几乎无变量的微积分

纳纳米

二〇二二年四月六日

目录

前言

定义 算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的 “微积分” 跟 “分析学” 不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为 “微积分” 就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、定积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并**不是**从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是什么样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了 “几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘

教版八年级下册的算学课本的定义.

定义 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

定义 一般地, 如果变量 y 随着变量 x 而变化, 并且对于 x 取的每一个值, y 都有唯一的一个值与它对应, 那么称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是胡话 a function of x (土话: x 的函数) 的简记. 这时叫 x 作**自变量**, 叫 y 作**因变量**. 对于自变量 x 取的每一个值 a, 称因变量 y 的对应值为**函数值**, 并记其作 $f(a)$.

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触 "函数" 的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用 "这种函数" 讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用 "有序对" 定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话 "变量" "对应". 不过, 更严谨地看, "有序对" 是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义 (a, b) 为 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. 于是, 可以**证明**,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ 且 } b = d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号 f (而不是 $f(x)$), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x);$$

我们计算不定积分时, 用的记号是

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x;$$

我们计算定积分时, 用的记号是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链规则为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

这里 $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$. 视导数为 “变率”, 那这就是在说, y 关于 x 的变率等于 y 关于 u 的变率与 u 关于 x 的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的 $\frac{11}{10}$ (也就是说, A 比 B 快 $\frac{1}{10}$), 而 B 的速率是 C 的速率的 $\frac{9}{10}$ (也就是说, B 比 C 慢 $\frac{1}{10}$), 那么 A 的速率是 C 的速率的 $\frac{99}{100}$; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: “有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?” 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用 D 表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说, $\mathrm{D}\exp = \exp$, $\mathrm{D}\cos = -\sin$, $\mathrm{D}\sin = \cos$. 不过, 当我想表达 $\mathrm{D}\ln$ 时, 我意识到了一个重要的问题: “已知 $\mathrm{D}\ln x = 1/x$. 左边的 $\ln x$ 就是 ln, 可右边的 $1/x$ 应该是什么?” 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}\colon \quad \mathbb{R} - \{0\} &\to \mathbb{R} - \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写 $\mathrm{D}\ln = \mathrm{rec}$. 不过, 我还是没法好好地表示 $\mathrm{D}\arcsin$ 跟 $\mathrm{D}\arctan$. 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的 “什么也不干” 的函数

$$\begin{aligned} \mathrm{fdn}\colon \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量定积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的 “读书报告”: 这本书 “浪费了” 巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 前几日, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些 “优良传统” 也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些 “优良传统” 是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

`https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

`https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

二〇二二年四月六日

第一章　集与函数

我先简单地介绍一下基础概念吧.

1.1　集

定义 1.1　**集**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为**元**.

注 1.2　事实上, 集与元是所谓的 “原始概念”. 我们至多**描述**集或元是什么; 我们无法**定义**集或元.

定义 1.3　无元的集是**空集**.

注 1.4　或许您在别的地方能看到形如 $\varnothing$ 的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

注 1.5　一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

定义 1.6　一般地, 若集 A 由元 $a, b, c, \cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \cdots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

定义 1.7　若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a **属于** A 或 A **包含** a. 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a **不属于** A 或 A **不包含** a.

注 1.8　“属于” 也是原始概念.

定义 1.9　若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的**子集**或 B 是 A 的**超集**. 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用 “真” 形容之.

注 1.10　或许, 您在别的地方能看到形如 $\subseteq$, $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说 A 是 B 的真子集, 我们再加上 $A \neq B$ 即可.

例 1.11　设 $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$. 不难看出, $0 \in C$, $1 \notin C$, $C \subset B$.

注 1.12　空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

定义 1.13　若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A **等于** B, 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

定义 1.14　集 A 与 B 的**交**是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的**并**是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集的交与并.

例 1.15　设 E 是全体偶数作成的集; 设 O 是全体奇数作成的集. 不难看出, $E \cap O$ 为空集, 而 $E \cup O$ 恰为全体整数作成的集.

定义 1.16　设 A, B 是集. 定义

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

注 1.17 值得注意的是, 我们没说 $B \subset A$.

例 1.15 (续页 2) 不难看出, $E-O$ 跟 $O-E$ 都是空集, 故 $E-O=O-E$. 不过, 这个 $-$ 不是减法, 故当然不能由此推出 "$E+E=O+O$", 更不能推出 $E=O$.

定义 1.18 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里, (a,b) 是**有序对**. 我们规定, 二个有序对 (a,b) 与 (c,d) 相等相当于 $a=c$ 且 $b=d$.

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 相等, 相当于 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

注 1.19 一般地, $A \times B \neq B \times A$.

注 1.20 设 A, B 分别有 m, n 个元. 则 $A \times B$ 有 mn 个元.

定义 1.21 一般地, $\mathbb{N}$ 指全体非负整数作成的集; $\mathbb{Z}$ 指全体整数作成的集; $\mathbb{Q}$ 指全体有理数作成的集; $\mathbb{R}$ 指全体实数作成的集; $\mathbb{C}$ 指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 1.22 在微积分里, $\mathbb{R}$ 的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数 a, b, 其中 $a<b$. 那么我们记:

(1) $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

(2) $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;

(3) $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;

(4) $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;

(5) $(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$;

(6) $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$;

(7) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

(8) $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$;

(9) $[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$.

统称这九类子集为**区间**. a 是区间 $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ 的**左端点**; b 是区间 $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为 $\{a\}$ 是**退化为一点的区间** $[a, a]$; 我们认为空集是**空区间** $[a, a)$, (a, a), $[a, a)$, $[b, a)$, (b, a), $(b, a]$ 或 $[b, a]$. 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

注 1.23　设 a, b, c 是实数. 说 b 介于 a 跟 c 之间, 就是说 $a \leqslant b \leqslant c$ 或 $c \leqslant b \leqslant a$ (简单地, 就是 $(b - a)(b - c) \leqslant 0$). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为 “区间”. 那么, 显而易见地, 任给一个区间 I, 任取 I 的二个相异实数 a, b, 则每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元. 反过来, 若 $\mathbb{R}$ 的子集 I 适合 “任取 I 的二个相异实数, 每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元”, 则 I 是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

1.2　关系与函数

定义 1.24　设 A, B 是集. $A \times B$ 的子集称为 A 到 B 的**关系**.

定义 1.25　设 A, B 是集. 若 A 到 B 的关系 f 适合下述性质, 则说 f 是 A 到 B 的**函数** (或**映射**):

- 任取 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $(a, b) \in f$;
- 若 (a, b) 与 (a, c) 均为 f 的元, 则 $b = c$.

设 $(a, b) \in f$. 我们记此事为 $b = f[a]$, 并说 b 是 a 在函数 f 下的**像**, a 是 b 在函数 f 下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数 f:

$$\begin{aligned} f\colon\quad & A \to B, \\ & a \mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

"$f\colon A \to B$" 是 "f 是 A 到 B 的函数" 的简写.

注 1.26 一般地, 我们写 a 在函数 f 下的像为 $f(a)$, 而不是 $f[a]$. 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

例 1.27 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$. 显然, $A \times B$ 有 6 个元. 不难看出, $A \times B$ 有 64 个子集, 故 A 到 B 的关系共有 64 个. 不过, A 到 B 的函数只有 8 个.

定义 1.28 在本书, 我们为 "什么也不干" 的函数起一个名字. 具体地说, 设 $A \subset B$. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}\colon \quad & A \to B, \\ & a \mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中 ι 是希腊字母 iota.

我们简单地写 $\iota_{A,A}$ 为 ι_A. 有时, 若既不必指出 A, 也不必指出 B, 我们直接写 ι. 换句话说: ι (或者带下标的 ι_A, $\iota_{A,B}$) 啥也不干, 即 $\iota[x] = x$, 其中 x 可以是任意文字.

一般也称 ι 为**恒等函数**.

定义 1.29 设 f 是 A 到 B 的函数. 称 A 为 f 的**定义域**; 称 B 为 f 的**陪域**.

定义 1.30 设 $C \subset A$. 设 $f\colon A \to B$. 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称 $f[A]$ 为 f 的**值域**. 显然 f 的值域是 f 的陪域的子集.

注 1.31 设 $f\colon A \to B$. 若 $D \subset C \subset A$, 则 $f[D] \subset f[C]$.

定义 1.32 设 f, g 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 都有 $f[a] = g[a]$, 则说 $f = g$.

可写 $f = g$ 的否定为 $f \neq g$. 具体地说, 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] \neq g[a]$, 则说 $f \neq g$.

定义 1.33 设 R 是 A 到 B 的关系. B 到 A 的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为 R 的**反关系**.

定义 1.34 设 f 是 A 到 B 的函数. 若 f 的反关系 g 是 B 到 A 的函数, 则称 g 是 f 的**反函数**. 我们写 f 的反函数为 $f^{[-1]}$.

注 1.35 不难验证, 若 g 是 f 的反函数, 则 f 也一定是 g 的反函数. 这是因为 R 的反关系的反关系是 R.

定义 1.36 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 C 到 D 的函数, 且 $f[A] \subset C$. 任取 A 的元 a. 按照函数的定义, 存在唯一的 $b \in f[A]$ 使 $(a, b) \in f$. 既然 $b \in f[A] \subset C$, 再根据函数的定义, 存在唯一的 $d \in g[C] \subset D$ 使 $(b, d) \in g$. 这样的 d 可用 $g[f[a]]$ 表示. 作 A 到 D 的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是 A 到 D 的函数. 我们称函数 $g \circ f$ 为 f 与 g 的**复合**.

注 1.37 设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, 且 $f[A] \subset C$. 设 $E \subset A$. 那么 $f[E] \subset f[A] \subset C$, 故 $g[f[E]]$ 是有意义的. 我们说, $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$.

取 $d \in g[f[E]]$. 按定义, 存在 $t \in f[E]$ 使 $g[t] = d$. 对这个 t 而言, 又存在 $e \in E$ 使 $f[e] = t$. $(g \circ f)[e]$, 按定义, 等于 $g[f[e]]$, 也就是 $g[t]$, 也就是 d. 所以 $d \in (g \circ f)[E]$. 这说明 $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$.

取 $d' \in (g \circ f)[E]$. 按定义, 存在 $e' \in E$ 使 $(g \circ f)[e'] = d'$. 所以 $t' = f[e'] \in f[E]$. 那么 $g[t'] = d'$. 所以 $d' \in g[f[E]]$. 这说明 $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$.

既然 $g[f[E]]$ 跟 $(g \circ f)[E]$ 相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了 $a \in A$ 时 $(g \circ f)[a]$ 就是 $g[f[a]]$, 可我们并没有**定义** $(g \circ f)[E]$ 是 $g[f[E]]$. 大算学家 John von Neumann 说过: “Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.” 所以, 习惯就好了.

注 1.38 设 $f\colon A \to B$. 那么 $f \circ \iota_A = f$, 且 $\iota_B \circ f = f$.

注 1.39 一般地, $g \circ f \neq f \circ g$. 一方面, $g \circ f$ 有定义时, $f \circ g$ 可能无定义; 另一方面, 即使 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 都有定义, 二者也不一定相等.

定理 1.40 函数的复合是**结合的**. 具体地说, 设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $h\colon E \to F$, 且 $f[A] \subset C$, $g[C] \subset E$. 那么

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $h \circ g \circ f$.

证 $q = g \circ f$ 是 A 到 D 的函数, 且 $p = h \circ g$ 是 C 到 E 的函数. 因 $q[A] = g[f[A]] \subset g[C] \subset E$, 故 $h \circ q = h \circ (g \circ f)$ 是 A 到 F 的函数; 因 $f[A] \subset C$, 故 $p \circ f = (h \circ g) \circ f$ 也是 A 到 F 的函数. 任取 $a \in A$. 则

$$(h \circ (g \circ f))[a] = h[(g \circ f)[a]] = h[g[f[a]]],$$
$$((h \circ g) \circ f)[a] = (h \circ g)[f[a]] = h[g[f[a]]].$$

证毕.

定义 1.41 设 f 是 A 到 B 的函数.
- 若任取 A 的相异二元 a 与 a', 都有 $f[a] \neq f[a']$, 则称 f 是**单函数**.
- 若对任意 $b \in B$, 都存在 $a \in A$ 使 $f[a] = b$, 则称 f 是**满函数**.

例 1.42 设 $A \subset B$. A 到 B 的函数 $\iota_{A,B}$ 总是单函数. 不过, 若 $A \neq B$, 则 $\iota_{A,B}$ 不是满函数.

注 1.43 设 $B \subset C$. 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 A 到 C 的函数, 且对任意 $a \in A$, $f[a] = g[a]$. 那么, f 是单函数的一个必要与充分条件是: g 是单函数. 若 f 不是满函数, 则 g 也不是.

若 f 是满函数, 则 g 也是满函数的一个必要与充分条件是: $B = C$.

定理 1.44 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 B 到 A 的函数 g 适合如下性质:
- 对任意 $a \in A$, $g[f[a]] = a$; 也就是说, $g \circ f = \iota_A$.
- 对任意 $b \in B$, $f[g[b]] = b$; 也就是说, $f \circ g = \iota_B$.

则:
- 至多有一个这样的 g;

- g 是 f 的反函数.

证 至多只有一个这样的 g 是显然的. 具体地, 若 $g'\colon B \to A$ 适合 $g' \circ f = \iota_A$, 且 $f \circ g' = \iota_B$, 则

$$g = g \circ \iota_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \iota_A \circ g' = g'.$$

下证 g 是 f 的反函数. 事实上, 若 h 是 f 的反函数, 则不难验证 h 适合上述二条性质. 所以 $g = h$. 证毕.

定理 1.45 设 $f\colon A \to B$ 与 $g\colon B \to C$ 的反函数分别是 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 与 $g^{[-1]}\colon C \to B$. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

证 记 $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}\colon C \to A$; 记 $p = g \circ f$. 不难用结合律验证 $q \circ p = \iota_A$, 且 $p \circ q = \iota_B$. 这里以 $q \circ p$ 为例:

$$\begin{aligned} q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\ &= (q \circ g) \circ f \\ &= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{[-1]} \circ \iota_B) \circ f \\ &= f^{[-1]} \circ f \\ &= \iota_A. \end{aligned}$$

证毕.

注 1.46 不难看出, 函数 f 有反函数的一个必要与充分条件是: f 是单函数, 且 f 是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

定义 1.47 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 $C \subset A$. 作 C 到 B 的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知, f_C 是 C 到 B 的函数. 我们说, f_C 是 f 在 C 上的**限制**.

1.3 函数的演算

注 本节的语言或许比较混乱.

本节讨论 $\mathbb{R}$ 的子集到 $\mathbb{R}$ 的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是 “几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

定义 1.48 设 $f\colon A \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ 且 $0 \in B$. 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] = 0$, 就说 a 是 f 的一个**根**.

现在我们介绍一些 “基本初等函数”.

定义 1.49 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \imath\colon \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c\colon \quad \mathbb{R} &\to \{c\}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$$

其中 c 是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp\colon \quad \mathbb{R} &\to (0, +\infty), \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin\colon \quad \mathbb{R} &\to [-1, 1], \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 馀弦函数:

$$\begin{aligned}\cos\colon\quad \mathbb{R} &\to [-1,1],\\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};\end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned}\tan\colon\quad \{x \mid \cos[x]\neq 0\} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]};\end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned}\ln\colon\quad (0,+\infty) &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x];\end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned}\arcsin\colon\quad [-1,1] &\to \left[-\frac{2\pi}{4},\frac{2\pi}{4}\right],\\ x &\mapsto s^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 s 指 sin 在 $I=[-2\pi/4,2\pi/4]$ 上的限制 $\sin_I\colon I\to[-1,1]$, 2π 是 cos 的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned}\arctan\colon\quad \mathbb{R} &\to \left(-\frac{2\pi}{4},\frac{2\pi}{4}\right),\\ x &\mapsto t^{[-1]}[x],\end{aligned}$$

其中 t 指 tan 在 $J=(-2\pi/4,2\pi/4)$ 上的限制 $\tan_J\colon J\to\mathbb{R}$;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{abs}\colon\quad \mathbb{R} &\to [0,+\infty),\\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{sqrt}\colon\quad [0,+\infty) &\to [0,+\infty),\\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

注 1.50 在本书, 2π 是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

例 1.51 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned}f\colon\quad A &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right].\end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达 f 的定义. 具体地,

$$f=\exp\circ\mathrm{sqrt}\circ\ln_A.$$

这里, $\ln_A$ 自然是 $\ln$ 在 A 上的限制.

不过, 复合并不够用.

例 1.52 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned}g\colon\quad A &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]+\sin[x]+x^3.\end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达 g 的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写 $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$ 跟 $\sin[x]$ 为 $\exp\circ\mathrm{sqrt}\circ\ln_A$ 与 $\sin_A$; 可是, 我们要怎么写 x^3? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

定义 1.53 设 A, B, C 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 $f\colon A\to B$, $g\colon A\to C$. 设 $*$ 是文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$\begin{aligned}f*g\colon\quad A &\to D,\\ x &\mapsto f[x]*g[x],\end{aligned}$$

其中陪域 $D \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定. 一般地, 若 $*$ 是乘号 $\cdot$, 则可被省略. 可写 $0_A - f$ 为 $-f$; 这里 0_A 当然是常函数 0 在 A 上的限制.

若对任意 $x \in A$, 都有 $f[x] \neq 0$, 则还可定义

$$\begin{aligned}\frac{g}{f}\colon\quad & A \to E,\\ & x \mapsto \frac{g[x]}{f[x]},\end{aligned}$$

其中陪域 $E \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

若对任意 $x \in A$, $f[x]^{g[x]}$ 有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned}f^g\colon\quad & A \to F,\\ & x \mapsto f[x]^{g[x]},\end{aligned}$$

其中陪域 $F \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

例 1.54　设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned}g\colon\quad & A \to \mathbb{R},\\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3.\end{aligned}$$

现在我们可以写 x^3 为 $(\iota_A)^{3_A}$. 所以

$$g = (\exp \circ \operatorname{sqrt} \circ \ln_A + \sin_A) + (\iota_A)^{3_A};$$

这里, 我们取陪域为 $\mathbb{R}$.

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的 g 还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取 $B = (0, 1)$. 令

$$\begin{aligned}h\colon\quad & B \to \mathbb{R},\\ & x \mapsto \ln\left[\frac{x - \sin[x]}{1 - x}\right] + \sqrt{2\pi - \exp[x]},\end{aligned}$$

那我们就要写

$$h = \ln \circ \frac{\iota_B - \sin_B}{1_B - \iota_B} + \operatorname{sqrt} \circ ((2\pi)_B - \exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与 "对应法则". 不过, 您无妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如 "函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \ln(1-x)$" 这样的文字时, 我们其实视这个 f 的定义域为全体使 $f(x)$ 有意义的一切实数作成的集 (也就是 $[-1,1)$); 当我们看到形如 "函数 $g(x) = 1 - x$ $(x \in [-1,0])$" 的文字时, 我们认为 g 的定义域为已经提到的集 $[-1,0]$. f 跟 g 的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, "万能的" $\mathbb{R}$).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取 $\mathbb{R}$.

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的 h 为

$$h = \ln \circ \frac{\iota - \sin}{1 - \iota} + \mathrm{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

定义 1.55 我们称定义域为 A 的函数为 (定义在) A 上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

定义 1.56 若 $B \subset A$, f 是 A 上的函数, 我们说 f 在 B 上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} f + g &= g + f, & fg &= gf, \\ (f+g)+h &= f+(g+h), & (fg)h &= f(gh), \\ f(g+h) &= fg + fg, & (f+g)h &= fh + gh. \end{aligned}$$

这里 f, g, h 都是 A 上的函数.

设函数 ℓ 的值域是 A 的子集. 记 $f / g = \frac{f}{g}$, $f \wedge g = f^g$. 设 $*$ 是五文字 $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\wedge$ 的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned}((f*g)\circ\ell)[x] &= (f*g)[\ell[x]] = f[\ell[x]]*g[\ell[x]]\\ &= (f\circ\ell)[x]*(g\circ\ell)[x] = ((f\circ\ell)*(g\circ\ell))[x].\end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于 $+$ 与 $\cdot$ 的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中有用, 故我建议您好好看看它.

例 1.57 我们知道, 对任意实数 x, 都有 $(\cos[x])^2+(\sin[x])^2=1$. 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2+\sin^2=1.$$

例 1.58 我们可写 “二倍角公式” 为

$$\begin{aligned}\sin\circ 2\imath &= 2\cos\sin,\\ \cos\circ 2\imath &= \cos^2-\sin^2\\ &= 2\cos^2-1 = 1-2\sin^2\\ &= (\cos+\sin)(\cos-\sin),\\ \tan\circ 2\imath &= \frac{\sin}{\cos}\circ 2\imath\\ &= \frac{2\cos\sin}{\cos^2-\sin^2}\\ &= \frac{2\tan}{1-\tan^2}\\ &= \frac{2\imath}{1-\imath^2}\circ\tan.\end{aligned}$$

例 1.59 值得注意的是, $f(g+h)$ 并不是 $f\circ(g+h)$:

$$\begin{aligned}2\cos(\cos+\sin) &= 2\cos^2+2\cos\sin\\ &= (\cos+\sin-1)\circ 2\imath\\ &= (\cos+\sin)\circ 2\imath-1\\ &= \sqrt{2}\cos\circ\left(\imath-\frac{2\pi}{8}\right)\circ 2\imath-1\\ &= \sqrt{2}\cos\circ\left(2\imath-\frac{2\pi}{8}\right)-1.\end{aligned}$$

例 1.60 值得注意的是, 本书的 $\sin^{-1}$ 不是 arcsin, $\tan^{-1}$ 也不是 arctan. 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}
\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\
&= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\
&= \frac{1-\cos}{\sin} \\
&= \frac{2\sin^2}{2\cos\sin} \circ \frac{\iota}{2} \\
&= \tan \circ \frac{\iota}{2}.
\end{aligned}$$

例 1.61 我们看一些关于 arcsin 跟 arctan 的等式. 在本例, 我们约定, sin, tan 分别表示 $\sin_{[-2\pi/4,2\pi/4]}$ 与 $\tan_{(-2\pi/4,2\pi/4)}$. 这样,

$$\begin{aligned}
\sin \circ \arcsin &= \iota_{[-1,1]}, \\
\tan \circ \arctan &= \iota_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$\begin{aligned}
\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\iota_{[-2\pi/4,2\pi/4]} \circ \arcsin) \\
&= (\cos \circ \iota_{[-2\pi/4,2\pi/4]}) \circ \arcsin \\
&= (\operatorname{sqrt} \circ (1-\iota^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\
&= (\operatorname{sqrt} \circ (1-\iota^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\
&= \operatorname{sqrt} \circ (1-\iota^2).
\end{aligned}$$

这里的 ι 自然是 $\iota_{[-1,1]}$.

类似地,

$$\begin{aligned}
\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\iota_{(-2\pi/4,2\pi/4)} \circ \arctan) \\
&= (\cos \circ \iota_{(-2\pi/4,2\pi/4)}) \circ \arctan \\
&= \left(\operatorname{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2}\right) \circ \arctan \\
&= \left(\operatorname{sqrt} \circ \frac{1}{1+\iota^2} \circ \tan\right) \circ \arctan
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\operatorname{sqrt} \circ \frac{1}{1+\imath^2}\right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\operatorname{sqrt} \circ (1+\imath^2)}.
\end{aligned}
$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$
\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos \tan) \circ \arctan = \frac{\imath}{\operatorname{sqrt} \circ (1+\imath^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{\imath}{\operatorname{sqrt} \circ (1-\imath^2)}.
\end{aligned}
$$

注 1.62 或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号: $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$
\begin{aligned}
\cos[\arcsin] &= \operatorname{sqrt}[1-\imath^2], \\
\cos[\arctan] &= \frac{1}{\operatorname{sqrt}[1+\imath^2]}, \\
\sin[\arctan] &= \frac{\imath}{\operatorname{sqrt}[1+\imath^2]}, \\
\tan[\arcsin] &= \frac{\imath}{\operatorname{sqrt}[1-\imath^2]}.
\end{aligned}
$$

虽然我已经用 $f[a]$ 表示 a 在 f 下的像了, 我自然地也用 $f[C]$ 表示 C 的每个元在 f 下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用 $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.

第二章　连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础.

若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是 $\mathbb{R}$ 的子集.

2.1　连续的定义

定义 2.1　设 $x \in \mathbb{R}$. 设 δ 为正数. 则 $N[x;\delta] = (x-\delta, x+\delta)$ 是 x 的一个**邻域**. 称 $N[x;\delta] - \{x\} = (x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$ 是 x 的一个**去心邻域**.

不难看出, $N[x;\delta]$ 就是 $\{t \mid |t-x| < \delta\}$, 而 $N[x;\delta] - \{x\}$ 就是 $\{t \mid 0 < |t-x| < \delta\}$.

下面的不等式十分有用.

定理 2.2　对任意实数 x, y, 有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数 a, b, c,

$$|a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leqslant |a-b| + |b-c|.$$

证　注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|xy| - xy) \geqslant 0. \qquad \text{证毕.}$$

定义 2.3　设 f 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 若任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $f[A \cap N[x;\delta]] \subset N[f[x];\varepsilon]$, 则说 f 于 x **连续**.

不难看出, f 于 x 连续的一个必要与充分条件是: 任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时, 必有 $|f[t]-f[x]|<\varepsilon$.

定理 2.4　设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 则 $f*g$ 也于 x 连续.

证　以 $*$ 为 $+$ 或 $-$ 时为例. 任取 $\varepsilon>0$. 这样, 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 g 于 x 连续, 故存在正数 δ_2 使

$$|t-x|<\delta_2 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1, δ_2 的较小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}|(f*g)[t]-(f*g)[x]| &= |(f[t]*g[t])-(f[x]*g[x])|\\ &= |(f[t]-f[x])*(g[t]-g[x])|\\ &\leqslant |f[t]-f[x]|+|g[t]-g[x]|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$*$ 为 $\cdot$ 时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned}&(fg)[t]-(fg)[x]\\ &= f[t]g[t]-f[x]g[x]\\ &= (f[t]-f[x]+f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]+g[t])\\ &= (f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]).\end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使 $(f[t]-f[x])g[t]$ 跟 $f[x](g[t]-g[x])$ 的绝对值都不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ 就好. 首先, 存在正数 δ_3 使

$$|t-x|<\delta_3 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)}.$$

其次, 存在正数 δ_4 使

$$|t-x|<\delta_4 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<1.$$

由此可知, $|t-x|<\delta_4$ 且 $t\in A$ 时,

$$|g[t]|=|g[x]+(g[t]-g[x])|<|g[x]|+1.$$

最后, 存在正数 δ_5 使

$$|t-x|<\delta_5 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}.$$

取 δ 为 $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ 的最小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}
&|(fg)[t]-(fg)[x]|\\
&=|(f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x])|\\
&\leqslant |f[t]-f[x]|\cdot|g[t]|+|f[x]|\cdot|g[t]-g[x]|\\
&<\frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}\cdot(|g[x]|+1)+|f[x]|\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.5 设 f 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则 f^{-1} 于 x 连续.

证 任取 $\varepsilon>0$. 注意到

$$f^{-1}[t]-f^{-1}[x]=-\frac{f[t]-f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明 $|f[t]f[x]|$ 比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然 $f[x]\neq 0$, 那么 $|f[x]|$ 当然是正数. 所以, 存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]|=|f[t]-(f[t]-f[x])|\leqslant|f[t]|+|f[t]-f[x]|<|f[t]|+\frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]|>|f[x]|-\frac{|f[x]|}{2}=\frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, $|t-x|<\delta_1$ 且 $t\in A$ 时,

$$|f[t]f[x]| > \frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使 $|f[t]-f[x]| < \frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$ 即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

注 2.6 一般地, 设 f 是 A 上的函数, $x\in A$, 且 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则存在 x 的邻域 $N[x;\delta]$ 使 $t\in A\cap N[x;\delta]$ 时必有

$$\frac{1}{2} < \frac{f[t]}{f[x]} < \frac{3}{2}.$$

取 $\varepsilon = |f[x]|/2$; 然后,

$$\left|\frac{f[t]}{f[x]} - 1\right| = \frac{|f[t]-f[x]|}{|f[x]|} < \frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到 $|a-b|<c$ 相当于 $a-c<b<a+c$.

定理 2.7 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $f[x]\neq 0$. 则 g/f 也于 x 连续.

证 注意到 $g/f = g\cdot f^{-1}$. 证毕.

定理 2.8 设 $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$. 若 f 于 x 连续, 且 g 于 $f[x]$ 连续, 则 $g\circ f\colon A\to C$ 于 x 连续.

证 任取正数 ε. 那么, 存在正数 δ' 使

$$|v-f[x]|<\delta' \text{ 且 } v\in B \implies |g[v]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

也存在正数 δ 使

$$|t-x|<\delta \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\delta'.$$

显然 $f[t]\in B$. 所以, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$|(g\circ f)[t]-(g\circ f)[x]| = |g[f[t]]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

证毕.

2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

定义 2.9 设 f 是 A 上的函数. 若 f 于 A 的每一点都连续, 则 f 是 (A 上的) **连续函数**.

注 2.10 显然, 若 $B \subset A$, 那么 f 在 B 上的限制 f_B 也是连续函数.

利用上节的结论, 我们有下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我就不证了.

定理 2.11 设 f, g 都是 A 上的连续函数. 则:
(1) $f * g$ 是连续函数, 这里 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个.
(2) 若 f 不取零值 (也就是说, f 无根), 则 g/f 是连续函数.

定理 2.12 设 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ 都是连续函数. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 也是连续函数.

例 2.13 常函数 $c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意非空集 $T \subset \mathbb{R}$, $c[T] = \{c\}$. 所以, 任取正数 ε, 对 x 的**任意**邻域 $N[x;\delta]$, 都有 $c[N[x;\delta]] = \{c\} \subset N[c;\varepsilon] = N[c[x];\varepsilon]$.

例 2.14 $\imath\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意集 $T \subset \mathbb{R}$, $\imath[T] = T$. 所以, 任取正数 ε, 取 x 的 ε 邻域 $N[x;\varepsilon]$, 即得 $\imath[N[x;\varepsilon]] = N[x;\varepsilon] = N[\imath[x];\varepsilon] \subset N[\imath[x];\varepsilon]$.

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

定理 2.15 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1\imath + \cdots + b_n\imath^n}{a_0 + a_1\imath + \cdots + a_m\imath^m}$$

(其中 m, n 为非负整数, 且 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 是不全为零的实数, $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

定义 2.16 设 f 是 A 上的函数. 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y]) \geqslant 0$, 则说 f **增** (也说 f 是**增函数**); 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y]) > 0$, 则说 f **严增** (也说 f 是**严增函数**).

若 $-f$ 增, 则 f **减** (也说 f 是**减函数**); 若 $-f$ 严增, 则 f **严减** (也说 f 是**严减函数**).

若 f 增或 f 减, 则 f **单调** (也说 f 是**单调函数**); 若 f 严增或 f 严减, 则 f **严单调** (也说 f 是**严单调函数**).

简单地, 说 f 增 (严增), 就是说对任意适合 $x \in A$, $y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y, 必有 $f[x] \leqslant f[y]$ ($f[x] < f[y]$); 说 f 减 (严减), 就是说对任意适合 $x \in A$, $y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y, 必有 $f[x] \geqslant f[y]$ ($f[x] > f[y]$).

例 2.17 设 a 为非零实数, b 为实数. 则 $a\imath + b$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严单调函数. 任取二个相异实数 x, y, 则

$$\begin{aligned}
&(x-y)((a\imath+b)[x]-(a\imath+b)[y]) \\
={}&(x-y)((ax+b)-(ay+b)) \\
={}&a(x-y)^2.
\end{aligned}$$

由此可知, $a > 0$ 时 $a\imath + b$ 严增, 而 $a < 0$ 时 $a\imath + b$ 严减.

可以验证, $(a\imath)^{[-1]} = \frac{1}{a}\imath$, 且 $(\imath + b)^{[-1]} = \imath - b$. 所以

$$\begin{aligned}
(a\imath+b)^{[-1]} &= ((\imath+b)\circ(a\imath))^{[-1]} \\
&= (a\imath)^{[-1]} \circ (\imath+b)^{[-1]} \\
&= \frac{1}{a}\imath \circ (\imath - b) \\
&= \frac{1}{a}\imath - \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

不难看出, $(a\imath+b)^{[-1]}$ 跟 $a\imath + b$ 同严增 (或严减).

定理 2.18 设 f 是 A 上的严单调函数. 则 f 是单函数.

证 任取 A 的相异二元 x, y. 则

$$f[x]-f[y] = \frac{(x-y)(f[x]-f[y])}{x-y} \neq 0.$$

证毕.

我们知道, 若 $f\colon A \to B$ 是单函数, 且 $f[A] = B$, 则 f 有反函数 $f^{[-1]}\colon B \to A$. 特别地, 适当选取陪域后, 每个严单调函数都有反函数.

定理 2.19 设 $f\colon A \to B$ 是满的严增 (严减) 函数. 则 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 也是满的严增 (严减) 函数.

证 依假定, f 是双函数, 故有反函数 $f^{[-1]}$, 且 $f^{[-1]}$ 当然是既满亦单的.

无妨设 f 严增; f 严减时, 您可类似地论证 $f^{[-1]}$ 亦严减.

下设 f 严增. 任取 B 的相异二元 x', y'. 令 $x = f^{[-1]}[x']$, $y = f^{[-1]}[y']$. 易见 $x \neq y$, 且 $x' = f[x]$, $y' = f[y]$. 因 f 严增, 故

$$(f[x] - f[y])(x - y) = (x - y)(f[x] - f[y]) > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}&(x' - y')(f^{[-1]}[x'] - f^{[-1]}[y'])\\ &= (f[x] - f[y])(x - y) > 0.\end{aligned}$$

证毕.

下面的结论十分重要.

定理 2.20 设 I 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 则 f 是连续函数的一个必要与充分条件是: J 是区间.

证 无妨设 f 严增.

先看必要性. 设 f 连续. 用反证法. 若 $J = f[I]$ 不是区间, 则存在 J 的相异二元 x', y' 使 $x' < y'$ 且 $J \cap (x', y')$ 为空集. 设 $f[x] = x'$; 设 $f[y] = y'$. 显然 $x < y$. 任取 I 的大于 x 的元 u. 因为 f 严增, 故 $f[u] > f[x] = x'$; 因为 $f[u] \notin (x', y')$, 故 $f[u] \geqslant y'$. 所以, $f[u] - f[x] \geqslant y' - x'$. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ 使 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < y' - x'.$$

因为 I 是区间, 且 x, $y \in I$, 故 $[x, y] \subset I$; 特别地, 这说明, 存在适合条件 $0 < v - x < \delta$ 且 $v \in I$ 的数 v. 故

$$y' - x' > |f[v] - f[x]| = f[v] - f[x] \geqslant y' - x'.$$

这是矛盾.

再看充分性. 设 $\boldsymbol{J}$ 是区间. 任取 $x \in \boldsymbol{I}$. 我们证明 f 于 x 连续.

先设 x 是 $\boldsymbol{I}$ 的左端点. 那么, 对每个 $w > x, w \in \boldsymbol{I}$, 都有 $f[w] > f[x]$. 于是, $f[x]$ 也是 $\boldsymbol{J}$ 的左端点. 任取正数 ε, 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] + e \in \boldsymbol{J}$. 令 $q = f^{[-1]}[f[x]+e]$, 则必有 $x < q$. 从而, 当 $x \leqslant t < q$ 时, $f[x] \leqslant f[t] < f[x]+e$. 这么看来, 存在正数 $\delta = q - x$, 当 $t \in N[x;\delta] \cap \boldsymbol{I} = [x, q)$ 时, 必有

$$|f[t] - f[x]| = f[t] - f[x] < e < \varepsilon.$$

类似地, 当 x 是 $\boldsymbol{I}$ 的右端点时, 您也可用完全类似的套路论证 f 于 x 连续.

现设 x 既不是 $\boldsymbol{I}$ 的左端点, 也不是 $\boldsymbol{I}$ 的右端点. 这样, 存在正数 d 使 $x-d, x+d \in \boldsymbol{I}$. 所以 $f[x-d], f[x+d] \in \boldsymbol{J}$, 且 $f[x-d] < f[x] < f[x+d]$. 故 $f[x]$ 也不是 $\boldsymbol{J}$ 的端点. 所以, 任取正数 ε, 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] - e$, $f[x] + e \in \boldsymbol{J}$. 令 $p = f^{[-1]}[f[x] - e]$, $q = f^{[-1]}[f[x] + e]$. 那么 $p < x < q$. 取 δ 为 $x - p$ 与 $q - x$ 的较小者. 则 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in \boldsymbol{I}$ 时,

$$p \leqslant x - \delta < t < x + \delta \leqslant q,$$

从而

$$f[x] - e = f[p] \leqslant f[x-\delta] < f[t] < f[x+\delta] \leqslant f[q] = f[x] + e,$$

即

$$|f[t] - f[x]| \leqslant e < \varepsilon.$$ 证毕.

由此, 我们可以得到如下关于反函数的定理.

定理 2.21 设 $\boldsymbol{I}$ 为区间. 设 $f\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$ 是满的严单调函数. 设 f 是连续函数. 则 $f^{[-1]}\colon \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ 也是连续函数.

证 设 $f\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$ 是满的严单调函数. 因为 $\boldsymbol{I}$ 是区间, 且 f 是连续函数, 故 $\boldsymbol{J} = f[\boldsymbol{I}]$ 也是区间. 因为 $f^{[-1]}$ 也是满的严单调函数, 且 $\boldsymbol{I} = f^{[-1]}[\boldsymbol{J}]$ 是区间, 故 $f^{[-1]}$ 是连续函数. 证毕.

最后, 我不加论证地给出一些常见的连续函数. 您可以在任意一本分析教材里找到论证.

- exp: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 ln: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 是满的连续函数. 记 sin 在 $[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 上的限制为 s. 则 s 是满的严增函数. 故其反函数 arcsin: $[-1, 1] \to [-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- tan: $\{x \mid \cos[x] \neq 0\} \to \mathbb{R}$ 是满的连续函数. 记 tan 在 $(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 上的限制为 t. 则 t 是满的严增函数. 故其反函数 arctan: $\mathbb{R} \to (-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- 设 n 是正偶数. 则 ι^n: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[2]{x}$ 为 $\sqrt{x}$; 一般写 $\iota^{1/2}$ 为 sqrt.
- 设 n 是正奇数. 则 ι^n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[1]{x}$ 为 x; 一般写 $\iota^{1/1}$ 为 ι.
- abs: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ 是连续函数.

2.3 连续函数的积分

我简单地介绍一下连续函数的积分.

传统地, 一本算学分析 (或高等算学) 教材会先讲导数 (微分学), 再讲如何反求导 (不定积分), 然后才是积分 (定积分). 不过, 为论证连续函数一定有 "反导", 就需要 (连续函数的) 积分的知识. 所以, 逻辑地, 我选择先说连续函数的积分论. 这里, 我就不加证明地列举本书用到的关于积分的结论. 如果您对这些结论的论证感兴趣, 您可以参考算学家梅加强的《数学分析》.

定理 2.22 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 作数列

$$\begin{aligned} A\colon\quad & \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\ & n \mapsto \begin{cases} 0, & n = 0; \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right], & n \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

则存在唯一的实数 α, 使对任意正数 ε, 存在非负整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|A[n]-\alpha| < \varepsilon$.

我们称 α 为 f 在 $[a, b]$ 上的**积分**, 并记 α 为

$$\int_a^b f.$$

注 2.23 传统地, 我们记上面的 α 为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我并没有说老记号不好; 只不过, 我会展现一种不需要 "变量 x" 的积分法 (如何无变量地计算积分), 故我在此使用新记号. 本注的目的是告诉您传统的记号跟本书的记号的区别.

例 2.24 设 k 为常函数. 则不难看出,

$$\int_a^b k = (b-a)k.$$

现在, 我们看积分的一些基本性质. 不过, 我们先作一个约定.

定义 2.25 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 规定

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

定理 2.26 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

定义 2.27 设 $*$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的关系. 若 $(a, b) \in *$, 我们写 $a * b$. (比如说, $>$ 确定了关系 $\{(x, y) \mid x \text{ 高于 } y\}$. 我们一般不写 $(a, b) \in >$, 而写 $a > b$.)

设 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 f, g 都是 A 上的函数. 若对任意 $t \in A$, 都有 $f[t] * g[t]$, 则我们写 $f * g$.

定理 2.28 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 设 $f \leqslant g$. 则

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

定义 2.29 我们可简单地写 $\mathrm{abs} \circ f$ 为 $|f|$; 类似地, 我们也可简单地写 $\mathrm{sqrt} \circ f$ 为 $\sqrt{f}$.

例 2.30 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 不难验证 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. 故

$$\int_a^b (-|f|) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

也就是

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

不难看出, 对任意 $a, b \in I$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \left| \int_a^b |f| \right|.$$

定理 2.31 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

下面的结论很重要; 之后会用到.

定理 2.32 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $x \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} F\colon \quad & I \to \mathbb{R}, \\ & t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \dfrac{1}{t-x} \displaystyle\int_x^t f, & t \neq x. \end{cases} \end{aligned}$$

则 F 于 x 连续.

证　任取正数 ε. 我们的目标是, 找到正数 δ, 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in I$ 时, $|F[t]-F[x]|<\varepsilon$. 这相当于: 找到正数 δ, 使 $0<|t-x|<\delta$ 且 $t\in I$ 时,

$$\left|\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x]\right| < \varepsilon.$$

这不难. 首先, 注意到

$$f[x](t-x)=\int_x^t f[x],$$

故

$$\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x] = \frac{1}{t-x}\int_x^t (f-f[x]).$$

取低于 ε 的正数 e. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 d, 使 $|t-x|<d$ 且 $t\in I$ 时,

$$|f[t]-f[x]|<e.$$

所以

$$\left|\int_x^t (f-f[x])\right| \leqslant \left|\int_x^t |f-f[x]|\right| \leqslant \left|\int_x^t e\right| = |t-x|e.$$

也就是说, $0<|t-x|<d$ 且 $t\in I$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x]\right| &= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_x^t (f-f[x])\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|t-x|}\cdot |t-x|e \\ &= e < \varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

第三章　导数

本章简单地提及导数及其运算.

若无特别说明, 本章的函数的定义域都是区间.

3.1　背景

定义 3.1　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 若存在 x 的邻域 N, 与 $N \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续, 则说 f 于 x **可导**, 并称 $F[x]$ 为 f 于 x 的**导数**.

注 3.2　传统地, 我们用极限

$$\lim_{t \to x} \frac{f[t] - f[x]}{t - x}$$

是否存在定义 f 是否于 x 可导; 极限存在时, 它的值就是 f 于 x 的导数. 可以证明, 这二个定义是等价的; 不过, 既然我花了不少篇幅讨论连续函数, 我将呈现一种不一样的微分学 (求导学). 我采取的定义来自希腊算学家 Constantin Carathéodory. 假如您对此事感兴趣, 您可以阅读美国算学家 Stephen Kuhn 的名为 *The Derivative á la Carathéodory* 的文章 (不过, 我想说, 标题的 *á la* 应该是 *à la*).

我们看导数的一些基本性质. 在定义里, 若 f 于 x 可导, 则 f 于 x 的导数似乎不止一个. 不过, 我们即将说明, 导数是唯一的.

定理 3.3　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F_1, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F_1,$$

且 F_1 于 x 连续. 设存在 x 的邻域 N_2, 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 F_2, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F_2,$$

且 F_2 于 x 连续. 则 $F_1[x] = F_2[x]$. 也就是说, f 于 x 的导数, 若存在, 则唯一.

证　用反证法. 设 $F_1[x] \neq F_2[x]$, 则 $\varepsilon = |F_1[x] - F_2[x]|$ 是正数. 我们要由此推出矛盾.

因为 $N_1 \cap I$ 是区间, 且 F_1 于 x 连续, 故存在正数 δ_1, 使 $0 < |t - x| < \delta_1$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_1[t] - F_1[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $N_2 \cap I$ 是区间, 且 F_2 于 x 连续, 故存在正数 δ_2, 使 $0 < |t - x| < \delta_2$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_2[t] - F_2[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1 与 δ_2 中的较小者. 则 $0 < |t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= |F_1[x] - F_2[x]| \\
&= \left|\left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right) - \left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right| + \left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这是矛盾.　证毕.

例 3.4　设 a, b 为实数. 则 $a\imath + b$ 于其定义域的任意一点都可导. 具体地,

$$a\imath + b = (a\imath + b)[x] + (\imath - x)a,$$

而 a 是连续函数. 并且, $a\imath + b$ 于任意一点的导数都是 a.

定理 3.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导. 则 f 于 x 连续.

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N, 与 $N \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F,$$

且 F 于 x 连续.

因为 $\imath - x$ 于 x 连续, 故 $(\imath - x)F$ 于 x 连续; 因为 $f[x]$ 于 x 连续, 故 f 于 x 连续. 证毕.

定理 3.6 设 I 为区间. 设 f, g 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f, g 都于 x 可导. 则:

- $f + g$ 于 x 可导, 且

$$(f + g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) + (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 设 k 为常数. 则 kf 于 x 可导, 且

$$(kf \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = k \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- fg 于 x 可导, 且

$$(fg \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot g[x] + f[x] \cdot (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 若 $f[x] \neq 0$, 则 g/f 于 x 可导, 且

$$(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}.$$

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F,$$

且 F 于 x 连续. 类似地, 因为 g 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_2, 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 G, 使

$$g = g[x] + (\imath - x)G,$$

且 G 于 x 连续. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域. 这里, 为方便, 无妨滥用记号, 视 F, G 分别是 F, G 在 $N \cap I$ 上的限制. 此外, 注意到, f, g 于 x 的导数分别为 $F[x], G[x]$.

因为

$$\begin{aligned} f+g &= (f[x]+(\imath-x)F)+(g[x]+(\imath-x)G) \\ &= (f[x]+g[x])+(\imath-x)(F+G) \\ &= (f+g)[x]+(\imath-x)(F+G), \end{aligned}$$

且 $F+G$ 于 x 连续, 故 $f+g$ 于 x 可导, 且导数为 $(F+G)[x] = F[x]+G[x]$.

因为

$$\begin{aligned} kf &= k(f[x]+(\imath-x)F) \\ &= kf[x]+k(\imath-x)F \\ &= (kf)[x]+(\imath-x)(kF), \end{aligned}$$

且 kF 于 x 连续, 故 kf 于 x 可导, 且导数为 $(kF)[x] = k \cdot F[x]$.

因为

$$\begin{aligned} fg &= (f[x]+(\imath-x)F)(g[x]+(\imath-x)G) \\ &= f[x]g[x]+f[x](\imath-x)G+(\imath-x)Fg[x]+(\imath-x)F(\imath-x)G \\ &= (fg)[x]+(F\cdot g[x]+f[x]\cdot G+FG(\imath-x))(\imath-x), \end{aligned}$$

且 $h = F\cdot g[x]+f[x]\cdot G+FG(\imath-x)$ 于 x 连续, 故 fg 于 x 可导, 且导数为 $h[x] = F[x]g[x]+f[x]G[x]$.

最后一个等式需要一点儿技巧. 首先, 既然 $f[x] \neq 0$, 且 f 于 x 连续, 故存在 x 的邻域 M, 使 $t \in M \cap I$ 时,

$$|f[t]-f[x]| < \frac{|f[x]|}{2},$$

从而

$$|f[x]| = |f[t]-(f[t]-f[x])| \leqslant |f[t]|+|f[t]-f[x]| < |f[t]|+\frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, 在 M 上, $f \neq 0$. 从而, 在 $(M \cap N) \cap I$ 上,

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f^{-1}[x] + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f[x]}\right) \\ &= f^{-1}[x] - \frac{f - f[x]}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] - \frac{(\iota - x)F}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] + (\iota - x) \cdot \left(-\frac{F}{f[x]f}\right). \end{aligned}$$

因为 $-F/(f[x]f)$ 于 x 连续, 故 f^{-1} 于 x 可导, 且导数为 $-F[x]/(f^2[x])$.

注意到 $g/f = g \cdot f^{-1}$, 故 g/f 于 x 可导, 且

$$\begin{aligned} &(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (gf^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f^{-1}[x] + g[x] \cdot (f^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot \frac{1}{f[x]} + g[x] \cdot \left(-\frac{(f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f[x]f[x]}\right) \\ &= \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}. \end{aligned}$$

证毕.

例 3.7 我们知道, $a\iota + b$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 a. 特别地, 常函数于 x 的导数为 0, 而 ι 于 x 的导数为 1. 利用算学归纳法, 可算出, 当 n 为正整数时, ι^n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 nx^{n-1}. 由此, 多项式函数于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导. 进而, 有理函数于有定义的点可导. 顺便一提, 即使 n 为负整数, ι^n 于非零的 x 的导数仍为 nx^{n-1}.

定理 3.8 (链规则) 设 I, J 为区间. 设 f: $I \to J$, g: $J \to K$. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导, 且 g 于 $f[x]$ 可导. 则 $g \circ f$ 于 x 可导, 且

$$(g \circ f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (g \text{ 于 } f[x] \text{ 的导数}) \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

证 因为 g 于 $f[x]$ 可导, 故存在 $f[x]$ 的邻域 M, 与 $M \cap J$ 上的函数 G, 使

$$g = g[f[x]] + (\iota - f[x])G,$$

且 G 于 $f[x]$ 连续; 同时, $G[f[x]]$ 即为 g 于 $f[x]$ 的导数. 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续; 同时, $F[x]$ 即为 f 于 x 的导数.

因为 f 亦于 x 连续, 故对 $f[x]$ 的邻域 M 来说, 必存在 x 的邻域 N_2, 使 $f[N_2 \cap I] \subset M$; 又因为 f 的陪域为 J, 故 $f[N_2 \cap I] \subset J$. 所以, $f[N_2 \cap I] \subset M \cap J$. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域, 且 $f[N \cap I] \subset M \cap J$. 为方便, 无妨滥用记号, 视 F, f 分别是 F, f 在 $N \cap I$ 上的限制. (事实上, 本段文字只是保证复合 $G \circ f$ 有意义罢了.)

现在考察 $g \circ f$:

$$\begin{aligned} g \circ f &= g[f[x]] + (f - f[x])(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (\iota - x)F(G \circ f) \\ &= (g \circ f)[x] + (\iota - x) \cdot (G \circ f)F. \end{aligned}$$

因为 G 于 $f[x]$ 连续, 而 f 于 x 连续, 故 $G \circ f$ 于 x 连续; 又因 F 于 x 连续, 故 $(G \circ f)F$ 于 x 连续. 所以 $g \circ f$ 于 x 可导, 且导数为 $G[f[x]] \cdot F[x]$. 证毕.

定理 3.9 设 I, J 为区间. 设 f: $I \to J$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}$: $J \to I$. 设 $y \in J$. 设 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导. 则 $f^{[-1]}$ 于 y 可导的一个必要与充分条件是: f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

若 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数不等于零, 则

$$(f^{[-1]}\text{ 于 } y \text{ 的导数}) = \frac{1}{(f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数})}.$$

证 先看必要性. 既然 $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 那么 $\iota_J = f \circ f^{[-1]}$ 于 y 可导. 由链规则, 有

$$1 = (f \text{ 于 } f^{[-1]}[y] \text{ 的导数}) \cdot (f^{[-1]} \text{ 于 } y \text{ 的导数}).$$

从而 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

再看充分性. 因为 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 故存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[f^{[-1]}[y]] + (\iota - f^{[-1]}[y])F,$$

且 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续. 依假定, f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数 $F[f^{[-1]}[y]] \neq 0$. 所以, 存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_2, 使在 $N_2 \cap (N_1 \cap I)$ 上, $F \neq 0$. 取 $N = N_2 \cap N_1$, 则 N 也是 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域, 且在 $N \cap I$ 上, 不但有 $F \neq 0$, 还有

$$f = y + (\iota - f^{[-1]}[y])F.$$

因为 f 严单调, 且 I, J 都是区间, 故 f, $f^{[-1]}$ 都是连续函数. 特别地, $f^{[-1]}$ 于 y 连续. 故对 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N, 存在 y 的邻域 M, 使 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N$. 因为 $f^{[-1]}$ 的值域为 I, 故 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset I$. 也就是说, $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N \cap I$. (事实上, 这只是为保证复合 $F \circ f^{[-1]}$ 有意义.) 那么, 在 $M \cap J$ 上, 有

$$f \circ f^{[-1]} = y + (f^{[-1]} - f^{[-1]}[y])(F \circ f^{[-1]}),$$

即

$$f^{[-1]} = f^{[-1]}[y] + (\iota - y) \cdot \frac{1}{F \circ f^{[-1]}}.$$

因为 $f^{[-1]}$ 于 y 连续, 而 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续, 故 $F \circ f^{[-1]}$ 于 y 连续; 因为 (在 $M \cap J$ 上) $F \neq 0$, 故 $1/(F \circ f^{[-1]})$ 亦于 y 连续. 所以, $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且导数为 $1/F[f^{[-1]}[y]]$.　证毕.

最后, 我给出一个十分有用的事实; 不过, 由于没有足够多的工具, 我就不论证了.

定理 3.10　指数函数、馀弦函数、正弦函数于其定义域的每一点都可导. 具体地说:

- exp: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\exp[x]$.
- cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $-\sin[x]$,
- sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\cos[x]$.

3.2 无变量的导数计算

这是本章的重点; 这也是本书的一个重点. 不过, 不重要地, “无变量的导数计算” 的 “导数” 跟前面的 “导数” 不是一个词, 但仍有联系.

定义 3.11 设 f 是区间 I 上的函数. 若 f 于 I 的每一点都可导, 则定义函数

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[f]\colon \quad & I \to K, \\ & x \mapsto (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}), \end{aligned}$$

其中陪域 K 可视情况而定 (除非特别说明, 我们不在意陪域). 我们称 $\mathrm{D}[f]$ 为 f 的**导函数** (亦可简称其为 f 的**导数**).

抽象地, $\mathrm{D}[f]$ 的 D 本身就是一个函数; 不过, 这是一个变函数为函数的函数 (有点儿绕). 有时, 在不引起误会的时候, 我们也可写 $\mathrm{D}[f]$ 为 $\mathrm{D}f$; 毕竟, 至少在本书里, D 也只跟函数 “作用”.

当然, 我又忘记了一件事: 若 f 于 I 的每一点都可导, 我们就说 f 是 I 上的**可导函数**.

曾经, 我们写 “f 于 x 的导数是 ℓ”; 现在, 我们总算能简便地表此事以 $\mathrm{D}[f][x] = \ell$ 或 $\mathrm{D}f[x] = \ell$. 乘热打铁, 我们用简单的话转述前节的结论.

定理 3.12 设 f, g 都是区间 I 上的可导函数.

- $f + g$ 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}[f+g] = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g.$$
- 设 k 为常数. 则 kf 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}[kf] = k\mathrm{D}f.$$
- fg 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}[fg] = \mathrm{D}f \cdot g + f \cdot \mathrm{D}g.$$
- 设 $f \neq 0$. 则 g/f 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}\,\frac{g}{f} = \frac{\mathrm{D}g \cdot f - g \cdot \mathrm{D}f}{f^2}.$$

定理 3.13 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$, $g\colon J \to K$ 都是可导函数. 则 $g \circ f$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}[g \circ f] = (\mathrm{D}g \circ f) \cdot \mathrm{D}f.$$

定理 3.14 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}\colon J \to I$. 设 f 是可导函数, 且 $\mathrm{D}f \neq 0$. 则 $f^{[-1]}$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}f^{[-1]} = \frac{1}{\mathrm{D}f \circ f^{[-1]}}.$$

定理 3.15 导数表 I:

- $\mathrm{D}c = 0$, 此处 c 为常函数.
- $\mathrm{D}\,\iota^n = n\,\iota^{n-1}$ (n 为整数).
- $\mathrm{D}\exp = \exp$.
- $\mathrm{D}\cos = -\sin$.
- $\mathrm{D}\sin = \cos$.

用这四个定理, 我们可以**清楚地**、**有条理地**计算常见的函数的导 (函) 数. 我举一些例; 您可以拿本书的计算过程跟传统的导数计算过程比较.

例 3.16 因为 $\tan = \sin/\cos$, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\tan &= \mathrm{D}\,\frac{\sin}{\cos} \\ &= \frac{\mathrm{D}\sin \cdot \cos - \sin \cdot \mathrm{D}\cos}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\ &= \cos^{-2} = 1 + \tan^2.\end{aligned}$$

例 3.17 因为 $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 严增, $\mathbb{R}, (0, +\infty)$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\exp = \exp > 0$, 故 $\ln\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\ln = \frac{1}{\mathrm{D}\exp \circ \ln} = \frac{1}{\exp \circ \ln} = \frac{1}{\iota}.$$

因为 $\sin\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to (-1, 1)$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4)$, $(-1, 1)$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\sin = \cos > 0$, 故 $\arcsin\colon (-1, 1) \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\arcsin = \frac{1}{\mathrm{D}\sin \circ \arcsin} = \frac{1}{\cos \circ \arcsin} = \frac{1}{\mathrm{sqrt} \circ (1 - \iota^2)}.$$

因为 $\tan\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to \mathbb{R}$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4)$, $\mathbb{R}$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\tan = 1+\tan^2 > 0$, 故 $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\arctan = \frac{1}{\mathrm{D}\tan\circ\arctan} = \frac{1}{(1+\tan^2)\circ\arctan} = \frac{1}{1+\iota^2}.$$

设 n 为正整数. 因为 $\iota^n\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 严增, $(0,+\infty)$ 是区间, 且 $\mathrm{D}\,\iota^n = n\cdot\iota^{n-1} > 0$, 故 $\iota^{1/n}\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\,\iota^{1/n} = \frac{1}{\mathrm{D}\,\iota^n\circ\iota^{1/n}} = \frac{1}{(n\cdot\iota^{n-1})\circ\iota^{1/n}} = \frac{1}{n}\iota^{1/n-1}.$$

设 m 为整数. 则 $\iota^{m/n} = (\iota^{1/n})^m = \iota^m\circ\iota^{1/n}$. 故

$$\mathrm{D}\,\iota^{m/n} = (\mathrm{D}\,\iota^m\circ\iota^{1/n})\cdot\mathrm{D}\,\iota^{1/n} = ((m\cdot\iota^{m-1})\circ\iota^{1/n})\cdot\frac{1}{n}\iota^{1/n-1} = \frac{m}{n}\iota^{m/n-1}.$$

也就是说, 对任意有理数 r, $\mathrm{D}\,\iota^r = r\,\iota^{r-1}$.

例 3.18 定义符号函数:

$$\begin{aligned}\mathrm{sign}\colon\quad & \mathbb{R} \to \{1,0,-1\},\\ & t \mapsto \begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t=0;\\ -1, & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

设 I 是某个不含 0 的区间. 故 sign (在 I 上的限制) 是常函数, 且导数为 0.

不难看出, $\mathrm{abs} = \mathrm{sign}\cdot\iota$. 所以,

$$\mathrm{D}\,\mathrm{abs} = \mathrm{D}\,\mathrm{sign}\cdot\iota + \mathrm{sign}\cdot\mathrm{D}\,\iota = \mathrm{sign} = \frac{\mathrm{abs}}{\iota}.$$

由此, 我们可计算 $\ln\circ\mathrm{abs}$ 的导数:

$$\mathrm{D}[\ln\circ\mathrm{abs}] = (\mathrm{D}\ln\circ\mathrm{abs})\cdot\mathrm{D}\,\mathrm{abs} = \left(\frac{1}{\iota}\circ\mathrm{abs}\right)\cdot\frac{\mathrm{abs}}{\iota} = \frac{1}{\iota}.$$

我们添加上面的计算结果到导数表 I, 就得到了一张较为完善的导数表 II. 以后, 我们的导数计算十分依赖此表与导数表 I 前的三个定理.

定理 3.19 导数表 II:

- $\mathrm{D}c = 0$, 此处 c 为常函数.
- $\mathrm{D}\,\iota^r = r\,\iota^{r-1}$ (r 为有理数).
- $\mathrm{D}\exp = \exp$.
- $\mathrm{D}\cos = -\sin$.
- $\mathrm{D}\sin = \cos$.
- $\mathrm{D}\tan = \cos^{-2} = 1 + \tan^2$.
- $\mathrm{D}\ln = \mathrm{D}[\ln \circ \mathrm{abs}] = \iota^{-1}$.
- $\mathrm{D}\arcsin = \mathrm{sqrt}^{-1} \circ (1 - \iota^2)$.
- $\mathrm{D}\arctan = 1/(1 + \iota^2)$.
- $\mathrm{D}\,\mathrm{abs} = \mathrm{abs}/\iota = \mathrm{sign}$.
- $\mathrm{D}\,\mathrm{sqrt} = \iota^{-1} \circ (2\,\mathrm{sqrt})$.

参考文献

[1] MENGER K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.

[2] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.

[3] KUHN S. The derivative á la Carathéodory[J]. The American Mathematical Monthly, 1991, 98(1): 40-44.

[4] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/.

[5] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/.

[6] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/.

[7] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables[EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/.

[8] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/.

[9] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/.

[10] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/.

[11] 梅加强. 数学分析[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 66-77.