到函数集上.

定义 4.12 设 A 为集. 若任取 A 的元 f , f 是一个函数, 就称 A 为**函数集**.

设 P, Q 为二个集. 若函数集 A 的每个元都是 P 上的函数, 就说 A 是 P 上的函数集. 若函数集 A 的每个元都是 P 到 Q 的函数 (定义域为 P , 陪域为 Q), 则说 A 是 P 到 Q 的函数集. 此时, 我们也说, 函数集 A 的定义域为 P , 陪域为 Q .

定义 4.13 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 R 到 S 的函数集, 且任取 A 的元 a , a 的值域是 R 的子集. 于是, 任取 B 的元 $b, b \circ a: P \rightarrow S$ 有意义. 定义

$$B \circ A = \{b \circ a \mid b \in B, a \in A\}.$$

不难看出, $B \circ A$ 就是 P 到 S 的函数集.

函数集的复合也有结合律.

定理 4.14 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 R 到 S 的函数集, C 是 T 到 U 的函数集. 设任取 A 的元 a , a 的值域是 R 的子集; 设任取 B 的元 b , b 的

值域是 S 的子集. 则

$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $C \circ B \circ A$.

此事的论证不难; 不过, 我希望您能适应这种论证方式; 这样, 您就完全可类似地论证其他的关于函数集的运算律.

证 取 $f \in C \circ (B \circ A)$. 于是, 存在 $a \in A, b \in B, c \in C$ 使 $f = c \circ (b \circ a)$. 因为函数的复合适合结合律, 故

$$f = c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a \in (C \circ B) \circ A.$$

再取 $g \in (C \circ B) \circ A$. 于是, 存在 $a' \in A, b' \in B, c' \in C$ 使 $g = (c' \circ b') \circ a'$. 因为函数的复合适合结合律, 故

$$g = (c' \circ b') \circ a' = c' \circ (b' \circ a') \in C \circ (B \circ A). \quad \text{证毕.}$$

就像为函数集引入复合那样, 对 \mathbb{R} 的子集到 \mathbb{R} 的子集的函数集, 我们还可引入 $+$, $-$, \cdot , $/$, $^$ 等运算.

定义 4.15 设 P, Q, S 是 \mathbb{R} 的子集. 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 P 到 S 的函数集. 设 $*$ 为三文字 $+$, $-$, \cdot 的任意一个. 定义

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中 $A * B$ 的陪域可按需要决定. 一般地, 我们可写 $\{0\} - B$ 为 $-B$, 写 $A \cdot B$ 为 AB .

若任取函数集 A 的元 a , 任取 $p \in P$, 都有 $a[p] \neq 0$, 则定义

$$\frac{B}{A} = \left\{ \frac{b}{a} \mid b \in B, a \in A \right\},$$

其中陪域可按需要决定.

若对任意 $a \in A, b \in B, p \in P$, $a[p]^{b[p]}$ 有意义, 则还可定义

$$A^B = \{a^b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中陪域可按需要决定.

现在,我邀请您证明函数集的如下性质. 我就不证明了; 因为我想, 我已经告诉您怎么论证了.

定理 4.16 设 P 是 \mathbb{R} 的子集. 设 A, B, C 都是 P 到 (某个) \mathbb{R} 的子集的函数集. 则

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, & AB &= BA, \\ (A + B) + C &= A + (B + C), & (AB)C &= A(BC). \end{aligned}$$

定理 4.17 设 P 是 \mathbb{R} 的子集. 任取函数集 L 的元 ℓ , ℓ 的值域都是 P 的子集. 设 A, B 是 P 上的函数集. 设 $*$ 是五文字 $+, -, \cdot, /, ^$ 的任意一个. 则

$$(A * B) \circ L = (A \circ L) * (B \circ L).$$

尽管函数集跟函数有类似的运算律, 不过, 这并不是说, 函数的每一个运算律都可被搬到函数集上.

例 4.18 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 0 是 P 上的恒取零值的函数. 那么, 不难看出, 对任意 $p \in P$:

- $p + 0 = p$;
- 存在 $q \in P$, 使 $p + q = 0$ (取 q 为 $-p$ 即可).

由此, 我们不难推出: 若 $p, q, r \in P$, 且 $q + p = r + p$, 则 $q = r$; 在等式二侧同时加 $-p$, 利用结合律, 再利用 0 的性质即知. 我们姑且称这个性质为函数的加法的消去律.

函数集的加法也有消去律吗? 一般来说, 没有. 取 $A = \{1\}$; 取 B, C 为

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\},$$

这里的 $0, 1, -1, \dots$ 都是 P 上的常函数. 那么, 不难验证, $A + C = B + C = C$. 可是, $A \neq B$.

现在我们考虑一类特殊的函数集; 这也是不定积分的演算重点考察的对象.

我们先为一种特殊的函数集引入方便的记号.

设 $P \subset \mathbb{R}$. 考虑 P 上的函数. 任取实数 c , 我们总可以作一个 P 上的常函数

$$\begin{aligned} c: P &\rightarrow \{c\}, \\ t &\mapsto c. \end{aligned}$$

反过来, 任取 P 上的一个 (实的) 常函数 f , 我们也总能找到一个实数 c , 使任取 $t \in P$, 都有 $f[t] = c$. 并且, 不同的实数 (常函数) 对应着不同的常函数 (实数). 我们记全体实数作成的集为 \mathbb{R} ; 所以, 我们也无妨记全体 P 上的 (实的) 常函数作成的集为 \mathbb{R}_P . 我们曾说, 除非有必要, 我们不严格区分函数及其限制; 也就是说, 在语境明确的时候, 我们也可写 \mathbb{R}_P 为 \mathbb{R} .

下面的几条性质十分重要.

定理 4.19 设 \mathbb{R}_P 为 P 上的全体常函数作成的集. 则 $\mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.

证 任取 $f \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$. 那么, 存在 $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_P$, 使 $f = f_1 + f_2$. 因为二个常函数的和还是常函数, 故 $f \in \mathbb{R}_P$. 反过来, 任取 $g \in \mathbb{R}_P$. 因为 $g = g + 0$, 且 $0 \in \mathbb{R}_P$, 故 $g \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$. 证毕.

定理 4.20 设 \mathbb{R}_P 为 P 上的全体常函数作成的集.

- 若 $d \in \mathbb{R}_P$, 则 $\{d\} + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.
- 若 $k \in \mathbb{R}_P$, 且 $k \neq 0$, 则 $\{k\} \cdot \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.

证 我在此处论证关于加的等式. 任取 $f \in \{d\} + \mathbb{R}_P$. 那么, 存在 $e \in \mathbb{R}_P$ 使 $f = d + e$. 因为二个常函数的和还是常函数, 故 $f \in \mathbb{R}_P$. 反过来, 任取 $g \in \mathbb{R}_P$. 因为 $g = d + (g - d)$, 且 $g - d \in \mathbb{R}_P$, 故 $g \in \{d\} + \mathbb{R}_P$.

论证关于乘的等式的方法是类似的. 不过, 要注意一些细节. $k \neq 0$ 的意思是 k 跟 0 作为函数不相等; 所以, 是存在 $p \in P$, 使 $k[p] \neq 0[p]$. 不过, 因为 k 跟 0 都是常函数, 故 $k \neq 0$ (实数的不相等). 所以 k 有倒数 k^{-1} , 且 k^{-1} 也是常函数. 证毕.

定理 4.21 设 \mathbb{R}_P 为 P 上的全体常函数作成的集. 设函数集 A 的每一个函数的值域都是 P 的子集. 则 $\mathbb{R}_P \circ A = \mathbb{R}_P$.

证 注意到对任意 $a \in A$, $k \in \mathbb{R}_P$, 必有 $k \circ a = k$. 证毕.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = \{F\} + \mathbb{R}.$$

您可能会觉得写 $\{F\}$ 较繁. 所以, 我们再简化一下记号.

例 4.22 我假定您学过高中算学里的立体几何.

在高中, 您一开始就学了集与集的关系、运算. 自然地, 我们视平面为**点集** (每一个元都是点的集), 也视直线为**点集**. 那么, 点 P 在直线 ℓ 上, 就是 $P \in \ell$; 点 P 不在直线 ℓ 上, 就是 $P \notin \ell$. 类似地, 点 P 在平面 Π 内, 就是 $P \in \Pi$; 点 P 不在平面 Π 内, 就是 $P \notin \Pi$.

现在, 我们任取一个平面 Π 与一条直线 ℓ . 您也知道, 下面的三事, 有且只有一件能发生:

- ℓ 上的每一个点都是 Π 的点. 我们可简单地记此事为 $\ell \subset \Pi$.
- ℓ 上的每一个点都不是 Π 的点. 我们说, $\ell \cap \Pi$ 是空集.
- 存在唯一的一点 P , 使 $P \in \ell$, 且 $P \in \Pi$. 高中算学会这么写: $\ell \cap \Pi = P$.

Well. 正如您所见, 按道理, 我们应当写 $\ell \cap \Pi = \{P\}$; 毕竟, 我们说, 平面跟直线都是**点集**. 可是, 我们省略了 $\{\}$. 也就是说, 我们简单地写刚好有一个元的集 $\{a\}$ 为 a . 不重要地, 高中算学一开始讲集时, 用 $A \subseteq B$ 表达 “ A 是 B 的子集”, 用 $A \subsetneq B$ 表达 “ A 是 B 的真子集”; where are you, \subset ?

当然了, 也不是每个高中算学老师都是 “盲人”. 假如您对此事感兴趣, 您可以参考阮龙培的《关于立体几何应用集合论符号的几点看法》与吴长庆的《立体几何使用 “集合语言” 的准确性》. 我承认, 这些文章都比我老.

借此机会, 我说一说我的观点吧. 我的有限的语言知识告诉我, 土话跟胡话都有不少多义词. 这里, “多义” 并不是指有 “很大的区别” 的解释, 而是说这些含义 “相似”, 但又不完全一样 (我加了引号, 因为我不知道怎么用行话表达我的想法). 就拿 “曲线” (胡话: curve) 为例吧. 在中学, 我们一般视曲线为点集. 所以, 我们说, (平面的) 曲线有隐方程 $F[x, y] = 0$, 也有参数方程 $x = f[t]$, $y = g[t]$, $t \in A$ (A 就是所谓的 “参数区间”). 这么看来, 曲线就是全体适合隐方程 (或参数方程) 的 (x, y) 作成的集. 在算学分析 (或高等算学)

里,您可能也学过怎么用积分算曲线的长. 这个时候, 曲线的方程可能更重要; 这是因为, 曲线的“几何性质”似乎对曲线的长的公式的推导没有帮助. 我们计算曲线的长时, 一般都要求“曲线的参数方程”的导数连续——这其实涉及到方程的分析性质了. (假如您对此事感兴趣, 您可以参考美国算学家 Walter Rudin 的教材 *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed.)

目前, 算学家都是人; 不过, 人类, 似乎生来就想着偷懒. 所以说, 算学家也不例外. 算学家一方面追求严谨; 另一方面, 假如记号不是很简洁, 算学家自己写起来都费劲. 所以, 算学家会说: “在本书 (或本文、本节、本章), 为方便, 我们约定文字 (表达式、符号) $\times \times \times$ 表示……” 不过, 我觉得, 可以先给出“稍繁琐的写法”, 再给“简单的写法”; 这或许能让学生体会到简单的写法为什么方便. 可惜, 我看了好几本新的高中算学书, 都是一开始用 \subseteq 表子集, 而在立体几何里“借用” \subset 表直线的每一点都在平面内; 没有一本 (高中算学) 教材说“为方便, 我们用 \subset 表子集, 并省去刚好有一个元的集 $\{a\}$ 外的花括号”.

好了, 我就说这么多吧. 严格地, 这算是“私货”了; 可是, 这是一本告诉他人我 (与一些算学家) 的想法的微积分读物. 假如我不带“私货”, 那我要带什么呢? 或许, 我不如不写这本书.

现在, 请允许我正式地作出这样的约定: 在不引起混淆时, 我们可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 a . 所以, 像 $a \in a, a \subset \{a\}$ 的表达都是可被接受的.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = F + \mathbb{R}.$$

代 f 以 DF , 就有

$$\int DF = F + \mathbb{R}.$$

不严格地, 若忽视常函数, 那么不定积分“抵消了”导数. 反过来呢?

定义 4.23 设 I 是区间. 设 A 是 I 上的函数集, 且 A 的每个元都是可导函数. 我们说, A 是 I 上的**可导函数集**. 定义

$$D[A] = \{Da \mid a \in A\}.$$

有时, 我们也可简单地写 $D[A]$ 为 DA .

例 4.24 不难看出, $D\mathbb{R} = \{0\} = 0$.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么

$$\begin{aligned} D\left[\int f\right] &= D[\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}] \\ &= \{D[F + c] \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f\} = f. \end{aligned}$$

所以, 不严格地, 我们也可以说, 导数“抵消了”不定积分.

定义 4.25 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 A 为 P 上的函数集. 若存在 $a \in A$ 使 $P = \{a\} + \mathbb{R} = a + \mathbb{R}$, 就说 A 是 P 上的**至多相差常函数的函数集**.

注 4.26 或许这样的函数集有更好的名字; 不过, 我姑且这么叫吧.

定理 4.27 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 f 是 P 上的函数.

- 若 g 是 P 上的函数, 则

$$(f + \mathbb{R}) + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

- 若 g 是 P 上的函数, 则

$$f + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

特别地, 取 g 为常函数 c , 则

$$f + \mathbb{R} = f + (c + \mathbb{R}) = (f + c) + \mathbb{R}.$$

- 若 $k \in \mathbb{R}$, 且 $k \neq 0$, 则

$$k(f + \mathbb{R}) = kf + \mathbb{R}.$$

- 若函数 h 的值域是 P 的子集, 则

$$(f + \mathbb{R}) \circ h = f \circ h + \mathbb{R}.$$

证 利用函数集的运算律与 \mathbb{R} 的性质, 有

$$\begin{aligned}
 (f + \mathbb{R}) + (g + \mathbb{R}) &= (\{f\} + \mathbb{R}) + (\{g\} + \mathbb{R}) \\
 &= ((\{f\} + \mathbb{R}) + \{g\}) + \mathbb{R} \\
 &= (\{f\} + (\mathbb{R} + \{g\})) + \mathbb{R} \\
 &= (\{f\} + (\{g\} + \mathbb{R})) + \mathbb{R} \\
 &= ((\{f\} + \{g\}) + \mathbb{R}) + \mathbb{R} \\
 &= (\{f + g\} + \mathbb{R}) + \mathbb{R} \\
 &= \{f + g\} + (\mathbb{R} + \mathbb{R}) \\
 &= (f + g) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 f + (g + \mathbb{R}) &= \{f\} + (\{g\} + \mathbb{R}) \\
 &= (\{f\} + \{g\}) + \mathbb{R} \\
 &= (f + g) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

取 $f_1 \in k(f + \mathbb{R})$. 那么, 存在 $c \in \mathbb{R}$ 使 $f_1 = k(f + c) = kf + kc \in kf + \mathbb{R}$.
 取 $f_2 \in kf + \mathbb{R}$. 那么, 存在 $d \in \mathbb{R}$ 使 $f_2 = kf + d$. 因为 $k \neq 0$, 故
 $f_2 = kf + kk^{-1}d = k(f + k^{-1}d) \in k(f + \mathbb{R})$.

最后一个也不难:

$$\begin{aligned}
 (f + \mathbb{R}) \circ h &= (\{f\} + \mathbb{R}) \circ \{h\} \\
 &= \{f\} \circ \{h\} + \mathbb{R} \circ \{h\} \\
 &= (f \circ h) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

证毕.

4.3 不定积分的演算

现在, 我们研究怎么算不定积分.

定理 4.28 设 I 是区间. 设 F 是 I 上的可导函数. 则

$$\int DF = F + \mathbb{R}.$$

证 我已经证过它了.

证毕.

这或许是最基本的计算法了. 一般来说, “简单的” 函数的不定积分都可以这么求出来.

例 4.29 设 I 是某个不含 0 的区间. 求 $\int \frac{1}{x}$.

我们知道, $D[\ln \circ \text{abs}] = \frac{1}{x}$. 所以

$$\int \frac{1}{x} = \ln \circ \text{abs} + \mathbb{R}.$$

定理 4.30 设 I 是区间. 设 f, g 是 I 上的函数. 设 f, g 都有不定积分.

• $f + g$ 也有不定积分, 且

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

• 设 $k \in \mathbb{R}$, 且 $k \neq 0$. 则 kf 也有不定积分, 且

$$\int kf = k \int f.$$

证 设 F, G 分别是 f, g 的原函数. 那么

$$\int f = F + \mathbb{R}, \quad \int g = G + \mathbb{R}.$$

因为 $D[F + G] = f + g$, 故

$$\begin{aligned} \int (f + g) &= (F + G) + \mathbb{R} \\ &= (F + \mathbb{R}) + (G + \mathbb{R}) \\ &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

类似地, 因为 $D[kF] = kf$, 且 $k \neq 0$, 故

$$\int kf = kF + \mathbb{R} = k(F + \mathbb{R}) = k \int f. \quad \text{证毕.}$$

注 4.31 注意到 $\int 0 = \mathbb{R}$. 所以, 对任意 $k \in \mathbb{R}$,

$$\int kf = k \int f + \mathbb{R}.$$

例 4.32 设 A 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 那么, 不难验证, $-A = (-1)A$. 所以, 特别地, 有

$$\begin{aligned}\int (f - g) &= \int (f + (-1)g) \\ &= \int f + \int (-1)g \\ &= \int f + (-1) \int g \\ &= \int f - \int g.\end{aligned}$$

例 4.33

$$\begin{aligned}\int \cos &= \int D \sin = \sin + \mathbb{R}, \\ \int \sin &= \int (-1)D \cos = (-1) \int D \cos = -\cos + \mathbb{R}, \\ \int \exp &= \int D \exp = \exp + \mathbb{R}, \\ \int \mathfrak{t}^n &= \int \frac{1}{n+1} D \mathfrak{t}^{n+1} = \frac{\mathfrak{t}^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R} \quad (n \neq -1).\end{aligned}$$

例 4.34

$$\begin{aligned}\int (3 \cos - 4 \sin + 5 \exp) &= \int (3 \cos - 4 \sin) + \int 5 \exp \\ &= \int 3 \cos - \int 4 \sin + \int 5 \exp \\ &= 3 \int \cos - 4 \int \sin + 5 \int \exp \\ &= 3(\sin + \mathbb{R}) - 4(-\cos + \mathbb{R}) + 5(\exp + \mathbb{R}) \\ &= (3 \sin + \mathbb{R}) + (4 \cos + \mathbb{R}) + (5 \exp + \mathbb{R}) \\ &= ((3 \sin + 4 \cos) + \mathbb{R}) + (5 \exp + \mathbb{R}) \\ &= 3 \sin + 4 \cos + 5 \exp + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.35

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2} &= \int (1 + \tan^2) = \int D \tan = \tan + \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} &= \int D \arctan = \arctan + \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} &= \int D \arcsin = \arcsin + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.36

$$\begin{aligned}\int \tan^2 &= \int (1 + \tan^2) - \int 1 \\ &= (\tan + \mathbb{R}) - (\mathfrak{t} + \mathbb{R}) \\ &= \tan - \mathfrak{t} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.37

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{t}^4}{1 + \mathfrak{t}^2} &= \int \frac{\mathfrak{t}^4 - 1 + 1}{1 + \mathfrak{t}^2} \\ &= \int \left(\mathfrak{t}^2 - 1 + \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \right) \\ &= \int \mathfrak{t}^2 - \int 1 + \int \frac{1}{1 + \mathfrak{t}^2} \\ &= \left(\frac{\mathfrak{t}^3}{3} + \mathbb{R} \right) - (\mathfrak{t} + \mathbb{R}) + (\arctan + \mathbb{R}) \\ &= \frac{\mathfrak{t}^3}{3} - \mathfrak{t} + \arctan + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

定理 4.38 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数, 且有不定积分. 设 $f: I \rightarrow J$ 是可导函数. 则 $(g \circ f) Df$ 也有不定积分, 且

$$\int (g \circ f) Df = \left(\int g \right) \circ f.$$

证 设 G 是 g 的原函数. 则

$$D[G \circ f] = (DG \circ f) Df = (g \circ f) Df.$$

从而

$$\begin{aligned}\int (g \circ f) Df &= G \circ f + \mathbb{R} \\ &= (G + \mathbb{R}) \circ f \\ &= \left(\int g \right) \circ f.\end{aligned}\quad \text{证毕.}$$

注 4.39 作为对比, 我们看看怎么用传统的记号表示此事.

设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数, 且有不定积分

$$\int g(x) dx = G(x) + C.$$

设 $f: I \rightarrow J$ 是可导函数. 则 $(g \circ f)f'$ 也有不定积分

$$\int g(f(t))f'(t) dt = G(f(t)) + C.$$

一般称这种计算不定积分的方法为“第一**换元** (积分) 法”; 不过, 我认为, 可以称其为“第一**复合** (积分) 法”, 因为 (表面上) 我代“换元”以“复合”. 事实上, 传统的记号跟我在本书用的新记号表达的仍为同一件事. 所谓“第一换元法”的本质还是复合与链规则, 只不过, 传统的记号似乎不太允许“ $x = f(x)$ ”的写法, 故换一个文字是有必要的.

例 4.40 设 g 有不定积分. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int g \circ (a\mathbf{1} + b) &= \int \frac{1}{a} (g \circ (a\mathbf{1} + b)) D[a\mathbf{1} + b] \\ &= \int \left(\frac{g}{a} \circ (a\mathbf{1} + b) \right) D[a\mathbf{1} + b] \\ &= \left(\int \frac{g}{a} \right) \circ (a\mathbf{1} + b) \\ &= \left(\frac{1}{a} \int g \right) \circ (a\mathbf{1} + b).\end{aligned}$$

例 4.41 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{c}{a\mathfrak{t} + b} &= \left(\frac{1}{a} \int \frac{c}{\mathfrak{t}} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left(\frac{c}{a} \int \frac{1}{\mathfrak{t}} + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left(\frac{c}{a} \ln \circ \text{abs} + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \frac{c}{a} \ln \circ \text{abs} \circ (a\mathfrak{t} + b) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地, 若 $n \neq -1$, 则

$$\begin{aligned}\int c(a\mathfrak{t} + b)^n &= \left(\frac{1}{a} \int c\mathfrak{t}^n \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left(\frac{c}{a} \int \mathfrak{t}^n + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \left(\frac{c}{a} \cdot \frac{\mathfrak{t}^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R} \right) \circ (a\mathfrak{t} + b) \\ &= \frac{c(a\mathfrak{t} + b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.42 以后, 若

$$k \int g = kG + \mathbb{R},$$

我们可直接写

$$\left(k \int g \right) \circ f = kG \circ f + \mathbb{R}.$$

例 4.43 利用三角公式, 有

$$\begin{aligned}\int \cos \sin &= \int \frac{1}{2} \sin \circ 2\mathfrak{t} \\ &= \left(\frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \sin \right) \circ 2\mathfrak{t} \\ &= \left(\frac{1}{4} \int \sin \right) \circ 2\mathfrak{t} \\ &= -\frac{1}{4} \cos \circ 2\mathfrak{t} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

当然, 我们也可以这么解:

$$\begin{aligned}\int \cos \sin &= \int \sin D \sin \\ &= \left(\int 1 \right) \circ \sin \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.44 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} &= \int \frac{1/a}{\sqrt{1 - (t/a)^2}} \\ &= \left(\frac{1}{1/a} \int \frac{1/a}{\sqrt{1 - t^2}} \right) \circ \frac{1}{a} \\ &= \arcsin \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + t^2} &= \int \frac{1/a^2}{1 + (t/a)^2} \\ &= \left(\frac{1}{1/a} \int \frac{1/a^2}{1 + t^2} \right) \circ \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \arctan \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.45

$$\begin{aligned}\int \tan &= \int \frac{\sin}{\cos} \\ &= \int \frac{-D \cos}{\cos} \\ &= \left(\int \frac{-1}{t} \right) \circ \cos \\ &= -\ln \circ \text{abs} \circ \cos + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.46

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos}{\sin} &= \int \frac{D \sin}{\sin} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \sin + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.47 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{t^2 - a^2} &= \int \frac{1}{(t-a)(t+a)} \\
 &= \int \frac{(t+a) - (t-a)}{2a(t-a)(t+a)} \\
 &= \int \left(\frac{1}{2a(t-a)} - \frac{1}{2a(t+a)} \right) \\
 &= \int \frac{1}{2a(t-a)} - \int \frac{1}{2a(t+a)} \\
 &= \left(\int \frac{1}{2at} \right) \circ (t-a) - \left(\int \frac{1}{2at} \right) \circ (t+a) \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \circ \text{abs} \circ (t-a) - \frac{1}{2a} \ln \circ \text{abs} \circ (t+a) + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{\text{abs} \circ (t-a)}{\text{abs} \circ (t+a)} \right] + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t-a}{t+a} + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

例 4.48

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos} &= \int \frac{\cos}{\cos^2} \\
 &= \int \frac{D \sin}{1 - \sin^2} \\
 &= \left(\int \frac{1}{1-t^2} \right) \circ \sin \\
 &= -\frac{1}{2 \cdot 1} \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t-1}{t+1} \circ \sin + \mathbb{R} \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \circ \frac{1-\sin}{1+\sin} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1+\sin}{1-\sin} + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

例 4.49

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin} &= \int \frac{1}{\cos \circ (2\pi/4 - t)} \\
 &= \left(\frac{1}{-1} \int \frac{1}{\cos} \right) \circ \left(\frac{2\pi}{4} - t \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 + \sin} \circ \left(\frac{2\pi}{4} - 1 \right) + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 - \cos}{1 + \cos} + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

定理 4.50 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数. 设 $f: I \rightarrow J$ 是严单调的可导函数, 且 Df 不取零值. 若 $(g \circ f)Df$ 有不定积分, 则 g 也有不定积分, 且

$$\int g = \left(\int (g \circ f) Df \right) \circ f^{[-1]}.$$

证 因为 $f: I \rightarrow J$ 是严单调的可导函数, 且 Df 不取零值, 故 $f^{[-1]}$ 也是严单调的可导函数. 设 G 是 $(g \circ f)Df$ 的一个原函数. 则

$$\begin{aligned}
D[G \circ f^{[-1]}] &= (DG \circ f^{[-1]}) Df^{[-1]} \\
&= ((g \circ f) \circ f^{[-1]}) \cdot (Df \circ f^{[-1]}) \cdot \frac{1}{Df \circ f^{[-1]}} \\
&= (g \circ (f \circ f^{[-1]})) \cdot 1 \\
&= g \circ 1 = g.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\int g &= G \circ f^{[-1]} + \mathbb{R} \\
&= (G + \mathbb{R}) \circ f^{[-1]} \\
&= \left(\int (g \circ f) Df \right) \circ f^{[-1]}. \quad \text{证毕.}
\end{aligned}$$

上述结论有一个变体; 请您仔细比较二者的细微区别.

定理 4.51 设 I, J 为区间. 设 J 上的函数 g 有不定积分. 设 $f: I \rightarrow J$ 可导. 设 $e: J \rightarrow I$ 适合 $f \circ e = 1$. 则

$$\int g = \left(\int (g \circ f) Df \right) \circ e.$$

证 因为 J 上的函数 g 有不定积分, 且 $f: I \rightarrow J$ 是 I 上的可导函数, 故 $(g \circ f)Df$ 有不定积分, 且

$$\left(\int g \right) \circ f = \int (g \circ f) Df.$$

从而

$$\begin{aligned}
 \int g &= \left(\int g \right) \circ \{1\} \\
 &= \left(\int g \right) \circ \{f \circ e\} \\
 &= \left(\int g \right) \circ (\{f\} \circ \{e\}) \\
 &= \left(\left(\int g \right) \circ f \right) \circ \{e\} \\
 &= \left(\int (g \circ f) Df \right) \circ e.
 \end{aligned}$$

证毕.

例 4.52 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

记 $g = \sqrt{a^2 + t^2}: \mathbb{R} \rightarrow [a, +\infty)$. 不难看出, 求解 $\int g^{-1}$ 的最大障碍就是 sqrt (它一定存在, 因为 g^{-1} 是连续函数). 所以, 我们想一个办法消去根号. 什么东西跟 g 的复合可以不带 sqrt 呢? 联想到三角恒等式 $1 + \tan^2 = \sec^2$, 故我们可考虑令 $f = a \tan: (-2\pi/4, 2\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}
 (g^{-1} \circ f) Df &= \frac{a(1 + \tan^2)}{\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2}} \\
 &= \sqrt{1 + \tan^2} \\
 &= \frac{1}{\cos}.
 \end{aligned}$$

接下来就是要找一个 $e: \mathbb{R} \rightarrow (-2\pi/4, 2\pi/4)$, 使 $f \circ e = 1$. 事实上, 这样的 e 并不难找, 因为

$$\begin{aligned}
 f^{[-1]} &= (a1 \circ \tan)^{[-1]} \\
 &= \tan^{[-1]} \circ (a1)^{[-1]} \\
 &= \arctan \circ \frac{1}{a},
 \end{aligned}$$

故我们取 e 为 f 的反函数, 即有 $f \circ e = \text{id}$. 故

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} &= \left(\int \frac{1}{\cos} \right) \circ \left(\arctan \circ \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \sin}{1 - \sin} \circ \left(\arctan \circ \frac{1}{a} \right) + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \text{id}}{1 - \text{id}} \circ (\sin \circ \arctan) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \left(\frac{1 + \text{id}}{1 - \text{id}} \circ \frac{\text{id}}{\sqrt{1 + \text{id}^2}} \right) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{\sqrt{1 + \text{id}^2} + \text{id}}{\sqrt{1 + \text{id}^2} - \text{id}} \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{(\sqrt{1 + \text{id}^2} + \text{id})^2}{(\sqrt{1 + \text{id}^2} - \text{id})(\sqrt{1 + \text{id}^2} + \text{id})} \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \ln \circ \text{id}^2 \right) \circ (\text{id} + \sqrt{1 + \text{id}^2}) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ \text{abs} \circ (\text{id} + \sqrt{1 + \text{id}^2}) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ (\text{id} + \sqrt{1 + \text{id}^2}) \circ \frac{1}{a} + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ \left(\frac{\text{id} + \sqrt{a^2 + \text{id}^2}}{a} \right) + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ (\text{id} + \sqrt{a^2 + \text{id}^2}) - \ln[a] + \mathbb{R} \\
 &= \ln \circ (\text{id} + \sqrt{a^2 + \text{id}^2}) + \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

例 4.53 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

我们先设 $g = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$. 假如我们算出 g 的不定积分是 $G + \mathbb{R}$, 那么我们可以由此立得 $h = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (-\infty, a) \rightarrow (0, +\infty)$ 的不定积分. 这是因为

$$h = g \circ (-\text{id}),$$

故

$$\begin{aligned}\int h &= \left(\frac{1}{-1} \int g \right) \circ (-\mathfrak{t}) \\ &= -G \circ (-\mathfrak{t}) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

对于 g , 我们考虑 $f = a/\mathfrak{t}: (a, +\infty) \rightarrow (0, 1)$. 不难看出, $f \circ f = \mathfrak{t}$, 故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{t}^2 - a^2}} &= \left(\int \frac{Df}{\sqrt{f^2 - a^2}} \right) \circ f \\ &= \left(\int \frac{-1}{\mathfrak{t} \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} \right) \circ \frac{a}{\mathfrak{t}}.\end{aligned}$$

现在, 我们想办法计算

$$\int \frac{-1}{\mathfrak{t} \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}.$$

因为 $\sin: (0, 2\pi/4) \rightarrow (0, 1)$ 可导, 且 $\sin \circ \arcsin = \mathfrak{t}$, 故

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{\mathfrak{t} \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} &= \left(\int \frac{-D \sin}{\sin \cos} \right) \circ \arcsin \\ &= \left(\int \frac{-1}{\sin} \right) \circ \arcsin \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \mathfrak{t}}{1 - \mathfrak{t}} \circ (\cos \circ \arcsin) + \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \mathfrak{t}}{1 - \mathfrak{t}} \circ \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2} + \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}{1 - \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}} + \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{(1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2})^2}{(1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2})(1 - \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2})} + \mathbb{R} \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln \circ \mathfrak{t}^2 \right) \circ \frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}{\mathfrak{t}} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{1 + \sqrt{1 - \mathfrak{t}^2}}{\mathfrak{t}} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= \left(\int \frac{-1}{t \sqrt{1 - t^2}} \right) \circ \frac{a}{t} \\ &= \ln \circ \text{abs} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t} \circ \frac{a}{t} \right) + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

这算出了 $g = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 的不定积分. 由此可知 $h = \text{sqrt}^{-1} \circ (t^2 - a^2): (-\infty, -a) \rightarrow (0, +\infty)$ 的不定积分是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= -\ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} \circ (-1) + \mathbb{R} \\ &= -\ln \circ \text{abs} \circ \frac{-t + \sqrt{(-t)^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{a}{-t + \sqrt{t^2 - a^2}} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{a(1 + \sqrt{t^2 - a^2})}{(-t + \sqrt{t^2 - a^2})(1 + \sqrt{t^2 - a^2})} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{-a} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

综上, 若区间 J 不包含 $[-a, a]$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= \ln \circ \text{abs} \circ \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a} + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ (t + \sqrt{t^2 - a^2}) - \ln[|a|] + \mathbb{R} \\ &= \ln \circ \text{abs} \circ (t + \sqrt{t^2 - a^2}) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.54 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln \circ \text{abs} \circ (t + \sqrt{t^2 \pm a^2}) + \mathbb{R}.$$

我再介绍一个解不定积分的法则.

定理 4.55 设 I 为区间, f, g 都是 I 上的可导函数. 若 gDf 有不定积分, 则 fDg 也有不定积分, 且

$$\int fDg = fg - \int gDf.$$

证 设 H 是 gDf 的一个原函数. 则

$$\begin{aligned} D[fg - H] &= Df \cdot g + f \cdot Dg - DH \\ &= gDf + fDg - gDf \\ &= fDg. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \int fDg &= (fg - H) + \mathbb{R} \\ &= fg - (H + \mathbb{R}) \\ &= fg - \int gDf. \end{aligned}$$

证毕.

例 4.56 设整数 $m \neq 0$. 则

$$\begin{aligned} \int x^{m-1} \ln x &= \int \ln x D \frac{x^m}{m} \\ &= \ln \frac{x^m}{m} - \int \frac{x^m}{m} D \ln x \\ &= \frac{x^m \ln x}{m} - \int \frac{x^{m-1}}{m} \\ &= \frac{x^m}{m^2} (m \ln x - 1) + \mathbb{R}. \end{aligned}$$

注 4.57

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} &= \int \ln x D \ln x \\ &= \left(\int 1 \right) \circ \ln \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 x + \mathbb{R}. \end{aligned}$$

例 4.58 设 I, J 为区间. 设 $f: I \rightarrow J$ 是严单调的可导函数, 且 Df 不取零值. 所以, $f^{[-1]}$ 也是严单调的可导函数. 从而

$$\begin{aligned}\int f^{[-1]} &= \int f^{[-1]} D\mathfrak{t} \\ &= f^{[-1]} \mathfrak{t} - \int \mathfrak{t} Df^{[-1]} \\ &= \mathfrak{t} f^{[-1]} - \int (f \circ f^{[-1]}) Df^{[-1]} \\ &= \mathfrak{t} f^{[-1]} - \left(\int f \right) \circ f^{[-1]}.\end{aligned}$$

例 4.59 我们可轻松地求解 \arcsin 的不定积分:

$$\begin{aligned}\int \arcsin &= \mathfrak{t} \arcsin - \left(\int \sin \right) \circ \arcsin \\ &= \mathfrak{t} \arcsin + \cos \circ \arcsin + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arcsin + \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \arctan &= \mathfrak{t} \arctan - \left(\int \tan \right) \circ \arctan \\ &= \mathfrak{t} \arctan - \ln \circ \text{abs} \circ \cos \circ \arctan + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan + \ln \circ \text{abs} \circ \text{sqrt}^{-1} \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan + \ln \circ \text{sqrt}^{-1} \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan - \ln \circ \text{sqrt} \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{t} \arctan - \frac{1}{2} \ln \circ (1 + \mathfrak{t}^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

原则上, 我还可以再举一些例; 不过, 我感觉, 学而不思则罔, 思而不学则殆. 再者, 我假定您学过微积分, 所以您可以自行找高等算学 (或算学分析) 教材上的问题练习. 当然, 请试用我在本书讲的“无变量不定积分法”.

第五章 积分

本章讨论如何**计算**积分; 这里的“积分”是“定积分”, 虽然我觉得“定”有些多余.

我暂且用一会儿传统的记号, 告诉您我在本章会写什么东西吧.

具体地, 设 f 是区间 I 上的连续函数, 且 $a, b \in I$. 积分论告诉我们, f 在 $[a, b]$ 上的积分 (或者, f 在 $[b, a]$ 上的积分的相反数)

$$\alpha = \int_a^b f(x) dx$$

存在. 所以, 我们可以专心地思考怎么算出结果 (而不必担心结果是否存在); 本章就告诉您一些计算积分的方法.

当然, 我还是会使用

$$\int_a^b f$$

表示 α ; 毕竟, 这是本书的一个大主题.

5.1 不定积分与积分

我们在上一章“乘热打铁地”证明了当时没用到的定理:

定理 4.10 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

原则上, 我们可以用这个定理计算很多积分了.

例 5.1 因为 \cos 的一个原函数是 \sin , 故

$$\int_0^{2\pi/4} \cos = \sin[2\pi/4] - \sin[0] = 1.$$

例 5.2 因为 \exp 的一个原函数是 \exp , 故

$$\int_0^1 \exp = \exp[1] - \exp[0] = e - 1.$$

例 5.3 因为 $1/(1+t^2)$ 的一个原函数是 \arctan , 故

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} = \arctan[1] - \arctan[-1] = \frac{2\pi}{4}.$$

不过, 我们不妨先探索不定积分跟积分的联系. 在建立一定的联系后, 我们可以更有条理地算积分.

定理 4.10 是 Newton-Leibniz 公式的一个经典说法; 它描述了**原函数**与**积分**的关系. 自然地, 就有这样的问题: 有没有**直接描述不定积分跟积分**的关系的说法呢?

姑且从传统的记号说起. 或许, 您还能想起来, 用传统的记号, 可写上述三个积分的计算为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/4} \cos x \, dx &= \sin x \Big|_0^{2\pi/4} = 1, \\ \int_0^1 \exp x \, dx &= \exp x \Big|_0^1 = e - 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{4}. \end{aligned}$$

这里, $\exp x \Big|_0^1$ 就是 $\exp 1 - \exp 0$ (或者, 按本书的记号, $\exp[1] - \exp[0]$) 的省略. 所以, 我们也可定义一个类似的记号.

定义 5.4 设 f 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数. 设 $a, b \in P$. 定义

$$[f]_a^b = f[b] - f[a].$$

姑且称其为“**bracket 运算**”(土话: 方括号运算).

传统的记号在函数 $f(x)$ (这里, 为对照, 使用经典的函数记号) 的右侧画单条长竖线; 为清晰起见, 我用一对方括号包围函数 f . 毕竟, 形如

$$1 + f(x) \Big|_a^b$$

的文字是有歧义的: 这是 $1 + (f(b) - f(a))$ 还是 $(1 + f(b)) - (1 + f(a))$ 呢?

定理 5.5 设 f, g 都是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数. 设 $a, b \in P$. Bracket 运算适合如下性质:

- 二个函数的和的 bracket 等于二个函数的 bracket 的和, 即

$$[f + g]_a^b = [f]_a^b + [g]_a^b.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$[k]_a^b = 0.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$[kf]_a^b = k \cdot [f]_a^b.$$

- 设 $Q \subset \mathbb{R}$ 上的函数 h 的值域是 P 的子集. 设 $c, d \in Q$. 则

$$[f \circ h]_c^d = [f]_{h[c]}^{h[d]}.$$

证 按定义论证这四条即可.

$[f + g]_a^b$, 按定义, 就是 $(f + g)[b] - (f + g)[a]$. 不过, 我们知道, $(f + g)[b] = f[b] + g[b]$; 类似地, $(f + g)[a] = f[a] + g[a]$. 所以, 二者的差就是

$$(f[b] + g[b]) - (f[a] + g[a]) = (f[b] - f[a]) + (g[b] - g[a]) = [f]_a^b + [g]_a^b.$$

$[k]_a^b$, 按定义, 就是 $k[b] - k[a]$. 可是, $k[b] = k[a] = k$, 故 $[k]_a^b = 0$.

$[kf]_a^b$, 按定义, 就是 $(kf)[b] - (kf)[a]$. 不过, $(kf)[b] = k[b] \cdot f[b] = k \cdot f[b]$; 类似地, $(kf)[a] = k \cdot f[a]$. 所以

$$k \cdot f[b] - k \cdot f[a] = k \cdot (f[b] - f[a]) = k \cdot [f]_a^b.$$

最后一个或许是最容易的:

$$\begin{aligned}[f \circ h]_c^d &= (f \circ h)[d] - (f \circ h)[c] \\ &= f[h[d]] - f[h[c]] \\ &= [f]_{h[c]}^{h[d]}. \quad \text{证毕.}\end{aligned}$$

利用 bracket 运算, 我们可“换汤不换药”地改写 Newton-Leibniz 公式:

定理 5.6 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = [F]_a^b.$$

的确, 这个改写只是用“新鲜的”bracket 运算包装了函数在二点的差. 不过, 这还只是一小步; 我马上就要迈一大步了.

我刚定义了函数的 bracket 运算; 那么函数集有没有 bracket 运算呢?

这问题, 其实是废话: 有就是有, 没有就是没有. 的确, 我刚才只是定义了函数的 bracket 运算, 而没有定义函数集的 bracket 运算. 不过这是大问题吗? 我现在就定义它.

定义 5.7 设 A 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 设 $a, b \in P$. 定义

$$\begin{aligned}[A]_a^b &= \left\{ [f]_a^b \mid f \in A \right\} \\ &= \{ f[b] - f[a] \mid f \in A \}.\end{aligned}$$

不难看出, bracket 运算变函数集为数集 (实数集的子集). 所以, 为研究函数集的 bracket 运算的性质, 我们要定义数集的运算.

定义 5.8 设 P, Q 为 \mathbb{R} 的子集. 设 $*$ 是三文字 $+$, $-$, \cdot 的任意一个. 定义

$$P * Q = \{ p * q \mid p \in P, q \in Q \}.$$

老样子, 可写 $P \cdot Q$ 为 PQ , 写 $\{0\} - P$ 为 $-P$.

若 P 的每一个元都不是零, 还可定义

$$\frac{Q}{P} = \left\{ \frac{q}{p} \mid q \in Q, p \in P \right\}.$$

若对任意 $p \in P, q \in Q, p^q$ 有意义, 则还可定义

$$P^Q = \{p^q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

不意外地, 我们有如下性质.

定理 5.9 设 P, Q, S 都是 \mathbb{R} 的子集. 则

$$\begin{aligned} P + Q &= Q + P, & PQ &= QP, \\ (P + Q) + S &= P + (Q + S), & (PQ)S &= P(QS). \end{aligned}$$

由此, 我们就有如下的函数集的 bracket 运算律:

定理 5.10 设 A, B 都是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 设 $a, b \in P$.

- 二个函数集的和的 bracket 等于二个函数集的 bracket 的和, 即

$$[A + B]_a^b = [A]_a^b + [B]_a^b.$$

- 设函数集 C 的每一个元都是 P 上的常函数. 则

$$[C]_a^b = \{0\}.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$[\{k\}A]_a^b = \{k\} \cdot [A]_a^b.$$

- 设 $Q \subset \mathbb{R}$ 上的函数 h 的值域是 P 的子集. 设 $c, d \in Q$. 则

$$[A \circ \{h\}]_c^d = [A]_{h[c]}^{h[d]}.$$

证 还是老套路: 相互包含. 由于我已经建立了函数的 bracket 运算律, 所以您的论证应该不会太长. 证毕.

在上一章, 我曾说, 在不引起混淆时, 可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 a . 现在我又要采用这个约定了.

定理 5.11 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 f 是 P 上的函数. 设 \mathbb{R}_P 是 P 上的所有 (实的) 常函数作成的集 (当然, 也可简单地写其为 \mathbb{R}). 设 $a, b \in P$. 则

$$[f + \mathbb{R}]_a^b = [f]_a^b.$$

证 直接验证; 不过, 您还是要注意一些细节的.

$$\begin{aligned} [f + \mathbb{R}]_a^b &= [\{f\} + \mathbb{R}]_a^b \\ &= [\{f\}]_a^b + [\mathbb{R}]_a^b \\ &= [\{f\}]_a^b + \{0\} \\ &= [\{f\}]_a^b \\ &= [f]_a^b. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

下面的命题更直接地焊接了不定积分与积分.

定理 5.12 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[\int f \right]_a^b.$$

注 5.13 严谨地 (但不重要地), 我们应当写

$$\left\{ \int_a^b f \right\} = \left[\int f \right]_a^b.$$

证 因为 f 是 I 上的连续函数, 故 f 有一个原函数 F , 且 $\int f = F + \mathbb{R}$. 从而

$$\left[\int f \right]_a^b = [F + \mathbb{R}]_a^b = [F]_a^b = \int_a^b f. \quad \text{证毕.}$$

5.2 计算积分

在上一节, 我们得到了新的 Newton-Leibniz 公式:

定理 5.12 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[\int f \right]_a^b.$$

这将是本节的重点; 毕竟, 在大多数场合, **具体**计算积分时, 还是要用它.

我们先从积分论**借**三个公式. 它们比 Newton-Leibniz 公式更基础; 或者说, 在论证 Newton-Leibniz 公式时, 我们已经用到它们了.

定理 2.26 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b kf &= k \int_a^b f. \end{aligned}$$

定理 2.32 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

我们曾建立了不定积分的运算律; 现在, 我们试建立积分的更多的运算律.

先定义一个术语.

定义 5.14 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的可导函数. 若 Df 还是 I 上的连续函数, 则说 f **连导**.

定理 5.15 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的**连续函数**. 设 $f: I \rightarrow J$ **连导**. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b (g \circ f) Df = \int_{f[a]}^{f[b]} g.$$

请您注意上述定理的**被强调的词**; 为保证积分有意义 (请注意, 在本书, 我们只讨论**连续函数**的积分论), 我要求函数的性质好一些; 不过, 这并不是很影响实际应用.

证 因为 f 连导, 故 f 跟 Df 都是连续函数. 因为 g 是连续函数, 故 $h = (g \circ f)Df$ 也是连续函数. 所以, 可用 Newton-Leibniz 公式计算 h 的积分. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b (g \circ f) Df &= \left[\int (g \circ f) Df \right]_a^b \\ &= \left[\left(\int g \right) \circ f \right]_a^b \\ &= \left[\int g \right]_{f[a]}^{f[b]} \\ &= \int_{f[a]}^{f[b]} g.\end{aligned}\quad \text{证毕.}$$

我们不妨再看一遍命题的论证. 首先, 我们明确 $(g \circ f)Df$ 是连续函数, 故可用 Newton-Leibniz 公式计算积分; 然后, 我们用不定积分的运算律转化为 g 的积分 (因为 g 是连续函数).

其实, 在实际的计算中, 我们**并不需要**每一次都变不定积分的 bracket 运算为积分. 一般地, 我们用 Newton-Leibniz 公式算积分. 为书写方便, 我们一般用长竖线 (当然, 在本书, 用 bracket 运算) 代替函数在二点的值的差. 因为本书定义了函数集的 bracket 运算, 故我们可直接变积分为函数集的 bracket. 在方括号内, 就是我们已经熟知的不定积分. 所以, 不定积分与 bracket 运算就能解决大多数积分问题. (当然, Newton-Leibniz 公式也不是万能的.)

例 5.16 我拿简单的 $\sin \cos$ 举例吧.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/4} \sin \cos &= \int_0^{2\pi/4} \sin D \sin = \int_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} 1 \\ &= \left[\int 1 \right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} = \left[\frac{1^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若充分利用 bracket 运算的性质, 我们可以这么写:

$$\int_0^{2\pi/4} \sin \cos = \left[\int \sin \cos \right]_0^{2\pi/4}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int \sin D \sin \right]_0^{2\pi/4} = \left[\left(\int \mathbf{1} \right) \circ \sin \right]_0^{2\pi/4} \\
&= \left[\int \mathbf{1} \right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} \\
&= \left[\frac{\mathbf{1}^2}{2} + \mathbb{R} \right]_0^1 = \left[\frac{\mathbf{1}^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

当然, 因为 \mathbb{R} 的 bracket 为 0, 故计算积分时不必写出来.

定理 5.17 设 I, J 为区间. 设 J 上的函数 g 连续. 设 $f: I \rightarrow J$ 连导. 设 $e: J \rightarrow I$ 适合 $f \circ e = \mathbf{1}$. 任取 $c, d \in J$. 则

$$\int_c^d g = \int_{e[c]}^{e[d]} (g \circ f) Df.$$

证 注意到 g 与 $(g \circ f) Df$ 都是连续函数. 所以

$$\begin{aligned}
\int_c^d g &= \left[\int g \right]_c^d \\
&= \left[\left(\int (g \circ f) Df \right) \circ e \right]_c^d \\
&= \left[\int (g \circ f) Df \right]_{e[c]}^{e[d]} \\
&= \int_{e[c]}^{e[d]} (g \circ f) Df.
\end{aligned}$$

证毕.

例 5.18 计算

$$\int_{-1}^1 \text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{1}^2).$$

设 $J = [-1, 1]$. 设 $g = \text{sqrt} \circ (1 - \mathbf{1}^2)$ 为 J 上的函数. 为计算此积分, 我们不妨考虑找一个合适的区间 I , 与一个 I 到 J 的连导函数 f , 使 $(g \circ f) Df$ 简单一些; 当然, 还要找一个 J 到 I 的函数 e , 使 $f \circ e = \mathbf{1}$. 我们不妨取 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$, $f = \sin$. 那么, $Df = \cos$, 且 $g \circ f = \cos$. 并且, 不难看出,

取 $e = \arcsin$, 即得 $f \circ e = \mathfrak{t}$. 故

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) &= \left[\int \text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) \right]_{-1}^1 \\
 &= \left[\left(\int (\text{sqrt} \circ (1 - \mathfrak{t}^2) \circ \sin) D \sin \right) \circ \arcsin \right]_{-1}^1 \\
 &= \left[\int \cos^2 \right]_{\arcsin[-1]}^{\arcsin[1]} \\
 &= \left[\int \frac{1 + \cos}{2} \circ 2\mathfrak{t} \right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
 &= \left[\left(\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos}{2} \right) \circ 2\mathfrak{t} \right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
 &= \left[\int \frac{1 + \cos}{4} \right]_{2\mathfrak{t}[-2\pi/4]}^{2\mathfrak{t}[2\pi/4]} \\
 &= \left[\frac{\mathfrak{t} + \sin}{4} \right]_{-2\pi/2}^{2\pi/2} \\
 &= \frac{2\pi/2 + 0}{4} - \frac{-2\pi/2 + 0}{4} \\
 &= \frac{2\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

定理 5.19 设 I 为区间, f, g 都是 I 上的连导函数. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b f Dg = [fg]_a^b - \int_a^b g Df.$$

证 $f Dg$ 与 $g Df$ 都是连续函数. 从而

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f Dg &= \left[\int f Dg \right]_a^b = \left[fg - \int g Df \right]_a^b \\
 &= [fg]_a^b - \left[\int g Df \right]_a^b = [fg]_a^b - \int_a^b f Dg. \quad \text{证毕.}
 \end{aligned}$$

例 5.20 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \sin \exp.$$

注意到 $D \exp = \exp$. 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi/2} \sin \exp &= \int_0^{2\pi/2} \sin D \exp \\
 &= [\sin \exp]_0^{2\pi/2} - \int_0^{2\pi/2} \exp D \sin \\
 &= 0 - \int_0^{2\pi/2} \cos \exp \\
 &= - \int_0^{2\pi/2} \cos D \exp \\
 &= -[\cos \exp]_0^{2\pi/2} + \int_0^{2\pi/2} \exp D \cos \\
 &= (1 + \exp[2\pi/2]) - \int_0^{2\pi/2} \sin \exp.
 \end{aligned}$$

由此可知

$$\int_0^{2\pi/2} \sin \exp = \frac{1 + \exp[2\pi/2]}{2}.$$

最后, 我再讲一个小技巧吧.

定理 5.21 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b f = \int_a^b f \circ (a + b - \iota) = \frac{1}{2} \int_a^b (f + f \circ (a + b - \iota)).$$

证 我们证明前一个等号成立即可; 至于后一个等号, 利用“二个相等的数的平均数跟其相等”即可.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f \circ (a + b - \iota) &= \int_a^b -f \circ (a + b - \iota) \cdot (-1) \\
 &= \int_a^b (-f \circ (a + b - \iota)) D(a + b - \iota) \\
 &= \int_{(a+b-\iota)[a]}^{(a+b-\iota)[b]} -f \\
 &= - \int_b^a f = \int_a^b f.
 \end{aligned}$$

证毕.

例 5.22 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \frac{\imath \sin}{2 - \sin^2}.$$

设

$$f = \frac{\imath \sin}{2 - \sin^2}.$$

按照以往的经验, 您可能会试着先找 f 的不定积分. 注意, f 甚至可以是 \mathbb{R} 上的连续函数, 所以 f 的不定积分**一定存在**. 只不过, 您是否能顺利地写出来, 就是另一个问题. 我承认, 我自己也写不出初等函数 F , 使 $DF = f$.

既然找原函数不太行, 那就试着用小技巧. 注意到

$$\sin = \sin \circ \left(\frac{2\pi}{2} - \imath \right),$$

故

$$f \circ \left(0 + \frac{2\pi}{2} - \imath \right) = \frac{(2\pi/2 - \imath) \sin}{2 - \sin^2}.$$

从而

$$\begin{aligned} g &= f + f \circ \left(0 + \frac{2\pi}{2} - \imath \right) \\ &= \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{2 - \sin^2} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{1 + (-\cos)^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/2} f &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi/2} g \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} \int_0^{2\pi/2} \frac{D[-\cos]}{1 + (-\cos)^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-\cos[0]}^{-\cos[2\pi/2]} \frac{1}{1 + \imath^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-1}^1 D \arctan \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{(2\pi)^2}{16}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Menger K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.
- [2] Rudin W. Principles of mathematical analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976: 136-137, 141-142.
- [3] 阮龙培. 关于立体几何应用集合论符号的几点看法[J]. 数学通报, 1986, 1: 31.
- [4] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.
- [5] Kuhn S. The derivative à la Carathéodory[J]. The American Mathematical Monthly, 1991, 98(1): 40-44.
- [6] 吴长庆. 立体几何使用“集合语言”的准确性[J]. 唐山师范学院学报, 1997, 5: 76.
- [7] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/>.
- [8] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/>.
- [9] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/>.

- [10] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables [EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/>.
- [11] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/>.
- [12] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23) [2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/>.
- [13] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. <https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/>.
- [14] 梅加强. 数学分析[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 66-77.