几乎无变量的微积分

78 分快速上手

纳纳米

版本 6, 2022 年 4 月 11 日

目录

前言

定义　算学 = mathematics.

本书的标题是《几乎无变量的微积分》. 您按字面意思理解此标题就好; 本书讨论的微积分并不是没有变量, 而是减少了变量的使用. 本书的 “微积分” 跟 “分析学” 不一样. 我姑且这么描述: 分析学更偏向理论与理论间的联系 (如极限、连续、导数、积分等概念的联系), 而微积分更偏向具体的计算 (您当然可以认为 “微积分” 就是分析学; 这样的话, 本书的标题就应该是《几乎无变量地计算导数、不定积分、积分》). 本书是一本算普读物 (算学普及读物). 本书并**不是**从**零**教您微积分 (假如我要写这样的书, 那我可能要更多时间与更多力气大改现有的微积分符号); 相反, 本书假定您会 (最基本的) 微积分. 这样, 我就可以专心展现无变量的微积分演算是什么样的. 您在看本书时, 可以拿我展现的计算过程跟微积分教材 (或高等算学教材, 也可以是算学分析教材) 作对比. 这样, 您可以看到这种 (几乎) 无变量的微积分在某些地方确实是有优势的.

本书的副标题是《78 分快速上手》. 其实, 您不必太在意这个副标题里的 “78 分”; 这只是一个 “旧客” (胡话: joke). 假如忽略本书的标题页、目录、前言、参考文献, 那么本书就只有 78 页. 我假定您至多用 1 分 (即 60 秒) 看 1 页. 这么看来, 您至多用 78 分就可以了解最基本的微积分. 不过, 认真地, 若我至多用 1 分看 1 页**算学书**, 我可能学不到什么东西.

我不是这本小书欲讨论的对象的创始人. 一位美籍奥地利裔算学家 Karl Menger 在 1949 年发表了名为 *Are variables necessary in calculus?* 的文章. 一位捷克的数据科学家、语言学家、地理学家与音乐人 Jakub Marian 在 2014 年又提到了这个话题. 我在 2022 年 3 月也独立地搞出了一些东西. 不过, 我菜, 只搞出了 “几乎无变量的一元微积分”. 当我想写这本小书时, 我才

开始查阅文献. 不出意外, 我查到了一些资料 (不过并不是很多, 因为跟我的个人计算机焊接的互联网上的资源有限). 我仔细地阅读了这些资料, 并对自己的记号作出了一些改进. 我在参考文献里列出了无变量的微积分的文献, 您可以去看一看 (毕竟我不能很好地用文字表达我的想法).

相信大家都学过函数. 在初中算学里, 我们用变量定义函数. 下面是湘教版八年级下册的算学课本的定义.

定义 在讨论的问题中, 称取值会发生变化的量为**变量**, 称取值固定不变的量为**常量** (或**常数**).

定义 一般地, 如果变量 y 随着变量 x 而变化, 并且对于 x 取的每一个值, y 都有唯一的一个值与它对应, 那么称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 这里的 $f(x)$ 是胡话 a function of x (土话: x 的函数) 的简记. 这时叫 x 作**自变量**, 叫 y 作**因变量**. 对于自变量 x 取的每一个值 a, 称因变量 y 的对应值为**函数值**, 并记其作 $f(a)$.

这个定义, 虽不是很严谨, 但很形象. 至少, 刚接触 "函数" 的人会对函数有比较形象的认识. 早期的算学家就是用 "这种函数" 讨论微积分的. 不过, 随着算学的发展, 算学家需要对算学对象有严格的阐述. 函数也不例外. 1914 年, 德国算学家 Felix Hausdorff 在他的 *Grundzüge der Mengenlehre* 里用 "有序对" 定义函数 (在本书, 我也会这么定义函数). 这种定义当然避开了非算学话 "变量" "对应". 不过, 更严谨地看, "有序对" 是什么? 能不能用更基础的东西定义它? 1921 年, 波兰算学家 Kazimierz Kuratowski 在他的文章 *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* 里定义 (a,b) 为 $\{\{a\},\{a,b\}\}$. 于是, 可以**证明**,

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c \text{ 且 } b=d.$$

这样, Hausdorff 的定义就更完美了.

尽管函数有现代的定义, 函数也有现代的、不带变量的记号 f (而不是 $f(x)$), 可我们在进行微积分计算时, 还是用带变量的记号进行计算. 具体地, 我们计算导数时, 用的记号是

$$f'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x);$$

我们计算不定积分时, 用的记号是

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x;$$

我们计算积分时, 用的记号是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

请允许我暂时跑题. 我并没有说这些记号不好. 相反, 这些记号十分经典, 经得起时间与算学家的考验. 我自己初学微积分 (与算学分析) 时, 就是用这套经典记号的. 比如, 可形象地写求导数的链规则为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

这里 $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$. 视导数为 "变率", 那这就是在说, y 关于 x 的变率等于 y 关于 u 的变率与 u 关于 x 的变率的积. 很形象吧? 假设 A, B, C 三人在直线跑道上匀速前进. A 的速率是 B 的速率的 $\frac{11}{10}$ (也就是说, A 比 B 快 $\frac{1}{10}$), 而 B 的速率是 C 的速率的 $\frac{9}{10}$ (也就是说, B 比 C 慢 $\frac{1}{10}$), 那么 A 的速率是 C 的速率的 $\frac{99}{100}$; 这就是二个比的积.

回到正题. 我们已经看到, 我们通用的微积分记号带着朴素的函数思想. 此现象让我好奇. 我就想: "有没有不要变量的微积分? 或者说, 有没有几乎不要变量的微积分?" 我认真思考了几日. 至少, 我已经习惯用 D 表示求导, 所以导数似乎不是什么问题. 比方说, $\mathrm{D}\exp = \exp$, $\mathrm{D}\cos = -\sin$, $\mathrm{D}\sin = \cos$. 不过, 当我想表达 $\mathrm{D}\ln$ 时, 我意识到了一个重要的问题: "已知 $\mathrm{D}\ln x = 1/x$. 左边的 $\ln x$ 就是 $\ln$, 可右边的 $1/x$ 应该是什么?" 想起胡话里, reciprocal 是倒数的意思, 我就定义

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}\colon\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} &\to \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

这样, 我就可以写 $\mathrm{D}\ln = \mathrm{rec}$. 不过, 我还是没法好好地表示 $\mathrm{D}\arcsin$ 跟 $\mathrm{D}\arctan$. 我这时才意识到, 因为在微积分里, 有名的 (是 named, 而不是 well-known 或 famous) 函数不够多, 所以我想表达普普通通的导数都要自己起名

字. 不至于碰到一个函数就起名字吧? 所以, 我定义了所谓的 “什么也不干” 的函数

$$\begin{aligned}\mathrm{fdn}\colon\quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto x\end{aligned}$$

(fdn 乃 the function that does nothing 之略). 这样, 再利用函数的运算, 我总算能无变量地写出基本的求导公式了.

我随后又作出了无变量不定积分与无变量积分的理论. 不过, 我写不下去了 (没作出几乎无变量的多元函数微积分的理论), 因为我的水平不够高. 我想, 也差不多了, 就打开视觉工作室代码, 用乳胶写书. 上一次写代数书时过于随意, 没好好写前言; 这一次, 我就想认真地写前言. 自然地, 我想查一查前人是否有相关研究. 不出意外地, 查到了几篇资料. 我认真地看了看, 并修正了自己用的一些记号与理论. 可以说, 这是站在巨人的肩膀上的 “读书报告”: 这本书 “浪费了” 巨人的肩膀, 并没有新鲜的算学. 不过, 我想, 最起码, 我还是能视这本书为算普读物的.

上一次, 我写代数书的时候, 我的乳胶水平还比较低, 代码一团糟. 甚至, 最近, 我欲重编译它, 结果出现了错误 (我也不想管它了, 暂时就让它烂着吧). 这一次, 我写微积分读物, 内容简单一些, 代码也更规范一些了. 上一本书的一些 “优良传统” 也来到了这本书上: 开源代码 (the Unlicense), 并给自己的书套用 CC0 许可协议, 让这本书进入公有领域. 当然, 如果您仅仅是读我的书, 对您而言, 这些 “优良传统” 是不重要的.

您可以去以下的二个网址的任意一个获取本书的最新版:

`https://gitee.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

`https://github.com/septsea/calculus-with-almost-no-variables`

最后, 我向一位取不来名字的网友表示感谢.

纳纳米

2022 年 4 月 11 日

第一章　集与函数

我先简单地介绍一下基础概念吧.

1.1　集

定义 1.1　**集**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体. 称其对象为**元**.

注 1.2　事实上, 集与元是所谓的 “原始概念”. 我们至多**描述**集或元是什么; 我们无法**定义**集或元.

定义 1.3　无元的集是**空集**.

注 1.4　或许您在别的地方能看到形如 $\varnothing$ 的文字. 这是算学家为空集造的符号. 不过, 本书用不到这个记号.

注 1.5　一般用小写字母表示元, 大写字母表示集. 这是大多数算学家的习惯.

定义 1.6　一般地, 若集 A 由元 $a, b, c, \cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \cdots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

定义 1.7　若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a **属于** A 或 A **包含** a. 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a **不属于** A 或 A **不包含** a.

注 1.8　"属于" 也是原始概念.

定义 1.9　若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的**子集**或 B 是 A 的**超集**. 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用 "真" 形容之.

注 1.10　或许, 您在别的地方能看到形如 $\subseteq$, $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 的记号. 本书用不到这些记号; 本书就用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集. 事实上, 我们很少需要真子集的概念; 假如我们必须要说 A 是 B 的真子集, 我们再加上 $A \neq B$ 即可.

例 1.11　设 $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$. 不难看出, $0 \in C$, $1 \notin C$, $C \subset B$.

注 1.12　空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

定义 1.13　若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A **等于** B, 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

定义 1.14　集 A 与 B 的**交**是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的**并**是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集的交与并.

例 1.15　设 E 是全体偶数作成的集; 设 O 是全体奇数作成的集. 不难看出, $E \cap O$ 为空集, 而 $E \cup O$ 恰为全体整数作成的集.

定义 1.16　设 A, B 是集. 定义

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

注 1.17 值得注意的是, 我们没说 $B \subset A$.

定义 1.18 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

这里, (a, b) 是**有序对**. 我们规定, 二个有序对 (a, b) 与 (c, d) 相等相当于 $a = c$ 且 $b = d$.

类似地,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 相等, 相当于 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

注 1.19 一般地, $A \times B \neq B \times A$.

注 1.20 设 A, B 分别有 m, n 个元. 则 $A \times B$ 有 mn 个元.

定义 1.21 一般地, $\mathbb{N}$ 指全体非负整数作成的集; $\mathbb{Z}$ 指全体整数作成的集; $\mathbb{Q}$ 指全体有理数作成的集; $\mathbb{R}$ 指全体实数作成的集; $\mathbb{C}$ 指全体复数作成的集. 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 1.22 在微积分里, $\mathbb{R}$ 的九类子集十分重要. 具体地, 任取实数 a, b, 其中 $a < b$. 那么我们记:

(1) $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
(2) $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;
(3) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;
(4) $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;
(5) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$;
(6) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$;
(7) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;
(8) $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$;
(9) $[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$.

统称这九类子集为**区间**. a 是区间 $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ 的**左端点**; b 是区间 $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ 的**右端点**; 左端点与右端点都是**端点**.

有时, 我们认为 $\{a\}$ 是**退化为一点的区间** $[a,a]$; 我们认为空集是**空区间** $[a,a)$, (a,a), $[a,a)$, $[b,a)$, (b,a), $(b,a]$ 或 $[b,a]$. 退化为一点的区间与空区间都是**退化区间**.

注 1.23 设 a, b, c 是实数. 说 b 介于 a 跟 c 之间, 就是说 $a \leqslant b \leqslant c$ 或 $c \leqslant b \leqslant a$ (简单地, 就是 $(b-a)(b-c) \leqslant 0$). 这里, 我们临时地模糊区间与退化区间的差异, 统称其为 "区间". 那么, 显而易见地, 任给一个区间 I, 任取 I 的二个相异实数 a, b, 则每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元. 反过来, 若 $\mathbb{R}$ 的子集 I 适合 "任取 I 的二个相异实数, 每个介于 a 跟 b 之间的实数必为 I 的元", 则 I 是区间. 此事的论证依赖实数的完备性, 故我就不继续展开它了. 若您对此事感兴趣, 可参考算学家张筑生的《数学分析新讲》.

1.2 关系与函数

定义 1.24 设 A, B 是集. $A \times B$ 的子集称为 A 到 B 的**关系**.

定义 1.25 设 A, B 是集. 若 A 到 B 的关系 f 适合下述性质, 则说 f 是 A 到 B 的**函数** (或**映射**):

- 任取 $a \in A$, 必有 $b \in B$ 使 $(a,b) \in f$;
- 若 (a,b) 与 (a,c) 均为 f 的元, 则 $b = c$.

设 $(a,b) \in f$. 我们记此事为 $b = f[a]$, 并说 b 是 a 在函数 f 下的**像**, a 是 b 在函数 f 下的一个**逆像**.

我们通常也可如此表示函数 f:

$$\begin{aligned} f\colon\quad & A \to B, \\ & a \mapsto b = f[a]. \end{aligned}$$

"$f\colon A \to B$" 是 "f 是 A 到 B 的函数" 的简写.

注 1.26 一般地, 我们写 a 在函数 f 下的像为 $f(a)$, 而不是 $f[a]$. 不过, 出于某些原因 (之后就会看到), 此处用方括号.

例 1.27　设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$. 显然, $A \times B$ 有 6 个元. 不难看出, $A \times B$ 有 64 个子集, 故 A 到 B 的关系共有 64 个. 不过, A 到 B 的函数只有 8 个.

定义 1.28　在本书, 我们为 "什么也不干" 的函数起一个名字. 具体地说, 设 $A \subset B$. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_{A,B}\colon \quad & A \to B, \\ & a \mapsto a = \iota_{A,B}[a], \end{aligned}$$

其中 ι 是希腊字母 iota.

我们简单地写 $\iota_{A,A}$ 为 ι_A. 有时, 若既不必指出 A, 也不必指出 B, 我们直接写 ι. 换句话说: ι (或者带下标的 ι_A, $\iota_{A,B}$) 啥也不干, 即 $\iota[x] = x$, 其中 x 可以是任意文字.

一般也称 ι 为**恒等函数**.

定义 1.29　设 f 是 A 到 B 的函数. 称 A 为 f 的**定义域**; 称 B 为 f 的**陪域**.

定义 1.30　设 $C \subset A$. 设 $f\colon A \to B$. 我们记

$$f[C] = \{f[c] \mid c \in C\}.$$

特别地, 称 $f[A]$ 为 f 的**值域**. 显然 f 的值域是 f 的陪域的子集.

注 1.31　设 $f\colon A \to B$. 若 $D \subset C \subset A$, 则 $f[D] \subset f[C]$.

定义 1.32　设 f, g 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 都有 $f[a] = g[a]$, 则说 $f = g$.

可写 $f = g$ 的否定为 $f \neq g$. 具体地说, 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] \neq g[a]$, 则说 $f \neq g$.

定义 1.33　设 R 是 A 到 B 的关系. B 到 A 的关系

$$S = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

称为 R 的**反关系**.

定义 1.34　设 f 是 A 到 B 的函数. 若 f 的反关系 g 是 B 到 A 的函数, 则称 g 是 f 的**反函数**. 我们写 f 的反函数为 $f^{[-1]}$.

注 1.35　不难验证, 若 g 是 f 的反函数, 则 f 也一定是 g 的反函数. 这是因为 R 的反关系的反关系是 R.

定义 1.36　设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 C 到 D 的函数, 且 $f[A] \subset C$. 任取 A 的元 a. 按照函数的定义, 存在唯一的 $b \in f[A]$ 使 $(a, b) \in f$. 既然 $b \in f[A] \subset C$, 再根据函数的定义, 存在唯一的 $d \in g[C] \subset D$ 使 $(b, d) \in g$. 这样的 d 可用 $g[f[a]]$ 表示. 作 A 到 D 的关系

$$g \circ f = \{(a, g[f[a]]) \mid a \in A\}.$$

不难验证, 这是 A 到 D 的函数. 我们称函数 $g \circ f$ 为 f 与 g 的**复合**.

注 1.37　设 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, 且 $f[A] \subset C$. 设 $E \subset A$. 那么 $f[E] \subset f[A] \subset C$, 故 $g[f[E]]$ 是有意义的. 我们说, $g[f[E]] = (g \circ f)[E]$.

取 $d \in g[f[E]]$. 按定义, 存在 $t \in f[E]$ 使 $g[t] = d$. 对这个 t 而言, 又存在 $e \in E$ 使 $f[e] = t$. $(g \circ f)[e]$, 按定义, 等于 $g[f[e]]$, 也就是 $g[t]$, 也就是 d. 所以 $d \in (g \circ f)[E]$. 这说明 $g[f[E]] \subset (g \circ f)[E]$.

取 $d' \in (g \circ f)[E]$. 按定义, 存在 $e' \in E$ 使 $(g \circ f)[e'] = d'$. 所以 $t' = f[e'] \in f[E]$. 那么 $g[t'] = d'$. 所以 $d' \in g[f[E]]$. 这说明 $g[f[E]] \supset (g \circ f)[E]$.

既然 $g[f[E]]$ 跟 $(g \circ f)[E]$ 相互包含, 二者必相等.

或许上面的论证比较枯燥; 或许此事比较显然. 不过, 严谨的算学就是像上面这样, 用定义说话, 而不是想当然. 毕竟, 尽管我们定义了 $a \in A$ 时 $(g \circ f)[a]$ 就是 $g[f[a]]$, 可我们并没有**定义** $(g \circ f)[E]$ 是 $g[f[E]]$. 大算学家 John von Neumann 说过: “Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.” 所以, 习惯就好了.

注 1.38　设 $f\colon A \to B$. 那么 $f \circ \iota_A = f$, 且 $\iota_B \circ f = f$.

注 1.39　一般地, $g \circ f \neq f \circ g$. 一方面, $g \circ f$ 有定义时, $f \circ g$ 可能无定义; 另一方面, 即使 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 都有定义, 二者也不一定相等.

定理 1.40 函数的复合是**结合的**. 具体地说, 设 $f\colon A\to B$, $g\colon C\to D$, $h\colon E\to F$, 且 $f[A]\subset C$, $g[C]\subset E$. 那么

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $h\circ g\circ f$.

证 $q=g\circ f$ 是 A 到 D 的函数, 且 $p=h\circ g$ 是 C 到 E 的函数. 因 $q[A]=g[f[A]]\subset g[C]\subset E$, 故 $h\circ q=h\circ(g\circ f)$ 是 A 到 F 的函数; 因 $f[A]\subset C$, 故 $p\circ f=(h\circ g)\circ f$ 也是 A 到 F 的函数. 任取 $a\in A$. 则

$$(h\circ(g\circ f))[a]=h[(g\circ f)[a]]=h[g[f[a]]],$$
$$((h\circ g)\circ f)[a]=(h\circ g)[f[a]]=h[g[f[a]]].$$

证毕.

定义 1.41 设 f 是 A 到 B 的函数.

- 若任取 A 的相异二元 a 与 a', 都有 $f[a]\neq f[a']$, 则称 f 是**单函数**.
- 若对任意 $b\in B$, 都存在 $a\in A$ 使 $f[a]=b$, 则称 f 是**满函数**.

例 1.42 设 $A\subset B$. A 到 B 的函数 $\iota_{A,B}$ 总是单函数. 不过, 若 $A\neq B$, 则 $\iota_{A,B}$ 不是满函数.

注 1.43 设 $B\subset C$. 设 f 是 A 到 B 的函数, g 是 A 到 C 的函数, 且对任意 $a\in A$, $f[a]=g[a]$. 那么, f 是单函数的一个必要与充分条件是: g 是单函数. 若 f 不是满函数, 则 g 也不是.

若 f 是满函数, 则 g 也是满函数的一个必要与充分条件是: $B=C$.

定理 1.44 设 f 是 A 到 B 的函数. 设 B 到 A 的函数 g 适合如下性质:

- 对任意 $a\in A$, $g[f[a]]=a$; 也就是说, $g\circ f=\iota_A$.
- 对任意 $b\in B$, $f[g[b]]=b$; 也就是说, $f\circ g=\iota_B$.

则:

- 至多有一个这样的 g;
- g 是 f 的反函数.

证 至多只有一个这样的 g 是显然的. 具体地, 若 $g'\colon B\to A$ 适合 $g'\circ f=\iota_A$, 且 $f\circ g'=\iota_B$, 则

$$g=g\circ\iota_B=g\circ(f\circ g')=(g\circ f)\circ g'=\iota_A\circ g'=g'.$$

下证 g 是 f 的反函数. 事实上, 若 h 是 f 的反函数, 则不难验证 h 适合上述二条性质. 所以 $g = h$. 证毕.

定理 1.45　设 $f\colon A \to B$ 与 $g\colon B \to C$ 的反函数分别是 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 与 $g^{[-1]}\colon C \to B$. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 有反函数, 且

$$(g \circ f)^{[-1]} = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}.$$

证　记 $q = f^{[-1]} \circ g^{[-1]}\colon C \to A$; 记 $p = g \circ f$. 不难用结合律验证 $q \circ p = \iota_A$, 且 $p \circ q = \iota_B$. 这里以 $q \circ p$ 为例:

$$\begin{aligned}
q \circ p &= q \circ (g \circ f) \\
&= (q \circ g) \circ f \\
&= ((f^{[-1]} \circ g^{[-1]}) \circ g) \circ f \\
&= (f^{[-1]} \circ (g^{[-1]} \circ g)) \circ f \\
&= (f^{[-1]} \circ \iota_B) \circ f \\
&= f^{[-1]} \circ f \\
&= \iota_A.
\end{aligned}$$

证毕.

注 1.46　不难看出, 函数 f 有反函数的一个必要与充分条件是: f 是单函数, 且 f 是满函数.

我们称既是单函数, 也是满函数的函数为**双函数**.

定义 1.47　设 f 是 A 到 B 的函数. 设 $C \subset A$. 作 C 到 B 的关系

$$f_C = \{(c, f[c]) \mid c \in C\}.$$

易知, f_C 是 C 到 B 的函数. 我们说, f_C 是 f 在 C 上的**限制**.

1.3　函数的演算

注　本节的语言或许比较混乱.

本节讨论 $\mathbb{R}$ 的子集到 $\mathbb{R}$ 的子集的函数及其演算.

您应该还能想起, 本书的标题是 “几乎无变量的微积分”. 所以, 为了实现此目标, 我们首先得无变量地表达常见的函数 (初等函数).

在此之前, 我们引入一个简单的术语.

定义 1.48 设 $f\colon A \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ 且 $0 \in B$. 若存在 $a \in A$ 使 $f[a] = 0$, 就说 a 是 f 的一个**根**.

现在我们介绍一些 “基本初等函数”.

定义 1.49 本书经常使用如下函数.

(1) 恒等函数:

$$\begin{aligned} \iota\colon\quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto x; \end{aligned}$$

(2) 常函数:

$$\begin{aligned} c\colon\quad & \mathbb{R} \to \{c\}, \\ & x \mapsto c, \end{aligned}$$

其中 c 是某个事先指定的实数;

(3) 指数函数:

$$\begin{aligned} \exp\colon\quad & \mathbb{R} \to (0, +\infty), \\ & x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \end{aligned}$$

(4) 正弦函数:

$$\begin{aligned} \sin\colon\quad & \mathbb{R} \to [-1, 1], \\ & x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \end{aligned}$$

(5) 余弦函数:

$$\begin{aligned} \cos\colon\quad & \mathbb{R} \to [-1, 1], \\ & x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}; \end{aligned}$$

(6) 正切函数:

$$\begin{aligned} \tan\colon\quad \{x \mid \cos[x] \neq 0\} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{\sin[x]}{\cos[x]}; \end{aligned}$$

(7) 对数函数:

$$\begin{aligned} \ln\colon\quad (0, +\infty) &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \exp^{[-1]}[x]; \end{aligned}$$

(8) 反正弦函数:

$$\begin{aligned} \arcsin\colon\quad [-1, 1] &\to \left[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right], \\ x &\mapsto s^{[-1]}[x], \end{aligned}$$

其中 s 指 sin 在 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$ 上的限制 $\sin_I\colon I \to [-1, 1]$, 2π 是 cos 的最小正根的四倍;

(9) 反正切函数:

$$\begin{aligned} \arctan\colon\quad \mathbb{R} &\to \left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right), \\ x &\mapsto t^{[-1]}[x], \end{aligned}$$

其中 t 指 tan 在 $J = (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 上的限制 $\tan_J\colon J \to \mathbb{R}$;

(10) 绝对值函数:

$$\begin{aligned} \mathrm{abs}\colon\quad \mathbb{R} &\to [0, +\infty), \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(11) 根号函数:

$$\begin{aligned} \mathrm{sqrt}\colon\quad [0, +\infty) &\to [0, +\infty), \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

注 1.50　在本书, 2π 是一个整体记号.

利用这些函数与复合, 我们可以作出一些稍复杂的函数.

例 1.51 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} f\colon \quad & A \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]. \end{aligned}$$

我们可以用无变量的记号表达 f 的定义. 具体地,

$$f = \exp \circ \operatorname{sqrt} \circ \ln_A.$$

这里, $\ln_A$ 自然是 $\ln$ 在 A 上的限制.

不过, 复合并不够用.

例 1.52 设 $A = [1, +\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g\colon \quad & A \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right] + \sin[x] + x^3. \end{aligned}$$

怎么用无变量的记号表达 g 的定义呢? 似乎并不太好办. 我们可分别写 $\exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]$ 跟 $\sin[x]$ 为 $\exp \circ \operatorname{sqrt} \circ \ln_A$ 与 $\sin_A$; 可是, 我们要怎么写 x^3? 就算写出来, 又该如何拼接这三项呢?

定义 1.53 设 A, B, C 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$. 设 $*$ 是文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$\begin{aligned} f * g\colon \quad & A \to D, \\ & x \mapsto f[x] * g[x], \end{aligned}$$

其中陪域 $D \subset \mathbb{R}$ 可视具体情况待定. 一般地, 若 $*$ 是乘号 $\cdot$, 则可被省略. 可写 $0_A - f$ 为 $-f$; 这里 0_A 当然是常函数 0 在 A 上的限制.

若对任意 $x \in A$, 都有 $f[x] \neq 0$, 则还可定义

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}\colon \quad & A \to E, \\ & x \mapsto \frac{g[x]}{f[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $E\subset\mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

若对任意 $x\in A$, $f[x]^{g[x]}$ 有意义, 则还可定义

$$\begin{aligned} f^g\colon\quad & A\to F,\\ & x\mapsto f[x]^{g[x]}, \end{aligned}$$

其中陪域 $F\subset\mathbb{R}$ 可视具体情况待定.

例 1.54 设 $A=[1,+\infty)$. 设

$$\begin{aligned} g\colon\quad & A\to\mathbb{R},\\ & x\mapsto \exp\left[\sqrt{\ln[x]}\right]+\sin[x]+x^3. \end{aligned}$$

现在我们可以写 x^3 为 $(\imath_A)^{3_A}$. 所以

$$g=(\exp\circ\operatorname{sqrt}\circ\ln_A+\sin_A)+(\imath_A)^{3_A};$$

这里, 我们取陪域为 $\mathbb{R}$.

现在, 我们可以无变量地表达很多函数了. 可您应该也注意到了一个问题: 无变量地表达函数并不是很方便. 为了体现定义域, 我们动用了限制. 上例的 g 还不是很复杂, 但我们还是用了 4 次限制. 取 $B=(0,1)$. 令

$$\begin{aligned} h\colon\quad & B\to\mathbb{R},\\ & x\mapsto \ln\left[\frac{x-\sin[x]}{1-x}\right]+\sqrt{2\pi-\exp[x]}, \end{aligned}$$

那我们就要写

$$h=\ln\circ\frac{\imath_B-\sin_B}{1_B-\imath_B}+\operatorname{sqrt}\circ((2\pi)_B-\exp_B).$$

不过, 幸运地, 这个问题并不是什么大问题.

原则上, 一个函数的三要素是定义域、陪域与 “对应法则”. 不过, 您无妨回想一下您学过的算学. 当我们看到形如 “函数 $f(x)=\sqrt{1+x}+\ln(1-x)$” 这样的文字时, 我们其实视这个 f 的定义域为全体使 $f(x)$ 有意义的一切实数作成的集 (也就是 $[-1,1)$); 当我们看到形如 “函数 $g(x)=1-x$ ($x\in$

$[-1,0]$)” 的文字时, 我们认为 g 的定义域为已经提到的集 $[-1,0]$. f 跟 g 的陪域呢? 没说, 就选一个包含值域的集即可 (比如说, “万能的” $\mathbb{R}$).

这种写法虽失去一些严谨, 但并不特别影响使用 (当然, 讨论满函数与反函数时, 就要谨慎了). 所以, 我们作出如下的约定:

- 除非特别声明, 我们不严格区分函数及其限制.
- 除非特别声明, 我们认为函数的陪域可以按实际需要而确定. 一般地, 我们取 $\mathbb{R}$.

这样, 我们可以简单地且无变量地表达函数. 比如说, 我们可直接写上面的 h 为

$$h = \ln \circ \frac{\iota - \sin}{1 - \iota} + \mathrm{sqrt} \circ (2\pi - \exp).$$

定义 1.55 我们称定义域为 A 的函数为 (定义在) A 上的函数.

借此机会, 我们再定义一个常用的说法.

定义 1.56 若 $B \subset A$, f 是 A 上的函数, 我们说 f 在 B 上有定义.

采取上述约定后, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} &f + g = g + f, && fg = gf, \\ &(f+g)+h = f+(g+h), && (fg)h = f(gh), \\ &f(g+h) = fg + fh, && (f+g)h = fh + gh. \end{aligned}$$

这里 f, g, h 都是 A 上的函数.

设函数 ℓ 的值域是 A 的子集. 记 $f \,/\, g = \frac{f}{g}$, $f \wedge g = f^g$. 设 $*$ 是五文字 $+$, $-$, $\cdot$, /, ^ 的任意一个. 则

$$(f * g) \circ \ell = (f \circ \ell) * (g \circ \ell).$$

上面的等式的验证并不难; 用函数的相等的定义验证即可. 比方说,

$$\begin{aligned} ((f * g) \circ \ell)[x] &= (f * g)[\ell[x]] = f[\ell[x]] * g[\ell[x]] \\ &= (f \circ \ell)[x] * (g \circ \ell)[x] = ((f \circ \ell) * (g \circ \ell))[x]. \end{aligned}$$

您可以按完全类似的套路论证关于 $+$ 与 $\cdot$ 的等式.

我们用一些简单的例结束本节; 顺便, 这些例也结束本章. 最后一个例在之后的微积分演算中有用, 故我建议您好好看看它.

例 1.57 我们知道, 对任意实数 x, 都有 $(\cos[x])^2 + (\sin[x])^2 = 1$. 那么, 无变量地, 我们可写此式为

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

例 1.58 我们可写 "二倍角公式" 为

$$\begin{aligned}
\sin \circ 2\imath &= 2\cos\sin, \\
\cos \circ 2\imath &= \cos^2 - \sin^2 \\
&= 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 \\
&= (\cos + \sin)(\cos - \sin), \\
\tan \circ 2\imath &= \frac{\sin}{\cos} \circ 2\imath \\
&= \frac{2\cos\sin}{\cos^2 - \sin^2} \\
&= \frac{2\tan}{1 - \tan^2} \\
&= \frac{2\imath}{1 - \imath^2} \circ \tan.
\end{aligned}$$

例 1.59 值得注意的是, $f(g+h)$ 并不是 $f \circ (g+h)$:

$$\begin{aligned}
2\cos(\cos + \sin) &= 2\cos^2 + 2\cos\sin \\
&= (\cos + \sin - 1) \circ 2\imath \\
&= (\cos + \sin) \circ 2\imath - 1 \\
&= \sqrt{2}\cos \circ \left(\imath - \frac{2\pi}{8}\right) \circ 2\imath - 1 \\
&= \sqrt{2}\cos \circ \left(2\imath - \frac{2\pi}{8}\right) - 1.
\end{aligned}$$

例 1.60 值得注意的是, 本书的 $\sin^{-1}$ 不是 arcsin, $\tan^{-1}$ 也不是 arctan. 那它们是什么呢? 请看:

$$\begin{aligned}
\sin^{-1} - \tan^{-1} &= \frac{1}{\sin} - \frac{1}{\tan} \\
&= \frac{1}{\sin} - \frac{\cos}{\sin} \\
&= \frac{1 - \cos}{\sin}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sin^2}{2\cos\sin} \circ \frac{\iota}{2} \\
&= \tan \circ \frac{\iota}{2}.
\end{aligned}
$$

例 1.61 我们看一些关于 arcsin 跟 arctan 的等式. 在本例, 我们约定, sin, tan 分别表示 $\sin_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}$ 与 $\tan_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}$. 这样,

$$
\begin{aligned}
\sin \circ \arcsin &= \iota_{[-1,1]}, \\
\tan \circ \arctan &= \iota_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}
$$

由此, 我们可以作出如下的计算:

$$
\begin{aligned}
\cos \circ \arcsin &= \cos \circ (\iota_{[-2\pi/4, 2\pi/4]} \circ \arcsin) \\
&= (\cos \circ \iota_{[-2\pi/4, 2\pi/4]}) \circ \arcsin \\
&= (\mathrm{sqrt} \circ (1 - \iota^2) \circ \sin) \circ \arcsin \\
&= (\mathrm{sqrt} \circ (1 - \iota^2)) \circ (\sin \circ \arcsin) \\
&= \mathrm{sqrt} \circ (1 - \iota^2).
\end{aligned}
$$

这里的 ι 自然是 $\iota_{[-1,1]}$.

类似地,

$$
\begin{aligned}
\cos \circ \arctan &= \cos \circ (\iota_{(-2\pi/4, 2\pi/4)} \circ \arctan) \\
&= (\cos \circ \iota_{(-2\pi/4, 2\pi/4)}) \circ \arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt} \circ \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2}\right) \circ \arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \iota^2} \circ \tan\right) \circ \arctan \\
&= \left(\mathrm{sqrt} \circ \frac{1}{1 + \iota^2}\right) \circ (\tan \circ \arctan) \\
&= \frac{1}{\mathrm{sqrt} \circ (1 + \iota^2)}.
\end{aligned}
$$

有了上面的公式, 我们可轻松地写出

$$
\begin{aligned}
\sin \circ \arctan &= (\cos\tan) \circ \arctan = \frac{\iota}{\mathrm{sqrt} \circ (1 + \iota^2)}, \\
\tan \circ \arcsin &= \frac{\sin}{\cos} \circ \arcsin = \frac{\iota}{\mathrm{sqrt} \circ (1 - \iota^2)}.
\end{aligned}
$$

注 1.62 或许, 您现在对无变量的函数演算不感到陌生. 不过, 就算我们模糊了函数及其限制的区别, 有些东西写起来还是稍繁的. 所以, 我们再引入一个记号: $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 比如说, 我们可紧凑地写上例的结果为

$$
\begin{aligned}
\cos[\arcsin] &= \operatorname{sqrt}[1 - \iota^2], \\
\cos[\arctan] &= \frac{1}{\operatorname{sqrt}[1 + \iota^2]}, \\
\sin[\arctan] &= \frac{\iota}{\operatorname{sqrt}[1 + \iota^2]}, \\
\tan[\arcsin] &= \frac{\iota}{\operatorname{sqrt}[1 - \iota^2]}.
\end{aligned}
$$

虽然我已经用 $f[a]$ 表示 a 在 f 下的像了, 我自然地也用 $f[C]$ 表示 C 的每个元在 f 下的像作成的集, 但我的早期工作并没有用 $g[f]$ 表示 $g \circ f$. 这是 Marian 提到的记号, 我觉得不错, 就拿来用了.

第二章　连续函数

本章简单地提及连续函数及其简单的性质; 这也是研究导数的基础.

若无特别说明, 本章的函数的定义域与陪域都是 $\mathbb{R}$ 的子集.

2.1　连续的定义

定义 2.1　设 $x \in \mathbb{R}$. 设 δ 为正数. 则 $N[x;\delta] = (x-\delta, x+\delta)$ 是 x 的一个**邻域**. 称 $N[x;\delta] \setminus \{x\} = (x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$ 是 x 的一个**去心邻域**.

不难看出, $N[x;\delta]$ 就是 $\{t \mid |t-x| < \delta\}$, 而 $N[x;\delta] \setminus \{x\}$ 就是 $\{t \mid 0 < |t-x| < \delta\}$.

下面的不等式十分有用.

定理 2.2　对任意实数 x, y, 有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

所以, 对任意实数 a, b, c,

$$|a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leqslant |a-b| + |b-c|.$$

证　注意到, 一个实数的绝对值不低于自身; 再注意到, 比较二个非负数的大小, 相当于比较它们的平方的大小. 所以

$$(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|xy| - xy) \geqslant 0.$$ 证毕.

定义 2.3　设 f 是 A 上的函数. 设 $x \in A$. 若任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $f[A \cap N[x;\delta]] \subset N[f[x];\varepsilon]$, 则说 f 于 x **连续**.

不难看出, f 于 x 连续的一个必要与充分条件是: 任给正数 ε, 存在正数 δ 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时, 必有 $|f[t]-f[x]|<\varepsilon$.

定理 2.4 设 f,g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f,g 都于 x 连续. 设 $*$ 是三文字 $+,-,\cdot$ 的任意一个. 则 $f*g$ 也于 x 连续.

证 以 $*$ 为 $+$ 或 $-$ 时为例. 任取 $\varepsilon>0$. 这样, 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 g 于 x 连续, 故存在正数 δ_2 使

$$|t-x|<\delta_2 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1,δ_2 的较小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}|(f*g)[t]-(f*g)[x]| &= |(f[t]*g[t])-(f[x]*g[x])|\\ &= |(f[t]-f[x])*(g[t]-g[x])|\\ &\leqslant |f[t]-f[x]|+|g[t]-g[x]|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$*$ 为 $\cdot$ 时就稍繁一些. 不过, 不要恐慌. 注意到

$$\begin{aligned}&(fg)[t]-(fg)[x]\\ =\ & f[t]g[t]-f[x]g[x]\\ =\ & (f[t]-f[x]+f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]+g[t])\\ =\ & (f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x]).\end{aligned}$$

所以, 我们想办法, 使 $(f[t]-f[x])g[t]$ 跟 $f[x](g[t]-g[x])$ 的绝对值都不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ 就好. 首先, 存在正数 δ_3 使

$$|t-x|<\delta_3 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)}.$$

其次, 存在正数 δ_4 使

$$|t-x|<\delta_4 \text{ 且 } t\in A \implies |g[t]-g[x]|<1.$$

由此可知, $|t-x|<\delta_4$ 且 $t\in A$ 时,

$$|g[t]| = |g[x]+(g[t]-g[x])| < |g[x]|+1.$$

最后, 存在正数 δ_5 使

$$|t-x|<\delta_5 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]| < \frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}.$$

取 δ 为 $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ 的最小者. 这样, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$\begin{aligned}
&|(fg)[t]-(fg)[x]| \\
&= |(f[t]-f[x])g[t]+f[x](g[t]-g[x])| \\
&\leqslant |f[t]-f[x]|\cdot|g[t]|+|f[x]|\cdot|g[t]-g[x]| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(1+|g[x]|)}\cdot(|g[x]|+1)+|f[x]|\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|f[x]|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.5 设 f 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则 f^{-1} 于 x 连续.

证 任取 $\varepsilon>0$. 注意到

$$f^{-1}[t]-f^{-1}[x] = -\frac{f[t]-f[x]}{f[t]f[x]}.$$

所以, 我们想办法证明 $|f[t]f[x]|$ 比某个正数大. 这不难. 毕竟, 既然 $f[x]\neq 0$, 那么 $|f[x]|$ 当然是正数. 所以, 存在正数 δ_1 使

$$|t-x|<\delta_1 \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]| < \frac{|f[x]|}{2}.$$

从而

$$|f[x]| = |f[t]-(f[t]-f[x])| \leqslant |f[t]|+|f[t]-f[x]| < |f[t]|+\frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]|-\frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, $|t-x|<\delta_1$ 且 $t\in A$ 时,

$$|f[t]f[x]|>\frac{1}{2}|f[x]|^2.$$

接下来想办法使 $|f[t]-f[x]|<\frac{2}{|f[x]|^2}\varepsilon$ 即可. 我十分信任您; 您一定可以写出此事的论证的, 对吧? 证毕.

注 2.6 一般地, 设 f 是 A 上的函数, $x\in A$, 且 f 于 x 连续. 若 $f[x]\neq 0$, 则存在 x 的邻域 $N[x;\delta]$ 使 $t\in A\cap N[x;\delta]$ 时必有

$$\frac{1}{2}<\frac{f[t]}{f[x]}<\frac{3}{2}.$$

取 $\varepsilon=|f[x]|/2$; 然后,

$$\left|\frac{f[t]}{f[x]}-1\right|=\frac{|f[t]-f[x]|}{|f[x]|}<\frac{1}{2}.$$

我邀请您补全细节; 注意到 $|a-b|<c$ 相当于 $a-c<b<a+c$.

定理 2.7 设 f, g 是 A 上的函数. 设 $x\in A$. 设 f, g 都于 x 连续. 设 $f[x]\neq 0$. 则 g/f 也于 x 连续.

证 注意到 $g/f=g\cdot f^{-1}$. 证毕.

定理 2.8 设 $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$. 若 f 于 x 连续, 且 g 于 $f[x]$ 连续, 则 $g\circ f\colon A\to C$ 于 x 连续.

证 任取正数 ε. 那么, 存在正数 δ' 使

$$|v-f[x]|<\delta' \text{ 且 } v\in B \implies |g[v]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$

也存在正数 δ 使

$$|t-x|<\delta \text{ 且 } t\in A \implies |f[t]-f[x]|<\delta'.$$

显然 $f[t]\in B$. 所以, $|t-x|<\delta$ 且 $t\in A$ 时,

$$|(g\circ f)[t]-(g\circ f)[x]|=|g[f[t]]-g[f[x]]|<\varepsilon.$$ 证毕.

2.2 连续函数

我们已经知道函数于一点连续的意思. 不过, 什么是连续函数呢?

定义 2.9 设 f 是 A 上的函数. 若 f 于 A 的每一点都连续, 则 f 是 (A 上的) **连续函数**.

注 2.10 显然, 若 $B \subset A$, 那么 f 在 B 上的限制 f_B 也是连续函数.

利用上节的结论, 我们有下面的二个结论; 我相信您可以迅速地论证它们, 所以我就不证了.

定理 2.11 设 f, g 都是 A 上的连续函数. 则:
(1) $f * g$ 是连续函数, 这里 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个.
(2) 若 f 不取零值 (也就是说, f 无根), 则 g/f 是连续函数.

定理 2.12 设 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ 都是连续函数. 则 $g \circ f\colon A \to C$ 也是连续函数.

例 2.13 常函数 $c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意非空集 $T \subset \mathbb{R}$, $c[T] = \{c\}$. 所以, 任取正数 ε, 对 x 的**任意**邻域 $N[x;\delta]$, 都有 $c[N[x;\delta]] = \{c\} \subset N[c;\varepsilon] = N[c[x];\varepsilon]$.

例 2.14 $\imath\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数.

任取一点 x. 注意到, 对任意集 $T \subset \mathbb{R}$, $\imath[T] = T$. 所以, 任取正数 ε, 取 x 的 ε 邻域 $N[x;\varepsilon]$, 即得 $\imath[N[x;\varepsilon]] = N[x;\varepsilon] = N[\imath[x];\varepsilon] \subset N[\imath[x];\varepsilon]$.

所以, 我们又有下面的结论; 还是老样子, 请您迅速地给出一个论证.

定理 2.15 每一个形如

$$\frac{b_0 + b_1\imath + \cdots + b_n\imath^n}{a_0 + a_1\imath + \cdots + a_m\imath^m}$$

(其中 m, n 为非负整数, 且 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 是不全为零的实数, $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是实数) 的函数都是其定义域上的连续函数.

为后面的需要, 我们考虑严单调函数与连续函数的关系.

定义 2.16 设 f 是 A 上的函数. 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y]) \geqslant 0$, 则说 f **增** (也说 f 是**增函数**); 若任取 A 的相异二元 x, y, 都有 $(x-y)(f[x]-f[y]) > 0$, 则说 f **严增** (也说 f 是**严增函数**).

若 $-f$ 增, 则 f **减** (也说 f 是**减函数**); 若 $-f$ 严增, 则 f **严减** (也说 f 是**严减函数**).

若 f 增或 f 减, 则 f **单调** (也说 f 是**单调函数**); 若 f 严增或 f 严减, 则 f **严单调** (也说 f 是**严单调函数**).

简单地, 说 f 增 (严增), 就是说对任意适合 $x \in A$, $y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y, 必有 $f[x] \leqslant f[y]$ ($f[x] < f[y]$); 说 f 减 (严减), 就是说对任意适合 $x \in A$, $y \in A$ 且 $x < y$ 的 x, y, 必有 $f[x] \geqslant f[y]$ ($f[x] > f[y]$).

例 2.17 设 a 为非零实数, b 为实数. 则 $a\imath + b$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严单调函数. 任取二个相异实数 x, y, 则

$$\begin{aligned}
&(x-y)((a\imath+b)[x]-(a\imath+b)[y]) \\
={}&(x-y)((ax+b)-(ay+b)) \\
={}&a(x-y)^2.
\end{aligned}$$

由此可知, $a > 0$ 时 $a\imath + b$ 严增, 而 $a < 0$ 时 $a\imath + b$ 严减.

可以验证, $(a\imath)^{[-1]} = \frac{1}{a}\imath$, 且 $(\imath + b)^{[-1]} = \imath - b$. 所以

$$\begin{aligned}
(a\imath+b)^{[-1]} &= ((\imath+b)\circ(a\imath))^{[-1]} \\
&= (a\imath)^{[-1]} \circ (\imath+b)^{[-1]} \\
&= \frac{1}{a}\imath \circ (\imath - b) \\
&= \frac{1}{a}\imath - \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

不难看出, $(a\imath + b)^{[-1]}$ 跟 $a\imath + b$ 同严增 (或严减).

定理 2.18 设 f 是 A 上的严单调函数. 则 f 是单函数.

证 任取 A 的相异二元 x, y. 则

$$f[x]-f[y] = \frac{(x-y)(f[x]-f[y])}{x-y} \neq 0.$$

证毕.

我们知道, 若 $f\colon A \to B$ 是单函数, 且 $f[A] = B$, 则 f 有反函数 $f^{[-1]}\colon B \to A$. 特别地, 适当选取陪域后, 每个严单调函数都有反函数.

定理 2.19 设 $f\colon A \to B$ 是满的严增 (严减) 函数. 则 $f^{[-1]}\colon B \to A$ 也是满的严增 (严减) 函数.

证 依假定, f 是双函数, 故有反函数 $f^{[-1]}$, 且 $f^{[-1]}$ 当然是既满亦单的.

无妨设 f 严增; f 严减时, 您可类似地论证 $f^{[-1]}$ 亦严减.

下设 f 严增. 任取 B 的相异二元 x', y'. 令 $x = f^{[-1]}[x']$, $y = f^{[-1]}[y']$. 易见 $x \neq y$, 且 $x' = f[x]$, $y' = f[y]$. 因 f 严增, 故

$$(f[x] - f[y])(x - y) = (x - y)(f[x] - f[y]) > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}&(x' - y')(f^{[-1]}[x'] - f^{[-1]}[y'])\\ =\ &(f[x] - f[y])(x - y) > 0.\end{aligned}$$

证毕.

下面的结论十分重要.

定理 2.20 设 I 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 则 f 是连续函数的一个必要与充分条件是: J 是区间.

证 无妨设 f 严增.

先看必要性. 设 f 连续. 用反证法. 若 $J = f[I]$ 不是区间, 则存在 J 的相异二元 x', y' 使 $x' < y'$ 且 $J \cap (x', y')$ 为空集. 设 $f[x] = x'$; 设 $f[y] = y'$. 显然 $x < y$. 任取 I 的大于 x 的元 u. 因为 f 严增, 故 $f[u] > f[x] = x'$; 因为 $f[u] \notin (x', y')$, 故 $f[u] \geqslant y'$. 所以, $f[u] - f[x] \geqslant y' - x'$. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 δ 使 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < y' - x'.$$

因为 I 是区间, 且 $x, y \in I$, 故 $[x, y] \subset I$; 特别地, 这说明, 存在适合条件 $0 < v - x < \delta$ 且 $v \in I$ 的数 v. 故

$$y' - x' > |f[v] - f[x]| = f[v] - f[x] \geqslant y' - x'.$$

这是矛盾.

再看充分性. 设 J 是区间. 任取 $x \in I$. 我们证明 f 于 x 连续.

先设 x 是 I 的左端点. 那么, 对每个 $w > x, w \in I$, 都有 $f[w] > f[x]$. 于是, $f[x]$ 也是 J 的左端点. 任取正数 ε, 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] + e \in J$. 令 $q = f^{[-1]}[f[x]+e]$, 则必有 $x < q$. 从而, 当 $x \leqslant t < q$ 时, $f[x] \leqslant f[t] < f[x]+e$. 这么看来, 存在正数 $\delta = q - x$, 当 $t \in N[x;\delta] \cap I = [x, q)$ 时, 必有

$$|f[t] - f[x]| = f[t] - f[x] < e < \varepsilon.$$

类似地, 当 x 是 I 的右端点时, 您也可用完全类似的套路论证 f 于 x 连续.

现设 x 既不是 I 的左端点, 也不是 I 的右端点. 这样, 存在正数 d 使 $x-d, x+d \in I$. 所以 $f[x-d], f[x+d] \in J$, 且 $f[x-d] < f[x] < f[x+d]$. 故 $f[x]$ 也不是 J 的端点. 所以, 任取正数 ε, 必存在正数 $e < \varepsilon$ 使 $f[x] - e$, $f[x] + e \in J$. 令 $p = f^{[-1]}[f[x] - e]$, $q = f^{[-1]}[f[x] + e]$. 那么 $p < x < q$. 取 δ 为 $x - p$ 与 $q - x$ 的较小者. 则 $|t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$p \leqslant x - \delta < t < x + \delta \leqslant q,$$

从而

$$f[x] - e = f[p] \leqslant f[x - \delta] < f[t] < f[x + \delta] \leqslant f[q] = f[x] + e,$$

即

$$|f[t] - f[x]| \leqslant e < \varepsilon.$$

证毕.

由此, 我们可以得到如下关于反函数的定理.

定理 2.21 设 I 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 设 f 是连续函数. 则 $f^{[-1]}\colon J \to I$ 也是连续函数.

证 设 $f\colon I \to J$ 是满的严单调函数. 因为 I 是区间, 且 f 是连续函数, 故 $J = f[I]$ 也是区间. 因为 $f^{[-1]}$ 也是满的严单调函数, 且 $I = f^{[-1]}[J]$ 是区间, 故 $f^{[-1]}$ 是连续函数. 证毕.

最后, 我不加论证地给出一些常见的连续函数. 您可以在任意一本分析教材里找到论证.

- exp: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 ln: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 是满的连续函数. 记 sin 在 $[-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 上的限制为 s. 则 s 是满的严增函数. 故其反函数 arcsin: $[-1, 1] \to [-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- tan: $\{x \mid \cos[x] \neq 0\} \to \mathbb{R}$ 是满的连续函数. 记 tan 在 $(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 上的限制为 t. 则 t 是满的严增函数. 故其反函数 arctan: $\mathbb{R} \to (-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4})$ 也是满的严增函数 (当然也连续).
- 设 n 是正偶数. 则 ι^n: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[2]{x}$ 为 $\sqrt{x}$; 一般写 $\iota^{1/2}$ 为 sqrt.
- 设 n 是正奇数. 则 ι^n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满的严增函数, 也是连续函数. 这样, 其反函数 $\iota^{1/n}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 也是满的严增函数 (当然也连续). 一般写 $\iota^{1/n}[x]$ 为 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$; 一般写 $\sqrt[1]{x}$ 为 x; 一般写 $\iota^{1/1}$ 为 ι.
- abs: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ 是连续函数.

2.3 连续函数的积分

我简单地介绍一下连续函数的积分.

传统地, 一本算学分析 (或高等算学) 教材会先讲导数 (微分学), 再讲如何反求导 (不定积分), 然后才是积分 (定积分). 不过, 为论证连续函数一定有"反导", 就需要 (连续函数的) 积分的知识. 所以, 逻辑地, 我选择先说连续函数的积分论. 这里, 我就不加证明地列举本书用到的关于积分的结论. 如果您对这些结论的论证感兴趣, 您可以参考算学家梅加强的《数学分析》.

定理 2.22 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 作数列

$$\begin{aligned} A\colon\quad & \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\ & n \mapsto \begin{cases} 0, & n = 0; \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right], & n \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

则存在唯一的实数 α, 使对任意正数 ε, 存在非负整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|A[n] - \alpha| < \varepsilon$.

我们称 α 为 f 在 $[a, b]$ 上的**积分**, 并记 α 为

$$\int_a^b f.$$

注 2.23 传统地, 我们记上面的 α 为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我并没有说老记号不好; 只不过, 我会展现一种不需要 "变量 x" 的积分法 (如何无变量地计算积分), 故我在此使用新记号. 本注的目的是告诉您传统的记号跟本书的记号的区别.

例 2.24 设 k 为常函数. 则不难看出,

$$\int_a^b k = (b-a)k.$$

现在, 我们看积分的一些基本性质. 不过, 我们先作一个约定.

定义 2.25 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 规定

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

定理 2.26 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

定义 2.27 设 $*$ 是文字 $>, <, \geqslant, \leqslant$ 的任意一个. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 f, g 都是 A 上的函数. 若对任意 $t \in A$, 都有 $f[t] * g[t]$, 则我们写 $f * g$.

注 2.28 注意, 我们没说 $*$ 可以是文字 $\neq$; 这是因为我们已经规定, $f \neq g$ 是 $f = g$ 的**否定**.

定理 2.29 设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 设 $f \leqslant g$. 则

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

定义 2.30 我们可简单地写 $\text{abs} \circ f$ 为 $|f|$; 类似地, 我们也可简单地写 $\text{sqrt} \circ f$ 为 $\sqrt{f}$.

例 2.31 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 不难验证 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. 故

$$\int_a^b (-|f|) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

也就是

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

不难看出, 对任意 $a, b \in I$,

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|.$$

定理 2.32 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

下面的结论很重要; 之后会用到.

定理 2.33 设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $x \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} F\colon\quad & I \to \mathbb{R}, \\ & t \mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \dfrac{1}{t-x}\displaystyle\int_x^t f, & t \neq x. \end{cases} \end{aligned}$$

则 F 于 x 连续.

证 任取正数 ε. 我们的目标是, 找到正数 δ, 使 $|t-x|<\delta$ 且 $t\in I$ 时, $|F[t]-F[x]|<\varepsilon$. 这相当于: 找到正数 δ, 使 $0<|t-x|<\delta$ 且 $t\in I$ 时,

$$\left|\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x]\right| < \varepsilon.$$

这不难. 首先, 注意到

$$f[x](t-x) = \int_x^t f[x],$$

故

$$\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x] = \frac{1}{t-x}\int_x^t (f-f[x]).$$

取低于 ε 的正数 e. 因为 f 于 x 连续, 故存在正数 d, 使 $|t-x|<d$ 且 $t\in I$ 时,

$$|f[t]-f[x]|<e.$$

所以

$$\left|\int_x^t (f-f[x])\right| \leqslant \left|\int_x^t |f-f[x]|\right| \leqslant \left|\int_x^t e\right| = |t-x|e.$$

也就是说, $0<|t-x|<d$ 且 $t\in I$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t-x}\int_x^t f - f[x]\right| &= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_x^t (f-f[x])\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|t-x|}\cdot|t-x|e \\ &= e<\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

第三章　导数

本章简单地提及导数及其运算.

若无特别说明, 本章的函数的定义域都是区间.

3.1　背景

定义 3.1　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 若存在 x 的邻域 N, 与 $N \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续, 则说 f 于 x **可导**, 并称 $F[x]$ 为 f 于 x 的**导数**.

注 3.2　传统地, 我们用极限

$$\lim_{t \to x} \frac{f[t] - f[x]}{t - x}$$

是否存在定义 f 是否于 x 可导; 极限存在时, 它的值就是 f 于 x 的导数. 可以证明, 这二个定义是等价的; 不过, 既然我花了不少篇幅讨论连续函数, 我将呈现一种不一样的微分学 (求导学). 我采取的定义来自希腊算学家 Constantin Carathéodory. 假如您对此事感兴趣, 您可以阅读美国算学家 Stephen Kuhn 的名为 *The Derivative á la Carathéodory* 的文章 (不过, 我想说, 标题的 *á la* 应该是 *à la*).

我们看导数的一些基本性质. 在定义里, 若 f 于 x 可导, 则 f 于 x 的导数似乎不止一个. 不过, 我们即将说明, 导数是唯一的.

定理 3.3 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F_1, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F_1,$$

且 F_1 于 x 连续. 设存在 x 的邻域 N_2, 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 F_2, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F_2,$$

且 F_2 于 x 连续. 则 $F_1[x] = F_2[x]$. 也就是说, f 于 x 的导数, 若存在, 则唯一.

证 用反证法. 设 $F_1[x] \neq F_2[x]$, 则 $\varepsilon = |F_1[x] - F_2[x]|$ 是正数. 我们要由此推出矛盾.

因为 $N_1 \cap I$ 是区间, 且 F_1 于 x 连续, 故存在正数 δ_1, 使 $0 < |t - x| < \delta_1$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_1[t] - F_1[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $N_2 \cap I$ 是区间, 且 F_2 于 x 连续, 故存在正数 δ_2, 使 $0 < |t - x| < \delta_2$ 且 $t \in I$ 时, 必有 $|F_2[t] - F_2[x]| < \varepsilon/2$, 即

$$\left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 为 δ_1 与 δ_2 中的较小者. 则 $0 < |t - x| < \delta$ 且 $t \in I$ 时,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= |F_1[x] - F_2[x]| \\
&= \left|\left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right) - \left(\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_2[x]\right| + \left|\frac{f[t] - f[x]}{t - x} - F_1[x]\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这是矛盾. 证毕.

例 3.4 设 a, b 为实数. 则 $a\imath + b$ 于其定义域的任意一点都可导. 具体地,

$$a\imath + b = (a\imath + b)[x] + (\imath - x)a,$$

而 a 是连续函数. 并且, $a\imath + b$ 于任意一点的导数都是 a.

定理 3.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导. 则 f 于 x 连续.

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N, 与 $N \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续.

因为 $\iota - x$ 于 x 连续, 故 $(\iota - x)F$ 于 x 连续; 因为 $f[x]$ 于 x 连续, 故 f 于 x 连续. 证毕.

定理 3.6 设 I 为区间. 设 f, g 为 I 上的函数. 设 $x \in I$. 设 f, g 都于 x 可导. 则:

- $f + g$ 于 x 可导, 且

$$(f + g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) + (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 设 k 为常数. 则 kf 于 x 可导, 且

$$(kf \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = k \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- fg 于 x 可导, 且

$$(fg \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot g[x] + f[x] \cdot (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

- 若 $f[x] \neq 0$, 则 g/f 于 x 可导, 且

$$(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}.$$

证 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\iota - x)F,$$

且 F 于 x 连续. 类似地, 因为 g 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_2, 与 $N_2 \cap I$ 上的函数 G, 使

$$g = g[x] + (\iota - x)G,$$

且 G 于 x 连续. 取 $N = N_1 \cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域. 这里, 为方便, 无妨滥用记号, 视 F, G 分别是 F, G 在 $N \cap I$ 上的限制. 此外, 注意到, f, g 于 x 的导数分别为 $F[x], G[x]$.

因为

$$\begin{aligned}
f + g &= (f[x] + (\imath - x)F) + (g[x] + (\imath - x)G) \\
&= (f[x] + g[x]) + (\imath - x)(F + G) \\
&= (f + g)[x] + (\imath - x)(F + G),
\end{aligned}$$

且 $F + G$ 于 x 连续, 故 $f + g$ 于 x 可导, 且导数为 $(F + G)[x] = F[x] + G[x]$.

因为

$$\begin{aligned}
kf &= k(f[x] + (\imath - x)F) \\
&= kf[x] + k(\imath - x)F \\
&= (kf)[x] + (\imath - x)(kF),
\end{aligned}$$

且 kF 于 x 连续, 故 kf 于 x 可导, 且导数为 $(kF)[x] = k \cdot F[x]$.

因为

$$\begin{aligned}
fg &= (f[x] + (\imath - x)F)(g[x] + (\imath - x)G) \\
&= f[x]g[x] + f[x](\imath - x)G + (\imath - x)Fg[x] + (\imath - x)F(\imath - x)G \\
&= (fg)[x] + (F \cdot g[x] + f[x] \cdot G + FG(\imath - x))(\imath - x),
\end{aligned}$$

且 $h = F \cdot g[x] + f[x] \cdot G + FG(\imath - x)$ 于 x 连续, 故 fg 于 x 可导, 且导数为 $h[x] = F[x]g[x] + f[x]G[x]$.

最后一个等式需要一点儿技巧. 首先, 既然 $f[x] \neq 0$, 且 f 于 x 连续, 故存在 x 的邻域 M, 使 $t \in M \cap I$ 时,

$$|f[t] - f[x]| < \frac{|f[x]|}{2},$$

从而

$$|f[x]| = |f[t] - (f[t] - f[x])| \leqslant |f[t]| + |f[t] - f[x]| < |f[t]| + \frac{|f[x]|}{2},$$

也就是

$$|f[t]| > |f[x]| - \frac{|f[x]|}{2} = \frac{|f[x]|}{2}.$$

所以, 在 M 上, f 不取零值. 从而, 在 $(M \cap N) \cap I$ 上,

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f^{-1}[x] + \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f[x]}\right) \\ &= f^{-1}[x] - \frac{f - f[x]}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] - \frac{(\iota - x)F}{f[x]f} \\ &= f^{-1}[x] + (\iota - x) \cdot \left(-\frac{F}{f[x]f}\right). \end{aligned}$$

因为 $-F/(f[x]f)$ 于 x 连续, 故 f^{-1} 于 x 可导, 且导数为 $-F[x]/(f^2[x])$.

注意到 $g/f = g \cdot f^{-1}$, 故 g/f 于 x 可导, 且

$$\begin{aligned} &(g/f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (gf^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f^{-1}[x] + g[x] \cdot (f^{-1} \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \\ &= (g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot \frac{1}{f[x]} + g[x] \cdot \left(-\frac{(f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f[x]f[x]}\right) \\ &= \frac{(g \text{ 于 } x \text{ 的导数}) \cdot f[x] - g[x] \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数})}{f^2[x]}. \end{aligned}$$

证毕.

例 3.7 我们知道, $a\iota + b$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 a. 特别地, 常函数于 x 的导数为 0, 而 ι 于 x 的导数为 1. 利用算学归纳法, 可算出, 当 n 为正整数时, ι^n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 nx^{n-1}. 由此, 多项式函数于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导. 进而, 有理函数于有定义的点可导. 顺便一提, 即使 n 为负整数, ι^n 于非零的 x 的导数仍为 nx^{n-1}.

定理 3.8 (链规则) 设 I, J 为区间. 设 f: $I \to J$, g: $J \to K$. 设 $x \in I$. 设 f 于 x 可导, 且 g 于 $f[x]$ 可导. 则 $g \circ f$ 于 x 可导, 且

$$(g \circ f \text{ 于 } x \text{ 的导数}) = (g \text{ 于 } f[x] \text{ 的导数}) \cdot (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}).$$

证 因为 g 于 $f[x]$ 可导, 故存在 $f[x]$ 的邻域 M, 与 $M\cap J$ 上的函数 G, 使

$$g = g[f[x]] + (\imath - f[x])G,$$

且 G 于 $f[x]$ 连续; 同时, $G[f[x]]$ 即为 g 于 $f[x]$ 的导数. 因为 f 于 x 可导, 故存在 x 的邻域 N_1, 与 $N_1\cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[x] + (\imath - x)F,$$

且 F 于 x 连续; 同时, $F[x]$ 即为 f 于 x 的导数.

因为 f 亦于 x 连续, 故对 $f[x]$ 的邻域 M 来说, 必存在 x 的邻域 N_2, 使 $f[N_2\cap I]\subset M$; 又因为 f 的陪域为 J, 故 $f[N_2\cap I]\subset J$. 所以, $f[N_2\cap I]\subset M\cap J$. 取 $N = N_1\cap N_2$, 则 N 也是 x 的邻域, 且 $f[N\cap I]\subset M\cap J$. 为方便, 无妨滥用记号, 视 F, f 分别是 F, f 在 $N\cap I$ 上的限制. (事实上, 本段文字只是保证复合 $G\circ f$ 有意义罢了.)

现在考察 $g\circ f$:

$$\begin{aligned} g\circ f &= g[f[x]] + (f - f[x])(G\circ f) \\ &= (g\circ f)[x] + (\imath - x)F(G\circ f) \\ &= (g\circ f)[x] + (\imath - x)\cdot(G\circ f)F. \end{aligned}$$

因为 G 于 $f[x]$ 连续, 而 f 于 x 连续, 故 $G\circ f$ 于 x 连续; 又因 F 于 x 连续, 故 $(G\circ f)F$ 于 x 连续. 所以 $g\circ f$ 于 x 可导, 且导数为 $G[f[x]]\cdot F[x]$. 证毕.

定理 3.9 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I\to J$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}\colon J\to I$. 设 $y\in J$. 设 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导. 则 $f^{[-1]}$ 于 y 可导的一个必要与充分条件是: f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

若 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数不等于零, 则

$$(f^{[-1]}\text{ 于 } y \text{ 的导数}) = \frac{1}{(f\text{ 于 } f^{[-1]}[y]\text{ 的导数})}.$$

证 先看必要性. 既然 $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 那么 $\imath_J = f\circ f^{[-1]}$ 于 y 可导. 由链规则, 有

$$1 = (f\text{ 于 } f^{[-1]}[y]\text{ 的导数})\cdot(f^{[-1]}\text{ 于 } y\text{ 的导数}).$$

从而 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数非零.

再看充分性. 因为 f 于 $f^{[-1]}[y]$ 可导, 故存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_1, 与 $N_1 \cap I$ 上的函数 F, 使

$$f = f[f^{[-1]}[y]] + (\imath - f^{[-1]}[y])F,$$

且 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续. 依假定, f 于 $f^{[-1]}[y]$ 的导数 $F[f^{[-1]}[y]] \neq 0$. 所以, 存在 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N_2, 使在 $N_2 \cap (N_1 \cap I)$ 上, F 不取零值. 取 $N = N_2 \cap N_1$, 则 N 也是 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域, 且在 $N \cap I$ 上, 不但 F 不取零值, 且

$$f = y + (\imath - f^{[-1]}[y])F.$$

因为 f 严单调, 且 I, J 都是区间, 故 f, $f^{[-1]}$ 都是连续函数. 特别地, $f^{[-1]}$ 于 y 连续. 故对 $f^{[-1]}[y]$ 的邻域 N, 存在 y 的邻域 M, 使 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N$. 因为 $f^{[-1]}$ 的值域为 I, 故 $f^{[-1]}[M \cap J] \subset I$. 也就是说, $f^{[-1]}[M \cap J] \subset N \cap I$. (事实上, 这只是为保证复合 $F \circ f^{[-1]}$ 有意义.) 那么, 在 $M \cap J$ 上, 有

$$f \circ f^{[-1]} = y + (f^{[-1]} - f^{[-1]}[y])(F \circ f^{[-1]}),$$

即

$$f^{[-1]} = f^{[-1]}[y] + (\imath - y) \cdot \frac{1}{F \circ f^{[-1]}}.$$

因为 $f^{[-1]}$ 于 y 连续, 而 F 于 $f^{[-1]}[y]$ 连续, 故 $F \circ f^{[-1]}$ 于 y 连续; 因为 (在 $M \cap J$ 上) F 不取零值, 故 $1/(F \circ f^{[-1]})$ 亦于 y 连续. 所以, $f^{[-1]}$ 于 y 可导, 且导数为 $1/F[f^{[-1]}[y]]$. 证毕.

最后, 我给出一个十分有用的事实; 不过, 由于没有足够多的工具, 我就不论证了.

定理 3.10 指数函数、馀弦函数、正弦函数于其定义域的每一点都可导. 具体地说:

- exp: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\exp[x]$.
- cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $-\sin[x]$,
- sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 于 $\mathbb{R}$ 的任意一点 x 都可导, 且导数为 $\cos[x]$.

3.2　无变量的导数计算

这是本章的重点; 这也是本书的一个重点. 不过, 不重要地, “无变量的导数计算” 的 “导数” 跟前面的 “导数” 不是一个词, 但仍有联系.

定义 3.11　设 f 是区间 I 上的函数. 若 f 于 I 的每一点都可导, 则定义函数

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[f]\colon\quad & I \to K, \\ & x \mapsto (f \text{ 于 } x \text{ 的导数}), \end{aligned}$$

其中陪域 K 可视情况而定 (除非特别说明, 我们不在意陪域). 我们称 $\mathrm{D}[f]$ 为 f 的**导函数** (亦可简称其为 f 的**导数**).

抽象地, $\mathrm{D}[f]$ 的 D 本身就是一个函数; 不过, 这是一个变函数为函数的函数 (有点儿绕). 有时, 在不引起误会的时候, 我们也可写 $\mathrm{D}[f]$ 为 $\mathrm{D}f$; 毕竟, 至少在本书里, D 也只跟函数 “作用”.

当然, 我又忘记了一件事: 若 f 于 I 的每一点都可导, 我们就说 f 是 I 上的**可导函数**.

曾经, 我们写 “f 于 x 的导数是 ℓ”; 现在, 我们总算能简便地表此事以 $\mathrm{D}[f][x] = \ell$ 或 $\mathrm{D}f[x] = \ell$. 乘热打铁, 我们用简单的话转述前节的结论.

定理 3.12　设 f, g 都是区间 I 上的可导函数.

- $f + g$ 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}[f+g] = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g.$$
- 设 k 为常数. 则 kf 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}[kf] = k\mathrm{D}f.$$
- fg 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}[fg] = \mathrm{D}f \cdot g + f \cdot \mathrm{D}g.$$
- 设 f 不取零值. 则 g/f 也是 I 上的可导函数, 且
$$\mathrm{D}\,\frac{g}{f} = \frac{\mathrm{D}g \cdot f - g \cdot \mathrm{D}f}{f^2}.$$

定理 3.13 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$, $g\colon J \to K$ 都是可导函数. 则 $g \circ f$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}[g \circ f] = (\mathrm{D}g \circ f) \cdot \mathrm{D}f.$$

注 3.14 有时, 我们也写 $g \circ f$ 为 $g[f]$; 相应地, 也可写链规则为

$$\mathrm{D}[g[f]] = \mathrm{D}g[f] \cdot \mathrm{D}f.$$

我们约定 $\mathrm{D}g[f]$ 表示 $(\mathrm{D}g)[f]$; 这跟 $\mathrm{D}g \circ f$ 表示 $(\mathrm{D}g) \circ f$ 是一致的. 不过, 由于 $\mathrm{D}g[f]$ 比 $\mathrm{D}g \circ f$ 紧凑, 我们省去了一对圆括号.

定理 3.15 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 严单调, 且有反函数 $f^{[-1]}\colon J \to I$. 设 f 是可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值. 则 $f^{[-1]}$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}f^{[-1]} = \frac{1}{\mathrm{D}f \circ f^{[-1]}}.$$

定理 3.16 导数表 I:

- $\mathrm{D}c = 0$, 此处 c 为常函数.
- $\mathrm{D}\,\iota^n = n\,\iota^{n-1}$ (n 为整数).
- $\mathrm{D}\exp = \exp$.
- $\mathrm{D}\cos = -\sin$.
- $\mathrm{D}\sin = \cos$.

用这四个定理, 我们可以**清楚地**、**有条理地**计算常见的函数的导 (函) 数. 我举一些例; 您可以拿本书的计算过程跟传统的导数计算过程比较.

例 3.17 因为 $\tan = \sin/\cos$, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\tan &= \mathrm{D}\,\frac{\sin}{\cos}\\ &= \frac{\mathrm{D}\sin\cdot\cos - \sin\cdot\mathrm{D}\cos}{\cos^2}\\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}\\ &= \cos^{-2} = 1 + \tan^2.\end{aligned}$$

例 3.18 因为 $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 严增, $\mathbb{R}, (0, +\infty)$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\exp = \exp > 0$, 故 $\ln\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\ln = \frac{1}{\mathrm{D}\exp \circ \ln} = \frac{1}{\exp \circ \ln} = \frac{1}{\iota}.$$

因为 $\sin\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to (-1, 1)$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4), (-1, 1)$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\sin = \cos > 0$, 故 $\arcsin\colon (-1, 1) \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\arcsin = \frac{1}{\mathrm{D}\sin \circ \arcsin} = \frac{1}{\cos \circ \arcsin} = \frac{1}{\mathrm{sqrt} \circ (1 - \iota^2)}.$$

因为 $\tan\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to \mathbb{R}$ 严增, $(-2\pi/4, 2\pi/4), \mathbb{R}$ 都是区间, 且 $\mathrm{D}\tan = 1 + \tan^2 > 0$, 故 $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\arctan = \frac{1}{\mathrm{D}\tan \circ \arctan} = \frac{1}{(1 + \tan^2) \circ \arctan} = \frac{1}{1 + \iota^2}.$$

设 n 为正整数. 因为 $\iota^n\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 严增, $(0, +\infty)$ 是区间, 且 $\mathrm{D}\iota^n = n \cdot \iota^{n-1} > 0$, 故 $\iota^{1/n}\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 也是可导函数, 且

$$\mathrm{D}\iota^{1/n} = \frac{1}{\mathrm{D}\iota^n \circ \iota^{1/n}} = \frac{1}{(n \cdot \iota^{n-1}) \circ \iota^{1/n}} = \frac{1}{n}\iota^{1/n-1}.$$

设 m 为整数. 则 $\iota^{m/n} = (\iota^{1/n})^m = \iota^m \circ \iota^{1/n}$. 故

$$\mathrm{D}\iota^{m/n} = (\mathrm{D}\iota^m \circ \iota^{1/n}) \cdot \mathrm{D}\iota^{1/n} = ((m \cdot \iota^{m-1}) \circ \iota^{1/n}) \cdot \frac{1}{n}\iota^{1/n-1} = \frac{m}{n}\iota^{m/n-1}.$$

也就是说, 对任意有理数 r, $\mathrm{D}\iota^r = r\,\iota^{r-1}$.

例 3.19 定义符号函数:

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}\colon \quad & \mathbb{R} \to \{1, 0, -1\}, \\ & t \mapsto \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

设 I 是某个不含 0 的区间. 故 sign (在 I 上的限制) 是常函数, 且导数为 0.

不难看出, $\mathrm{abs} = \mathrm{sign} \cdot \iota$. 所以,

$$\mathrm{D}\,\mathrm{abs} = \mathrm{D}\,\mathrm{sign} \cdot \iota + \mathrm{sign} \cdot \mathrm{D}\iota = \mathrm{sign} = \frac{\mathrm{abs}}{\iota}.$$

由此, 我们可计算 $\ln\circ\mathrm{abs}$ 的导数:

$$\mathrm{D}[\ln\circ\mathrm{abs}] = (\mathrm{D}\ln\circ\mathrm{abs})\cdot\mathrm{D}\,\mathrm{abs} = \left(\frac{1}{\iota}\circ\mathrm{abs}\right)\cdot\frac{\mathrm{abs}}{\iota} = \frac{1}{\iota}.$$

我们添加上面的计算结果到导数表 I, 就得到了一张较为完善的导数表 II. 以后, 我们的导数计算十分依赖此表与导数表 I 前的三个定理.

定理 3.20 导数表 II:

- $\mathrm{D}c = 0$, 此处 c 为常函数.
- $\mathrm{D}\,\iota^r = r\,\iota^{r-1}$ (r 为有理数).
- $\mathrm{D}\exp = \exp$.
- $\mathrm{D}\cos = -\sin$.
- $\mathrm{D}\sin = \cos$.
- $\mathrm{D}\tan = \cos^{-2} = 1+\tan^2$.
- $\mathrm{D}\ln = \mathrm{D}[\ln\circ\mathrm{abs}] = \iota^{-1}$.
- $\mathrm{D}\arcsin = \mathrm{sqrt}^{-1}\circ(1-\iota^2)$.
- $\mathrm{D}\arctan = 1/(1+\iota^2)$.
- $\mathrm{D}\,\mathrm{abs} = \mathrm{abs}/\iota = \mathrm{sign}$.
- $\mathrm{D}\,\mathrm{sqrt} = \iota^{-1}\circ(2\,\mathrm{sqrt})$.

例 3.21 设 f, g 是区间 I 上的可导函数, 且 $f>0$. 求 $\mathrm{D}[f^g]$.
事实上, f^g 就是 $\mathrm{e}^{g(\ln\circ f)}$, 也就是 $\exp\circ(g(\ln\circ f)) = \exp\circ(g\ln[f])$. 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}[f^g] &= \mathrm{D}[\exp\circ(g\ln[f])]\\
&= (\mathrm{D}\exp\circ(g\ln[f]))\cdot\mathrm{D}[g\ln[f]]\\
&= (\exp\circ(g\ln[f]))\cdot(\mathrm{D}g\cdot\ln[f] + g\cdot\mathrm{D}[\ln[f]])\\
&= f^g\cdot\mathrm{D}g\cdot\ln[f] + f^g\cdot g\cdot(\mathrm{D}\ln\circ f)\cdot\mathrm{D}f\\
&= f^g\ln[f]\,\mathrm{D}g + g f^{g-1}\,\mathrm{D}f.
\end{aligned}$$

例 3.22 设

$$\begin{aligned}
f\colon\quad &[0,+\infty)\to\mathbb{R},\\
&x\to\ln\left[x^2\mathrm{e}^x+\sqrt{1+x^3}\right].
\end{aligned}$$

求 $\mathrm{D}f$.

本问题定义 f 时, 使用了带变量的记号. 为了方便地计算 f 的导数, 我们不妨先无变量地表达 f:

$$
\begin{aligned}
g &= \imath^2 \cdot \exp + \operatorname{sqrt} \circ (1 + \imath^3), \\
f &= \ln \circ g.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}f &= \mathrm{D}[\ln \circ g] \\
&= (\mathrm{D}\ln \circ g) \cdot \mathrm{D}g \\
&= g^{-1} \cdot \mathrm{D}[\imath^2 \cdot \exp] + g^{-1} \cdot \mathrm{D}[\operatorname{sqrt} \circ (1 + \imath^3)] \\
&= g^{-1} \cdot (\mathrm{D}\,\imath^2 \cdot \exp + \imath^2 \cdot \mathrm{D}\exp) \\
&\qquad + g^{-1} \cdot ((\mathrm{D}\operatorname{sqrt} \circ (1 + \imath^3)) \cdot \mathrm{D}[1 + \imath^3]) \\
&= g^{-1} \cdot (2\imath + \imath^2) \cdot \exp + g^{-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \imath^3}} \cdot 3\imath^2 \\
&= \frac{\imath\,(2 + \imath)\exp + \dfrac{3\imath^2}{2\sqrt{1 + \imath^3}}}{\imath^2 \exp + \sqrt{1 + \imath^3}}.
\end{aligned}
$$

第四章　不定积分

上一章, 我们接触了导数; 这一章, 我们来考虑导数的 "反操作".

具体地, 设 I 为区间, 且 f 是 I 上的函数. 上一章的要点是: 已知 f, 求 $\mathrm{D}f$; 这一章的要点是: 已知 I 上的函数 g 适合 $\mathrm{D}f = g$, 求 f.

4.1　原函数与不定积分

设 I 为区间. 不难看出, I 上的常函数的导数是 0 (在 I 上的限制). 不过, 重要地, 此事反过来也对:

定理 4.1　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的可导函数. 若 $\mathrm{D}f = 0$, 则 f 为常函数.

此事的论证可见于一般的分析教材, 所以我就不证了 (或许, 当我变强的时候, 我就能**在我的书里**给出**我自己的论证**了).

此事的一个重要的转述如下:

定理 4.2　设 I 为区间. 设 f_1, f_2 为 I 上的可导函数. 若 $\mathrm{D}f_1 = \mathrm{D}f_2$, 则存在常函数 c, 使 $f_2 = f_1 + c$.

证　考虑 $h = f_2 - f_1$. 那么 $\mathrm{D}h = 0$. 从而 h 是常函数.　　证毕.

由此, 我们作如下定义.

定义 4.3　设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 若存在 I 上的可导函数 F 使 $\mathrm{D}F = f$, 则说 F 是 f 的一个**原函数**.

定义 4.4 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 f 有一个原函数. 那么, 称 f 的**全体**原函数作成的**集**为 f 的**不定积分**, 即

$$\int f = \{g \mid g \text{ 是 } f \text{ 的原函数}\}.$$

定理 4.5 设 I 为区间. 设 f 为 I 上的函数. 设 F 是 f 的原函数. 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

证 设 G 是 f 的一个原函数. 则 $G = F + c$, 其中 c 为某个常函数. 故

$$\int f \subset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

另一方面, 若 c' 是常函数, 显然有 $\mathrm{D}[F + c'] = \mathrm{D}F = f$. 所以

$$\int f \supset \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

证毕.

例 4.6 因为 $\mathrm{D}\exp = \exp$, 故

$$\int \exp = \{\exp + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

例 4.7 因为 $\mathrm{D}[-\cos] = \sin$, 故

$$\int \sin = \{-\cos + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

例 4.8 因为 $\mathrm{D}\sin = \cos$, 故

$$\int \cos = \{\sin + c \mid c \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的常函数}\}.$$

至此, 我们已经知道什么是不定积分. 不过, 我们也可以看到, 当前的表达不定积分的方式比较复杂. 所以, 我们很需要一种简写法; 我们将在下一节讨论此事.

我们知道, 若区间 I 上的函数有原函数, 那自然地有不定积分. 什么样的函数有原函数呢? 下面的结论给出了此问题的**部分**解答; 不过, 就算只是“部分”, 对本书而言, 也足够了.

定理 4.9 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则存在 I 上的可导函数 F, 使 $\mathrm{D}F = f$.

证 固定 $a \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} F\colon \quad I &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \int_a^t f. \end{aligned}$$

任取 $x \in I$. 从而对任意 $t \in I$,

$$F[t] = \int_a^x f + \int_x^t f = F[x] + (t - x)Q[t],$$

其中

$$\begin{aligned} Q\colon \quad I &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \begin{cases} f[x], & t = x; \\ \dfrac{1}{t-x}\displaystyle\int_x^t f, & t \neq x. \end{cases} \end{aligned}$$

取 x 的一个邻域 N. 所以, 在 $N \cap I$ 上, 有

$$F = F[x] + (\imath - x)Q,$$

且 Q 于 x 连续 (定理 2.33), 故 F 于 x 可导, 且 F 于 x 的导数为

$$Q[x] = f[x].$$

证毕.

由此可得微积分的一个重要定理. 不过, 这不是本章的重点讨论对象.

定理 4.10 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

证 固定 $c \in I$. 作函数

$$\begin{aligned} G\colon \quad I &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \int_c^t f. \end{aligned}$$

那么 G 是 f 的原函数, 且

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = G[b] - G[a].$$

既然 F 也是 f 的原函数, 那必定存在常函数 ℓ, 使 $G = F + \ell$. 所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= G[b] - G[a] \\ &= (F+\ell)[b] - (F+\ell)[a] \\ &= (F[b] + \ell[b]) - (F[a] + \ell[a]) \\ &= (F[b] + \ell) - (F[a] + \ell) \\ &= F[b] - F[a].\end{aligned}$$

证毕.

4.2 函数集的演算

上节, 我们正式地定义了区间 I 上的函数 f 的不定积分是 f 的全体原函数作成的集. 随后, 我们知道, 若 $\mathrm{D}F = f$, 则

$$\int f = \{F + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

不过, 此表达似乎不是很简洁. 很少有人愿意每次写不定积分都要写上形如 "c 是 I 上的常函数" 这样的话. 并且, 这种表达方式也不利于我们表达不定积分跟不定积分的关系.

例 4.11 设 f, g 都是区间 I 上的函数, 且不定积分存在. 我们看 $f + g$ 是否有不定积分. 为回答这个问题, 无妨设 F, G 分别是 f, g 的原函数. 那么 $\mathrm{D}[F + G] = f + g$. 从而, $f + g$ 确实有不定积分

$$A = \int (f+g) = \{F + G + c \mid c \text{ 是 } I \text{ 上的常函数}\}.$$

记

$$B = \left\{ u + v \,\middle|\, u \in \int f, \text{且 } v \in \int g \right\}.$$

我们证明: $A = B$.

任取 $F + G + c \in A$. 那么 $F \in \int f$, 且 $G + c \in \int g$. 所以 $F + G + c \in B$. 这说明, $A \subset B$.

任取 $u + v \in B$, 其中 $u \in \int f$, 且 $v \in \int g$. 那么存在常函数 d_1, d_2 使 $u = F + d_1, v = G + d_2$. 所以 $u + v = F + G + (d_1 + d_2)$. 二个常函数的和仍为常函数, 故 $u + v \in A$. 这说明, $A \supset B$.

我们该怎样描述 $\int (f + g), \int f$ 与 $\int g$ 的关系? 您可能在其他的分析教材里见过形如

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

的文字. 不过, 上式右端的 "+" 是什么意思? 或者, 具体地, 焊接二个集的 + 是什么意思呢?

上例告诉我们, 我们很需要为函数集定义新的运算; 更确切地, 我们很需要搬函数的运算到函数集上.

定义 4.12　设 A 为集. 若任取 A 的元 f, f 是一个函数, 就称 A 为**函数集**.

设 P, Q 为二个集. 若函数集 A 的每个元都是 P 上的函数, 就说 A 是 P 上的函数集. 若函数集 A 的每个元都是 P 到 Q 的函数 (定义域为 P, 陪域为 Q), 则说 A 是 P 到 Q 的函数集. 此时, 我们也说, 函数集 A 的定义域为 P, 陪域为 Q.

定义 4.13　设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 R 到 S 的函数集, 且任取 A 的元 a, a 的值域是 R 的子集. 于是, 任取 B 的元 b, $b \circ a$: $P \to S$ 有意义. 定义

$$B \circ A = \{b \circ a \mid b \in B, a \in A\}.$$

不难看出, $B \circ A$ 就是 P 到 S 的函数集.

函数集的复合也有结合律.

定理 4.14　设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 R 到 S 的函数集, C 是 T 到 U 的函数集. 设任取 A 的元 a, a 的值域是 R 的子集; 设任取 B 的元 b, b 的

值域是 S 的子集. 则

$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A.$$

所以, 我们可简单地记上式的任意一侧为 $C \circ B \circ A$.

此事的论证不难; 不过, 我希望您能适应这种论证方式; 这样, 您就完全可类似地论证其他的关于函数集的运算律.

证 取 $f \in C \circ (B \circ A)$. 于是, 存在 $a \in A, b \in B, c \in C$ 使 $f = c \circ (b \circ a)$. 因为函数的复合适合结合律, 故

$$f = c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a \in (C \circ B) \circ A.$$

再取 $g \in (C \circ B) \circ A$. 于是, 存在 $a' \in A, b' \in B, c' \in C$ 使 $g = (c' \circ b') \circ a'$. 因为函数的复合适合结合律, 故

$$g = (c' \circ b') \circ a' = c' \circ (b' \circ a') \in C \circ (B \circ A).$$

证毕.

就像为函数集引入复合那样, 对 $\mathbb{R}$ 的子集到 $\mathbb{R}$ 的子集的函数集, 我们还可引入 $+, -, \cdot, /, \wedge$ 等运算.

定义 4.15 设 P, Q, S 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 A 是 P 到 Q 的函数集, B 是 P 到 S 的函数集. 设 $*$ 为三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中 $A * B$ 的陪域可按需要决定. 一般地, 我们可写 $\{0\} - B$ 为 $-B$, 写 $A \cdot B$ 为 AB.

若任取函数集 A 的元 a, 任取 $p \in P$, 都有 $a[p] \neq 0$, 则定义

$$\frac{B}{A} = \left\{ \frac{b}{a} \,\middle|\, b \in B, a \in A \right\},$$

其中陪域可按需要决定.

若对任意 $a \in A, b \in B, p \in P$, $a[p]^{b[p]}$ 有意义, 则还可定义

$$A^B = \{a^b \mid a \in A, b \in B\},$$

其中陪域可按需要决定.

现在, 我邀请您证明函数集的如下性质. 我就不证明了; 因为我想, 我已经告诉您怎么论证了.

定理 4.16 设 P 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 A, B, C 都是 P 到 (某个) $\mathbb{R}$ 的子集的函数集. 则

$$\begin{aligned} &A + B = B + A, && AB = BA, \\ &(A + B) + C = A + (B + C), && (AB)C = A(BC), \\ &A(B + C) = AB + AC, && (A + B)C = AC + BC. \end{aligned}$$

定理 4.17 设 P 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 任取函数集 L 的元 ℓ, ℓ 的值域都是 P 的子集. 设 A, B 是 P 上的函数集. 设 $*$ 是五文字 $+, -, \cdot, /, \wedge$ 的任意一个. 则

$$(A * B) \circ L = (A \circ L) * (B \circ L).$$

尽管函数集跟函数有类似的运算律, 不过, 这并不是说, 函数的每一个运算律都可被搬到函数集上.

例 4.18 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 0 是 P 上的恒取零值的函数. 那么, 不难看出, 对任意 $p \in P$:

- $p + 0 = p$;
- 存在 $q \in P$, 使 $p + q = 0$ (取 q 为 $-p$ 即可).

由此, 我们不难推出: 若 $p, q, r \in P$, 且 $q + p = r + p$, 则 $q = r$; 在等式二侧同时加 $-p$, 利用结合律, 再利用 0 的性质即知. 我们姑且称这个性质为函数的加法的消去律.

函数集的加法也有消去律吗? 一般来说, 没有. 取 $A = \{1\}$; 取 B, C 为

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \cdots\},$$

这里的 $0, 1, -1, \cdots$ 都是 P 上的常函数. 那么, 不难验证, $A + C = B + C = C$. 可是, $A \neq B$.

现在我们考虑一类特殊的函数集; 这也是不定积分的演算重点考察的对象.

我们先为一种特殊的函数集引入方便的记号.

设 $P \subset \mathbb{R}$. 考虑 P 上的函数. 任取实数 c, 我们总可以作一个 P 上的常函数

$$\begin{aligned} c: \quad P &\to \{c\}, \\ t &\mapsto c. \end{aligned}$$

反过来, 任取 P 上的一个 (实的) 常函数 f, 我们也总能找到一个实数 c, 使任取 $t \in P$, 都有 $f[t] = c$. 并且, 不同的实数 (常函数) 对应着不同的常函数 (实数). 我们记全体实数作成的集为 $\mathbb{R}$; 所以, 我们也无妨记全体 P 上的 (实的) 常函数作成的集为 $\mathbb{R}_P$. 我们曾说, 除非有必要, 我们不严格区分函数及其限制; 也就是说, 在语境明确的时候, 我们也可写 $\mathbb{R}_P$ 为 $\mathbb{R}$.

下面的几条性质十分重要.

定理 4.19 设 $\mathbb{R}_P$ 为 P 上的全体常函数作成的集. 则 $\mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.

证 任取 $f \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$. 那么, 存在 $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_P$, 使 $f = f_1 + f_2$. 因为二个常函数的和还是常函数, 故 $f \in \mathbb{R}_P$. 反过来, 任取 $g \in \mathbb{R}_P$. 因为 $g = g + 0$, 且 $0 \in \mathbb{R}_P$, 故 $g \in \mathbb{R}_P + \mathbb{R}_P$. 证毕.

定理 4.20 设 $\mathbb{R}_P$ 为 P 上的全体常函数作成的集.

- 若 $d \in \mathbb{R}_P$, 则 $\{d\} + \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.
- 若 $k \in \mathbb{R}_P$, 且 $k \neq 0$, 则 $\{k\} \cdot \mathbb{R}_P = \mathbb{R}_P$.

证 我在此处论证关于加的等式. 任取 $f \in \{d\} + \mathbb{R}_P$. 那么, 存在 $e \in \mathbb{R}_P$ 使 $f = d + e$. 因为二个常函数的和还是常函数, 故 $f \in \mathbb{R}_P$. 反过来, 任取 $g \in \mathbb{R}_P$. 因为 $g = d + (g - d)$, 且 $g - d \in \mathbb{R}_P$, 故 $g \in \{d\} + \mathbb{R}_P$.

论证关于乘的等式的方法是类似的. 不过, 要注意一些细节. $k \neq 0$ 的意思是 k 跟 0 作为**函数**不相等; 所以, 是**存在** $p \in P$, 使 $k[p] \neq 0[p]$. 不过, 因为 k 跟 0 都是**常函数**, 故 $k \neq 0$ (实数的不相等). 所以 k 有倒数 k^{-1}, 且 k^{-1} 也是常函数. 证毕.

定理 4.21 设 $\mathbb{R}_P$ 为 P 上的全体常函数作成的集. 设函数集 A 的每一个函数的值域都是 P 的子集. 则 $\mathbb{R}_P \circ A = \mathbb{R}_P$.

证 注意到对任意 $a \in A$, $k \in \mathbb{R}_P$, 必有 $k \circ a = k$. 证毕.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = \{F\} + \mathbb{R}.$$

您可能会觉得写 $\{F\}$ 较繁. 所以, 我们再简化一下记号.

例 4.22 我假定您学过高中算学里的立体几何.

在高中, 您一开始就学了集与集的关系、运算. 自然地, 我们视平面为**点集** (每一个元都是点的集), 也视直线为**点集**. 那么, 点 P 在直线 ℓ 上, 就是 $P \in \ell$; 点 P 不在直线 ℓ 上, 就是 $P \notin \ell$. 类似地, 点 P 在平面 Π 内, 就是 $P \in \Pi$; 点 P 不在平面 Π 内, 就是 $P \notin \Pi$.

现在, 我们任取一个平面 Π 与一条直线 ℓ. 您也知道, 下面的三事, 有且只有一件能发生:

- ℓ 上的每一个点都是 Π 的点. 我们可简单地记此事为 $\ell \subset \Pi$.
- ℓ 上的每一个点都不是 Π 的点. 我们说, $\ell \cap \Pi$ 是空集.
- 存在唯一的一点 P, 使 $P \in \ell$, 且 $P \in \Pi$. 高中算学会这么写: $\ell \cap \Pi = P$.

Well. 正如您所见, 按道理, 我们应当写 $\ell \cap \Pi = \{P\}$; 毕竟, 我们说, 平面跟直线都是**点集**. 可是, 我们省略了 $\{\ \}$. 也就是说, 我们简单地写刚好有一个元的集 $\{a\}$ 为 a. 不重要地, 高中算学一开始讲集时, 用 $A \subseteq B$ 表达 “A 是 B 的子集”, 用 $A \subsetneq B$ 表达 “A 是 B 的真子集”; where are you, $\subset$?

当然了, 也不是每个高中算学老师都是 “盲人”. 假如您对此事感兴趣, 您可以参考阮龙培的《关于立体几何应用集合论符号的几点看法》与吴长庆的《立体几何使用 “集合语言” 的准确性》. 我承认, 这些文章都比我老.

借此机会, 我说一说我的观点吧. 我的有限的语言知识告诉我, 土话跟胡话都有不少多义词. 这里, “多义” 并不是指有 “很大的区别” 的解释, 而是说这些含义 “相似”, 但又不完全一样 (我加了引号, 因为我不知道怎么用行话表达我的想法). 就拿 “曲线” (胡话: curve) 为例吧. 在中学, 我们一般视曲线为点集. 所以, 我们说, (平面的) 曲线有隐方程 $F[x, y] = 0$, 也有参数方程 $x = f[t]$, $y = g[t]$, $t \in A$ (A 就是所谓的 “参数区间”). 这么看来, 曲线就是全体适合隐方程 (或参数方程) 的 (x, y) 作成的集. 在算学分析 (或高等算学)

里, 您可能也学过怎么用积分算曲线的长. 这个时候, 曲线的方程可能更重要; 这是因为, 曲线的 "几何性质" 似乎对曲线的长的公式的推导没有帮助. 我们计算曲线的长时, 一般都要求 "曲线的参数方程" 的导数连续——这其实涉及到方程的分析性质了. (假如您对此事感兴趣, 您可以参考美国算学家 Walter Rudin 的教材 *Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed.*)

目前, 算学家都是人; 不过, 人类, 似乎生来就想着偷懒. 所以说, 算学家也不例外. 算学家一方面追求严谨; 另一方面, 假如记号不是很简洁, 算学家自己写起来都费劲. 所以, 算学家会说: "在本书 (或本文、本节、本章), 为方便, 我们约定文字 (表达式、符号) ××× 表示……" 不过, 我觉得, 可以先给出 "稍繁琐的写法", 再给 "简单的写法"; 这或许能让学生体会到简单的写法为什么方便. 可惜, 我看了好几本新的高中算学书, 都是一开始用 $\subseteq$ 表子集, 而在立体几何里 "借用" $\subset$ 表直线的每一点都在平面内; 没有一本 (高中算学) 教材说 "为方便, 我们用 $\subset$ 表子集, 并省去刚好有一个元的集 $\{a\}$ 外的花括号".

好了, 我就说这么多吧. 严格地, 这算是 "私货" 了; 可是, 这是一本告诉他人我 (与一些算学家) 的想法的微积分读物. 假如我不带 "私货", 那我要带什么呢? 或许, 我不如不写这本书.

现在, 请允许我正式地作出这样的约定: 在不引起混淆时, 我们可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 a. 所以, 像 $a \in a$, $a \subset \{a\}$ 的表达都是可被接受的.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么, 我们就可以简单地写

$$\int f = F + \mathbb{R}.$$

代 f 以 $\mathrm{D}F$, 就有

$$\int \mathrm{D}F = F + \mathbb{R}.$$

不严格地, 若忽视常函数, 那么不定积分 "抵消了" 导数. 反过来呢?

定义 4.23 设 I 是区间. 设 A 是 I 上的函数集, 且 A 的每个元都是可导函数. 我们说, A 是 I 上的**可导函数集**. 定义

$$\mathrm{D}[A] = \{\mathrm{D}a \mid a \in A\}.$$

有时, 我们也可简单地写 $\mathrm{D}[A]$ 为 $\mathrm{D}A$.

例 4.24 不难看出, $\mathrm{D}\mathbb{R} = \{0\} = 0$.

设 I 是区间. 设 f 是 I 上的函数. 设 F 是 f 的一个原函数. 那么

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\left[\int f\right] &= \mathrm{D}[\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}] \\ &= \{\mathrm{D}[F + c] \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f\} = f.\end{aligned}$$

所以, 不严格地, 我们也可以说, 导数 “抵消了” 不定积分.

定义 4.25 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 A 为 P 上的函数集. 若存在 $a \in A$ 使 $P = \{a\} + \mathbb{R} = a + \mathbb{R}$, 就说 A 是 P 上的**至多相差常函数的函数集**.

注 4.26 或许这样的函数集有更好的名字; 不过, 我姑且这么叫吧.

定理 4.27 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 f 是 P 上的函数.

- 若 g 是 P 上的函数, 则

$$(f + \mathbb{R}) + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

- 若 g 是 P 上的函数, 则

$$f + (g + \mathbb{R}) = (f + g) + \mathbb{R}.$$

  特别地, 取 g 为常函数 c, 则

$$f + \mathbb{R} = f + (c + \mathbb{R}) = (f + c) + \mathbb{R}.$$

- 若 $k \in \mathbb{R}$, 且 $k \neq 0$, 则

$$k(f + \mathbb{R}) = kf + \mathbb{R}.$$

- 若函数 h 的值域是 P 的子集, 则

$$(f + \mathbb{R}) \circ h = f \circ h + \mathbb{R}.$$

证 利用函数集的运算律与 $\mathbb{R}$ 的性质, 有

$$\begin{aligned}(f+\mathbb{R})+(g+\mathbb{R}) &= (\{f\}+\mathbb{R})+(\{g\}+\mathbb{R})\\ &= ((\{f\}+\mathbb{R})+\{g\})+\mathbb{R}\\ &= (\{f\}+(\mathbb{R}+\{g\}))+\mathbb{R}\\ &= (\{f\}+(\{g\}+\mathbb{R}))+\mathbb{R}\\ &= ((\{f\}+\{g\})+\mathbb{R})+\mathbb{R}\\ &= (\{f+g\}+\mathbb{R})+\mathbb{R}\\ &= \{f+g\}+(\mathbb{R}+\mathbb{R})\\ &= (f+g)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}f+(g+\mathbb{R}) &= \{f\}+(\{g\}+\mathbb{R})\\ &= (\{f\}+\{g\})+\mathbb{R}\\ &= (f+g)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

若 $k \neq 0$, 则 $\{k\}\cdot\mathbb{R}=\mathbb{R}$. 从而

$$\begin{aligned}k(f+\mathbb{R}) &= \{k\}(\{f\}+\mathbb{R})\\ &= \{k\}\{f\}+\{k\}\mathbb{R}\\ &= kf+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

最后一个也不难:

$$\begin{aligned}(f+\mathbb{R})\circ h &= (\{f\}+\mathbb{R})\circ\{h\}\\ &= \{f\}\circ\{h\}+\mathbb{R}\circ\{h\}\\ &= (f\circ h)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

证毕.

4.3 不定积分的演算

现在, 我们研究怎么算不定积分.

定理 4.28 设 I 是区间. 设 F 是 I 上的可导函数. 则

$$\int \mathrm{D}F = F + \mathbb{R}.$$

证 我已经证过它了. 证毕.

这或许是最基本的计算法了. 一般来说, “简单的” 函数的不定积分都可以这么求出来.

例 4.29 设 I 是某个不含 0 的区间. 求 $\int \iota^{-1}$.
我们知道, $\mathrm{D}[\ln \circ \operatorname{abs}] = \iota^{-1}$. 所以

$$\int \iota^{-1} = \ln \circ \operatorname{abs} + \mathbb{R}.$$

定理 4.30 设 I 是区间. 设 f, g 是 I 上的函数. 设 f, g 都有不定积分.

- $f + g$ 也有不定积分, 且

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

- 设 $k \in \mathbb{R}$, 且 $k \neq 0$. 则 kf 也有不定积分, 且

$$\int kf = k \int f.$$

证 设 F, G 分别是 f, g 的原函数. 那么

$$\int f = F + \mathbb{R}, \quad \int g = G + \mathbb{R}.$$

因为 $\mathrm{D}[F + G] = f + g$, 故

$$\begin{aligned}\int (f + g) &= (F + G) + \mathbb{R} \\ &= (F + \mathbb{R}) + (G + \mathbb{R}) \\ &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

类似地, 因为 $\mathrm{D}[kF] = kf$, 且 $k \neq 0$, 故

$$\int kf = kF + \mathbb{R} = k(F + \mathbb{R}) = k \int f.$$

证毕.

注 4.31 注意到 $\int 0 = \mathbb{R}$. 所以, 对任意 $k \in \mathbb{R}$,

$$\int kf = k\int f + \mathbb{R}.$$

例 4.32 设 A 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 那么, 不难验证, $-A = (-1)A$. 所以, 特别地, 有

$$\begin{aligned}\int (f-g) &= \int (f+(-1)g)\\ &= \int f + \int (-1)g\\ &= \int f + (-1)\int g\\ &= \int f - \int g.\end{aligned}$$

例 4.33

$$\begin{aligned}&\int \cos = \int \mathrm{D}\sin = \sin + \mathbb{R},\\ &\int \sin = \int (-1)\mathrm{D}\cos = (-1)\int \mathrm{D}\cos = -\cos + \mathbb{R},\\ &\int \exp = \int \mathrm{D}\exp = \exp + \mathbb{R},\\ &\int \imath^n = \int \frac{1}{n+1}\mathrm{D}\,\imath^{n+1} = \frac{\imath^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R} \quad (n \neq -1).\end{aligned}$$

例 4.34

$$\begin{aligned}\int (3\cos - 4\sin + 5\exp) &= \int (3\cos - 4\sin) + \int 5\exp\\ &= \int 3\cos - \int 4\sin + \int 5\exp\\ &= 3\int \cos - 4\int \sin + 5\int \exp\\ &= 3(\sin + \mathbb{R}) - 4(-\cos + \mathbb{R}) + 5(\exp + \mathbb{R})\\ &= (3\sin + \mathbb{R}) + (4\cos + \mathbb{R}) + (5\exp + \mathbb{R})\\ &= ((3\sin + 4\cos) + \mathbb{R}) + (5\exp + \mathbb{R})\\ &= 3\sin + 4\cos + 5\exp + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.35

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2} &= \int (1+\tan^2) = \int \mathrm{D}\tan = \tan + \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{1+\imath^2} &= \int \mathrm{D}\arctan = \arctan + \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-\imath^2}} &= \int \mathrm{D}\arcsin = \arcsin + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.36

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 &= \int (1+\tan^2) - 1\\
&= \int (1+\tan^2) - \int 1\\
&= (\tan + \mathbb{R}) - (\imath + \mathbb{R})\\
&= \tan - \imath + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.37

$$\begin{aligned}
\int \frac{\imath^4}{1+\imath^2} &= \int \frac{\imath^4 - 1 + 1}{1+\imath^2}\\
&= \int \left(\imath^2 - 1 + \frac{1}{1+\imath^2}\right)\\
&= \int \imath^2 - \int 1 + \int \frac{1}{1+\imath^2}\\
&= \left(\frac{\imath^3}{3} + \mathbb{R}\right) - (\imath + \mathbb{R}) + (\arctan + \mathbb{R})\\
&= \frac{\imath^3}{3} - \imath + \arctan + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

定理 4.38 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数, 且有不定积分. 设 f: $I \to J$ 是可导函数. 则 $(g \circ f)\,\mathrm{D}f$ 也有不定积分, 且

$$\int (g \circ f)\,\mathrm{D}f = \left(\int g\right) \circ f.$$

证 设 G 是 g 的原函数. 则

$$\mathrm{D}[G \circ f] = (\mathrm{D}G \circ f)\,\mathrm{D}f = (g \circ f)\,\mathrm{D}f.$$

从而

$$\begin{aligned}\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f &= G\circ f+\mathbb{R}\\ &=(G+\mathbb{R})\circ f\\ &=\left(\int g\right)\circ f.\end{aligned}$$

证毕.

注 4.39　作为对比, 我们看看怎么用传统的记号表示此事.

设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数, 且有不定积分

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)+C.$$

设 $f\colon I\to J$ 是可导函数. 则 $(g\circ f)\,f'$ 也有不定积分

$$\int g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t = G(f(t))+C.$$

一般称这种计算不定积分的方法为 "第一**换元** (积分) 法"; 不过, 我认为, 可以称其为 "第一**复合** (积分) 法", 因为 (表面上) 我代 "换元" 以 "复合". 事实上, 传统的记号跟我在本书用的新记号表达的仍为同一件事. 所谓 "第一换元法" 的本质还是复合与链规则, 只不过, 传统的记号似乎不太允许 "$x=f(x)$" 的写法, 故换一个文字是有必要的.

例 4.40　设 g 有不定积分. 设 $a, b\in\mathbb{R}$, 且 $a\neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int g\circ(a\imath+b) &= \int \frac{1}{a}\,(g\circ(a\imath+b))\,\mathrm{D}[a\imath+b]\\ &=\int\left(\frac{g}{a}\circ(a\imath+b)\right)\mathrm{D}[a\imath+b]\\ &=\left(\int\frac{g}{a}\right)\circ(a\imath+b)\\ &=\left(\frac{1}{a}\int g\right)\circ(a\imath+b).\end{aligned}$$

例 4.41 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{c}{a\imath + b} &= \left(\frac{1}{a}\int \frac{c}{\imath}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a}\int \frac{1}{\imath} + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a}\ln \circ \operatorname{abs} + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \frac{c}{a}\ln \circ \operatorname{abs} \circ (a\imath + b) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地, 若 $n \neq -1$, 则

$$\begin{aligned}\int c(a\imath + b)^n &= \left(\frac{1}{a}\int c\imath^n\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a}\int \imath^n + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \left(\frac{c}{a} \cdot \frac{\imath^{n+1}}{n+1} + \mathbb{R}\right) \circ (a\imath + b) \\ &= \frac{c(a\imath + b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.42 以后, 若

$$k\int g = kG + \mathbb{R},$$

我们可直接写

$$\left(k\int g\right) \circ f = kG \circ f + \mathbb{R}.$$

例 4.43 利用三角公式, 有

$$\begin{aligned}\int \cos\sin &= \int \frac{1}{2}\sin \circ 2\imath \\ &= \left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\sin\right) \circ 2\imath \\ &= \left(\frac{1}{4}\int \sin\right) \circ 2\imath \\ &= -\frac{1}{4}\cos \circ 2\imath + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

当然, 我们也可以这么解:

$$
\begin{aligned}
\int \cos\sin &= \int \sin \mathrm{D}\sin \\
&= \left(\int \iota\right)\circ \sin \\
&= \frac{1}{2}\sin^2 + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.44 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 则

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-\iota^2}} &= \int \frac{1/a}{\sqrt{1-(\iota/a)^2}} \\
&= \left(\frac{1}{1/a}\int \frac{1/a}{\sqrt{1-\iota^2}}\right)\circ \frac{\iota}{a} \\
&= \arcsin\circ\frac{\iota}{a} + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2+\iota^2} &= \int \frac{1/a^2}{1+(\iota/a)^2} \\
&= \left(\frac{1}{1/a}\int \frac{1/a^2}{1+\iota^2}\right)\circ \frac{\iota}{a} \\
&= \frac{1}{a}\arctan\circ\frac{\iota}{a} + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.45

$$
\begin{aligned}
\int \tan &= \int \frac{\sin}{\cos} \\
&= \int \frac{-\mathrm{D}\cos}{\cos} \\
&= \left(\int \frac{-1}{\iota}\right)\circ \cos \\
&= -\ln\circ\mathrm{abs}\circ\cos + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.46

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos}{\sin} &= \int \frac{\mathrm{D}\sin}{\sin} \\
&= \ln\circ\mathrm{abs}\circ\sin + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.47 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\iota^2 - a^2} &= \int \frac{1}{(\iota - a)(\iota + a)} \\
&= \int \frac{(\iota + a) - (\iota - a)}{2a(\iota - a)(\iota + a)} \\
&= \int \left(\frac{1}{2a(\iota - a)} - \frac{1}{2a(\iota + a)} \right) \\
&= \int \frac{1}{2a(\iota - a)} - \int \frac{1}{2a(\iota + a)} \\
&= \left(\int \frac{1}{2a\iota} \right) \circ (\iota - a) - \left(\int \frac{1}{2a\iota} \right) \circ (\iota + a) \\
&= \frac{1}{2a} \ln \circ \operatorname{abs} \circ (\iota - a) - \frac{1}{2a} \ln \circ \operatorname{abs} \circ (\iota + a) + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{\operatorname{abs} \circ (\iota - a)}{\operatorname{abs} \circ (\iota + a)} \right] + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2a} \ln \circ \operatorname{abs} \circ \frac{\iota - a}{\iota + a} + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.48

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos} &= \int \frac{\cos}{\cos^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{D} \sin}{1 - \sin^2} \\
&= \left(\int \frac{1}{1 - \iota^2} \right) \circ \sin \\
&= -\frac{1}{2 \cdot 1} \ln \circ \operatorname{abs} \circ \frac{\iota - 1}{\iota + 1} \circ \sin + \mathbb{R} \\
&= -\frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 - \sin}{1 + \sin} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2} \ln \circ \frac{1 + \sin}{1 - \sin} + \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例 4.49

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin} &= \int \frac{1}{\cos \circ (2\pi/4 - \iota)} \\
&= \left(\frac{1}{-1} \int \frac{1}{\cos} \right) \circ \left(\frac{2\pi}{4} - \iota \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1-\sin}{1+\sin}\circ\left(\frac{2\pi}{4}-\iota\right)+\mathbb{R}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1-\cos}{1+\cos}+\mathbb{R}.$$

定理 4.50 设 I, J 为区间. 设 g 是 J 上的函数. 设 $f\colon I\to J$ 是严单调的可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值. 若 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 有不定积分, **则 g 也有不定积分**, 且

$$\int g = \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ f^{[-1]}.$$

证 因为 $f\colon I\to J$ 是严单调的可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值, 故 $f^{[-1]}$ 也是严单调的可导函数. 设 G 是 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 的一个原函数. 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}[G\circ f^{[-1]}] &= (\mathrm{D}G\circ f^{[-1]})\,\mathrm{D}f^{[-1]}\\
&= ((g\circ f)\circ f^{[-1]})\cdot(\mathrm{D}f\circ f^{[-1]})\cdot\frac{1}{\mathrm{D}f\circ f^{[-1]}}\\
&= (g\circ(f\circ f^{[-1]}))\cdot 1\\
&= g\circ\iota = g.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\int g &= G\circ f^{[-1]}+\mathbb{R}\\
&= (G+\mathbb{R})\circ f^{[-1]}\\
&= \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ f^{[-1]}.
\end{aligned}$$

证毕.

上述结论有一个变体; 请您仔细比较二者的细微区别.

定理 4.51 设 I, J 为区间. **设 J 上的函数 g 有不定积分.** 设 $f\colon I\to J$ 可导. 设 $e\colon J\to I$ 适合 $f\circ e=\iota$. 则

$$\int g = \left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ e.$$

证 因为 J 上的函数 g 有不定积分, 且 $f\colon I\to J$ 是 I 上的可导函数, 故 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 有不定积分, 且

$$\left(\int g\right)\circ f = \int (g\circ f)\,\mathrm{D}f.$$

从而

$$\begin{aligned}\int g &= \left(\int g\right) \circ \{\iota\} \\ &= \left(\int g\right) \circ \{f \circ e\} \\ &= \left(\int g\right) \circ (\{f\} \circ \{e\}) \\ &= \left(\left(\int g\right) \circ f\right) \circ \{e\} \\ &= \left(\int (g \circ f)\,\mathrm{D}f\right) \circ e.\end{aligned}$$

证毕.

例 4.52 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + \iota^2}}.$$

记 $g = \sqrt{a^2 + \iota^2}\colon \mathbb{R} \to [a, +\infty)$. 不难看出, 求解 $\int g^{-1}$ 的最大障碍就是 sqrt (它一定存在, 因为 g^{-1} 是连续函数). 所以, 我们想一个办法消去根号. 什么东西跟 g 的复合可以不带 sqrt 呢? 联想到三角恒等式 $1 + \tan^2 = \cos^{-2}$, 故我们可考虑令 $f = a\tan\colon (-2\pi/4, 2\pi/4) \to \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)\,\mathrm{D}f &= \frac{a(1 + \tan^2)}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2}} \\ &= \sqrt{1 + \tan^2} \\ &= \frac{1}{\cos}.\end{aligned}$$

接下来就是要找一个 $e\colon \mathbb{R} \to (-2\pi/4, 2\pi/4)$, 使 $f \circ e = \iota$. 事实上, 这样的 e 并不难找, 因为

$$\begin{aligned}f^{[-1]} &= (a\iota \circ \tan)^{[-1]} \\ &= \tan^{[-1]} \circ (a\iota)^{[-1]} \\ &= \arctan \circ \frac{\iota}{a},\end{aligned}$$

故我们取 e 为 f 的反函数, 即有 $f \circ e = \iota$. 故

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+\iota^2}} = \left(\int \frac{1}{\cos}\right) \circ \left(\arctan \circ \frac{\iota}{a}\right)
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{1+\sin}{1-\sin} \circ \left(\arctan \circ \frac{\iota}{a}\right) + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{1+\iota}{1-\iota} \circ (\sin \circ \arctan) \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \left(\frac{1+\iota}{1-\iota} \circ \frac{\iota}{\sqrt{1+\iota^2}}\right) \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{\sqrt{1+\iota^2}+\iota}{\sqrt{1+\iota^2}-\iota} \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln \circ \frac{\left(\sqrt{1+\iota^2}+\iota\right)^2}{\left(\sqrt{1+\iota^2}-\iota\right)\left(\sqrt{1+\iota^2}+\iota\right)} \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln \circ \iota^2\right) \circ \left(\iota + \sqrt{1+\iota^2}\right) \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \operatorname{abs} \circ \left(\iota + \sqrt{1+\iota^2}\right) \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\iota + \sqrt{1+\iota^2}\right) \circ \frac{\iota}{a} + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\frac{\iota + \sqrt{a^2+\iota^2}}{a}\right) + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\iota + \sqrt{a^2+\iota^2}\right) - \ln[a] + \mathbb{R} \\
&= \ln \circ \left(\iota + \sqrt{a^2+\iota^2}\right) + \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

例 4.53 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a > 0$. 求

$$\int \frac{1}{\sqrt{\iota^2 - a^2}}.$$

我们先设 $g = \operatorname{sqrt}^{-1} \circ (\iota^2 - a^2)\colon (a, +\infty) \to (0, +\infty)$. 假如我们算出 g 的不定积分是 $G + \mathbb{R}$, 那么我们可以由此立得 $h = \operatorname{sqrt}^{-1} \circ (\iota^2 - a^2)\colon (-\infty, a) \to (0, +\infty)$ 的不定积分. 这是因为

$$h = g \circ (-\iota),$$

故

$$\begin{aligned}\int h &= \left(\frac{1}{-1}\int g\right)\circ(-\iota)\\ &= -\boldsymbol{G}\circ(-\iota)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

对于 g, 我们考虑 $f = a/\iota\colon (a,+\infty)\to(0,1)$. 不难看出, $f\circ f=\iota$, 故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\iota^2-a^2}} &= \left(\int \frac{\mathrm{D}f}{\sqrt{f^2-a^2}}\right)\circ f\\ &= \left(\int \frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}}\right)\circ\frac{a}{\iota}.\end{aligned}$$

现在, 我们想办法计算

$$\int \frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}}.$$

因为 $\sin\colon (0,2\pi/4)\to(0,1)$ 可导, 且 $\sin\circ\arcsin=\iota$, 故

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}} &= \left(\int \frac{-\mathrm{D}\sin}{\sin\cos}\right)\circ\arcsin\\ &= \left(\int \frac{-1}{\sin}\right)\circ\arcsin\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1+\iota}{1-\iota}\circ(\cos\circ\arcsin)+\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1+\iota}{1-\iota}\circ\sqrt{1-\iota^2}+\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{1-\sqrt{1-\iota^2}}+\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\circ\frac{\left(1+\sqrt{1-\iota^2}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\iota^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\iota^2}\right)}+\mathbb{R}\\ &= \left(\frac{1}{2}\ln\circ\iota^2\right)\circ\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{\iota}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\mathrm{abs}\circ\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{\iota}+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\iota^2-a^2}} &= \left(\int \frac{-1}{\iota\sqrt{1-\iota^2}}\right)\circ\frac{a}{\iota}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\left(\frac{1+\sqrt{1-\iota^2}}{\iota}\circ\frac{a}{\iota}\right)+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

这算出了 $g = \operatorname{sqrt}^{-1}\circ(\iota^2-a^2)\colon (a,+\infty)\to(0,+\infty)$ 的不定积分. 由此可知 $h = \operatorname{sqrt}^{-1}\circ(\iota^2-a^2)\colon (-\infty,-a)\to(0,+\infty)$ 的不定积分是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\iota^2-a^2}} &= -\ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}}{a}\circ(-\iota)+\mathbb{R}\\ &= -\ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{-\iota+\sqrt{(-\iota)^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{a}{-\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{a\big(\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}\big)}{\big(-\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}\big)\big(\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}\big)}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}}{-a}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

综上, 若区间 J 不包含 $[-a,a]$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\iota^2-a^2}} &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\frac{\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}}{a}+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\big(\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}\big)-\ln[|a|]+\mathbb{R}\\ &= \ln\circ\operatorname{abs}\circ\big(\iota+\sqrt{\iota^2-a^2}\big)+\mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.54 设 $a\in\mathbb{R}$, 且 $a>0$. 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{\iota^2\pm a^2}} = \ln\circ\operatorname{abs}\circ\big(\iota+\sqrt{\iota^2\pm a^2}\big)+\mathbb{R}.$$

我再介绍一个解不定积分的法则.

定理 4.55 设 I 为区间, f, g 都是 I 上的可导函数. 若 $g\mathrm{D}f$ 有不定积分, 则 $f\mathrm{D}g$ 也有不定积分, 且

$$\int f\mathrm{D}g = fg - \int g\mathrm{D}f.$$

证 设 H 是 $g\mathrm{D}f$ 的一个原函数. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{D}[fg - H] &= \mathrm{D}f \cdot g + f \cdot \mathrm{D}g - \mathrm{D}H \\ &= g\mathrm{D}f + f\mathrm{D}g - g\mathrm{D}f \\ &= f\mathrm{D}g.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int f\mathrm{D}g &= (fg - H) + \mathbb{R} \\ &= fg - (H + \mathbb{R}) \\ &= fg - \int g\mathrm{D}f.\end{aligned}$$

证毕.

例 4.56 设整数 $m \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int \iota^{m-1}\ln &= \int \ln \mathrm{D}\,\frac{\iota^m}{m} \\ &= \ln\frac{\iota^m}{m} - \int \frac{\iota^m}{m}\,\mathrm{D}\ln \\ &= \frac{\iota^m \ln}{m} - \int \frac{\iota^{m-1}}{m} \\ &= \frac{\iota^m}{m^2}(m\ln - 1) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

注 4.57

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln}{\iota} &= \int \ln \mathrm{D}\ln \\ &= \left(\int \iota\right) \circ \ln \\ &= \frac{1}{2}\ln^2 + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

例 4.58 设 I, J 为区间. 设 $f\colon I \to J$ 是严单调的可导函数, 且 $\mathrm{D}f$ 不取零值. 所以, $f^{[-1]}$ 也是严单调的可导函数. 从而

$$\begin{aligned}\int f^{[-1]} &= \int f^{[-1]}\,\mathrm{D}\,\imath \\ &= f^{[-1]}\,\imath - \int \imath\,\mathrm{D}f^{[-1]} \\ &= \imath f^{[-1]} - \int (f \circ f^{[-1]})\,\mathrm{D}f^{[-1]} \\ &= \imath f^{[-1]} - \left(\int f\right) \circ f^{[-1]}.\end{aligned}$$

例 4.59 我们可轻松地求解 arcsin 的不定积分:

$$\begin{aligned}\int \arcsin &= \imath \arcsin - \left(\int \sin\right) \circ \arcsin \\ &= \imath \arcsin + \cos \circ \arcsin + \mathbb{R} \\ &= \imath \arcsin + \mathrm{sqrt} \circ (1 - \imath^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\int \arctan &= \imath \arctan - \left(\int \tan\right) \circ \arctan \\ &= \imath \arctan - \ln \circ \mathrm{abs} \circ \cos \circ \arctan + \mathbb{R} \\ &= \imath \arctan + \ln \circ \mathrm{abs} \circ \mathrm{sqrt}^{-1} \circ (1 + \imath^2) + \mathbb{R} \\ &= \imath \arctan + \ln \circ \mathrm{sqrt}^{-1} \circ (1 + \imath^2) + \mathbb{R} \\ &= \imath \arctan - \ln \circ \mathrm{sqrt} \circ (1 + \imath^2) + \mathbb{R} \\ &= \imath \arctan - \frac{1}{2} \ln \circ (1 + \imath^2) + \mathbb{R}.\end{aligned}$$

原则上, 我还可以再举一些例; 不过, 我感觉, 学而不思则罔, 思而不学则殆. 再者, 我假定您学过微积分, 所以您可以自行找高等算学 (或算学分析) 教材上的问题练习. 当然, 请试用我在本书讲的 “无变量不定积分法”.

第五章 积分

本章讨论如何**计算**积分; 这里的 “积分” 是 “定积分”, 虽然我觉得 “定” 有些多余.

我暂且用一会儿传统的记号, 告诉您我在本章会写什么东西吧.

具体地, 设 f 是区间 I 上的连续函数, 且 $a, b \in I$. 积分论告诉我们, f 在 $[a, b]$ 上的积分 (或者, f 在 $[b, a]$ 上的积分的相反数)

$$\alpha = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在. 所以, 我们可以专心地思考怎么算出结果 (而不必担心结果是否存在); 本章就告诉您一些计算积分的方法.

当然, 我还是会使用

$$\int_a^b f$$

表示 α; 毕竟, 这是本书的一个大主题.

5.1 不定积分与积分

我们在上一章 “乘热打铁地” 证明了当时没用到的定理:

定理 4.10 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F[b] - F[a].$$

原则上, 我们可以用这个定理计算很多积分了.

例 5.1 因为 cos 的一个原函数是 sin, 故

$$\int_0^{2\pi/4} \cos = \sin[2\pi/4] - \sin[0] = 1.$$

例 5.2 因为 exp 的一个原函数是 exp, 故

$$\int_0^1 \exp = \exp[1] - \exp[0] = \mathrm{e} - 1.$$

例 5.3 因为 $1/(1+\iota^2)$ 的一个原函数是 arctan, 故

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\iota^2} = \arctan[1] - \arctan[-1] = \frac{2\pi}{4}.$$

不过, 我们不妨先探索不定积分跟积分的联系. 在建立一定的联系后, 我们可以更有条理地算积分.

定理 4.10 是 Newton-Leibniz 公式的一个经典说法; 它描述了**原函数**与**积分**的关系. 自然地, 就有这样的问题: 有没有**直接**描述**不定积分**跟**积分**的关系的说法呢?

姑且从传统的记号说起. 或许, 您还能想起来, 用传统的记号, 可写上述三个积分的计算为

$$\int_0^{2\pi/4} \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \Big|_0^{2\pi/4} = 1,$$
$$\int_0^1 \exp x \,\mathrm{d}x = \exp x \Big|_0^1 = \mathrm{e} - 1,$$
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{4}.$$

这里, $\exp x \Big|_0^1$ 就是 $\exp 1 - \exp 0$ (或者, 按本书的记号, $\exp[1] - \exp[0]$) 的省略. 所以, 我们也可定义一个类似的记号.

定义 5.4 设 f 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数. 设 $a, b \in P$. 定义

$$\big[f\big]_a^b = f[b] - f[a].$$

姑且称其为 “bracket 运算” (土话: 方括号运算).

传统的记号在函数 $f(x)$ (这里, 为对照, 使用经典的函数记号) 的右侧画单条长竖线; 为清晰起见, 我用一对方括号包围函数 f. 毕竟, 形如

$$1 + f(x)\Big|_a^b$$

的文字是有歧义的: 这是 $1 + (f(b) - f(a))$ 还是 $(1 + f(b)) - (1 + f(a))$ 呢?

定理 5.5 设 f, g 都是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数. 设 $a, b \in P$. Bracket 运算适合如下性质:

- 二个函数的和的 bracket 等于二个函数的 bracket 的和, 即

$$\big[f + g\big]_a^b = \big[f\big]_a^b + \big[g\big]_a^b.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$\big[k\big]_a^b = 0.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$\big[kf\big]_a^b = k \cdot \big[f\big]_a^b.$$

- 设 $Q \subset \mathbb{R}$ 上的函数 h 的值域是 P 的子集. 设 $c, d \in Q$. 则

$$\big[f \circ h\big]_c^d = \big[f\big]_{h[c]}^{h[d]}.$$

证 按定义论证这四条即可.

$[f+g]_a^b$, 按定义, 就是 $(f+g)[b]-(f+g)[a]$. 不过, 我们知道, $(f+g)[b] = f[b] + g[b]$; 类似地, $(f + g)[a] = f[a] + g[a]$. 所以, 二者的差就是

$$(f[b] + g[b]) - (f[a] + g[a]) = (f[b] - f[a]) + (g[b] - g[a]) = \big[f\big]_a^b + \big[g\big]_a^b.$$

$[k]_a^b$, 按定义, 就是 $k[b] - k[a]$. 可是, $k[b] = k[a] = k$, 故 $[k]_a^b = 0$.

$[kf]_a^b$, 按定义, 就是 $(kf)[b]-(kf)[a]$. 不过, $(kf)[b] = k[b]\cdot f[b] = k\cdot f[b]$; 类似地, $(kf)[a] = k \cdot f[a]$. 所以

$$k \cdot f[b] - k \cdot f[a] = k \cdot (f[b] - f[a]) = k \cdot \big[f\big]_a^b.$$

最后一个或许是最容易的:

$$\begin{aligned}\left[f\circ h\right]_c^d &= (f\circ h)[d]-(f\circ h)[c]\\ &= f[h[d]]-f[h[c]]\\ &= \left[f\right]_{h[c]}^{h[d]}.\end{aligned}$$

证毕.

利用 bracket 运算, 我们可 “换汤不换药” 地改写 Newton-Leibniz 公式:

定理 5.6 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 F 是 f 的原函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[F\right]_a^b.$$

的确, 这个改写只是用 “新鲜的” bracket 运算包装了函数在二点的差. 不过, 这还只是一小步; 我马上就要迈一大步了.

我刚定义了函数的 bracket 运算; 那么函数集有没有 bracket 运算呢?

这问题, 其实是废话: 有就是有, 没有就是没有. 的确, 我刚才只是定义了函数的 bracket 运算, 而没有定义函数集的 bracket 运算. 不过这是大问题吗? 我现在就定义它.

定义 5.7 设 A 是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 设 $a, b \in P$. 定义

$$\begin{aligned}\left[A\right]_a^b &= \left\{ \left[f\right]_a^b \,\middle|\, f \in A \right\}\\ &= \{f[b]-f[a] \mid f \in A\}.\end{aligned}$$

不难看出, bracket 运算变函数集为数集 (实数集的子集). 所以, 为研究函数集的 bracket 运算的性质, 我们要定义数集的运算.

定义 5.8 设 P, Q 为 $\mathbb{R}$ 的子集. 设 $*$ 是三文字 $+, -, \cdot$ 的任意一个. 定义

$$P * Q = \{p * q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

老样子, 可写 $P \cdot Q$ 为 PQ, 写 $\{0\} - P$ 为 $-P$.

若 P 的每一个元都不是零, 还可定义

$$\frac{Q}{P} = \left\{ \frac{q}{p} \,\middle|\, q \in Q, p \in P \right\}.$$

若对任意 $p \in P$, $q \in Q$, p^q 有意义, 则还可定义

$$P^Q = \{p^q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

不意外地, 我们有如下性质.

定理 5.9 设 P, Q, S 都是 $\mathbb{R}$ 的子集. 则

$$\begin{aligned} P+Q &= Q+P, & PQ &= QP, \\ (P+Q)+S &= P+(Q+S), & (PQ)S &= P(QS), \\ P(Q+S) &= PQ+PS, & (P+Q)S &= PS+QS. \end{aligned}$$

证 我不证了; 这跟函数集的相关性质太相似了. 还是老套路: 证明左边是右边的子集, 且右边是左边的子集. 您肯定得用到 $\mathbb{R}$ 的运算律. 证毕.

由此, 我们就有如下的函数集的 bracket 运算律:

定理 5.10 设 A, B 都是 $P \subset \mathbb{R}$ 上的函数集. 设 $a, b \in P$.

- 二个函数集的和的 bracket 等于二个函数集的 bracket 的和, 即

$$\left[A+B\right]_a^b = \left[A\right]_a^b + \left[B\right]_a^b.$$

- 设函数集 C 的每一个元都是 P 上的常函数. 则

$$\left[C\right]_a^b = \{0\}.$$

- 设 k 为 P 上的常函数. 则

$$\left[\{k\}A\right]_a^b = \{k\} \cdot \left[A\right]_a^b.$$

- 设 $Q \subset \mathbb{R}$ 上的函数 h 的值域是 P 的子集. 设 $c, d \in Q$. 则

$$\left[A \circ \{h\}\right]_c^d = \left[A\right]_{h[c]}^{h[d]}.$$

证 还是老套路: 相互包含. 由于我已经建立了函数的 bracket 运算律, 所以您的论证应该不会太长. 证毕.

在上一章, 我曾说, 在不引起混淆时, 可写恰含一个元的集 $\{a\}$ 为 a. 现在我又要采用这个约定了.

定理 5.11 设 $P \subset \mathbb{R}$. 设 f 是 P 上的函数. 设 $\mathbb{R}_P$ 是 P 上的所有 (实的) 常函数作成的集 (当然, 也可简单地写其为 $\mathbb{R}$). 设 $a, b \in P$. 则

$$\left[f + \mathbb{R}\right]_a^b = \left[f\right]_a^b.$$

证 直接验证; 不过, 您还是要注意一些细节的.

$$\begin{aligned}
\left[f + \mathbb{R}\right]_a^b &= \left[\{f\} + \mathbb{R}\right]_a^b \\
&= \left[\{f\}\right]_a^b + \left[\mathbb{R}\right]_a^b \\
&= \left[\{f\}\right]_a^b + \{0\} \\
&= \left[\{f\}\right]_a^b \\
&= \left[f\right]_a^b.
\end{aligned}$$

证毕.

下面的命题更直接地焊接了不定积分与积分.

定理 5.12 (Newton-Leibniz) 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b.$$

注 5.13 严谨地 (但不重要地), 我们应当写

$$\left\{\int_a^b f\right\} = \left[\int f\right]_a^b.$$

证 因为 f 是 I 上的连续函数, 故 f 有一个原函数 F, 且 $\int f = F + \mathbb{R}$. 从而

$$\left[\int f\right]_a^b = \left[F + \mathbb{R}\right]_a^b = \left[F\right]_a^b = \int_a^b f.$$

证毕.

5.2　计算积分

在上一节, 我们得到了新的 Newton-Leibniz 公式:

定理 5.12 (Newton-Leibniz)　设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 则对任意 $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b.$$

这将是本节的重点; 毕竟, 在大多数场合, **具体**计算积分时, 还是要用它.

我们先从积分论**借**三个公式. 它们比 Newton-Leibniz 公式更基础; 或者说, 在论证 Newton-Leibniz 公式时, 我们已经用到它们了.

定理 2.26　设 f, g 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 设 $k \in \mathbb{R}$. 则

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

定理 2.32　设 f 是区间 I 上的连续函数. 设 $a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

我们曾建立了不定积分的运算律; 现在, 我们试建立积分的更多的运算律.

先定义一个术语.

定义 5.14　设 I 为区间. 设 f 是 I 上的可导函数. 若 $\mathrm{D}f$ 还是 I 上的连续函数, 则说 f **连导**.

定理 5.15　设 I, J 为**区间**. 设 g 是 J 上的**连续函数**. 设 $f\colon I \to J$ **连导**. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b (g \circ f)\,\mathrm{D}f = \int_{f[a]}^{f[b]} g.$$

请您注意上述定理的**被强调的词**; 为保证积分有意义 (请注意, 在本书, 我们只讨论**连续函数**的积分论), 我要求函数的性质好一些; 不过, 这并不是很影响实际应用.

证 因为 f 连导, 故 f 跟 $\mathrm{D}f$ 都是连续函数. 因为 g 是连续函数, 故 $h = (g \circ f)\,\mathrm{D}f$ 也是连续函数. 所以, 可用 Newton-Leibniz 公式计算 h 的积分. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b (g \circ f)\,\mathrm{D}f &= \left[\int (g \circ f)\,\mathrm{D}f\right]_a^b \\ &= \left[\left(\int g\right) \circ f\right]_a^b \\ &= \left[\int g\right]_{f[a]}^{f[b]} \\ &= \int_{f[a]}^{f[b]} g.\end{aligned}$$

证毕.

我们无妨再看一遍命题的论证. 首先, 我们明确 $(g \circ f)\,\mathrm{D}f$ 是连续函数, 故可用 Newton-Leibniz 公式计算积分; 然后, 我们用不定积分的运算律转化为 g 的积分 (因为 g 是连续函数).

其实, 在实际的计算中, 我们**并不需要**每一次都变不定积分的 bracket 运算为积分. 一般地, 我们用 Newton-Leibniz 公式算积分. 为书写方便, 我们一般用长竖线 (当然, 在本书, 用 bracket 运算) 代替函数在二点的值的差. 因为本书定义了函数集的 bracket 运算, 故我们可直接变积分为函数集的 bracket. 在方括号内, 就是我们已经熟知的不定积分. 所以, 不定积分与 bracket 运算就能解决大多数积分问题. (当然, Newton-Leibniz 公式也不是万能的.)

例 5.16 我拿简单的 sin cos 举例吧.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/4} \sin\cos = \int_0^{2\pi/4} \sin \mathrm{D}\sin &= \int_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} \iota \\ &= \left[\int \iota\right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]} = \left[\frac{\iota^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若充分利用 bracket 运算的性质, 我们可以这么写:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/4} \sin\cos &= \left[\int \sin\cos\right]_0^{2\pi/4}\\ &= \left[\int \sin \mathrm{D}\sin\right]_0^{2\pi/4} = \left[\left(\int \iota\right)\circ \sin\right]_0^{2\pi/4}\\ &= \left[\int \iota\right]_{\sin[0]}^{\sin[2\pi/4]}\\ &= \left[\frac{\iota^2}{2}+\mathbb{R}\right]_0^1 = \left[\frac{\iota^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当然, 因为 $\mathbb{R}$ 的 bracket 为 0, 故计算积分时不必写出来.

定理 5.17 设 I, J 为**区间**. 设 J 上的函数 g **连续**. 设 $f\colon I\to J$ **连导**. 设 $e\colon J\to I$ 适合 $f\circ e=\iota$. 任取 $c, d\in J$. 则

$$\int_c^d g = \int_{e[c]}^{e[d]} (g\circ f)\,\mathrm{D}f.$$

证 注意到 g 与 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$ 都是连续函数. 所以

$$\begin{aligned}\int_c^d g &= \left[\int g\right]_c^d\\ &= \left[\left(\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right)\circ e\right]_c^d\\ &= \left[\int (g\circ f)\,\mathrm{D}f\right]_{e[c]}^{e[d]}\\ &= \int_{e[c]}^{e[d]} (g\circ f)\,\mathrm{D}f.\end{aligned}$$

证毕.

例 5.18 计算

$$\int_{-1}^1 \mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2).$$

设 $J=[-1,1]$. 设 $g=\mathrm{sqrt}\circ(1-\iota^2)$ 为 J 上的函数. 为计算此积分, 我们无妨考虑找一个合适的**区间** I, 与一个 I 到 J 的连导函数 f, 使 $(g\circ f)\,\mathrm{D}f$

简单一些; 当然, 还要找一个 J 到 I 的函数 e, 使 $f \circ e = \imath$. 我们无妨取 $I = [-2\pi/4, 2\pi/4]$, $f = \sin$. 那么, $\mathrm{D}f = \cos$, 且 $g \circ f = \cos$. 并且, 不难看出, 取 $e = \arcsin$, 即得 $f \circ e = \imath$. 故

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{sqrt} \circ (1 - \imath^2) &= \left[\int \mathrm{sqrt} \circ (1 - \imath^2)\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\left(\int (\mathrm{sqrt} \circ (1 - \imath^2) \circ \sin) \,\mathrm{D} \sin\right) \circ \arcsin\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\int \cos^2\right]_{\arcsin[-1]}^{\arcsin[1]} \\
&= \left[\int \frac{1 + \cos}{2} \circ 2\imath\right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
&= \left[\left(\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos}{2}\right) \circ 2\imath\right]_{-2\pi/4}^{2\pi/4} \\
&= \left[\int \frac{1 + \cos}{4}\right]_{2\imath[-2\pi/4]}^{2\imath[2\pi/4]} \\
&= \left[\frac{\imath + \sin}{4}\right]_{-2\pi/2}^{2\pi/2} \\
&= \frac{2\pi/2 + 0}{4} - \frac{-2\pi/2 + 0}{4} \\
&= \frac{2\pi}{4}.
\end{aligned}$$

定理 5.19 设 I 为**区间**, f, g 都是 I 上的**连导**函数. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b f \mathrm{D} g = \left[f g\right]_a^b - \int_a^b g \mathrm{D} f.$$

证 $f \mathrm{D} g$ 与 $g \mathrm{D} f$ 都是连续函数. 从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b f \mathrm{D} g = \left[\int f \mathrm{D} g\right]_a^b &= \left[f g - \int g \mathrm{D} f\right]_a^b \\
= \left[f g\right]_a^b - \left[\int g \mathrm{D} f\right]_a^b &= \left[f g\right]_a^b - \int_a^b f \mathrm{D} g.
\end{aligned}$$

证毕.

例 5.20 计算

$$\int_0^{2\pi/2} \sin \exp.$$

注意到 $\mathrm{D}\exp = \exp$. 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/2} \sin\exp &= \int_0^{2\pi/2} \sin \mathrm{D}\exp \\
&= \left[\sin\exp\right]_0^{2\pi/2} - \int_0^{2\pi/2} \exp \mathrm{D}\sin \\
&= 0 - \int_0^{2\pi/2} \cos\exp \\
&= -\int_0^{2\pi/2} \cos \mathrm{D}\exp \\
&= -\left[\cos\exp\right]_0^{2\pi/2} + \int_0^{2\pi/2} \exp \mathrm{D}\cos \\
&= (1 + \exp[2\pi/2]) - \int_0^{2\pi/2} \sin\exp.
\end{aligned}$$

由此可知

$$\int_0^{2\pi/2} \sin\exp = \frac{1 + \exp[2\pi/2]}{2}.$$

最后, 我再讲一个小技巧吧.

定理 5.21 设 I 为区间. 设 f 是 I 上的连续函数. 设 $a, b \in I$. 则

$$\int_a^b f = \int_a^b f \circ (a + b - \imath) = \frac{1}{2}\int_a^b (f + f \circ (a + b - \imath)).$$

证 我们证明前一个等号成立即可; 至于后一个等号, 利用 "二个相等的数的平均数跟其相等" 即可.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f \circ (a + b - \imath) &= \int_a^b -f \circ (a + b - \imath) \cdot (-1) \\
&= \int_a^b (-f \circ (a + b - \imath))\, \mathrm{D}(a + b - \imath) \\
&= \int_{(a+b-\imath)[a]}^{(a+b-\imath)[b]} -f \\
&= -\int_b^a f = \int_a^b f.
\end{aligned}$$

证毕.

例 5.22　计算

$$\int_0^{2\pi/2} \frac{\iota \sin}{2-\sin^2}.$$

设

$$f = \frac{\iota \sin}{2-\sin^2}.$$

按照以往的经验, 您可能会试着先找 f 的不定积分. 注意, f 甚至可以是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 所以 f 的不定积分**一定存在**. 只不过, 您是否能顺利地写出来, 就是另一个问题. 我承认, 我自己也写不出初等函数 F, 使 $\mathrm{D}F = f$.

既然找原函数不太行, 那就试着用小技巧. 注意到

$$\sin = \sin \circ \left(\frac{2\pi}{2} - \iota\right),$$

故

$$f \circ \left(0 + \frac{2\pi}{2} - \iota\right) = \frac{(2\pi/2 - \iota)\sin}{2-\sin^2}.$$

从而

$$\begin{aligned} g &= f + f \circ \left(0 + \frac{2\pi}{2} - \iota\right) \\ &= \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{2-\sin^2} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\sin}{1+(-\cos)^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/2} f &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi/2} g \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} \int_0^{2\pi/2} \frac{\mathrm{D}[-\cos]}{1+(-\cos)^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-\cos[0]}^{-\cos[2\pi/2]} \frac{1}{1+\iota^2} \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{D}\arctan \\ &= \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{(2\pi)^2}{16}. \end{aligned}$$

参考文献

[1] MENGER K. Are variables necessary in calculus?[J]. The American Mathematical Monthly, 1949, 56(9): 609-620.

[2] RUDIN W. Principles of mathematical analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976: 136-137, 141-142.

[3] 阮龙培. 关于立体几何应用集合论符号的几点看法[J]. 数学通报, 1986, 1: 31.

[4] 张筑生. 数学分析新讲: 第 1 卷[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 130.

[5] KUHN S. The derivative á la Carathéodory[J]. The American Mathematical Monthly, 1991, 98(1): 40-44.

[6] 吴长庆. 立体几何使用“集合语言”的准确性[J]. 唐山师范学院学报, 1997, 5: 76.

[7] MARIAN J. How to define functions without using variables[EB/OL]. (2013-10-11)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/how-to-define-functions-without-using-variables/.

[8] MARIAN J. Differentiation (derivatives) without variables[EB/OL]. (2013-10-14)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/differentiation-derivatives-without-variables/.

[9] MARIAN J. Indefinite integration without variables[EB/OL]. (2014-01-12)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/indefinite-integration-computing-integrals-without-variables/.

[10] MARIAN J. Second substitution method for integration without variables [EB/OL]. (2014-02-01)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/second-substitution-method-for-integration-without-variables/.

[11] MARIAN J. Quantification without variables[EB/OL]. (2014-02-15)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/quantification-without-variables/.

[12] MARIAN J. Definite integration without variables[EB/OL]. (2014-04-23) [2022-03-25]. https://jakubmarian.com/definite-integration-without-variables/.

[13] MARIAN J. Calculus of finite differences without variables[EB/OL]. (2014-05-08)[2022-03-25]. https://jakubmarian.com/calculus-of-finite-differences-without-variables/.

[14] 梅加强. 数学分析[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 66-77.