行列式入门

或 371 分了解行列式

Determinantulo

版本 2π, 2024

行列式入门

Determinantulo

2024

Ĉi tiu libro estas dediĉita al miaj edzinoj.

目录

序

本书的标题是《行列式入门》(*Enkonduko al Determinantoj*). 您按字面意思理解此标题就好: 我 (即作者, 下同) 带您入 “行列式之门” (la pordo al determinantoj).

本书是一本为初学者准备的行列式教材. 行列式是一个有用的工具. 我认为, 学习此工具是有用的. 本书用较简单的归纳法定义行列式, 并证明了关于行列式的一些结论.

本书的目标一定不是只教您行列式. 或许, 您知道, 中学数学里的几何学可练习我们的逻辑思维. 我希望本书也能有类似的作用. 具体地, 我希望本书也可练习您的逻辑思维. 我想, 逻辑思维对我们是有好处的, 即使我们不从事数学的工作.

我假定您学过中学数学; 或者说, 我不假定您学过大学数学. 这其实对我来说是一个大挑战. 毕竟, 几年前, 我就不是一个中学生了. 并且, 我也没有学习教育的理论. 所以, 我不知道, 本书是否能使一个只有中学数学基础的人学明白行列式. 但我想挑战此事. 于是, 本书 (的初版) 就出生了.

我的文学不好. 那么, 我就说这么多吧.

Acknowledgments

I thank the people and organizations that directly or indirectly provided me with their mathematical assistance, without which this book would have no foundation.

I thank soft music, to which I often listen for relieving stress and anxiety; I thank Esperanto, which I like to use to name files; I thank LaTeX, by which I am able to write mathematical formulae rapidly; I thank Visual Studio Code, which is a modern and gook-looking editor; I thank the Vim emulator, with which I work much more efficiently; I thank Windows 11 Pro for Workstations Insider Preview (in the Canary Channel), which is a reliable and stable operating system.

It is true that I have spent much money and time on the project: I need money to advertise this book; I need time to proofread this book. Hence, I also thank my money and time.

Finally, never will I forget to thank my wives, whom I have not met yet. Hardly would I have the stimulus actually to write this book without them.

依赖说明

本书的主要内容是第一章. 学习第一章前, 您应知道求和号与数学归纳法; 若您不知道它们, 您可以见附录 B.

附录 A 讨论 2 元 2 次式. 若您想学它, 您不必学习第一章; 但是, 您要知道复数及其加、减、乘、除.

现在, 我列出一个表. 您或许可较明白地从此表看出, 为了学习第一章的某一节, 您要先学第一章的哪些节. *倾斜的数字 0123456789* 代表选学内容. 符号 — 代表 "无". 若您想学节 *16*, 您要先学的必学内容 (不是选学内容的内容) 有 1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 且您还要再学一些选学内容. 您可在如下 5 条路中选一条: (a) *8*; (b) *2*, *4*, *9*; (c) *2*, *4*, *9*, *11*; (d) *2*, *4*, *8*, *9*; (e) *2*, *4*, *8*, *9*, *11*.

想学	您要先学
1	—
2	1
3	—
4	1, *2*, 3
5	1
6	1, 3, 5
7	1, 3, 5, 6
8	1, 3, 5, 6, 7
9	1, *2*, 3, *4*, 5, 6, 7
10	1, 3, 5, 6
11	1, *2*, 3, *4*, 5, 6, 7, *9*, 10
12	1, 3, 5, 6, 10

(续)

想学	您要先学
13	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12
14	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13
15	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14
16	见文字说明
17	1, 3, 5, 6, 10, 12
18	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 17
19	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18
20	1, 3, 5, 6, 10, 12, 17
21	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20
22	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21
23	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*
24	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*, *23*
25	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*, *23*, *24*
26	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*, *23*, *24*, *25*
27	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*, *23*, *24*, *25*, *26*
28	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*, *23*, *24*, *25*, *26*, *27*
29	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, *22*, *23*, *24*, *25*, *26*, *27*, *28*
30	1, *2*, 3, *4*, 5, 6, 7, *9*, 10, *11*, 12, 13, 17
31	1, 3, 5, 6
32	1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 31

第一章　行列式

行列式是一种有用的**工具**. 本章主要介绍方阵的行列式的定义与基本的性质.

1.1 缺项定位

在正式进入本节的内容前, 我要提到一种十分常用的简写. 设 a, b, c, d, $\cdots$ 是若干个文字. 那么, $a=b=c$ 是 “$a=b$ 且 $b=c$” 之略. 同理, $a=b=c=d$ 是 “$a=b$ 且 $b=c$ 且 $c=d$” 之略. 类似地, 若 x, y, z 是实数, 则 $x<y<z$ 是 “$x<y$ 且 $y<z$” 之略. 自然地, $x<y\leqslant z$ 是 “$x<y$ 且 $y\leqslant z$” 之略. 此类简写在本章随处可见, 故您一定要知道它.

我们先看一个简单的问题.

例 1.1 考虑文字列 I: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 我们去除第 2, 5, 8 个文字 (也就是说, 去除 2, 5, 8), 不改变文字的前后次序, 得到文字列 II: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10. 试用公式表示文字列 II 的文字 x 在文字列 II 的位置 $f(x)$ (比如, 文字 7 的位置是 5).

此事自然不难. 分段地, 我们可写

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1;\\ 2, & x=3;\\ 3, & x=4;\\ 4, & x=6;\\ 5, & x=7;\\ 6, & x=9;\\ 7, & x=10.\end{cases}$$

不过, 分段或许较多. 能否减少分段的数目? 这是可以的. 比如, 我们可写

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<2;\\ x-1, & 2<x<5;\\ x-2, & 5<x<8;\\ x-3, & 8<x.\end{cases}$$

我认为这种写法好一些, 因为, 这种写法, 更体现 “本质”: x 前缺几项, 其位置就减几.

如果我们想进一步地简化公式, 那我们可作一个新记号. 设 i, j 为二个整数. 定义

$$\rho(i,j) = \begin{cases} 0, & i < j; \\ 1, & i \geqslant j. \end{cases}$$

注意到, 对**不相等的**二个整数 i, j, $\rho(i,j) = 0$ 相当于 $i < j$, 而 $\rho(i,j) = 1$ 相当于 $i > j$. 利用这个 "ρ-记号", 我们可较方便地写出, 文字列 II 的文字 x 在文字列 II 的位置

$$f(x) = x - (\rho(x,2) + \rho(x,5) + \rho(x,8)).$$

我们记 $m(x) = \rho(x,2) + \rho(x,5) + \rho(x,8)$. 不难看出, $x < 2$ 时, $m(x) = 0$; 此时, x 前不缺项. $2 < x < 5$ 时, $m(x) = 1$; 此时, x 前缺 1 项. $5 < x < 8$ 时, $m(x) = 2$; 此时, x 前缺 2 项. $8 < x$ 时, $m(x) = 3$; 此时, x 前缺 3 项. 所以, 用 ρ-记号表示的 $f(x)$ 跟用分段表示的 $f(x)$ 是一样的.

还有一件事值得一提. 因为数的加法适合结合律与交换律, 故我们可写

$$\begin{aligned} f(x) &= x - (\rho(x,2) + \rho(x,5) + \rho(x,8)) \\ &= x - (\rho(x,5) + \rho(x,8) + \rho(x,2)) \\ &= x - (\rho(x,8) + \rho(x,2) + \rho(x,5)) \\ &= x - (\rho(x,2) + \rho(x,8) + \rho(x,5)) \\ &= x - (\rho(x,5) + \rho(x,2) + \rho(x,8)) \\ &= x - (\rho(x,8) + \rho(x,5) + \rho(x,2)). \end{aligned}$$

为方便, 我再介绍一次 ρ-记号.

定义 1.2 (ρ-记号) 设 i, j 为二个整数. 定义

$$\rho(i,j) = \begin{cases} 0, & i < j; \\ 1, & i \geqslant j. \end{cases}$$

不难看出, $i \neq j$ 时, $\rho(i,j) + \rho(j,i) = 1$; 之后会用到的. (当然了, $i = j$ 时, $\rho(i,j) + \rho(j,i) = 2$; 可是, 这没那么重要.)

一般化前面的例, 我们有

定理 1.3 (缺项定位)　设 n 为高于 1 的正整数. 设文字列 I: 1, 2, ⋯, n. 设 k 是低于 n 的正整数. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是不超过 n 的, 且**互不相同的**正整数. 去除文字列 I 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 个文字 (也就是说, 去除 $i_1, i_2, \cdots, i_k$), 不改变文字的前后次序, 得到文字列 II. 那么, 文字列 II 的文字 x 在文字列 II 的位置

$$f(x) = x - (\rho(x, i_1) + \cdots + \rho(x, i_k)).$$

证　我们先从小到大地排 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 为 $i'_1, i'_2, \cdots, i'_k$.

为方便, 我们写 $i'_0 = 0, i'_{k+1} = n + 1$. 注意到 $i'_0 < 1 \leqslant i'_1$, 且 $i'_{k+1} > n \geqslant i'_k$.

文字列 II 的文字恰为所有不等于 $i'_1, i'_2, \cdots, i'_k$ 的, 且不超过 n 的正整数. 任取文字列 II 的一个文字 x. 那么, 一定存在不超过 k 的非负整数 υ, 使 $i'_\upsilon < x < i'_{\upsilon+1}$. 于是, x 前缺了 υ 项. 不难验证

$$\rho(x, i'_1) + \cdots + \rho(x, i'_k) = \upsilon.$$

故 x 在文字列 II 的位置

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \upsilon \\ &= x - (\rho(x, i'_1) + \cdots + \rho(x, i'_k)) \\ &= x - (\rho(x, i_1) + \cdots + \rho(x, i_k)). \end{aligned}$$

我们用了加法的结合律与交换律.　　证毕.

最后, 我想说, 在我的行列式教学里, 缺项定位其实不是十分重要, 但是, 我给的论证要用到此事. 若您希望理解我给出的论证, 我希望您理解它.

1.2 排列

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

为方便说话, 我作一个新的定义.

定义 1.4 (排列) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是**互不相同的** n 个文字. 我们说, 由这 n 个文字作成的任何一个有序的文字列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ (其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是**互不相同的**不超过 n 的 n 个正整数) 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列.

不难算出 n 个互不相同的文字的排列的种数. 从 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 里选一个为 1 号文字, 有 n 种选法; 从剩下的 $n-1$ 个文字里选一个为 2 号文字, 有 $n-1$ 种选法; ⋯ ⋯; 从剩下的 2 个文字里选一个为 $n-1$ 号文字, 有 2 种选法; 从剩下的 1 个文字里选一个为 n 号文字, 有 1 种选法. 由分步乘法计数原理, 知种数为

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1.$$

不过, 这不是我的教学里的重点.

设文字列 I: $1, 2, \cdots, n$. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 我们去除文字列 I 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$ 个文字 (也就是说, 去除 $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$), 不改变文字的前后次序, 得到文字列 II: i_n (只剩一个文字了). 显然, i_n 的位置 $f(i_n) = 1$. 另一方面, 利用 "缺项定位公式", 有

$$f(i_n) = i_n - (\rho(i_n, i_1) + \cdots + \rho(i_n, i_{n-1})).$$

于是, 我们有

定理 1.5 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列; 也就是说, 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$i_n - (\rho(i_n, i_1) + \rho(i_n, i_2) + \cdots + \rho(i_n, i_{n-1})) = 1,$$

或

$$\rho(i_n, i_1) + \rho(i_n, i_2) + \cdots + \rho(i_n, i_{n-1}) = i_n - 1.$$

1.3 -1 的整数次方

我想讲一讲 -1 的整数次方. 在证明行列式的公式时, 我们会经常用其性质.

设 i, j 为整数. 首先, 我们都知道,

$$(-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j.$$

因为 ± 1 的倒数还是 ± 1, 故

$$(-1)^i = (-1)^{-i}.$$

所以

$$(-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j = (-1)^i(-1)^{-j} = (-1)^{i-j}.$$

并且

$$(-1)^{i-j} = (-1)^{-(i-j)} = (-1)^{-i+j} = (-1)^{-i-j}.$$

值得一提,

$$(-1)^{2j} = 1.$$

所以

$$(-1)^{i\pm 2j} = (-1)^i.$$

我们知道, 任给一个偶数 n, 一定有一个整数 k 使 $n = 2k$ (这是定义); 任给一个奇数 (也就是 "不是偶数的整数") n', 一定有一个整数 k' 使 $n' = 2k'+1$. 所以, 若整数 m 是偶数, 则 $(-1)^m = 1$; 若整数 m 是奇数, 则 $(-1)^m = -1$. 由此可知, 若整数 m 适合 $(-1)^m = 1$, 则 m 是偶数; 若整数 m 适合 $(-1)^m = -1$, 则 m 是奇数.

最后, 我想说, 对任何的整数 n, $n(n-1)$ 一定是一个偶数. 由此可见, $(-1)^n = (-1)^{n^2}$.

1.4 逆序数与符号

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

我们知道, 排列是特别的文字列: 排列的每一个文字是互不相同的. 本节, 我想介绍一些跟排列有关的量.

在研究排列时, 我们通常选 "文字" 为整数. 熟知, 整数有大小关系. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是**互不相同的** n 个整数. 我们从小到大地排 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ $(b_1 < b_2 < \cdots < b_n)$. 我们说, 这是整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**自然排列**. 显然, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的自然排列有且只有一个.

设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列. 若存在整数 i, j, 使 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 且 $c_i > c_j$, 我们说, 有序对 (c_i, c_j) 为排列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的一个**逆序**. 比如, 排列 1, 2, 3, 4, 5 无逆序, 而 3, 2, 5, 1, 4 有 5 个逆序: $(3,2)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(5,1)$, $(5,4)$.

不难看出, 说 (c_i, c_j) (其中 $i < j$) 是排列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的一个逆序, **相当于**说 $\rho(c_i, c_j) = 1$. (注意, 因为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是互不相同的整数, 故不可能出现 $i < j$, 但 $c_i = c_j$ 的情形.)

我们说, 一个排列的所有的逆序的数目为其**逆序数**. 比如, 排列 1, 2, 3, 4, 5 的逆序数为 0, 而 3, 2, 5, 1, 4 的逆序数为 5.

不难利用 ρ-记号写出排列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的逆序数

$$
\begin{aligned}
\tau(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \quad & \rho(c_1, c_2) \\
& + \rho(c_1, c_3) + \rho(c_2, c_3) \\
& + \rho(c_1, c_4) + \rho(c_2, c_4) + \rho(c_3, c_4) \\
& + \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
& + \rho(c_1, c_n) + \rho(c_2, c_n) + \cdots + \rho(c_{n-1}, c_n) \\
= \; & \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \rho(c_i, c_j) \\
= \; & \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \rho(c_i, c_j).
\end{aligned}
$$

比如, 当 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为 1, 2, 3, 4, 5 时, 每一个 $\rho(c_i, c_j)$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$ 都是 0; 当 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为 3, 2, 5, 1, 4 时, $\rho(c_1, c_2)$, $\rho(c_1, c_4)$, $\rho(c_2, c_4)$, $\rho(c_3, c_4)$, $\rho(c_3, c_5)$ 都是 1, 而 $\rho(c_1, c_3)$, $\rho(c_1, c_5)$, $\rho(c_2, c_3)$, $\rho(c_2, c_5)$, $\rho(c_4, c_5)$ 都是 0.

有一件小事值得一提. 若一个排列恰含一个文字, 我们说, 它没有逆序, 从而它的逆序数为 0. 这跟前面的公式是一样的: 既然没有整数对 (i, j) 适合 $1 \leqslant i < j \leqslant 1$, 那这个和就是 0.

利用 -1 的整数次方, 我们可再引入一些跟排列有关的量.

定义 1.6 (符号记号) 设 x 为整数. 定义

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

不难看出, 若 u, v 是**不相等的**整数, 则 $\operatorname{sgn}(v-u) = (-1)^{\rho(u,v)}$. 并且, 说 (c_i, c_j) (其中 $i < j$) 是排列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的一个逆序, **相当于**说 $\operatorname{sgn}(c_j - c_i) = -1$.

定义 1.7 (整数文字列的符号) 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是一个**文字列**, 且其文字全为整数 (也就是说, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 "整数文字列"). 定义其符号为

$$\begin{aligned} s(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \ & \operatorname{sgn}(c_2 - c_1) \\ & \cdot \operatorname{sgn}(c_3 - c_1) \cdot \operatorname{sgn}(c_3 - c_2) \\ & \cdot \operatorname{sgn}(c_4 - c_1) \cdot \operatorname{sgn}(c_4 - c_2) \cdot \operatorname{sgn}(c_4 - c_3) \\ & \cdot \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ & \cdot \operatorname{sgn}(c_n - c_1) \cdot \operatorname{sgn}(c_n - c_2) \cdot \cdots \cdot \operatorname{sgn}(c_n - c_{n-1}) \\ = \ & \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} \operatorname{sgn}(c_j - c_i) \\ = \ & \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{sgn}(c_j - c_i). \end{aligned}$$

显然, 若 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 里有二个相同的文字 (也就是说, 存在整数 i, j, 使

$1 \leqslant i < j \leqslant n$, 且 $c_i = c_j$), 则此文字列的符号为零. 反过来, 因为非零的整数的积一定不是零, 故符号为零的文字列一定有二个相同的文字.

有一件小事值得一提. 若一个文字列恰含一个文字, 我们说, 它 (作为文字列) 的符号是 1. 这跟前面的公式是一样的: 既然没有整数对 (i, j) 适合 $1 \leqslant i < j \leqslant 1$, 那这个积就是 1.

不要混淆 sgn 跟 s: 比如, $s(0) = 1$, 但 $\operatorname{sgn}(0) = 0$; 又比如, $s(-3) = 1$, 但 $\operatorname{sgn}(-3) = -1$.

排列是特别的文字列 (排列的文字互不相同), 故排列也有符号, 且要么是 1, 要么是 -1. 根据 sgn 与 ρ 的关系, 再利用 -1 的整数次方的性质, 不难得到排列的逆序数与符号的关系:

定理 1.8　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是**互不相同的** n 个整数. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列. 则

$$s(c_1, c_2, \cdots, c_n) = (-1)^{\tau(c_1, c_2, \cdots, c_n)}.$$

一个恰含一个文字的文字列, 因其文字也是互不相同的, 故当然是一个排列. 我们说过, 恰含一个文字的排列的逆序数为 0. 因为 $(-1)^0 = 1$, 故, 约定恰含一个文字的文字列的符号为 1, 不是没有道理的.

1.5　阵

虽然, 理论地, 可不用阵 (矩形数表), 直接讲行列式, 但 “为方便说话”, 我决定先介绍阵的基础. 相应地, 行列式, 会被定义为方阵 (正方形数表) 的一个属性.

定义 1.9 (阵)　设 m, n 是正整数. 我们说, 由 mn 个文字作成的 $m \times n$ 矩形文字表 (此处的 “文字”, 一般是数, 如整数、有理数、实数等; 当然, 也可是 “跟数有关”, 但又不是数的对象, 如整式、分式等)

$$A = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [A]_{m,1} & [A]_{m,2} & \cdots & [A]_{m,n} \end{bmatrix}$$

是一个 $m \times n$ 阵.

我们说, **有序对** (m, n) 是 A 的尺寸. 习惯地, 我们也可写 (m, n) 为 $m \times n$. 注意这里的文字 $\times$: 一方面, 它可表示乘法, 表示此阵有 mn 个元; 另一方面, 因为我们较少用 $\times$ 表示乘法, 故当我们用 $\times$ 时, 往往有某种特别的意思. 比如, $\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$ 跟 $\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ 的尺寸是不一样的, 虽然这二个阵都含 6 个元.

我们说, $1 \times n$ 阵 $\begin{bmatrix} [A]_{i,1} & \cdots & [A]_{i,n} \end{bmatrix}$ 是 A 的行 i, $m \times 1$ 阵 $\begin{bmatrix} [A]_{1,j} \\ \vdots \\ [A]_{m,j} \end{bmatrix}$ 是 A 的列 j. 我们说, 行 i, 列 j 交叉处的元 $[A]_{i,j}$ 是 A 的 (i, j)-元.

我们也可写 $1 \times n$ 阵 $\begin{bmatrix} [A]_{i,1} & \cdots & [A]_{i,n} \end{bmatrix}$ 为 $[[A]_{i,1}, \cdots, [A]_{i,n}]$. 这种写法是较紧凑的. 为了使二个或多个元不被认为是一个元, 我们在最后一个元前的每一个元后, 加了一个逗号 (当然了, 逗号后, 也有一定的空白).

若一个阵的尺寸 (m, n) 适合 $m = n$, 我们说, 它是一个方阵. $n \times n$ 阵的一个常用的名字是 n 级阵 (n 级方阵).

习惯地, 我们认为, 1×1 阵 $[a]$ 跟 a 是同一个对象; 形象地, 我们写 $a = [a]$.

若一个阵的元全是整数, 我们说, 它是一个整阵; 若一个阵的元全是有理数, 我们说, 它是一个有理阵; 若一个阵的元全是实数, 我们说, 它是一个实

阵; 若一个阵的元全是数, 我们说, 它是一个数阵. 本课程研究的阵一般都是数阵, 因为我要用数的运算定义阵的大多数运算.

最后, 但并非不重要地, 说二个阵 A, B 相等, 就是说, A 的行数 (即其尺寸 $m \times n$ 的第 1 分量 m) 等于 B 的行数, A 的列数 (即其尺寸 $m \times n$ 的第 2 分量 n) 等于 B 的列数, 且对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[A]_{i,j} = [B]_{i,j}$. (通俗地, 二个阵相等, 相当于它们 "完全一样".) 若二个阵 A, B 相等, 我们写 $A = B$.

我们用文字的相等 (当然, 还有数的相等; 不过, 数也算是文字), 定义了阵的相等. 文字的相等适合如下三条性质:

(1) 每一个文字 x 都跟自己相等, 即 $x = x$.

(2) 若二个文字 x, y 适合 $x = y$, 则 $y = x$.

(3) 若三个文字 x, y, z 适合 $x = y$, 且 $y = z$, 则 $x = z$.

我们可以证明, 阵的相等也适合类似的三条性质.

定理 1.10 阵的相等适合如下三条性质:

(1) 每一个阵 A 都跟自己相等, 即 $A = A$.

(2) 若二个阵 A, B 适合 $A = B$, 则 $B = A$.

(3) 若三个阵 A, B, C 适合 $A = B$, 且 $B = C$, 则 $A = C$.

证 (1) 设 A 的行数与列数分别是 m, n. 那么, A 的行数 m 等于 A 的行数, A 的列数 n 等于 A 的列数. 并且, 对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[A]_{i,j} = [A]_{i,j}$. (我们用到了文字的相等的性质 (1).) 所以, $A = A$.

(2) 设二个阵 A, B 适合 $A = B$. 设 A 的行数与列数分别是 m, n. 那么, A 的行数 m 等于 B 的行数, A 的列数 n 等于 B 的列数. 所以, B 的行数是 m, B 的列数是 n. 并且, 对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[A]_{i,j} = [B]_{i,j}$.

由此可见, B 的行数 m 等于 A 的行数, B 的列数 n 等于 A 的列数. 并且, 对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[B]_{i,j} = [A]_{i,j}$. (我们用到了文字的相等的性质 (2).) 所以, $B = A$.

(3) 设三个阵 A, B, C 适合 $A = B$, 且 $B = C$. 设 A 的行数与列数分别是 m, n. 那么, 因为 $A = B$, 故 A 的行数 m 等于 B 的行数, A 的列数 n 等于 B 的

列数. 从而, B 的行数是 m, B 的列数是 n. 并且, 对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[A]_{i,j} = [B]_{i,j}$.

又因为 $B = C$, 故 B 的行数 m 等于 C 的行数, B 的列数 n 等于 C 的列数. 从而, C 的行数是 m, C 的列数是 n. 并且, 对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[B]_{i,j} = [C]_{i,j}$.

由此可见, A 的行数 m 等于 C 的行数, A 的列数 n 等于 C 的列数. 并且, 对任何不超过行数 m 的正整数 i, 与任何不超过列数 n 的正整数 j, 必 $[A]_{i,j} = [C]_{i,j}$. (我们用到了文字的相等的性质 (3).) 所以, $A = C$. 证毕.

在进入数阵的讨论前, 我先引入跟数较不紧密的阵的运算.

定义 1.11 (转置) 设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 定义 A 的**转置**为一个 $n \times m$ 阵 A^{T}, 其中, 对任何不超过 n 的正整数 i 与任何不超过 m 的正整数 j,

$$[A^{\mathrm{T}}]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

例 1.12 设

$$A = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [A]_{m,1} & [A]_{m,2} & \cdots & [A]_{m,n} \end{bmatrix}$$

是一个 $m \times n$ 阵. 则 A 的转置 A^{T} 是一个 $n \times m$ 阵, 且因 $[A^{\mathrm{T}}]_{i,j} = [A]_{j,i}$, 故

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} [A^{\mathrm{T}}]_{1,1} & [A^{\mathrm{T}}]_{1,2} & \cdots & [A^{\mathrm{T}}]_{1,m} \\ [A^{\mathrm{T}}]_{2,1} & [A^{\mathrm{T}}]_{2,2} & \cdots & [A^{\mathrm{T}}]_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [A^{\mathrm{T}}]_{n,1} & [A^{\mathrm{T}}]_{n,2} & \cdots & [A^{\mathrm{T}}]_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{2,1} & \cdots & [A]_{m,1} \\ [A]_{1,2} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [A]_{1,n} & [A]_{2,n} & \cdots & [A]_{m,n} \end{bmatrix}.$$

由此, 不难看出: (a) A^{T} 的行 i 跟 A 的列 i 对应 ($1 \leqslant i \leqslant n$), 且 A^{T} 的列 j 跟 A 的行 j 对应 ($1 \leqslant j \leqslant m$); (b) 互换 A 的行与列, 即得 A^{T}.

关于转置, 我们有一个简单的结论.

定理 1.13 设 A 是一个阵. 则 A 的转置 A^{T} 的转置 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 就是 A, 即

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A.$$

证 设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 则 A^{T} 是一个 $n \times m$ 阵. 所以, $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是一个 $m \times n$ 阵. 不说元是否相等, 至少等式二侧的阵的尺寸是相等的. 现在, 比较元是否相等:

$$[(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]_{i,j} = [A^{\mathrm{T}}]_{j,i} = [A]_{i,j}.$$

看来, 元也相等. 证毕.

习惯地, 用转置, 我们可写 $m \times 1$ 阵 $\begin{bmatrix} [A]_{1,j} \\ \vdots \\ [A]_{m,j} \end{bmatrix}$ 为 $[[A]_{1,j}, \cdots, [A]_{m,j}]^{\mathrm{T}}$. 这种写法是有用的, 因为它可以节约一些空白: 对比 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 与 $[1, 2, 3, 4, 5]^{\mathrm{T}}$.

在学习行列式时, 我们经常要研究去除阵的若干行、若干列后的得到的阵. 这就是 “子阵”.

定义 1.14 (子阵, 1) 设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 设 $i_1, \cdots, i_s$ 是不超过 m 的互不相同的正整数. 设 $j_1, \cdots, j_t$ 是不超过 n 的互不相同的正整数. 那么, 我们可去除 A 的行 $i_1, \cdots, i_s$, 且去除 A 的列 $j_1, \cdots, j_t$. 此时, 还剩 $m - s$ 行与 $n - t$ 列. 不改变不被去除的元的位置, 这作成了一个 $(m-s) \times (n-t)$ 阵, 我们记其为 $A(i_1, \cdots, i_s | j_1, \cdots, j_t)$.

例 1.15 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$. 则 $A(1|2) = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$, $A(2,3|4) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, 且 $A(3,1|4,2) = A(1,3|2,4) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}$.

利用 “缺项定位公式”, 我们不难写出, 若 i 不等于 $i_1, \cdots, i_s$ 的任何一个, 且 j 不等于 $j_1, \cdots, j_t$ 的任何一个, 则 A 的 (i,j)-元一定是 $A(i_1, \cdots, i_s | j_1, \cdots, j_t)$ 的 $(i - \rho(i, i_1) - \cdots - \rho(i, i_s), j - \rho(j, j_1) - \cdots - \rho(j, j_t))$-元.

前面, 我们 “减法地” 定义了子阵 (及记号), 因为我们 “去除” 若干行若干列. 有时, 考虑从原阵 “取出” 若干行若干列作成的阵是方便的; 也就是说, 我们也要 “加法地” 定义子阵 (及记号).

定义 1.16 (子阵, 2)　设 A 为 $m\times n$ 阵. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 是不超过 m 的正整数, 且互不相同. 设 $j_1, j_2, \cdots, j_t$ 是不超过 n 的正整数, 且互不相同. 那么, 我们记取 A 的行 $i_1, \cdots, i_s$ 与列 $j_1, \cdots, j_t$ 交叉处的元按**原来的次序**排成的 $s\times t$ 阵为

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_s \\ j_1, j_2, \cdots, j_t \end{pmatrix}.$$

例 1.17　设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$. 则 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = [8]$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1,3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}$, 且 $A\begin{pmatrix} 3,1 \\ 4,2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1,3 \\ 2,4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$. 注意定义里的 **“原来的次序”**, 故 $A\begin{pmatrix} 3,1 \\ 4,2 \end{pmatrix}$ **不等于** $\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$.

设 A 为 $m\times n$ 阵. 设 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant m$, 且 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leqslant n$. 不难看出, 对任何不超过 s 的正整数 p 与任何不超过 t 的正整数 q,

$$\left[A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_s \\ j_1, j_2, \cdots, j_t \end{pmatrix}\right]_{p,q} = [A]_{i_p, j_q}.$$

现在, 我们正式进入数阵的讨论. **从现在开始, 我所说的阵都是数阵.**

我说过, 我要利用数的运算定义阵的运算. 我们先从较简单的 “加法” “减法” “数乘” 开始. 我会在后面讨论阵的较复杂的运算.

定义 1.18 (阵的加法)　设 A, B **都**是 $m\times n$ 阵. 定义 $A+B$ **也**是一个 $m\times n$ 阵, 其中, 对任何不超过 m 的正整数 i 与任何不超过 n 的正整数 j,

$$[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}.$$

(通俗地, (同尺寸的) 阵的加法就是相应位置的元的加法.)

例 1.19　设 $A=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix}$. 则

$$A+B=\begin{bmatrix}8&11&14\\12&15&18\end{bmatrix}.$$

不难验证, 阵的加法有结合律与交换律. 具体地, 设 A, B, C 是三个同尺寸的阵. 那么, $(A+B)+C=A+(B+C)$, 且 $A+B=B+A$.

我验证结合律; 我留交换律为您的习题.

证　设 A, B, C 的尺寸都是 $m\times n$. 那么, $A+B$ 的尺寸也是 $m\times n$, 故 $(A+B)+C$ 的尺寸也是 $m\times n$. 同理, $B+C$ 的尺寸也是 $m\times n$, 故 $A+(B+C)$ 的尺寸也是 $m\times n$. 现在, 比较元是否相等:

$$\begin{aligned}[(A+B)+C]_{i,j}&=[A+B]_{i,j}+[C]_{i,j}\\&=([A]_{i,j}+[B]_{i,j})+[C]_{i,j}\\&=[A]_{i,j}+([B]_{i,j}+[C]_{i,j})\\&=[A]_{i,j}+[B+C]_{i,j}\\&=[A+(B+C)]_{i,j}.\end{aligned}$$

注意到, 我用到了数的加法的结合律.　证毕.

因为结合律, 我们可简单地写 $(A+B)+C$ 或 $A+(B+C)$ 为 $A+B+C$.

我们可用加法定义减法. 设 A, B 为 $m\times n$ 阵. 作一个 $m\times n$ 阵 0 (即, **零阵**), 其中 $[0]_{i,j}=0$. 不难算出, $B+0=0+B=B$ (我留此为您的习题). 再作一个 $m\times n$ 阵 $-B$, 其中 $[-B]_{i,j}=-[B]_{i,j}$. 不难算出, $B+(-B)=(-B)+B=0$ (我留此为您的习题). 我们说, 这么作出的 $-B$ 是 B 的**相反阵**. 我们知道, 数 I 减数 II, 就是数 I 加数 II 的相反数. 所以, 我们定义, $A-B=A+(-B)$. 于是

$$\begin{aligned}[A-B]_{i,j}&=[A+(-B)]_{i,j}\\&=[A]_{i,j}+[-B]_{i,j}\\&=[A]_{i,j}+(-[B]_{i,j})\\&=[A]_{i,j}-[B]_{i,j}.\end{aligned}$$

(通俗地, (同尺寸的) 阵的减法就是相应位置的元的减法.)

我们知道, 二个数 x, y 相等, 相当于 $x - y = 0$. 由此可证: 二个同尺寸的阵 A, B 相等, 相当于 $A - B = 0$.

我以数乘运算结束本节.

定义 1.20 (阵的数乘) 设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 设 k 是一个数. 定义 kA 也是一个 $m \times n$ 阵, 其中, 对任何不超过 m 的正整数 i 与任何不超过 n 的正整数 j,

$$[kA]_{i,j} = k[A]_{i,j}.$$

(通俗地, 阵的数乘就是以一个数乘阵的每一个元.)

例 1.21 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, 设 $k = 7$. 则

$$kA = 7A = \begin{bmatrix} 7 & 21 & 35 \\ 14 & 28 & 42 \end{bmatrix}.$$

设 k, ℓ 是数. 设 A, B 是二个同尺寸的阵. 不难验证,

$$\begin{aligned} &1A = A, \\ &k(\ell A) = (k\ell)A, \\ &(k+\ell)A = kA + \ell A, \\ &k(A+B) = kA + kB. \end{aligned}$$

证明式 1 时, 要用到 $1x = x$ (x 是数); 证明式 2 时, 要用到数的乘法的结合律; 证明式 3 与式 4 时, 要用到数的乘法与加法的分配律.

我验证式 2 与式 4; 您验证其他的式.

证 设 k, ℓ 是数. 设 A, B 的尺寸都是 $m \times n$.

式 2: 首先, 因为 A 是 $m\times n$ 阵, 故 ℓA 是 $m\times n$ 阵, 从而 $k(\ell A)$ 也是 $m\times n$ 阵. 其次, 因为 A 是 $m \times n$ 阵, 故 $(k\ell)A$ 是 $m \times n$ 阵. 现在, 比较元是否相等:

$$[k(\ell A)]_{i,j} = k[\ell A]_{i,j} = k(\ell[A]_{i,j}) = (k\ell)\,[A]_{i,j} = [(k\ell)A]_{i,j}.$$

式 4: 首先, 因为 A, B 是 $m\times n$ 阵, 故 $A+B$ 是 $m\times n$ 阵, 从而 $k(A+B)$ 也是 $m\times n$ 阵. 其次, 因为 A, B 是 $m\times n$ 阵, 故 kA, kB 是 $m\times n$ 阵, 从而 $kA+kB$ 也是 $m\times n$ 阵. 现在, 比较元是否相等:

$$\begin{aligned}[k(A+B)]_{i,j} &= k[A+B]_{i,j}\\ &= k([A]_{i,j}+[B]_{i,j})\\ &= k[A]_{i,j}+k[B]_{i,j}\\ &= [kA]_{i,j}+[kB]_{i,j}\\ &= [kA+kB]_{i,j}.\end{aligned}$$

证毕.

最后, 我提几件小事.

(1) 对任何阵 A, $0A=0$. 这里, 等式左侧的 0 是数字零, 而等式右侧的 0 是元全为零的零阵 (当然, 它与 A 的尺寸相等).

(2) 对任何数 k, $k0=0$. 这里, 等式左右二侧的 0 都是零阵.

(3) 设 k, ℓ 是数. 设 A, B 是二个同尺寸的阵. 则

$$\begin{aligned}(k-\ell)A &= kA-\ell A,\\ k(A-B) &= kA-kB.\end{aligned}$$

1.6　行列式

本节, 我要定义本章的主角, 即行列式 (determinanto).
值得注意的是, 我并不为每一个阵定义行列式; 我只为方阵定义行列式.

定义 1.22 (行列式)　设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的行列式

$$\det(A) = \begin{cases} [A]_{1,1}, & n = 1; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[A]_{i,1} \det(A(i|1)), & n \geqslant 2. \end{cases}$$

我们看 4 个例.

例 1.23　设 $A = [a]$ 是一个 1 级阵. 根据定义, $\det(A) = [A]_{1,1} = a$.

例 1.24　设 $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 是一个 2 级阵. 根据定义,

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}[A]_{1,1} \det(A(1|1)) + (-1)^{2+1}[A]_{2,1} \det(A(2|1)) \\ &= [A]_{1,1} \det[[A]_{2,2}] - [A]_{2,1} \det[[A]_{1,2}] \\ &= [A]_{1,1}[A]_{2,2} - [A]_{2,1}[A]_{1,2} \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

此事是重要的; 我们会经常用它. 形象地, 我们可用 "对角线" 记 2 级阵的行列式.

$$\begin{array}{ccc} + & a & c \\ - & b & d \end{array}$$

例 1.25　设 A 是一个 3 级阵. 根据定义与上个例的结果,

$$\begin{aligned} & \det(A) \\ = \quad & (-1)^{1+1}[A]_{1,1} \det(A(1|1)) + (-1)^{2+1}[A]_{2,1} \det(A(2|1)) \\ & + (-1)^{3+1}[A]_{3,1} \det(A(3|1)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & [A]_{1,1} \det \begin{bmatrix} [A]_{2,2} & [A]_{2,3} \\ [A]_{3,2} & [A]_{3,3} \end{bmatrix} - [A]_{2,1} \det \begin{bmatrix} [A]_{1,2} & [A]_{1,3} \\ [A]_{3,2} & [A]_{3,3} \end{bmatrix} \\
& + [A]_{3,1} \det \begin{bmatrix} [A]_{1,2} & [A]_{1,3} \\ [A]_{2,2} & [A]_{2,3} \end{bmatrix} \\
= \quad & [A]_{1,1}([A]_{2,2}[A]_{3,3} - [A]_{3,2}[A]_{2,3}) - [A]_{2,1}([A]_{1,2}[A]_{3,3} - [A]_{3,2}[A]_{1,3}) \\
& + [A]_{3,1}([A]_{1,2}[A]_{2,3} - [A]_{2,2}[A]_{1,3}) \\
= \quad & [A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3} - [A]_{1,1}[A]_{3,2}[A]_{2,3} \\
& - [A]_{2,1}[A]_{1,2}[A]_{3,3} + [A]_{2,1}[A]_{3,2}[A]_{1,3} \\
& + [A]_{3,1}[A]_{1,2}[A]_{2,3} - [A]_{3,1}[A]_{2,2}[A]_{1,3} \\
= \quad & [A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3} + [A]_{2,1}[A]_{3,2}[A]_{1,3} + [A]_{3,1}[A]_{1,2}[A]_{2,3} \\
& - [A]_{1,1}[A]_{3,2}[A]_{2,3} - [A]_{2,1}[A]_{1,2}[A]_{3,3} - [A]_{3,1}[A]_{2,2}[A]_{1,3}.
\end{aligned}
$$

数学家 Pierre Frédéric Sarrus 给了我们一种记 3 级阵的行列式的好方法. 我们在阵的下方重写它. 由左上至右下的对角线 (实线) 上的数的积的和减由左下至右上的对角线 (虚线) 上的数的积的和即为此阵的行列式.

$$
\begin{array}{cccc}
+ & [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & [A]_{1,3} \\
+ & [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & [A]_{2,3} \\
+ & [A]_{3,1} & [A]_{3,2} & [A]_{3,3} \\
- & [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & [A]_{1,3} \\
- & [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & [A]_{2,3} \\
- & [A]_{3,1} & [A]_{3,2} & [A]_{3,3}
\end{array}
$$

值得一提的是, 前面的对角线法则无法被推广到 n 级阵 $(n \geqslant 4)$ 的行列式. (当然, 我不要求您记 “如此具体的公式”; 您记定义即可.)

例 1.26 设 A 是一个 4 级阵. 根据定义,

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
=\ &(-1)^{1+1}[A]_{1,1}\det(A(1|1))+(-1)^{2+1}[A]_{2,1}\det(A(2|1))\\
&+(-1)^{3+1}[A]_{3,1}\det(A(3|1))+(-1)^{4+1}[A]_{4,1}\det(A(4|1)).
\end{aligned}$$

利用跟上个例相似的方法, 并利用上个例的结果, 可知结果含 24 项:

$$\begin{aligned}
&[A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3}[A]_{4,4}+[A]_{1,1}[A]_{3,2}[A]_{4,3}[A]_{2,4}+[A]_{1,1}[A]_{4,2}[A]_{2,3}[A]_{3,4}\\
-\ &[A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{4,3}[A]_{3,4}-[A]_{1,1}[A]_{3,2}[A]_{2,3}[A]_{4,4}-[A]_{1,1}[A]_{4,2}[A]_{3,3}[A]_{2,4}\\
-\ &[A]_{2,1}[A]_{1,2}[A]_{3,3}[A]_{4,4}-[A]_{2,1}[A]_{3,2}[A]_{4,3}[A]_{1,4}-[A]_{2,1}[A]_{4,2}[A]_{1,3}[A]_{3,4}\\
+\ &[A]_{2,1}[A]_{1,2}[A]_{4,3}[A]_{3,4}+[A]_{2,1}[A]_{3,2}[A]_{1,3}[A]_{4,4}+[A]_{2,1}[A]_{4,2}[A]_{3,3}[A]_{1,4}\\
+\ &[A]_{3,1}[A]_{1,2}[A]_{2,3}[A]_{4,4}+[A]_{3,1}[A]_{2,2}[A]_{4,3}[A]_{1,4}+[A]_{3,1}[A]_{4,2}[A]_{1,3}[A]_{2,4}\\
-\ &[A]_{3,1}[A]_{1,2}[A]_{4,3}[A]_{2,4}-[A]_{3,1}[A]_{2,2}[A]_{1,3}[A]_{4,4}-[A]_{3,1}[A]_{4,2}[A]_{2,3}[A]_{1,4}\\
-\ &[A]_{4,1}[A]_{1,2}[A]_{2,3}[A]_{3,4}-[A]_{4,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3}[A]_{1,4}-[A]_{4,1}[A]_{3,2}[A]_{1,3}[A]_{2,4}\\
+\ &[A]_{4,1}[A]_{1,2}[A]_{3,3}[A]_{2,4}+[A]_{4,1}[A]_{2,2}[A]_{1,3}[A]_{3,4}+[A]_{4,1}[A]_{3,2}[A]_{2,3}[A]_{1,4}.
\end{aligned}$$

根据 "对角线" 法则, 我们应**减**由左下至右上的对角线上的数的积. 可是, 上式说, $[A]_{4,1}[A]_{3,2}[A]_{2,3}[A]_{1,4}$ 前的符号实则为 1, 而不是 "对角线" 法则所认为的 -1.

$$\begin{array}{cccc}
[A]_{1,1} & [A]_{1,2} & [A]_{1,3} & [A]_{1,4}\\
[A]_{2,1} & [A]_{2,2} & [A]_{2,3} & [A]_{2,4}\\
[A]_{3,1} & [A]_{3,2} & [A]_{3,3} & [A]_{3,4}\\
[A]_{4,1} & [A]_{4,2} & [A]_{4,3} & [A]_{4,4}\\
+ & & &
\end{array}$$

1.7 按一列展开行列式

本节, 我们学习按一列展开行列式.

我们先回想定义.

定义 1.22 (行列式) 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的行列式

$$\det(A) = \begin{cases} [A]_{1,1}, & n = 1; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[A]_{i,1} \det(A(i|1)), & n \geqslant 2. \end{cases}$$

不难看出, $[A]_{1,1}, [A]_{2,1}, \cdots, [A]_{n,1}$ 全是 A 的列 1 的元, 故我们说, 此定义按列 1 展开行列式. 自然地, 我们会想, 我们能否 "按其他的列展开行列式". 此事的回答是 "是".

定理 1.27 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 j 为整数, 且 $1 \leqslant j \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}[A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

或许, 我应解释, 当 A 是 1 级阵时, $\det(A(1|1))$ 是什么意思. 显然, 去除 A 的唯一的一行与唯一的一列后, 就不剩下任何一个元了. 我给出的阵的定义显然是未涉及此情形的. 我给出的行列式的定义也未涉及此情形. 我们作一个约定: **1 级阵 A 的子阵 $A(1|1)$ 是 "0 级阵", 且 "0 级阵" 的行列式是 1.** 这么看来, $(-1)^{1+1}[A]_{1,1} \det(A(1|1))$ 就是 $1 \cdot [A]_{1,1} \cdot 1$, 即 $[A]_{1,1}$, 跟行列式的定义一样.

我们无妨先用 2 级阵验证此命题. 设 A 是 2 级阵 (也就是, 取 $n = 2$). $j = 1$ 时, 这就是定义; $j = 2$ 时,

$$\begin{aligned} \det(A) &= [A]_{1,1} \det[[A]_{2,2}] - [A]_{2,1} \det[[A]_{1,2}] \\ &= -[A]_{1,2} \det[[A]_{2,1}] + [A]_{2,2} \det[[A]_{1,1}] \\ &= (-1)^{2+1}[A]_{2,1} \det(A(2|1)) + (-1)^{2+2}[A]_{2,2} \det(A(2|2)). \end{aligned}$$

所以, $n = 2$, $j = 2$ 时, 命题是正确的.

证 我们会用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对**任何** n 级阵 A, 对**任何**不超过 n 的正整数 j,

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(A(i|j)).$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

用数学归纳法不应是一个意外: 毕竟, 我给出的行列式的定义就是先定义小级阵的行列式, 再用小级阵的行列式定义大级阵的行列式. 值得一提的是, 我强调了 "任何" 二字; 这一点, 在后面的论证里, 是重要的.

设 $n=1$. $j=1$ 时, 显然. 故 $P(1)$ 是正确的.

设 $n=2$. $j=1$ 时, 也显然 (定义). $j=2$ 时, 我们已经验证过了. 故 $P(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取一个 m 级阵 A. 若 $j=1$, 这是定义, 不必证. 现设 $j\neq 1$. 于是

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
={}&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1)) &(1)\\
={}&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant m\\ \ell\neq i}}(-1)^{(\ell-\rho(\ell,i))+(j-1)}[A]_{\ell,j}\det(A(i,\ell|1,j)) &(2)\\
={}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant m\\ \ell\neq i}}(-1)^{(\ell-\rho(\ell,i))+(j-1)}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}[A]_{\ell,j}\det(A(i,\ell|1,j)) &(3)\\
={}&\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq \ell}}(-1)^{(\ell-\rho(\ell,i))+(j-1)}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}[A]_{\ell,j}\det(A(i,\ell|1,j)) &(4)\\
={}&\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq \ell}}(-1)^{\ell}(-1)^{\rho(\ell,i)}(-1)^{i}(-1)^{j}[A]_{i,1}[A]_{\ell,j}\det(A(i,\ell|1,j)) &(5)\\
={}&\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq \ell}}(-1)^{\ell+j}(-1)^{i-\rho(i,\ell)+1}[A]_{i,1}[A]_{\ell,j}\det(A(i,\ell|1,j)) &(6)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell+j} [A]_{\ell,j} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} (-1)^{i-\rho(i,\ell)+1} [A]_{i,1} \det (A(i,\ell|1,j)) \tag{7}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell+j} [A]_{\ell,j} \det (A(\ell|j)). \tag{8}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立.

我想, 您一定看到了公式右侧的序号. 这是方便我说话用的. 我想, 适当地解释这几步, 是有好处的.

(1) 是行列式的定义.

(2) 利用了假定. 我们假定可按**任何**列展开**每一个** $m-1$ 级阵的行列式. $A(i|1)$ 不就是 $m-1$ 级阵吗? 那么, 我们就按 $A(i|1)$ 的列 $j-1$ 展开. $A(i|1)$ 的列 $j-1$ 正好对应 A 的列 j. 最后, 注意到, $\ell \neq i$ 时, A 的 (ℓ, j)-元恰是 $A(i|1)$ 的 $(\ell-\rho(\ell,i), j-1)$-元.

(3) 利用了分配律 (还有加法的结合律与交换律).

(4) 利用了加法的结合律与交换律. (通俗地, 就是 "求和号的次序可换".)

(5) 利用了 -1 的整数次方的性质.

(6) 还是利用 -1 的整数次方的性质. 当然了, 也用到了 ρ-记号的性质.

(7) 又用了一次分配律 (还有加法的结合律与交换律). 不过, 跟 (3) 对比, 这次是反着用.

(8) 用到了行列式的定义. 注意到, $i \neq \ell$ 时, A 的 $(i,1)$-元恰是 $A(\ell|j)$ 的 $(i-\rho(i,\ell), 1)$-元 (其中 $j \neq 1$). 证毕.

本节的定理十分重要.

1.8 按多列展开行列式

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

本节, 我们学习按多列展开行列式.

我们已知, 我们可按任何一列展开行列式:

定理 1.27 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 j 为整数, 且 $1 \leqslant j \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

自然地, 我们会想, 我们能否 “按多列展开行列式”. 此事的回答是 “是”.

定理 1.28 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 k 是不超过 n 的正整数. 设 j_1, j_2, $\cdots$, j_k 是不超过 n 的正整数, 且 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. 则

$$\begin{aligned}\det(A) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} & \det\left(A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}\right) \\ & \cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} \det(A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)).\end{aligned}$$

若 $k = 1$, 则 $A\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} = [[A]_{i_1,j_1}]$ 是一个 1 级阵. 回想, 1 级阵 $[a]$ 的行列式就是 a. 所以, 若 $k = 1$, 则此定理就是 “按一列展开行列式”.

论证此事前, 我想用一个例助您理解, 此定理在说什么.

例 1.29 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 13 \\ 3 & 8 & 9 & 14 \\ 4 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}.$$

一方面, 根据定义,

$$
\begin{aligned}
&\det(A)\\
=\ &(-1)^{1+1}[A]_{1,1}\det(A(1|1))+(-1)^{2+1}[A]_{2,1}\det(A(2|1))\\
&+(-1)^{3+1}[A]_{3,1}\det(A(3|1))+(-1)^{4+1}[A]_{4,1}\det(A(4|1)).
\end{aligned}
$$

可算出

$$\det(A(1|1))=\det\begin{bmatrix}7&12&13\\8&9&14\\5&10&15\end{bmatrix}=-180,$$

$$\det(A(2|1))=\det\begin{bmatrix}6&11&16\\8&9&14\\5&10&15\end{bmatrix}=-20,$$

$$\det(A(3|1))=\det\begin{bmatrix}6&11&16\\7&12&13\\5&10&15\end{bmatrix}=20,$$

$$\det(A(4|1))=\det\begin{bmatrix}6&11&16\\7&12&13\\8&9&14\end{bmatrix}=-156.$$

所以

$$\det(A)=1\cdot(-180)-2\cdot(-20)+3\cdot 20-4\cdot(-156)=544.$$

另一方面, 我们试按列 1, 2 展开. 取 j_1, j_2 为 1, 2. 不难写出, 适合条件 “$1\leqslant i_1<i_2\leqslant 4$” 的 (i_1,i_2) 有 6 个: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$. 由此, 可写出

$$A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\2&7\end{bmatrix},\quad (-1)^{1+2+1+2}=+1,\quad A(1,2|1,2)=\begin{bmatrix}9&14\\10&15\end{bmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}1,3\\1,2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\3&8\end{bmatrix},\quad (-1)^{1+3+1+2}=-1,\quad A(1,3|1,2)=\begin{bmatrix}12&13\\10&15\end{bmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}2,3\\1,2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2&7\\3&8\end{bmatrix},\quad (-1)^{2+3+1+2}=+1,\quad A(2,3|1,2)=\begin{bmatrix}11&16\\10&15\end{bmatrix},$$

$$A\binom{1,4}{1,2}=\begin{bmatrix}1&6\\4&5\end{bmatrix},\quad(-1)^{1+4+1+2}=+1,\quad A(1,4|1,2)=\begin{bmatrix}12&13\\9&14\end{bmatrix},$$

$$A\binom{2,4}{1,2}=\begin{bmatrix}2&7\\4&5\end{bmatrix},\quad(-1)^{2+4+1+2}=-1,\quad A(2,4|1,2)=\begin{bmatrix}11&16\\9&14\end{bmatrix},$$

$$A\binom{3,4}{1,2}=\begin{bmatrix}3&8\\4&5\end{bmatrix},\quad(-1)^{3+4+1+2}=+1,\quad A(3,4|1,2)=\begin{bmatrix}11&16\\12&13\end{bmatrix}.$$

定理说,

$$\begin{aligned}\det(A)=&\quad\det\left(A\binom{1,2}{1,2}\right)(-1)^{1+2+1+2}\det(A(1,2|1,2))\\&+\det\left(A\binom{1,3}{1,2}\right)(-1)^{1+3+1+2}\det(A(1,3|1,2))\\&+\det\left(A\binom{2,3}{1,2}\right)(-1)^{2+3+1+2}\det(A(2,3|1,2))\\&+\det\left(A\binom{1,4}{1,2}\right)(-1)^{1+4+1+2}\det(A(1,4|1,2))\\&+\det\left(A\binom{2,4}{1,2}\right)(-1)^{2+4+1+2}\det(A(2,4|1,2))\\&+\det\left(A\binom{3,4}{1,2}\right)(-1)^{3+4+1+2}\det(A(3,4|1,2))\\=&\quad(-5)\cdot(-5)-(-10)\cdot 50\\&+(-5)\cdot 5+(-19)\cdot 51\\&-(-18)\cdot 10+(-17)\cdot(-49)\\=&\ 25+500-25-969+180+833\\=&\ 544.\end{aligned}$$

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(k)$ 为命题

对**任何** n 级阵 A **(其中** $n\geqslant k$**)**, 对**任何**不超过 n 的 k 个正整数 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ **(其中** $j_1<j_2<\cdots<j_k$**)**,

$$\begin{aligned}\det(A)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}&\det\left(A\binom{i_1,i_2,\cdots,i_k}{j_1,j_2,\cdots,j_k}\right)\\&\cdot(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}\det(A(i_1,i_2,\cdots,i_k|j_1,j_2,\cdots,j_k)).\end{aligned}$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 k, $P(k)$ 是正确的.

$k=1$ 时, 这就是我们证过的 "按一列展开行列式".

现在, 我们假定 $P(k-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(k)$ 也是正确的. 任取一个 n 级阵 A $(n \geqslant k)$. 任取不超过 n 的正整数 $j_1, j_2, \cdots, j_k$, 且 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. 按列 j_1 展开行列式, 知

$$\det(A) = \sum_{d_1=1}^{n} [A]_{d_1,j_1}(-1)^{d_1+j_1} \det(A(d_1|j_1)).$$

注意到, A 的列 $j_2, j_3, \cdots, j_k$ 跟 $A(d_1|j_1)$ 的列 $j_2-1, j_3-1, \cdots, j_k-1$ 对应. 并且, A 的行 i $(i \neq d_1)$ 跟 $A(d_1|j_1)$ 的行 $i-\rho(i,d_1)$ 对应. 利用假定, 我们按列 $j_2-1, j_3-1, \cdots, j_k-1$ 展开每一个 $\det(A(d_1|j_1))$, 有

$$\begin{aligned}\det(A(d_1|j_1)) = \sum_{\substack{1\leqslant d_2<\cdots<d_k\leqslant n\\ d_1\neq d_2,\cdots,d_k}} &\det\left(A\begin{pmatrix} d_2,\cdots,d_k\\ j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\ &\cdot(-1)^{d_2-\rho(d_2,d_1)+\cdots+d_k-\rho(d_k,d_1)+j_2+\cdots+j_k-(k-1)}\\ &\cdot\det(A(d_1,d_2,\cdots,d_k|j_1,j_2,\cdots,j_k)).\end{aligned}$$

利用分配律 (还有加法的结合律与交换律), 有

$$\begin{aligned}\det(A) = \sum_{\substack{1\leqslant d_1\leqslant n\\ 1\leqslant d_2<\cdots<d_k\leqslant n\\ d_1\neq d_2,\cdots,d_k}} &[A]_{d_1,j_1}(-1)^{d_1+j_1}\det\left(A\begin{pmatrix} d_2,\cdots,d_k\\ j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\ &\cdot(-1)^{d_2-\rho(d_2,d_1)+\cdots+d_k-\rho(d_k,d_1)+j_2+\cdots+j_k-(k-1)}\\ &\cdot\det(A(d_1,d_2,\cdots,d_k|j_1,j_2,\cdots,j_k)).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&d_1+j_1+d_2-\rho(d_2,d_1)+\cdots+d_k-\rho(d_k,d_1)+j_2+\cdots+j_k-(k-1)\\ =\ &(d_1+\cdots+d_k)+(j_1+\cdots+d_k)\\ &+(\rho(d_1,d_2)-1)+\cdots+(\rho(d_1,d_k)-1)-(k-1)\\ =\ &(d_1+\cdots+d_k)+(j_1+\cdots+j_k)+(\rho(d_1,d_2)+\cdots+\rho(d_1,d_k))-2(k-1),\end{aligned}$$

故

$$\det(A) = \sum_{\substack{1\leqslant d_1\leqslant n\\ 1\leqslant d_2<\cdots<d_k\leqslant n\\ d_1\neq d_2,\cdots,d_k}} (-1)^{\rho(d_1,d_2)+\cdots+\rho(d_1,d_k)}[A]_{d_1,j_1}\det\left(A\begin{pmatrix} d_2,\cdots,d_k\\ j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)$$
$$\cdot(-1)^{d_1+\cdots+d_k+j_1+\cdots+j_k}\det(A(d_1,d_2,\cdots,d_k|j_1,j_2,\cdots,j_k)).$$

注意到

$$\sum_{\substack{1\leqslant d_1\leqslant n\\ 1\leqslant d_2<\cdots<d_k\leqslant n\\ d_1\neq d_2,\cdots,d_k}}\cdots = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{1\leqslant s\leqslant k}(\cdots)\Big|_{\substack{d_1=i_s\\ d_r=i_{r-\rho(s,r)}\,(2\leqslant r\leqslant k)}}.$$

我解释此式吧. 要从 1 至 n 这 n 个整数中选出 k 个数 $d_1, d_2, \cdots, d_k$, 适合条件 $d_2<\cdots<d_k$, 且 d_1 不跟 $d_2,\cdots,d_k$ 的任何一个相等, 我们可以这样. 先从 1, 2, $\cdots$, n 里**从小到大地**挑 k 个数 $i_1, i_2, \cdots, i_k$. 然后, 我们从 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 选第 s **小**的数 i_s 为 d_1, 再分别取 $d_2, d_3, \cdots, d_k$ 为 $i_1, \cdots, i_{s-1}, i_{s+1}, \cdots, i_k$. (若 $s=1$, 则不出现 i_1; 若 $s=k$, 则不出现 i_k. 下同.) 更具体地, 我们使 d_1 为 i_s, 再使 d_r $(r\geqslant 2)$ 为 $i_{\ell(r)}$, 其中 $2\leqslant r\leqslant s$ 时 $\ell(r)=r-1$, 而 $r>s$ 时 $\ell(r)=r$. 利用 ρ-记号, 就是 $d_1=i_s$, 且 $d_r=i_{r-\rho(s,r)}$ $(2\leqslant r\leqslant k)$.

当 $d_1=i_s$, 且 $d_r=i_{r-\rho(s,r)}$ $(2\leqslant r\leqslant k)$ 时,

$$\begin{aligned}
&d_1=i_s,\\
&\rho(d_1,d_2)+\cdots+\rho(d_1,d_k)=s-1=(s+1)-2,\\
&[A]_{d_1,j_1}=[A]_{i_s,j_1},\\
&A\begin{pmatrix} d_2,\cdots,d_k\\ j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_k\\ j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix},\\
&d_1+\cdots+d_k=i_1+\cdots+i_k,\\
&A(d_1,d_2,\cdots,d_k|j_1,j_2,\cdots,j_k)=A(i_1,i_2,\cdots,i_k|j_1,j_2,\cdots,j_k).
\end{aligned}$$

故

$$\det(A)$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{1\leqslant s\leqslant k}(-1)^{s+1}[A]_{i_s,j_1}\det\left(A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_k\\ j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)$$

$$\cdot (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \det (A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)).$$

注意到 $i_1 + \cdots + i_k$ 与 $A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 都跟 s 无关, 故由分配律 (还有加法的结合律与交换律),

$$\begin{aligned}
&\det (A) \\
&= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \left(\sum_{1\leqslant s\leqslant k} (-1)^{s+1} [A]_{i_s,j_1} \det \left(A \begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_{s-1}, i_{s+1}, \cdots, i_k \\ j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \right) \right) \\
&\qquad \cdot (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \det (A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)).
\end{aligned}$$

注意到 $[A]_{i_s,j_1}$ 是 $A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}$ 的 $(s, 1)$-元, 故

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant s\leqslant k} (-1)^{s+1} [A]_{i_s,j_1} \det \left(A \begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_{s-1}, i_{s+1}, \cdots, i_k \\ j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \right) \\
&= \det \left(A \begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

综上, 我们有

$$\begin{aligned}
\det (A) = &\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \det \left(A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \right) \\
&\cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} \det (A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)).
\end{aligned}$$

所以, $P(k)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

1.9 完全展开行列式

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

前面, 我们研究了按一列展开行列式. 它变大级阵的行列式为一些小级阵的行列式. 现在, 我们考虑 "完全展开行列式", 也就是, 用不含行列式的公式表示行列式.

其实, 我给出行列式的定义后, 我们立即算出了小级阵 (不超过 4) 的行列式较具体的公式. 1 级阵的行列式非常简单, 有 1 项; 2 级阵的行列式不难, 有 2 项; 3 级阵的行列式较难, 但也不难记, 有 6 项; 4 级阵的行列式更复杂了, 不好记 (也不必记), 有 24 项. 本节, 我们的目标是, 较具体地写出较大级阵的行列式的公式.

定理 1.30 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$\begin{aligned}&\det(A)\\ =&\sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}} s(i_1,i_2,\cdots,i_n)\,s(j_1,j_2,\cdots,j_n)\,[A]_{i_1,j_1}[A]_{i_2,j_2}\cdots[A]_{i_n,j_n}.\end{aligned}$$

证 我们按列 j_1 展开 $\det(A)$, 有

$$\det(A)=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}(-1)^{i_1+j_1}[A]_{i_1,j_1}\det(A(i_1|j_1)).$$

注意到, A 的列 j_2 对应 $A(i_1|j_1)$ 的列 $j_2-\rho(j_2,j_1)$, 且 A 的行 i_2 ($i_2\neq i_1$) 对应 $A(i_1|j_1)$ 的行 $i_2-\rho(i_2,i_1)$. 再注意到

$$i_2-\rho(i_2,i_1)+j_2-\rho(j_2,j_1)=i_2+j_2+\rho(i_1,i_2)+\rho(j_1,j_2)-2,$$

故

$$\begin{aligned}&\det(A(i_1|j_1))\\ =&\sum_{\substack{1\leqslant i_2\leqslant n\\ i_2\neq i_1}}(-1)^{i_2+j_2+\rho(i_1,i_2)+\rho(j_1,j_2)}[A]_{i_2,j_2}\det(A(i_1,i_2|j_1,j_2)).\end{aligned}$$

……

注意到, A 的列 j_k 对应 $A(i_1,\cdots,i_{k-1}|j_1,\cdots,j_{k-1})$ 的列 $j_k-\rho(j_k,j_1)-\cdots-\rho(j_k,j_{k-1})$, 且 A 的行 i_k ($i_k\neq i_1,\cdots,i_{k-1}$) 对应 $A(i_1,\cdots,i_{k-1}|j_1,\cdots,j_{k-1})$ 的行 $i_k-\rho(i_k,i_1)-\cdots-\rho(i_k,i_{k-1})$. 再注意到

$$\begin{aligned}&i_k-\rho(i_k,i_1)-\cdots-\rho(i_k,i_{k-1})+j_k-\rho(j_k,j_1)-\cdots-\rho(j_k,j_{k-1})\\=\;&i_k+j_k+\rho(i_1,i_k)+\cdots+\rho(i_{k-1},i_k)+\rho(j_1,j_k)+\cdots+\rho(j_{k-1},j_k)-2(k-1),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\det(A(i_1,\cdots,i_{k-1}|j_1,\cdots,j_{k-1}))\\=&\sum_{\substack{1\leqslant i_k\leqslant n\\ i_k\neq i_1,\cdots,i_{k-1}}}(-1)^{i_k+j_k+\rho(i_1,i_k)+\cdots+\rho(i_{k-1},i_k)+\rho(j_1,j_k)+\cdots+\rho(j_{k-1},j_k)}\\&\qquad\cdot[A]_{i_k,j_k}\det(A(i_1,\cdots,i_k|j_1,\cdots,j_k)).\end{aligned}$$

……

最后, 我们得到

$$\begin{aligned}&\det(A(i_1,\cdots,i_{n-1}|j_1,\cdots,j_{n-1}))\\=&\sum_{\substack{1\leqslant i_n\leqslant n\\ i_n\neq i_1,\cdots,i_{n-1}}}(-1)^{i_n+j_n+\rho(i_1,i_n)+\cdots+\rho(i_{n-1},i_n)+\rho(j_1,j_n)+\cdots+\rho(j_{n-1},j_n)}[A]_{i_n,j_n}.\end{aligned}$$

(其实, 这就是 $[A]_{i_n,j_n}$; 这里, 我们要注意到

$$\begin{aligned}&1+1\\=\;&i_n-\rho(i_n,i_1)-\cdots-\rho(i_n,i_{n-1})+j_n-\rho(j_n,j_1)-\cdots-\rho(j_n,j_{n-1})\\=\;&i_n+j_n+\rho(i_1,i_n)+\cdots+\rho(i_{n-1},i_n)+\rho(j_1,j_n)+\cdots+\rho(j_{n-1},j_n)-2(n-1),\end{aligned}$$

故

$$1=(-1)^{1+1}=(-1)^{i_n+j_n+\rho(i_1,i_n)+\cdots+\rho(i_{n-1},i_n)+\rho(j_1,j_n)+\cdots+\rho(j_{n-1},j_n)}.$$

您若无印象了, 则可看本章, 节 1, 2, 3, 4.)

我们从后往前地代入, 有

$$\begin{aligned}&\det(A)\\=&\sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}}(-1)^{i_1+j_1+i_2+j_2+\cdots+i_n+j_n+\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\\&\cdot[A]_{i_1,j_1}[A]_{i_2,j_2}\cdots[A]_{i_n,j_n}.\end{aligned}$$

最后, 注意到

$$i_1+j_1+i_2+j_2+\cdots+i_n+j_n=2(1+2+\cdots+n)$$

是偶数, s-记号跟 τ-记号的关系, 以及 -1 的整数次方的性质, 即得

$$\begin{aligned}&\det(A)\\=&\sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}}s(i_1,i_2,\cdots,i_n)\,s(j_1,j_2,\cdots,j_n)\,[A]_{i_1,j_1}[A]_{i_2,j_2}\cdots[A]_{i_n,j_n}.\end{aligned}$$

证毕.

我们经常取 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$. 注意到 $s(1,2,\cdots,n)=1$, 即得

$$\det(A)=\sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}}s(i_1,i_2,\cdots,i_n)\,[A]_{i_1,1}[A]_{i_2,2}\cdots[A]_{i_n,n}.$$

例 1.31 设 A 为 3 级阵. 那么, 适合条件 "$1\leqslant i_1,i_2,i_3\leqslant 3$, 且 i_1, i_2, i_3 互不相同" 的 (i_1,i_2,i_3) 恰有 6 组:

$$\begin{aligned}&(1,2,3),\quad (2,3,1),\quad (3,1,2),\\&(1,3,2),\quad (2,1,3),\quad (3,2,1).\end{aligned}$$

回想

$$s(i_1,i_2,i_3)=\operatorname{sgn}(i_2-i_1)\cdot\operatorname{sgn}(i_3-i_1)\cdot\operatorname{sgn}(i_3-i_2).$$

不难算出,

$$\begin{aligned}s(1,2,3)=s(2,3,1)=s(3,1,2)=1,\\ s(1,3,2)=s(2,1,3)=s(3,2,1)=-1.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\det(A) = \quad & [A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3} + [A]_{2,1}[A]_{3,2}[A]_{1,3} + [A]_{3,1}[A]_{1,2}[A]_{2,3} \\ & - [A]_{1,1}[A]_{3,2}[A]_{2,3} - [A]_{2,1}[A]_{1,2}[A]_{3,3} - [A]_{3,1}[A]_{2,2}[A]_{1,3}.\end{aligned}$$

利用完全展开, 我们不难看出, n 级阵的行列式有 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ 项. 毕竟, $1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n$, 且 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 互不相同相当于 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 1, 2, ⋯, n 的排列. 我们知道, n 个互不相同的文字共有 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ 种排列.

1.10 阵的一个新记号

本节, 我们学习阵的一个新记号. 它可使我们更好地理解阵与行列式.

定义 1.32 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个 $m\times 1$ 阵. 定义 $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$ 是一个 $m\times n$ 阵, 其中, 对任何不超过 m 的正整数 i 与任何不超过 n 的正整数 j,

$$\left[\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}\right]_{i,j} = [c_j]_{i,1}.$$

(通俗地, $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$ 就是合 n 个 $m\times 1$ “小阵” $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为一个 $m\times n$ “大阵” 的结果.)

习惯地, 我们可写 $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$ 为 $[c_1, c_2, \cdots, c_n]$.

这种写法, 自然强调了阵的列. 之后, 在研究行列式的性质时, 此写法十分有用.

例 1.33 设 $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, c_4 = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$. 则

$$[c_1, c_2, c_3, c_4] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

论证下面的命题可被认为是一个好习题.

定理 1.34 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n, d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是 $2n$ 个 $m\times 1$ 阵. 设 k 是数. 则

$$[c_1, c_2, \cdots, c_n] + [d_1, d_2, \cdots, d_n] = [c_1 + d_1, c_2 + d_2, \cdots, c_n + d_n],$$
$$k[c_1, c_2, \cdots, c_n] = [kc_1, kc_2, \cdots, kc_n].$$

证 我证式 1. 论证式 2 比论证式 1 更简单, 故我留它为您的习题.

注意到 $[c_1, c_2, \cdots, c_n]$ 与 $[d_1, d_2, \cdots, d_n]$ 都是 $m\times n$ 阵, 它们自然可加, 结果也是 $m\times n$ 阵. 并且, c_j, d_j 都是 $m\times 1$ 阵, 故 $c_j + d_j$ 也是. 不说元是否相等,

至少等式二侧的阵的尺寸是相等的. 现在, 比较元是否相等:

$$\begin{aligned}&[\,[c_1,c_2,\cdots,c_n]+[d_1,d_2,\cdots,d_n]\,]_{i,j}\\=&[\,[c_1,c_2,\cdots,c_n]\,]_{i,j}+[\,[d_1,d_2,\cdots,d_n]\,]_{i,j}\\=&[c_j]_{i,1}+[d_j]_{i,1}\\=&[c_j+d_j]_{i,1}\\=&[\,[c_1+d_1,c_2+d_2,\cdots,c_n+d_n]\,]_{i,j}.\end{aligned}$$

看来, 元也相等.

证明的要点有且只有一个: 用定义. 证毕.

设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个 $n\times 1$ 阵. 那么, $[c_1,c_2,\cdots,c_n]$ 自然是一个 n 级阵, 从而有行列式 $\det([c_1,c_2,\cdots,c_n])$. 不难看到, 这里有 2 重括号. 习惯地, 我们写

$$\det([c_1,c_2,\cdots,c_n])=\det[c_1,c_2,\cdots,c_n].$$

不写 ( ) 似乎并不会引起误解, 所以, 这是没问题的.

例 1.35 设 $c_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, c_2=\begin{bmatrix}5\\6\\4\end{bmatrix}, c_3=\begin{bmatrix}9\\7\\8\end{bmatrix}$. 则

$$\begin{aligned}\det[c_1,c_2,c_3]&=1\cdot6\cdot8+2\cdot4\cdot9+3\cdot5\cdot7-1\cdot4\cdot7-2\cdot5\cdot8-3\cdot6\cdot9\\&=48+72+105-28-80-162\\&=-45.\end{aligned}$$

前面, 我们合 "竖排的阵" 为一个大阵. 我们当然也可合 "横排的阵" 为一个大阵.

定义 1.36 设 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 是 m 个 $1\times n$ 阵. 定义 $\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_m\end{bmatrix}$ 是一个 $m\times n$ 阵,

其中, 对任何不超过 m 的正整数 i 与任何不超过 n 的正整数 j,

$$\left[\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}\right]_{i,j} = [r_i]_{1,j}.$$

(通俗地, $\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$ 就是合 m 个 $1 \times n$ “小阵” $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 为一个 $m \times n$ “大阵” 的结果.)

完全类似地, 我们有

定理 1.37 设 $r_1, r_2, \cdots, r_m, s_1, s_2, \cdots, s_m$ 是 $2m$ 个 $1 \times n$ 阵. 设 k 是数. 则

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + s_1 \\ r_2 + s_2 \\ \vdots \\ r_m + s_m \end{bmatrix},$$

$$k\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kr_1 \\ kr_2 \\ \vdots \\ kr_m \end{bmatrix}.$$

证 完全类似. 证毕.

1.11　完全展开行列式 (续)

注　本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级阵. 交换 $\boldsymbol{A}$ 的列的次序, 得 n 级阵 $\boldsymbol{B}$.

利用完全展开, 我们可得 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的行列式的关系.

定理 1.38　设 n 级阵 A 的列 1, 2, ⋯, n 分别为 a_1, a_2, ⋯, a_n. 设 ℓ_1, ℓ_2, ⋯, ℓ_n 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$\det[a_{\ell_1}, a_{\ell_2}, \cdots, a_{\ell_n}] = s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) \det(A).$$

不过, 论证此事前, 我想用一个例助您理解, 此定理在说什么.

例 1.39　设 $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$. 则

$$\begin{aligned}\det[a_1, a_2, a_3] &= 1\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot 9 + 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 4\cdot 7 - 2\cdot 5\cdot 8 - 3\cdot 6\cdot 9 \\ &= 48 + 72 + 105 - 28 - 80 - 162 \\ &= -45.\end{aligned}$$

取 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为 2, 3, 1. 则 $s(2,3,1) = 1$. 不难算出

$$\begin{aligned}\det[a_2, a_3, a_1] &= 5\cdot 7\cdot 3 + 6\cdot 8\cdot 1 + 4\cdot 9\cdot 2 - 5\cdot 8\cdot 2 - 6\cdot 9\cdot 3 - 4\cdot 7\cdot 1 \\ &= 105 + 48 + 72 - 80 - 162 - 28 \\ &= -45.\end{aligned}$$

这就是 $\det[a_1, a_2, a_3]$.

再取 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为 1, 3, 2. 则 $s(1,3,2) = -1$. 不难算出

$$\begin{aligned}\det[a_1, a_3, a_2] &= 1\cdot 7\cdot 4 + 2\cdot 8\cdot 5 + 3\cdot 9\cdot 6 - 1\cdot 8\cdot 6 - 2\cdot 9\cdot 4 - 3\cdot 7\cdot 5 \\ &= 28 + 80 + 162 - 48 - 72 - 105 \\ &= 45.\end{aligned}$$

这就是 $-\det[a_1, a_2, a_3]$.

证 作 n 级阵 $B = [a_{\ell_1}, a_{\ell_2}, \cdots, a_{\ell_n}]$. 注意到, $[B]_{u,v} = [a_{\ell_v}]_{u,1} = [A]_{u,\ell_v}$.

我们完全展开 $\det(B)$. 取 j_1, j_2, $\cdots$, j_n 为 1, 2, $\cdots$, n, 并注意到 $s(1, 2, \cdots, n) = 1$, 有

$$\det(B) = \sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n)\,[B]_{i_1,1}[B]_{i_2,2}\cdots[B]_{i_n,n}.$$

我们再完全展开 $\det(A)$. 取 j_1, j_2, $\cdots$, j_n 为 ℓ_1, ℓ_2, $\cdots$, ℓ_n, 有

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
&= s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) \sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n)\,[A]_{i_1,\ell_1}[A]_{i_2,\ell_2}\cdots[A]_{i_n,\ell_n}\\
&= s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) \sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n)\,[B]_{i_1,1}[B]_{i_2,2}\cdots[B]_{i_n,n}\\
&= s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)\det(B).
\end{aligned}$$

注意到 $s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) = \pm 1$, 故

$$\det(B) = s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)\det(A).$$

证毕.

1.12 单位阵

在进一步讨论行列式前, 我要介绍一类特别的方阵.

定义 1.40 (δ-记号) 设 i, j 是二个文字. 定义

$$\delta(i, j)=\begin{cases}0, & i \neq j; \\ 1, & i=j.\end{cases}$$

显然, δ-记号是表示二个文字是否相等的一个量. $\delta(i, j)=1$, 说明 i, j 是同一个文字; $\delta(i, j)=0$, 说明 i, j 是不同的二个文字.

定义 1.41 (单位阵) 设 n 为正整数. 作 n 级阵 I_n, 使 $[I_n]_{i,j} = \delta(i, j)$, $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 我们说, I_n 是 n 级单位阵.

当我们不强调单位阵的尺寸时, 我们可简单地写单位阵为 I.

例 1.42 1 级单位阵是 1, 或 [1]. 2 级单位阵是 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. 3 级单位阵是 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

一般地, n 级单位阵含 n 个 1 与 n^2-n 个 0, 且 1 **恰在**行号与列号相等的地方 (也就是说, 0 **恰在**行号与列号不等的地方).

可写一个 $n \times 1$ 阵为 n 级单位阵 I_n 的列的数乘的和. 具体地, 我们设 x 是一个 $n \times 1$ 阵, 且设 $I_n=[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ (也就是说, 设 e_1, e_2, $\cdots$, e_n 是 I_n 的列 1, 2, $\cdots$, n). 记 $k_i=[x]_{i,1}$. 则

$$\begin{aligned} x &= k_1 e_1+k_2 e_2+\cdots+k_n e_n \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} k_{\ell} e_{\ell}. \end{aligned}$$

为证明此式, 我们要用单位阵的定义、加法的定义、数乘的定义 (不难看出, 等

式二侧的尺寸都是 $n\times 1$):

$$\begin{aligned}\left[\sum_{\ell=1}^{n} k_\ell e_\ell\right]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [k_\ell e_\ell]_{i,1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell [e_\ell]_{i,1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell [I_n]_{i,\ell}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell \delta(i,\ell)\\ &= k_i\delta(i,i) + \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i}} k_\ell\delta(i,\ell)\\ &= k_i + \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i}} k_\ell 0\\ &= k_i.\end{aligned}$$

至多以一种方式写一个 $n\times 1$ 阵为 n 级单位阵 I_n 的列的数乘的和. 具体地, 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 I_n 的列 1, 2, ⋯, n. 再设

$$\sum_{\ell=1}^{n} k_\ell e_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell e_\ell.$$

不难算出

$$\sum_{\ell=1}^{n} k_\ell e_\ell = \begin{bmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix},$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell e_\ell = \begin{bmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_n\end{bmatrix}.$$

从而

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

由此可知, $k_i = p_i$.

综上, 我们有

定理 1.43 可以, 且只能以一种方式写一个 $n \times 1$ 阵为 n 级单位阵 I_n 的列的数乘的和.

例 1.44 设 $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. 于是, 一方面,

$$x = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

另一方面, 我们设

$$x = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

由此可知, k_1, k_2, k_3 一定分别是 3, 5, 7.

顺便, 您可用完全类似的手法证明

定理 1.45 可以, 且只能以一种方式写一个 $1 \times n$ 阵为 n 级单位阵 I_n 的行的数乘的和.

1.13 行列式的性质

本节, 我们学习行列式的几条重要的性质.

定理 1.46 (规范性) 单位阵的行列式为 1.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

$$\det(I_n) = 1.$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 显然是正确的. 我就不解释原因了; 您解释它.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的; 也就是说, $\det(I_m) = 1$. 按列 1 展开, 有

$$\begin{aligned}
&\det(I_m)\\
=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[I_m]_{i,1}\det(I_m(i|1))\\
=&(-1)^{1+1}\delta(1,1)\det(I_m(1|1))+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\delta(i,1)\det(I_m(i|1))\\
=&\det(I_{m-1})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}0\det(I_m(i|1))\\
=&\det(I_{m-1})\\
=&1.
\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

我接下来要讲的二个性质的论证利用了按 (任何) 一列展开行列式的公式. 请允许我引用此公式:

定理 1.27 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 j 为整数, 且 $1 \leqslant j \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(A(i|j)).$$

定理 1.47 (多线性) 行列式 (关于列) 是多线性的. 具体地, 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}&\det[a_1,\cdots,a_{j-1},sx+ty,a_{j+1},\cdots,a_n]\\=\;&s\det[a_1,\cdots,a_{j-1},x,a_{j+1},\cdots,a_n]+t\det[a_1,\cdots,a_{j-1},y,a_{j+1},\cdots,a_n].\end{aligned}$$

(若 $j=1$, 则 a_1 不出现; 若 $j=n$, 则 a_n 不出现. 下同.)

证 作三个 n 级阵 A, B, C: A, B, C 的列 k 为 a_k ($k\neq j$); A 的列 j 为 x; B 的列 j 为 y; C 的列 j 为 $sx+ty$. 那么,

$$\begin{aligned}\det(A)&=\det[a_1,\cdots,a_{j-1},x,a_{j+1},\cdots,a_n],\\\det(B)&=\det[a_1,\cdots,a_{j-1},y,a_{j+1},\cdots,a_n],\\\det(C)&=\det[a_1,\cdots,a_{j-1},sx+ty,a_{j+1},\cdots,a_n].\end{aligned}$$

不难发现, 若 $k\neq j$, 则 $[A]_{i,k}=[B]_{i,k}=[C]_{i,k}$, 故 $A(i|j)=B(i|j)=C(i|j)$. 再注意到 $[C]_{i,j}=s[A]_{i,j}+t[B]_{i,j}$, 得

$$\begin{aligned}&\det(C)\\=\;&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[C]_{i,j}\det(C(i|j))\\=\;&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(s[A]_{i,j}+t[B]_{i,j})\det(C(i|j))\\=\;&s\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(C(i|j))+t\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[B]_{i,j}\det(C(i|j))\\=\;&s\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(A(i|j))+t\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[B]_{i,j}\det(B(i|j))\\=\;&s\det(A)+t\det(B).\end{aligned}$$

证毕.

多线性有一个较直白的推广. 具体地, 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何 ℓ 个 $n\times 1$ 阵 $b_1, b_2, \cdots, b_\ell$, 任

何 ℓ 个数 $s_1, s_2, \cdots, s_\ell$, 有

$$\det\left[a_1, \cdots, a_{j-1}, \sum_{k=1}^{\ell} s_k b_k, a_{j+1}, \cdots, a_n\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\ell} s_k \det\,[a_1, \cdots, a_{j-1}, b_k, a_{j+1}, \cdots, a_n].$$

您可施数学归纳法于 ℓ 以证此事 (注意到 $s_1b_1 + \cdots + s_\ell b_\ell = (s_1b_1 + \cdots + s_{\ell-1}b_{\ell-1}) + s_\ell b_\ell$); 其实, 这就是多次用多线性的结果.

定理 1.48 (交错性) 行列式 (关于列) 是交错性的. 具体地, 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $\det(A) = 0$.

有一件事值得一提. 明显地, 1 级阵不可能有二列完全相同. 但是, 根据 "若 p 是假的, 则 '若 p, 则 q' 是真的" 原则, 我们仍认为 1 级阵的行列式有交错性. ("若 p, 则 q" 相当于 "对适合条件 p 的任何对象 o, o 也适合条件 q". 形如 "对任何 A, 必 B" 的话的反面就是 "存在某个 A, 使之非 B". 所以, 若我们找不到 "非 B" 的 A, 我们应认为, "对任何 A, 必 B" 是对的. 特别地, 当 A 不存在时, 自然没有 "非 B" 的 A. 故, 我们认为, 即使 A 不存在, "对任何 A, 必 B" 是对的.)

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对每一个有完全相同的二列的 n 级阵 A, 其行列式必为零.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

前面解释过, 我们认为, $P(1)$ 是真的.

现在考虑 $P(2)$. 为此, 任取有完全相同的二列的 2 级阵

$$A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(A) = ab - ba = 0.$$

故 $P(2)$ 是真的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的 (注意, 此处 $m \geqslant 3$). 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取一个有完全相同的二列的 m 级阵 A. 我们设 A 的列 p 等于列 q, 其中 $1 \leqslant p < q \leqslant m$. 在 $1, 2, \cdots, m$ 这 m 个数里, 我们必定能找到一个数 j, 它既不等于 p, 也不等于 q. 按列 j 展开行列式, 有

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

注意到, $m-1$ 级阵 $A(i|j)$ 仍有完全相同的二列. 所以, 根据假定, $\det(A(i|j)) = 0$. 故 $\det(A) = 0$.

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

行列式的一些性质是其多线性与交错性的推论. 比如

定理 1.49 (反称性) 行列式 (关于列) 是反称性的. 具体地, 设 A 是 n 级阵, 设交换 A 的列 p 与列 q 后得到的阵为 B $(p < q)$. 则 $\det(B) = -\det(A)$. (通俗地, 交换方阵的二列, 则其行列式变号.)

证 设 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$. 为方便说话, 我们写

$$f(x, y) = \det[a_1, \cdots, a_{p-1}, x, a_{p+1}, \cdots, a_{q-1}, y, a_{q+1}, \cdots, a_n].$$

则

$$\begin{aligned}
0 &= f(a_p + a_q, a_p + a_q) \\
&= f(a_p, a_p + a_q) + f(a_q, a_p + a_q) \\
&= (f(a_p, a_p) + f(a_p, a_q)) + (f(a_q, a_p) + f(a_q, a_q)) \\
&= f(a_p, a_q) + f(a_q, a_p) \\
&= \det(A) + \det(B).
\end{aligned}$$

证毕.

1.14 用行列式的性质确定行列式

本节, 我们研究如何用行列式的一些性质确定行列式.

假定, 您**熟悉**一些人 (而不只是 “知道他们的存在”). 自然地, 您也知道他们的一些特征. 我从这些人里选一个, 我想, 您可以说出此人的一些特征. 但是, 反过来, 我说出某人的一些特征, 您就一定能确定此人吗? 那自然是不一定的. 不过, 当我给出较多的特征时, 那是有可能的.

抽象地, n 级阵的行列式就是一个定义在全体 n 级阵上的函数. 就像一个人有多种特征那样, 行列式自然也有不少特征 (或者, 性质), 无论是 “有名的” (有名字的), 还是 “无名的”. 值得注意的是, 有些特征并不是行列式特有的: 比如, 零函数 $z(A) = 0$ (其中 A 是任何的 n 级阵) 适合多线性、交错性、反称性, 恒取 1 的函数 $u(A) = 1$ 适合规范性, 但它们都不是行列式. 不过, 若我们联合行列式的**几个**特征, 则它们可**确定**行列式.

定理 1.50 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}&f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_n])\\=\ &sf([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]) + tf([a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n]).\end{aligned}$$

(2) (交错性) 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $f(A) = 0$.

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A) = f(I)\det(A)$.

特别地, 若 $f(I) = 1$ (规范性), 则 f 就是行列式.

证 我们设 $g(A) = f(A) - f(I)\det(A)$. 不难验证, g 也有多线性、交错性、反称性 (具体地, 设交换 n 级阵 A 的列 p 与列 q 后得到的阵为 B, 且 $p<q$, 则 $g(B) = -g(A)$; 这是前二个性质的推论), 且 $g(I) = 0$. 我们的目标是: 证 g 是零函数 (即, 恒为零).

任取一个 n 级阵 A. 设 n 级单位阵的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 设 A 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 于是

$$a_k = [A]_{1,k}e_1 + [A]_{2,k}e_2 + \cdots + [A]_{n,k}e_n$$

$$= \sum_{i_k=1}^{n} [A]_{i_k,k} e_{i_k}.$$

(注意, 这里, 我用了 n 个求和指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$. 等会儿, 您就知道为什么我要这么写了.) 从而, 利用多线性,

$$\begin{aligned}
g(A) &= g([a_1, a_2, \cdots, a_n]) \\
&= g\left(\left[\sum_{i_1=1}^{n} [A]_{i_1,1} e_{i_1}, a_2, \cdots, a_n\right]\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} [A]_{i_1,1}\, g([e_{i_1}, a_2, \cdots, a_n]) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} [A]_{i_1,1}\, g\left(\left[e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} [A]_{i_2,2} e_{i_2}, \cdots, a_n\right]\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} [A]_{i_1,1} [A]_{i_2,2}\, g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, a_n]) \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} [A]_{i_1,1} [A]_{i_2,2} \cdots [A]_{i_n,n}\, g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]).
\end{aligned}$$

利用交错性, 不难看出, 若存在整数 p, q 使 $1 \leqslant p < q \leqslant n$, 且 $i_p = i_q$, 则 $[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]$ 有二列相同, 故 $g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]) = 0$. 所以,

$$g(A) = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ 互不相同}}} [A]_{i_1,1} [A]_{i_2,2} \cdots [A]_{i_n,n}\, g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]).$$

我们用反称性证明每一个 $g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}])$ (其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是不超过 n 的正整数, 且互不相同) 都是 0. 适当地交换 $[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]$ 的列, 可变其为 $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$, 即 n 级单位阵. 从而

$$g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]) = \pm g(I) = 0.$$

所以 $g(A) = 0$. 故 $f(A) = f(I) \det(A)$. (反过来, 不难验证, 若我们定义 $f(A) = f(I) \det(A)$, 则 f 适合多线性与交错性.) 证毕.

定理 1.51 若定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合规范性、多线性、交错性, 则 f 就是 (n 级阵的) 行列式 (函数).

由此, 理论地, 我们可用行列式的这三条性质**定义**行列式:

定义 1.52 设 f 是定义在全体 n 级阵上的函数. 若 f 适合如下三条, 则说 f 是 (n 级阵的) **一个**行列式函数 (自然地, 若 A 是 n 级阵, 则 $f(A)$ 是 A 的**一个**行列式):

(1) (规范性) 若 I 是 n 级单位阵, 则 $f(I) = 1$.

(2) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n \times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n \times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}&f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx + ty, a_{j+1}, \cdots, a_n])\\ = {} & sf([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]) + tf([a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n]).\end{aligned}$$

(3) (交错性) 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $f(A) = 0$.

不过, 我没有这么干, 因为由这个定义入手, 证明 (n 级阵的) 行列式函数存在且唯一是较难的. (我认为, 我用的定义是较简单的.)

1.15 “行” 列式

前面, 我们学习了行列式的一些公式与性质. 它们至少有一个共同点: 它们都是关于**列**的命题. 毕竟, 行列式的定义就是按列 1 展开. 利用定义, 我们得到了按任何一列展开行列式的公式. 然后, 我们得到了行列式的一些 (关于列的) 性质.

自然地, 我们问: 行列式是否也有关于行的公式与性质? 此事的回答是 “是”. 为此, 我们先按行 1 展开行列式.

定理 1.53 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)).$$

我们无妨先用小级阵验证此命题.

设 A 是 1 级阵. 显然 (我作过一个关于 “0 级阵” 及其 “行列式” 的约定).

设 A 是 2 级阵 (也就是, 取 $n = 2$). 则

$$\begin{aligned}\det(A) &= [A]_{1,1} \det[[A]_{2,2}] - [A]_{2,1} \det[[A]_{1,2}] \\ &= [A]_{1,1} \det[[A]_{2,2}] - [A]_{1,2} \det[[A]_{2,1}] \\ &= (-1)^{1+1}[A]_{1,1} \det(A(1|1)) + (-1)^{1+2}[A]_{1,2} \det(A(1|2)).\end{aligned}$$

所以, $n = 2$ 时, 命题是正确的.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对**任何** n 级阵 A,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)).$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

我们已知 $P(1)$, $P(2)$ 都是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取一个 m 级阵 A. 为方便, 我们写 $(-1)^{1+1}[A]_{1,1}\det(A(1|1))$ 为 f. 于是

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
&= f+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1)) && (1)\\
&= f+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\sum_{j=2}^{m}(-1)^{1+j-1}[A]_{1,j}\det(A(i,1|1,j)) && (2)\\
&= f+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}(-1)^{1+j-1}[A]_{1,j}\det(A(i,1|1,j)) && (3)\\
&= f+\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}(-1)^{1+j-1}[A]_{1,j}\det(A(i,1|1,j)) && (4)\\
&= f+\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=2}^{m}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}(-1)^{i-1+1}[A]_{i,1}\det(A(i,1|1,j)) && (5)\\
&= f+\sum_{j=2}^{m}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i-1+1}[A]_{i,1}\det(A(i,1|1,j)) && (6)\\
&= f+\sum_{j=2}^{m}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(A(1|j)). && (7)
\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立.

我想, 您一定看到了公式右侧的序号. 这是方便我说话用的. 我想, 适当地解释这几步, 是有好处的.

(1) 是行列式的定义.

(2) 利用了假定. 设 $i>1$. 我们假定可按行 1 展开每一个 $m-1$ 级阵的行列式. $A(i|1)$ 不就是 $m-1$ 级阵吗? 那么, 我们就按 $A(i|1)$ 的行 1 展开. $A(i|1)$ 的行 1 正好对应 A 的行 1. 最后, 注意到, A 的 $(1,j)$-元恰是 $A(i|1)$ 的 $(1,j-1)$-元.

(3) 利用了分配律 (还有加法的结合律与交换律).

(4) 利用了加法的结合律与交换律. (通俗地, 就是 “求和号的次序可换”.)

(5) 利用了 -1 的整数次方的性质 (我在前面说过). 当然, 我还利用的乘法的结合律与交换律.

(6) 又用了一次分配律 (还有加法的结合律与交换律). 不过, 跟 (3) 对比, 这次是反着用.

(7) 用到了行列式的定义. 注意到, $i > 1$ 时, A 的 $(i, 1)$-元恰是 $A(1|j)$ 的 $(i-1, 1)$-元. 证毕.

不难看到, 按行 1 展开行列式的公式跟按列 1 展开行列式的公式是十分相似的. 为方便说话, 我作如下定义.

定义 1.54 (“行” 列式) 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的 “行” 列式

$$\det{}'(A) = \begin{cases} [A]_{1,1}, & n = 1; \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det{}'(A(1|j)), & n \geqslant 2. \end{cases}$$

由上个定理, 不难用数学归纳法证明, “行” 列式就是行列式. 作命题 $P(n)$: 对任何 n 级阵 A, A 的 “行” 列式等于 A 的行列式. $P(1)$ 显然是正确的. 假定 $P(m-1)$ 正确. 任取一个 m 级阵 A. 则

$$\begin{aligned} \det{}'(A) &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det{}'(A(1|j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)) \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

如果, 我用 “行” 列式 $\det'$ 作行列式的定义, 那么, 我可用完全相似的方法, 根据新的定义, 证明按一行展开行列式的公式 (见本章, 节 7):

$$\begin{aligned} &\det(A) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant m \\ \ell \neq j}} (-1)^{(i-1)+(\ell-\rho(\ell,j))} [A]_{i,\ell} \det(A(1,i|j,\ell)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant m\\ \ell\neq j}} (-1)^{(i-1)+(\ell-\rho(\ell,j))}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}[A]_{i,\ell}\det(A(1,i|j,\ell))\\
&= \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq \ell}} (-1)^{(i-1)+(\ell-\rho(\ell,j))}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}[A]_{i,\ell}\det(A(1,i|j,\ell))\\
&= \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq \ell}} (-1)^{i}(-1)^{\ell}(-1)^{\rho(\ell,j)}(-1)^{j}[A]_{1,j}[A]_{i,\ell}\det(A(1,i|j,\ell))\\
&= \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq \ell}} (-1)^{i+\ell}(-1)^{1+j-\rho(j,\ell)}[A]_{1,j}[A]_{i,\ell}\det(A(1,i|j,\ell))\\
&= \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{i+\ell}[A]_{i,\ell} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq \ell}} (-1)^{1+j-\rho(j,\ell)}[A]_{1,j}\det(A(1,i|j,\ell))\\
&= \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{i+\ell}[A]_{i,\ell}\det(A(i|\ell)).
\end{aligned}
$$

不过, 写几乎一样的论证是较无趣的. 所以, 换个思路.

定理 1.55 设 A 是 n 级阵 $(n \geqslant 1)$. 则 A 的转置, A^{T}, 的行列式等于 A 的行列式.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对**任何** n 级阵 A,

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A).$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 是正确的. 毕竟, 1 级阵的转置就是自己.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取一

个 m 级阵 A. 注意到 $[A]_{i,j} = [A^{\mathrm{T}}]_{j,i}$. 于是, 可以验证, $A(i|k) = (A^{\mathrm{T}}(k|i))^{\mathrm{T}}$. 则

$$\begin{aligned}\det(A^{\mathrm{T}}) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i}[A^{\mathrm{T}}]_{1,i} \det(A^{\mathrm{T}}(1|i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i}[A^{\mathrm{T}}]_{1,i} \det((A^{\mathrm{T}}(1|i))^{\mathrm{T}}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1}[A]_{i,1} \det(A(i|1)) \\ &= \det(A).\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

此性质是重要的: 利用它, 我们可译行列式的关于列的命题为关于行的命题. 我用一个例助您理解; 它是按行 i 展开行列式的公式.

定理 1.56 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 i 为整数, 且 $1 \leqslant i \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}[A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

证 基本的思路: 先转置, 施关于列的命题于转置, 再转置回来. 回想, A^{T} 的列 i 跟 A 的行 i 对应, 故我们按列 i 展开 A^{T} 的行列式. 则

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(A^{\mathrm{T}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i}[A^{\mathrm{T}}]_{j,i} \det(A^{\mathrm{T}}(j|i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i}[A]_{i,j} \det((A(i|j))^{\mathrm{T}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}[A]_{i,j} \det(A(i|j)).\end{aligned}$$

证毕.

为方便, 我译前面的行列式的关于列的性质为关于行的性质. 不过, 我就不证它们了. 我留它们的论证为您的习题吧.

定理 1.57 (多线性) 行列式 (关于行) 是多线性的. 具体地, 对任何不超过 n 的正整数 i, 任何 $n-1$ 个 $1\times n$ 阵 $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $1\times n$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ sx+ty \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = s\det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + t\det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ y \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

(若 $i=1$, 则 a_1 不出现; 若 $i=n$, 则 a_n 不出现. 下同.)

定理 1.58 (交错性) 行列式 (关于行) 是交错性的. 具体地, 若 n 级阵 A 有二行完全相同, 则 $\det(A)=0$.

定理 1.59 (反称性) 行列式 (关于行) 是反称性的. 具体地, 设 A 是 n 级阵, 设交换 A 的行 p 与行 q 后得到的阵为 B $(p<q)$. 则 $\det(B)=-\det(A)$. (通俗地, 交换方阵的二行, 则其行列式变号.)

定理 1.60 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 i, 任何 $n-1$ 个 $1\times n$ 阵 $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $1\times n$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ sx+ty \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = sf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) + tf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ y \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right).$$

(2) (交错性) 若 n 级阵 A 有二行完全相同, 则 $f(A)=0$.

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A)=f(I)\det(A)$.

特别地, 若 $f(I)=1$ (规范性), 则 f 就是行列式.

定理 1.61 若定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合规范性、(关于行的) 多线性、(关于行的) 交错性, 则 f 就是 (n 级阵的) 行列式 (函数).

由此, 理论地, 我们也可如此**定义**行列式:

定义 1.62 设 f 是定义在全体 n 级阵上的函数. 若 f 适合如下三条, 则说 f 是 (n 级阵的) **一个**行列式函数 (自然地, 若 A 是 n 级阵, 则 $f(A)$ 是 A 的**一个**行列式):

(1) (规范性) 若 I 是 n 级单位阵, 则 $f(I) = 1$.

(2) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 i, 任何 $n-1$ 个 $1 \times n$ 阵 $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $1 \times n$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ sx+ty \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = sf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) + tf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ y \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right).$$

(3) (交错性) 若 n 级阵 A 有二行完全相同, 则 $f(A) = 0$.

1.16 “行” 列式 (续)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

这里, 为方便, 我译前面的行列式的关于列的公式为关于行的公式.

我先引用我们见过的二个公式.

定理 1.53 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)).$$

定理 1.56 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 i 为整数, 且 $1 \leqslant i \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

现在, 我给出新的公式. 您至少有二种证明这些新公式的方法: (a) 您可以用老方法, 几乎完全一样地论证; (b) 您也可以利用转置, 译已有的公式.

定理 1.63 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 k 是不超过 n 的正整数. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是不超过 n 的正整数, 且 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. 则

$$\begin{aligned}\det(A) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} &\det\left(A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}\right) \\ &\cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} \det(A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)).\end{aligned}$$

定理 1.64 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$\begin{aligned}&\det(A) \\ = &\sum_{\substack{1 \leqslant j_1, j_2, \cdots, j_n \leqslant n \\ j_1, j_2, \cdots, j_n \text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n)\, s(j_1, j_2, \cdots, j_n)\, [A]_{i_1,j_1} [A]_{i_2,j_2} \cdots [A]_{i_n,j_n}.\end{aligned}$$

特别地, 取 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$, 有,

$$\det(A) = \sum_{\substack{1 \leqslant j_1, j_2, \cdots, j_n \leqslant n \\ j_1, j_2, \cdots, j_n \text{ 互不相同}}} s(j_1, j_2, \cdots, j_n)\, [A]_{1,j_1} [A]_{2,j_2} \cdots [A]_{n,j_n}.$$

这是大多数教材**定义**行列式的方式. 当我是初学者时, 我面对的就是它.

定理 1.65 设 n 级阵 A 的行 $1, 2, \cdots, n$ 分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 设 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$\det \begin{bmatrix} a_{\ell_1} \\ a_{\ell_2} \\ \vdots \\ a_{\ell_n} \end{bmatrix} = s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) \det(A).$$

1.17　阵的积

本节, 我们学习阵的一种新运算, 即阵的乘法.

阵的乘法, 跟阵的加、减、数乘相比, 复杂一些. 不过, 我想说, 阵的加、减、数乘, 与本节要讨论的乘运算, 都不是数学家随意定义的.

我认为, "长大了, 就明白了", 不是没有道理的. 我初学数的减法时, 不明白为什么 "取 1 当 10", 从而不理解 $16-9=7$. 初学分数的加法时, 我不明白, 为什么 $1/2+1/3=5/6$, 而不是 $1/2+1/3=2/5$. 初学解方程时, 我不明白, 为什么 $a-(b-c)=a-b+c$; 我当时认为, $a-(b-c)$ 应等于 $a-b-c$, 也就是 $(a-b)-c$. 不过, 现在我当然都明白了. 这样的故事还有不少.

我想, 您也有类似的体验.

好了, 我就说这么多. 我要开始引入阵的积了.

定义 1.66　设 A 是 $m\times s$ 阵, B 是 $s\times n$ 阵 (也就是说, A 有多少列, B 就有多少行). 我们定义 A 与 B 的积 (注意 A, B 的次序) 为一个 $m\times n$ 阵 AB, 其中, 对任何不超过 m 的正整数 i 与任何不超过 n 的正整数 j,

$$\begin{aligned}[AB]_{i,j} &= [A]_{i,1}[B]_{1,j}+[A]_{i,2}[B]_{2,j}+\cdots+[A]_{i,s}[B]_{s,j}\\ &= \sum_{k=1}^{s}[A]_{i,k}[B]_{k,j}.\end{aligned}$$

(通俗地, AB 是 $m\times n$ 阵, 其 (i,j)-元就是 A 的行 i 跟 B 的列 j 的相应位置的元的积的和.)

可以看到, 阵的乘法跟阵的加法比, 是有较大的区别的. 首先, 加法要求二个阵的尺寸相同, 而乘法要求第 1 个阵的列数等于第 2 个阵的行数. 其次, 阵的加法的定义用到的只不过是数的加法, 而阵的乘法的定义要同时用到数的加法与乘法.

阵的积, 不像数的积那样, 有可能是不可换的. 具体地, 设 A, B 分别是 $m\times s$ 与 $s\times n$ 阵. 根据定义, AB 是有意义的. 但是, BA 无意义, 除非 $n=m$. 这还只是一方面. 另一方面, 就算 $n=m$, AB 跟 BA 的尺寸也不一样, 除非 $m=s=n$. 最后, 就算 $m=s=n$, AB 也可以不等于 BA.

例 1.67 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

根据定义,

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 9+5\cdot 4 & 2\cdot 6+5\cdot 8 \\ 3\cdot 9+7\cdot 4 & 3\cdot 6+7\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 52 \\ 55 & 74 \end{bmatrix},$$
$$BA = \begin{bmatrix} 9\cdot 2+6\cdot 3 & 9\cdot 5+6\cdot 7 \\ 4\cdot 2+8\cdot 3 & 4\cdot 5+8\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 87 \\ 32 & 76 \end{bmatrix}.$$

所以, 即使 AB, BA 都是 2 级阵, 它们也不相等.

我们知道, 若 a, b 是二个非零的数, 那么 $ab \neq 0$. 但是, 对二个阵 A, B, 即使 $A \neq 0$, $B \neq 0$, 仍有可能 $AB = 0$ (此处的 0 是**零阵**, 即元全为零的阵).

例 1.68 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定义,

$$AB = \begin{bmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 1 \\ 1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

阵的积跟数的积虽有不同的地方, 但, 更重要地, 也有相同的 (或类似的) 地方.

定理 1.69 设 A, B, C 分别是 $m\times s$, $s\times n$, $n\times p$ 阵. 设 D 是 $m\times s$ 阵, 设 G 是 $s\times n$ 阵. 设 x 是数. 则:

(1) (结合律) $(AB)C = A(BC)$;

(2) (分配律 1) $(A+D)B = AB + DB$;

(3) (分配律 2) $A(B+G) = AB + AG$;

(4) (单位阵的作用) $I_m A = A = A I_s$, 其中 I_m, I_s 分别是 m, s 级单位阵;

(5) (阵的数乘与乘法) $(xA)B = x(AB) = A(xB)$.

证 (1) 注意到 AB 是 $m\times n$ 阵, 故 $(AB)C$ 是 $m\times p$ 阵; 注意到 BC 是 $s\times p$ 阵, 故 $A(BC)$ 也是 $m\times p$ 阵. 根据阵的积的定义,

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{n}[AB]_{i,\ell}[C]_{\ell,j}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{s}[A]_{i,k}[B]_{k,\ell}\right)[C]_{\ell,j}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}[A]_{i,k}[B]_{k,\ell}[C]_{\ell,j}\\
&= \sum_{k=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,\ell}[C]_{\ell,j}\\
&= \sum_{k=1}^{s}[A]_{i,k}\left(\sum_{\ell=1}^{n}[B]_{k,\ell}[C]_{\ell,j}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{s}[A]_{i,k}[BC]_{k,j}\\
&= [A(BC)]_{i,j}.
\end{aligned}$$

(2) 您还是要先说明, 等式二侧的阵的尺寸都是 $m\times n$ (我留此为您的习题). 根据阵的和与积的定义,

$$\begin{aligned}
[(A+D)B]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{s}[A+D]_{i,k}[B]_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{s}([A]_{i,k}+[D]_{i,k})[B]_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{s}([A]_{i,k}[B]_{k,j}+[D]_{i,k}[B]_{k,j})\\
&= \sum_{k=1}^{s}[A]_{i,k}[B]_{k,j}+\sum_{k=1}^{s}[D]_{i,k}[B]_{k,j}\\
&= [AB]_{i,j}+[DB]_{i,j}\\
&= [AB+DB]_{i,j}.
\end{aligned}$$

(3) 这跟分配律 1 的论证完全类似; 我留此为您的习题.

(4) 先证 $I_m A = A$. 您还是要先说明, 等式二侧的阵的尺寸都是 $m \times s$ (我留此为您的习题). 回想, 单位阵 I 的 (i, j)-元是 $\delta(i, j)$; 具体地, $i = j$ 时, 它是 1, 而 $i \neq j$ 时, 它是 0. 根据阵的积的定义,

$$
\begin{aligned}
[I_m A]_{i,j} &= \sum_{u=1}^{m} [I_m]_{i,u} [A]_{u,j} \\
&= \sum_{u=1}^{m} \delta(i, u)\, [A]_{u,j} \\
&= \delta(i, i)\, [A]_{i,j} + \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant m \\ u \neq i}} \delta(i, u)\, [A]_{u,j} \\
&= 1\, [A]_{i,j} + \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant m \\ u \neq i}} 0\, [A]_{u,j} \\
&= [A]_{i,j}.
\end{aligned}
$$

请允许我留另一半为您的习题.

(5) 先证 $(xA)B = x(AB)$. 您还是要先说明, 等式二侧的阵的尺寸都是 $m \times n$ (我留此为您的习题). 根据阵的数乘与阵的积的定义,

$$
\begin{aligned}
[(xA)B]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{s} [xA]_{i,k} [B]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{s} x [A]_{i,k} [B]_{k,j} \\
&= x \sum_{k=1}^{s} [A]_{i,k} [B]_{k,j} \\
&= x [AB]_{i,j} \\
&= [x(AB)]_{i,j}.
\end{aligned}
$$

请允许我留另一半为您的习题.　证毕.

以后, 我们可简单地写 $(AB)C$ 或 $A(BC)$ 为 ABC, 也可简单地写 $x(AB)$, $(xA)B$, $A(xB)$ 为 xAB (当然, x 是一个数).

我以二个重要的事实结束本节.

定理 1.70 设 B 是 $s\times m$ 阵. 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 A 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (于是, 我们可写 $A=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$). 则

$$BA=[Ba_1, Ba_2, \cdots, Ba_n].$$

证 记 $C=[Ba_1, Ba_2, \cdots, Ba_n]$. 每一个 Ba_j 都是 $s\times 1$ 阵, 故 C 是 $s\times n$ 阵. 当然, BA 也是 $s\times n$ 阵. 根据阵的积的定义,

$$\begin{aligned}[C]_{i,j} &= [Ba_j]_{i,1}\\ &= \sum_{k=1}^{m}[B]_{i,k}[a_j]_{k,1}\\ &= \sum_{k=1}^{m}[B]_{i,k}[A]_{k,j}\\ &= [BA]_{i,j}.\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.71 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 A 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (于是, 我们可写 $A=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$). 设 X 是一个 $n\times 1$ 阵. 则

$$AX=[X]_{1,1}a_1+[X]_{2,1}a_2+\cdots+[X]_{n,1}a_n.$$

证 AX 自然是一个 $m\times 1$ 阵. 不难看出, 待证等式的右侧也是 $m\times 1$ 阵. 根据阵的积、和、数乘的定义,

$$\begin{aligned}[AX]_{i,1} &= \sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[X]_{k,1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}[a_k]_{i,1}[X]_{k,1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}[[X]_{k,1}a_k]_{i,1}\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}[X]_{k,1}a_k\right]_{i,1}.\end{aligned}$$

证毕.

1.18 Binet–Cauchy 公式 (青春版)

设 A, B 都是 n 级阵. 那么, BA 当然也是 n 级阵. A, B, BA 都是 n 级阵, 故, 它们都有行列式.

本节, 我们学习三者的行列式的关系.

定理 1.72 (Binet–Cauchy 公式, 青春版) 设 A, B 都是 n 级阵. 则

$$\det(BA) = \det(B)\det(A).$$

我用一个例助您理解, 此定理在说什么.

例 1.73 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

不难算出

$$AB = \begin{bmatrix} 38 & 52 \\ 55 & 74 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 36 & 87 \\ 32 & 76 \end{bmatrix}.$$

可以看到, $AB \neq BA$.

不过, $\det(AB) = \det(BA)$. 一方面, 我们可直接验证:

$$\det(AB) = 38 \cdot 74 - 55 \cdot 52 = -48,$$
$$\det(BA) = 36 \cdot 76 - 32 \cdot 87 = -48.$$

另一方面, Binet–Cauchy 公式 (青春版) 指出,

$$\begin{aligned} \det(AB) = {} & \det(A)\det(B) \\ = {} & \det(B)\det(A) \\ = {} & \det(BA). \end{aligned}$$

毕竟, 数的乘法是可换的.

证　考虑定义在全体 n 级阵上的函数 $f(C) = \det(BC)$, 其中 $C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$ 是 n 级阵.

(1) f 是多线性的. 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 c_1, $\cdots$, c_{j-1}, c_{j+1}, $\cdots$, c_n, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}
& f([\cdots, c_{j-1}, sx+ty, c_{j+1}, \cdots]) \\
= & \det[\cdots, Bc_{j-1}, B(sx+ty), Bc_{j+1}, \cdots] \\
= & \det[\cdots, Bc_{j-1}, sBx+tBy, Bc_{j+1}, \cdots] \\
= & s\det[\cdots, Bc_{j-1}, Bx, Bc_{j+1}, \cdots] + t\det[\cdots, Bc_{j-1}, By, Bc_{j+1}, \cdots] \\
= & sf([\cdots, c_{j-1}, x, c_{j+1}, \cdots]) + tf([\cdots, c_{j-1}, y, c_{j+1}, \cdots]).
\end{aligned}$$

我们用到了阵的运算律与行列式的多线性.

(2) f 是交错性的. 因为若 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 中有二个相等, 则 Bc_1, Bc_2, $\cdots$, Bc_n 中也有二个相等. 再利用行列式的交错性, $f(C) = \det(BC) = 0$.

所以, 对任何 n 级阵 A, $f(A) = f(I)\det(A)$. 注意到 $BI = B$, 故

$$\det(BA) = f(A) = f(I)\det(A) = \det(B)\det(A).$$

证毕.

或许, (方) 阵的行列式与阵的积的定义都是较复杂的 (跟阵的转置、加、减、数乘等对比). 但是, Binet–Cauchy 公式 (的青春版) 给出了一个联系: 二个同级的方阵的积的行列式等于这二个阵的行列式的积.

1.19 按一列 (行) 展开行列式的公式的变体

首先, 我们回想, 我们是可, 按任何一列, 也可按任何一行, 展开一个阵的行列式的:

定理 1.27 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 j 为整数, 且 $1 \leqslant j \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

定理 1.56 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 i 为整数, 且 $1 \leqslant i \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

或许, 您还记得约定: 当 A 是 1 级阵时, 形如 $A(1|1)$ 的记号表示 “0 级阵”, 且 “0 级阵” 的行列式为 1. 此约定可使我们较简单地写公式.

若我们改变公式的几个文字, 则可得到不一样的结果:

定理 1.74 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 k, j 都是不超过 n 的正整数, 且 $k \neq j$. 则

$$\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+k} [A]_{\ell,j} \det(A(\ell|k)) = 0.$$

类似地, 若 i, k 都是不超过 n 的正整数, 且 $i \neq k$, 则

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} [A]_{i,s} \det(A(k|s)) = 0.$$

我用一个例助您理解, 此定理在说什么.

例 1.75 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

不难算出,

$$\begin{aligned}\det(A(1|1)) &= 6\cdot 8-4\cdot 7=20,\\ \det(A(2|1)) &= 5\cdot 8-4\cdot 9=4,\\ \det(A(3|1)) &= 5\cdot 7-6\cdot 9=-19.\end{aligned}$$

那么, 这个定理说, 当 $j=2$ 或 $j=3$ 时,

$$\begin{aligned}&(-1)^{1+1}[A]_{1,j}\det(A(1|1))+(-1)^{2+1}[A]_{2,j}\det(A(2|1))\\ &+(-1)^{3+1}[A]_{3,j}\det(A(3|1))=0,\end{aligned}$$

即

$$20\,[A]_{1,j}-4\,[A]_{2,j}-19\,[A]_{3,j}=0.$$

我们用较直接的方法验证此事. 取 $j=2$, 有

$$20\cdot 5-4\cdot 6-19\cdot 4=100-24-76=0.$$

取 $j=3$, 有

$$20\cdot 9-4\cdot 7-19\cdot 8=180-28-152=0.$$

证 我证式 1, 您证式 2.

取 n 个数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$. 我们作 n 级阵 $\boldsymbol{B}$, 其中

$$[B]_{\ell,s}=\begin{cases}[A]_{\ell,s}, & s\neq k;\\ z_\ell, & s=k.\end{cases}$$

(通俗地, $\boldsymbol{B}$ 的列 s 等于 A 的列 s ($s\neq k$), 而 $\boldsymbol{B}$ 的列 k 的元分别是 $z_1, z_2, \cdots, z_n$.) 由此可见, $\boldsymbol{B}(\ell|k)=A(\ell|k)$ ($\ell=1, 2, \cdots, n$). 所以

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell+k}[B]_{\ell,k}\det(B(\ell|k))\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell+k}z_\ell\det(A(\ell|k)).\end{aligned}$$

注意看. 现在, 特别地, 我们取 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 $[A]_{1,j}, [A]_{2,j}, \cdots, [A]_{n,j}$. 此时, B 有相同的二列 (B 的列 j 即为 B 的列 k, 并注意到 $k \neq j$). 所以 $\det(B) = 0$. 故

$$\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+k}[A]_{\ell,j} \det(A(\ell|k)) = 0.$$

证毕.

利用 δ-记号, 有 (我留此事的论证为您的习题):

定理 1.76　设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 若 k, j 都是不超过 n 的正整数, 则

$$\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+k} \det(A(\ell|k))\,[A]_{\ell,j} = \det(A)\,\delta(k,j).$$

类似地, 若 i, k 都是不超过 n 的正整数, 则

$$\sum_{s=1}^{n} [A]_{i,s}(-1)^{k+s} \det(A(k|s)) = \det(A)\,\delta(i,k).$$

您可能注意到, 我用数的乘法的结合律与交换律改写了公式. 为什么?

定义 1.77 (古伴)　设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的**古伴** (或者, **古典伴随阵**) 为 n 级阵 $\operatorname{adj}(A)$, 其中, 对任何不超过 n 的正整数 i, j,

$$[\operatorname{adj}(A)]_{i,j} = (-1)^{j+i} \det(A(j|i))$$

(注意等式右侧的 i, j 的次序).

有一件小事值得一提. 根据约定, 一个 1 级阵的古伴就是 [1], 也就是 1 级单位阵.

例 1.78　设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

我们计算 A 的古伴 $\operatorname{adj}(A)$. 根据定义, 我们要计算 9 个 2 级阵的行列式:

$$\begin{aligned}
\det(A(1|1)) &= 6\cdot 8-4\cdot 7=20,\\
\det(A(1|2)) &= 2\cdot 8-3\cdot 7=-5,\\
\det(A(1|3)) &= 2\cdot 4-3\cdot 6=-10,\\
\det(A(2|1)) &= 5\cdot 8-4\cdot 9=4,\\
\det(A(2|2)) &= 1\cdot 8-3\cdot 9=-19,\\
\det(A(2|3)) &= 1\cdot 4-3\cdot 5=-11,\\
\det(A(3|1)) &= 5\cdot 7-6\cdot 9=-19,\\
\det(A(3|2)) &= 1\cdot 7-2\cdot 9=-11,\\
\det(A(3|3)) &= 1\cdot 6-2\cdot 5=-4.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\operatorname{adj}(A)\\
&=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\det(A(1|1)) & (-1)^{2+1}\det(A(2|1)) & (-1)^{3+1}\det(A(3|1))\\ (-1)^{1+2}\det(A(1|2)) & (-1)^{2+2}\det(A(2|2)) & (-1)^{3+2}\det(A(3|2))\\ (-1)^{1+3}\det(A(1|3)) & (-1)^{2+3}\det(A(2|3)) & (-1)^{3+3}\det(A(3|3))\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}+\det(A(1|1)) & -\det(A(2|1)) & +\det(A(3|1))\\ -\det(A(1|2)) & +\det(A(2|2)) & -\det(A(3|2))\\ +\det(A(1|3)) & -\det(A(2|3)) & +\det(A(3|3))\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}20 & -4 & -19\\ 5 & -19 & 11\\ -10 & 11 & -4\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

定理 1.79 设 A 是 n 级阵 $(n\geqslant 1)$. 设 $\operatorname{adj}(A)$ 为其古伴. 则

$$\operatorname{adj}(A)\,A=\det(A)\,I=A\operatorname{adj}(A).$$

证 首先, 二个等式的左右二侧都是 n 级阵.

由上个定理 (的前半部分),

$$\begin{aligned}
[\operatorname{adj}(A)\,A]_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{n}[\operatorname{adj}(A)]_{i,\ell}[A]_{\ell,j}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell+i}\det(A(\ell|i))\,[A]_{\ell,j}\\
&= \det(A)\,\delta(i,j)\\
&= \det(A)\,[I]_{i,j}\\
&= [\det(A)\,I]_{i,j}.
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
[A\operatorname{adj}(A)]_{i,j} &= \sum_{s=1}^{n}[A]_{i,s}[\operatorname{adj}(A)]_{s,j}\\
&= \sum_{s=1}^{n}[A]_{i,s}(-1)^{j+s}\det(A(j|s))\\
&= \det(A)\,\delta(i,j)\\
&= \det(A)\,[I]_{i,j}\\
&= [\det(A)\,I]_{i,j}.
\end{aligned}$$

证毕.

例 1.80 设

$$A=\begin{bmatrix}1&5&9\\2&6&7\\3&4&8\end{bmatrix}.$$

我们知道, A 的行列式是 -45. 我们还知道, A 的古伴

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}20&-4&-19\\5&-19&11\\-10&11&-4\end{bmatrix}.$$

可以验证

$$\operatorname{adj}(A)\,A=-45I=A\operatorname{adj}(A).$$

设 A 是 n 级阵, 且其行列式 $\det(A) \neq 0$. 作 n 级阵

$$B = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

从而

$$\begin{aligned} BA &= \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\right) A \\ &= \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{adj}(A)\, A) \\ &= \frac{1}{\det(A)} (\det(A)\, I) \\ &= \left(\frac{1}{\det(A)} \det(A)\right) I \\ &= 1 I \\ &= I. \end{aligned}$$

类似地, 可知 $AB = I$. 所以, 我们有

定理 1.81　设 A 是 n 级阵 $(n \geqslant 1)$. 若 $\det(A) \neq 0$, 则存在 n 级阵 B 使

$$BA = I = AB.$$

反之, 若有 n 级阵 B 使 $BA = I = AB$, 则, 因为二个同级的方阵的积的行列式等于这二个阵的行列式的积,

$$1 = \det(I) = \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

从而 $\det(A) \neq 0$.

我们熟知, 任取不等于 0 的数 a, 必有一个数 b 使 $ba = 1 = ab$; 反过来, 若 $ba = 1 = ab$, 则 $a \neq 0$. 这么看来, 行列式非零的阵跟非零的数 “像”; 甚至, 特别地, 行列式非零的 1 级阵就是非零的数.

1.20 线性方程组

在接下来的若干节里, 我想用行列式讨论线性方程组的解. 这是行列式的一个应用. 或许, 您可以在这些讨论里体会到, “行列式是一个**工具**” “行列式是方阵的一个**属性**” 的意思.

本节, 我们学习一些基本的概念.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个常数, c 是常数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个未知数. 我们说, 形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + c$$

的式是一个 **n 元 $\leqslant 1$ 次式**. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有一个数不为零, 我们说, 这个式是一个 **n 元 1 次式**. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为零, 那么, 这个式就是一个常数.

形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + c = 0$$

的方程是一个 **n 元 $\leqslant 1$ 次方程**. 不过, 习惯地, 我们移常数项 c 到等式的右侧. 也就是说, 形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程也是一个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程, 其中 b 就是常数 $-c$. 若我们不想强调未知数之数 n, 我们说, 这是一个 **$\leqslant 1$ 次方程**; 我们也可说, 这是一个**线性方程**.

由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组, 是形如

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

的方程组, 其中 $a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n}, a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{2,n}, \cdots, a_{m,1}, a_{m,2}, \cdots, a_{m,n}, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 是事先指定的 $mn + m$ 个数, 而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是未知数. 若我们不想强调方程数 m, 我们可说, 这是一个 **n 元 $\leqslant 1$ 次方程组**; 若我们不想强调未

知数之数 n, 我们可说, 这是一个**由 m 个 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组**. 既然 $\leqslant 1$ 次方程的另一个名字是线性方程, 我们也可说, 这是一个**线性方程组**.

若数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 适合

$$\begin{aligned} a_{1,1}c_1 + a_{1,2}c_2 + \cdots + a_{1,n}c_n &= b_1, \\ a_{2,1}c_1 + a_{2,2}c_2 + \cdots + a_{2,n}c_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \\ a_{m,1}c_1 + a_{m,2}c_2 + \cdots + a_{m,n}c_n &= b_m, \end{aligned}$$

我们说, $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是此方程组的一个**解**. 有时, 我们也说, 形如 $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\cdots$, $x_n = c_n$ 的 n 个等式 (的联合) 是此方程组的一个解.

若 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, 且 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是此方程组的一个解, 我们说, 这是此方程组的**零解**. 若 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为零, 且 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是此方程组的一个解, 我们说, 这是此方程组的一个**非零解**.

例 1.82 假定有若干只鸡与若干只兔被关在某处. 假定每一只鸡有 1 个头与 2 只腿; 假定每一只兔有 1 个头与 4 只腿. 假定, 我们知道, 这些鸡与兔一共有 35 个头与 94 只腿. 我们能由此算出鸡与兔的数目吗?

我们代数地思考此事. 设有 x_1 只鸡, 有 x_2 只兔. 那么, 这些鸡与兔一共有 $x_1 + x_2$ 个头, 与 $2x_1 + 4x_2$ 只腿. 注意到, 这二个式都是 2 元 $\leqslant 1$ 次式. 我们可列出由 2 个 2 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35, \\ 2x_1 + 4x_2 = 94. \end{cases}$$

接下来的问题, 就是解这个方程组. 不过, 此例的目的是使您熟悉概念. 我想之后讲如何解这个方程组.

可以验证, $(23, 12)$ 是此方程组的一个解: 因为 $23 + 12 = 35$, 且 $2 \cdot 23 + 4 \cdot 12 = 94$. 因为 23, 12 里有一个数不是零, 故 $(23, 12)$ 是此方程组的一个非零解. 我们也可说, $x_1 = 23$, $x_2 = 12$ 是此方程组的一个 (非零) 解.

不过, $(12, 23)$ 不是此方程组的一个解: 虽然 $12 + 23 = 35$, 但是 $2 \cdot 12 + 4 \cdot 23 = 116 \neq 94$.

例 1.83　考虑由 2 个 3 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

可以验证, 对每一个数 k, $(k, -2k, k)$ 是此方程组的一个解:

$$\begin{aligned} k + 2(-2k) + 3k &= k - 4k + 3k = 0, \\ 4k + 5(-2k) + 6k &= 4k - 10k + 6k = 0. \end{aligned}$$

当 $k = 0$ 时, 这是零解; 当 $k \neq 0$ 时, 因为 $k, -2k, k$ 里有一个数 k 不是零, 故这是一个非零解.

我们也可说, $x_1 = k, x_2 = -2k, x_3 = k$ 是此方程组的一个解.

利用阵的积, 我们可简单地写一个线性方程组. 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

则, 对不超过 m 的正整数 i,

$$\begin{aligned} [B]_{i,1} &= b_i \\ &= a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \\ &= [A]_{i,1}[X]_{1,1} + [A]_{i,2}[X]_{2,1} + \cdots + [A]_{i,n}[X]_{n,1} \\ &= [AX]_{i,1}. \end{aligned}$$

注意到 AX 的尺寸也是 $m \times 1$, 故

$$AX = B.$$

所以, 我们也说形如 $AX = B$ 的阵等式 (X 的元是未知数, X 是恰有 1 列的阵) 是一个线性方程组. 相应地, 若 $n \times 1$ 阵 C (其元跟 X 的元相比, 自然都是已知数) 适合 $AC = B$, 我们说, C 是此方程组的一个解; 若 $C = 0$ (也就是说, C 的每一个元都是零) 是此方程组的一个解, 我们说, C 是此方程组的零解; 若不等于零的 C (也就是说, C 有一个不为零的元) 是此方程组的一个解, 我们说, C 是此方程组的一个非零解.

例 1.84 我们可改写

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35, \\ 2x_1 + 4x_2 = 94. \end{cases}$$

为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix}.$$

可以验证, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix}$ 是此方程组的一个非零解: $\boldsymbol{C} \neq 0$, 且

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 23 + 1 \cdot 12 \\ 2 \cdot 23 + 4 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix}.$$

不过, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}$ 不是此方程组的一个解:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 12 + 1 \cdot 23 \\ 2 \cdot 12 + 4 \cdot 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 116 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix}.$$

例 1.85 我们可改写

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

可以验证, 对每一个数 k, $C = k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 是此方程组的一个解:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\left(k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)&=k\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)\\&=k\begin{bmatrix}1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot1\\4\cdot1+5\cdot(-2)+6\cdot1\end{bmatrix}\\&=k\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

当 $k=0$ 时, 它是零解; 当 $k\neq 0$ 时, 它是一个非零解.

最后, 有一件小事值得一提. 前面, 我们写一个由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组为阵等式. 反过来, 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times 1$ 阵, $\boldsymbol{X}$ 是未知的 $n\times 1$ 阵. 那么, 我们也可还原形如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的阵等式为由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组. 比如, 我们可写

$$\begin{bmatrix}2&3&-5&7&0\\0&1&11&13&-17\\4&-6&8&-9&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$$

为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3+7x_4=7,\\x_2+11x_3+13x_4-17x_5=8,\\4x_1-6x_2+8x_3-9x_4+12x_5=9.\end{cases}$$

(注意到, 我们未写系数为 0 的项.)

1.21 由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (1)

在上节, 我们学习了线性方程组的一些基本的概念. 并且, 我们知道, 可用阵等式简单地写一个线性方程组 (或者说, 形如 $AX = B$ 的阵等式就是一个线性方程组).

从本节起, 我们讨论由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组. 用阵等式表示这种方程组, 就是 $AX = B$, 其中 A 是 n 级阵, B 是 $n \times 1$ 阵, X 是未知的 $n \times 1$ 阵. A 是方阵, 故它有行列式. $AX = B$ 的解跟 A 的行列式是否有关系? 此事的回答是 “是”. 本节, 我们讨论一种特别的情形.

定理 1.86 (Cramer 公式, 1) 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 B 是 $n \times 1$ 阵. 设 X 是未知的 $n \times 1$ 阵. 若 $\det(A) \neq 0$, 则线性方程组 $AX = B$ 有唯一的解

$$X = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\, B.$$

在论证此事前, 我想用一个简单的例助您理解它.

例 1.87 设 a, b 是常数. 一个 1 元 $\leqslant 1$ 次方程 $ax = b$ 当然也是一个线性方程组: 这是方程数为 1 时的特别情形. 我们在中学就知道, 当 $a \neq 0$ 时, $ax = b$ 有唯一的解 $x = \frac{1}{a} b$. 一方面, $x = \frac{1}{a} b$ 是一个解:

$$a\left(\frac{1}{a} b\right) = \left(a \frac{1}{a}\right) b = 1b = b.$$

另一方面, 若数 y 也适合 $ay = b$, 则

$$y = 1y = \left(\frac{1}{a} a\right) y = \frac{1}{a}(ay) = \frac{1}{a} b.$$

我们说, 此事是 Cramer 公式的一个特例. 首先, 我们可写 $ax = b$ 为阵等式 $[a]\,[x] = [b]$. (注意到, $[a], [x], [b]$ 都是 1 级阵.) Cramer 公式说, 若 $\det[a] \neq 0$, 则 $[a]\,[x] = [b]$ 有唯一的解 (注意, 1 级阵的古伴是 $[1]$)

$$[x] = \frac{1}{\det[a]} \operatorname{adj}([a])\, [b] = \frac{1}{a} [1]\, [b] = \frac{1}{a} [b] = \left[\frac{1}{a} b\right].$$

这跟我们已知的结论是一样的.

证 我们先验证 $C = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\, B$ 适合 $AC = B$:

$$\begin{aligned} AC &= A\Big(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\, B\Big) \\ &= \frac{1}{\det(A)}(A \operatorname{adj}(A)\, B) \\ &= \frac{1}{\det(A)}(\det(A)\, I_n B) \\ &= B. \end{aligned}$$

我们再证 $AX = B$ 至多有一个解. 设 $n \times 1$ 阵 D 也适合 $AD = B$. 则

$$\begin{aligned} D &= I_n D \\ &= \Big(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\, A\Big) D \\ &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\,(AD) \\ &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\, B \\ &= C. \end{aligned}$$

证毕.

例 1.88 考虑线性方程组 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix}.$$

不难算出

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 2 \neq 0,$$

所以, 此方程组有唯一的解

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\, B \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \cdot 35 - 1 \cdot 94 \\ -2 \cdot 35 + 1 \cdot 94 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 46 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

我们可进一步地改写 Cramer 公式. 我们先具体地算出 $\mathrm{adj}\,(A)\,B$ 的每一个元:

$$\begin{aligned}[\mathrm{adj}\,(A)\,B]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [\mathrm{adj}\,(A)]_{i,\ell}[B]_{\ell,1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+i} \det\,(A(\ell|i))\,[B]_{\ell,1}.\end{aligned}$$

设 $A\{i,B\}$ 是以 B 代阵 A 的列 i 后所得的阵, 即

$$[A\{i,B\}]_{\ell,k} = \begin{cases}[A]_{\ell,k}, & k \neq i; \\ [B]_{\ell,1}, & k = i.\end{cases}$$

由此可见, $A(\ell|i) = (A\{i,B\})(\ell|i)$ $(\ell = 1, 2, \cdots, n)$. 所以

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+i} \det\,(A(\ell|i))\,[B]_{\ell,1} \\ =\ &\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+i} \det\,((A\{i,B\})(\ell|i))\,[A\{i,B\}]_{\ell,1} \\ =\ &\det\,(A\{i,B\}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}[X]_{i,1} &= \left[\frac{1}{\det\,(A)}\,\mathrm{adj}\,(A)\,B\right]_{i,1} \\ &= \frac{1}{\det\,(A)}[\mathrm{adj}\,(A)\,B]_{i,1} \\ &= \frac{1}{\det\,(A)}\det\,(A\{i,B\}) \\ &= \frac{\det\,(A\{i,B\})}{\det\,(A)}.\end{aligned}$$

由此, 我们得到 Cramer 公式的另一个形式:

定理 1.89 (Cramer 公式, 2) 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases}$$

(注意, 方程数等于未知数之数.) 记

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

若 $\det(A) \neq 0$, 则此线性方程组有唯一的解

$$x_i = \frac{\det(A\{i, B\})}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $A\{i, B\}$ 是以 B 代阵 A 的列 i 后所得的阵.

例 1.90 考虑由 2 个 2 元 ⩽1 次方程作成的方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2. \end{cases}$$

根据 Cramer 公式, 若 $d = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0$, 则此方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{bmatrix}}{d} = \frac{b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}}{d},$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{bmatrix}}{d} = \frac{a_{1,1}b_2 - a_{2,1}b_1}{d}.$$

例 1.91 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35, \\ 2x_1 + 4x_2 = 94. \end{cases}$$

因为 $d = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$, 故, 由上个例, 此方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{35 \cdot 4 - 94 \cdot 1}{2} = 23,$$
$$x_2 = \frac{1 \cdot 94 - 2 \cdot 35}{2} = 12.$$

一般地, Cramer 公式, 只是一个理论的公式. 这是因为, 一般地, 计算行列式是较复杂的事 (或许, 您还记得, 3 级阵的行列式的较具体的公式含 6 项, 而 4 级阵的行列式的较具体的公式含 24 项). 所以, 我们一般用别的方法 (如代入消元法、加减消元法等) 解线性方程组.

还是以

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35, \\ 2x_1 + 4x_2 = 94 \end{cases}$$

为例. 由方程 1, 有 $x_1 = 35 - x_2$. 代入其到方程 2, 有 $2(35 - x_2) + 4x_2 = 94$, 即 $2x_2 = 24$. 由此可知 $x_2 = 12$. 代入其到 $x_1 = 35 - x_2$, 有 $x_1 = 23$. 最后, 经验证, $(23, 12)$ 的确是此方程组的一个解.

1.22 由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (2)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

在上节, 我们**定量地**研究了由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组的解. 具体地, 当 n 级阵 A 的行列式不为零时, 我们用行列式写出了 $AX = B$ 的唯一的解, 其中 B 是 $n \times 1$ 阵, X 是未知的 $n \times 1$ 阵. 但是, 若 $\det(A) = 0$, 则 Cramer 公式不可用 (因为分母不可为零). 其实, 当 $\det(A) = 0$ 时, $AX = B$ 是否有解是一个较复杂的问题.

例 1.92 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix},$$

其中 b 是常数. 不难算出, $\det(A) = 0$. 当 b 取某些数时, 我们讨论 $AX = B$ 的解.

当 $b = -1$ 时, 此方程组有解:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = B.$$

进一步地, $AX = B$ 的解不唯一. 不难算出,

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = B,$$

且 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

当 $b = 0$ 时, 此方程组无解. 用反证法. 反设 $A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = B$, 即

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 1, \\ -y_1 - y_2 &= 0. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}1+0 &= (y_1+y_2)+(-y_1-y_2)\\ &= (y_1-y_1)+(y_2-y_2)=0.\end{aligned}$$

这是矛盾.

从本节开始, 我们**定性地**研究由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组的解. 具体地, 我们主要讨论解的性质, 而不是解的公式.

根据 Cramer 公式, 我们不难得到如下事实:

定理 1.93 设 A 是 n 级阵. 设 $\det(A)\neq 0$. 那么, 对任何的 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{B}$, 存在一个 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $A\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$. (换句话说, 若存在某 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{B}$, 使对任何的 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{C}$, 必 $A\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{B}$, 则 $\det(A)=0$.)

重要地, 此事反过来也对.

定理 1.94 设 A 是 n 级阵. 设对任何的 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{B}$, 存在一个 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $A\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$. 则 $\det(A)\neq 0$. (换句话说, 若 $\det(A)=0$, 则存在某 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{B}$, 使对任何的 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{C}$, 必 $A\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{B}$.)

证 设 n 级单位阵 $\boldsymbol{I}$ 的列 1, 2, $\cdots$, n 分别是 e_1, e_2, $\cdots$, e_n. 那么, 每一个 e_i 都是 $n\times 1$ 阵. 根据假定, 存在一个 $n\times 1$ 阵 f_i 使 $Af_i=e_i$. 作 n 级阵 $\boldsymbol{F}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]$. 则

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{F} &= A\,[f_1,f_2,\cdots,f_n]\\ &= [Af_1,Af_2,\cdots,Af_n]\\ &= [e_1,e_2,\cdots,e_n]\\ &= \boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

因为二个同级的方阵的积的行列式等于这二个阵的行列式的积,

$$1=\det(\boldsymbol{I})=\det(A)\det(\boldsymbol{F}).$$

从而 $\det(A)\neq 0$. 证毕.

1.23 由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (3)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

我们进一步地**定性地**研究由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组的解.

前面, 我们知道, 若 n 级阵 A 的行列式为零, 则存在某 $n \times 1$ 阵 B, 使线性方程组 $AX = B$ 无解. 当然, 对某些 B, $AX = B$ 还是有解的: 取 $B = 0$, 则 $AX = B$ 至少有一个解 $X = 0$ (0 是元全为零的 $n \times 1$ 阵).

本节, 我们研究, 若 $AX = B$ 有解, 则它是否有唯一的解.

我们先看一个较简单的事实.

定理 1.95 设 A 是 n 级阵. 设 B 是 $n \times 1$ 阵. 设 $n \times 1$ 阵 C 适合 $AC = B$.
(1) 若 $AX = 0$ 只有零解, 则 $AX = B$ 的解唯一;
(2) 若存在非零的 $n \times 1$ 阵 D 使 $AD = 0$, 则 $AX = B$ 的解不唯一.

证 (1) 设 $n \times 1$ 阵 Y 适合 $AY = B$. 则

$$A(Y - C) = AY - AC = B - B = 0.$$

故 $Y - C$ 是 $AX = 0$ 的一个解. 因为 $AX = 0$ 只有零解, 故 $Y - C = 0$. 从而 $Y = C$.

(2) 因为 $D \neq 0$, 故 $C + D \neq C$. 因为 $A(C + D) = AC + AD = B + 0 = B$, 且 $C + D \neq C$, 故 $AX = B$ 的解不唯一. 证毕.

由此可见, 若 $AX = 0$ 有非零解, 则 $AX = B$ 有解时, 其解不唯一. 若 $AX = 0$ 只有零解, 则 $AX = B$ 有解时, 其解唯一.

根据 Cramer 公式, 我们不难得到如下事实:

定理 1.96 设 A 是 n 级阵. 设 $AX = 0$ 有非零解. 则 $\det(A) = 0$. (换句话说, 若 $\det(A) \neq 0$, 则 $AX = 0$ 只有零解.)

重要地, 此事反过来也对.

定理 1.97 设 A 是 n 级阵. 设 $\det(A) = 0$. 则 $AX = 0$ 有非零解. (换句话说, 若 $AX = 0$ 只有零解, 则 $\det(A) \neq 0$.)

为说话方便, 我要引入一个小概念. 说阵 Z 是 A 的一个 p **级子阵**, 就是说, Z 是 A 的一个子阵 (见本章, 节 5), 且 Z 是一个 p 级阵.

在论证此事前, 我想用三个例助您理解此事为什么是正确的.

例 1.98　设 A 是一个 5 级阵, 且 $A = 0$. 那么, 我们任取一个非零的 5×1 阵 S, 必有 $AS = 0$.

例 1.99　设 A 是一个 5 级阵, 且 $\det(A) = 0$, 但 $A \neq 0$.

我们知道, $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I$, 其中 $\operatorname{adj}(A)$ 是 A 的古伴, I 是 5 级单位阵. 因为 $\det(A) = 0$, 故 $A \operatorname{adj}(A) = 0$.

若 $\operatorname{adj}(A) \neq 0$, 则存在 k, v, 使 $[\operatorname{adj}(A)]_{k,v} \neq 0$. 我们设 $\operatorname{adj}(A)$ 的列 v 是 Y. 那么, $[Y]_{k,1} = [\operatorname{adj}(A)]_{k,v} \neq 0$, 从而 $Y \neq 0$. 我们证明 $AY = 0$:

$$\begin{aligned}
[AY]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{5} [A]_{i,\ell}[Y]_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{5} [A]_{i,\ell}[\operatorname{adj}(A)]_{\ell,v} \\
&= [A \operatorname{adj}(A)]_{i,v} \\
&= [0]_{i,v} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

例 1.100　仍设 A 是一个 5 级阵, 且 $\det(A) = 0$, 但 $A \neq 0$.

在上个例里, 我们假定 $\operatorname{adj}(A) \neq 0$. 可是, 它也有可能为 0, 即使 $A \neq 0$ (比如, 可以验证

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

的古伴就是 0).

现在, 我们假定 $\operatorname{adj}(A) = 0$. 此时, 我们不能利用 $\operatorname{adj}(A)$ 写出 $AX = 0$ 的非零解. 我们应如何作?

若 $\operatorname{adj}(A)=0$, 则 A 的每一个 4 级子阵的行列式都是零. 从而, 一定存在一个低于 4 的正整数 r 适合性质: **A 有一个 r 级子阵, 其行列式非零, 且 A 的每一个 $r+1$ 级子阵的行列式都是零.** (我们已知 A 的每一个 4 级子阵的行列式都是零. 我们考虑 A 的 3 级子阵. 若有一个 3 级子阵的行列式不是零, 我们就取 $r=3$. 若不然, A 的每一个 3 级子阵的行列式都是零. 我们考虑 A 的 2 级子阵. 若有一个 2 级子阵的行列式不是零, 我们就取 $r=2$. 若不然, A 的每一个 2 级子阵的行列式都是零. 我们考虑 A 的 1 级子阵. 因为 $A\neq 0$, 故 A 一定有 1 级子阵的行列式不是零. 此时, 取 $r=1$ 即可.)

我以 $r=2$ 为例演示找 $AX=0$ 的非零解的方法 (可以验证, 前面的 M 的行 1, 2 与列 1, 2 作成的 2 级子阵的行列式不是零, 但 M 的每一个 3 级子阵的行列式都是零); $r=3$ 或 $r=1$ 时的情形是类似的.

我们设 $A_2=A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 且 A 的每一个 3 级子阵的行列式都是零. 再设 $E=A\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix}$. 因为 E 是 A 的一个 3 级子阵, 故 $\det(E)=0$. 从而 $E\operatorname{adj}(E)=0$. 注意到 $[\operatorname{adj}(E)]_{3,3}=(-1)^{3+3}\det(A_2)\neq 0$. 设 $\operatorname{adj}(E)$ 的列 3 为 T. 那么 $T\neq 0$. 并且, 我们可用完全类似的方法, 证明 $ET=0$.

接下来, 我们设法由此得到一个 $AX=0$ 的非零解. 我们作一个 5×1 阵 W, 其中

$$[W]_{\ell,1}=\begin{cases}[\operatorname{adj}(E)]_{\ell,3}, & \ell\leqslant 3;\\ 0, & \ell>3.\end{cases}$$

(通俗地, 我们在 T 的最后一个元后加 2 个 0, 变 3×1 阵 T 为一个 5×1 阵 W.) 因为 $[W]_{3,1}\neq 0$, 故 $W\neq 0$. 我们证明 $AW=0$.

取不超过 5 的正整数 q. 则

$$\begin{aligned}[AW]_{q,1}&=\sum_{\ell=1}^{5}[A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1}\\&=\sum_{\ell=1}^{3}[A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1}+\sum_{\ell=4}^{5}[A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1}\\&=\sum_{\ell=1}^{3}[A]_{q,\ell}[\operatorname{adj}(E)]_{\ell,3}+\sum_{\ell=4}^{5}[A]_{q,\ell}\,0\end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} [A]_{q,\ell}[\operatorname{adj}(E)]_{\ell,3}.$$

若 $q \leqslant 3$, 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{\ell=1}^{3} [A]_{q,\ell}[\operatorname{adj}(E)]_{\ell,3} \\
&= \sum_{p=1}^{3} [E]_{q,\ell}[\operatorname{adj}(E)]_{\ell,3} \\
&= [E \operatorname{adj}(E)]_{q,3} \\
&= [0]_{q,3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

设 $q > 3$. 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{\ell=1}^{3} [A]_{q,\ell}[\operatorname{adj}(E)]_{\ell,3} \\
&= \sum_{\ell=1}^{3} [A]_{q,\ell}(-1)^{3+\ell} \det(E(3|\ell)).
\end{aligned}$$

作一个 3 级阵 C_q, 其中

$$[C_q]_{h,\ell} = \begin{cases} [E]_{h,\ell}, & h \neq 3; \\ [A]_{q,\ell}, & h = 3. \end{cases}$$

于是, $C_q(3|\ell) = E(3|\ell)$. 从而

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{\ell=1}^{3} [A]_{q,\ell}(-1)^{3+\ell} \det(E(3|\ell)) \\
&= \sum_{\ell=1}^{3} [C_q]_{3,\ell}(-1)^{3+\ell} \det(C_q(3|\ell)) \\
&= \det(C_q).
\end{aligned}$$

注意到 $C_q = A\begin{pmatrix}1,2,q\\1,2,3\end{pmatrix}$ 是 A 的一个 3 级子阵, 故

$$[AW]_{q,1} = \det(C_q) = 0.$$

综上, $AW = 0$, 且 $W \neq 0$.

下面, 我给出此事的论证. 证明分三种情形: (a) $A = 0$; (b) $A \neq 0$, 且 $\operatorname{adj}(A) \neq 0$; (c) $A \neq 0$, 且 $\operatorname{adj}(A) = 0$. 情形 (a) 最简单, 我们随便找一个非零的 $n\times 1$ 阵即可. 情形 (b) 也不难, 我们取 A 的古伴的一个非零的列即可. 情形 (c) 是最复杂的. 在上个例里, 我们假定行列式非零的子阵是由 A 的前 r 行与前 r 列作成的, 且每一个 $r+1$ 级子阵的行列式都是零 (此处 $r=2$). (通俗地, 我们假定行列式非零的子阵在左上角.) 不过, 对一般的阵来说, 行列式非零的子阵不一定在左上角, 这是论证的最大的挑战.

证　设 A 是 n 级阵, 且 $\det(A) = 0$.

若 $A = 0$, 我们任取一个非零的 $n\times 1$ 阵 S. 则 $AS = 0$.

以下, 我们假定 $A \neq 0$; 也就是说, A 有一个元不是零 (同时, 这也相当于 $n > 1$: 回想 1 级阵的行列式是什么).

我们知道, $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)\,I$, 其中 $\operatorname{adj}(A)$ 是 A 的古伴, I 是 n 级单位阵. 因为 $\det(A) = 0$, 故 $A\operatorname{adj}(A) = 0$.

若 $\operatorname{adj}(A) \neq 0$, 则存在 k, v, 使 $[\operatorname{adj}(A)]_{k,v} \neq 0$. 我们设 $\operatorname{adj}(A)$ 的列 v 是 Y. 那么, $[Y]_{k,1} = [\operatorname{adj}(A)]_{k,v} \neq 0$, 从而 $Y \neq 0$. 我们证明 $AY = 0$:

$$\begin{aligned}[AY]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[Y]_{\ell,1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[\operatorname{adj}(A)]_{\ell,v}\\ &= [A\operatorname{adj}(A)]_{i,v}\\ &= [0]_{i,v}\\ &= 0.\end{aligned}$$

若 $\operatorname{adj}(A) = 0$, 则 A 的每一个 $n-1$ 级子阵的行列式都是零 (同时, 这也相当于 $n > 2$: 回想 2 级阵的古伴是什么; 再回想前面作过的假定 $A \neq 0$). 从

而, 一定存在一个低于 $n-1$ 的正整数 r 适合性质: **A 有一个 r 级子阵, 其行列式非零, 且 A 的每一个 $r+1$ 级子阵的行列式都是零.** (我们已知 A 的每一个 $n-1$ 级子阵的行列式都是零. 我们考虑 A 的 $n-2$ 级子阵. 若有一个 $n-2$ 级子阵的行列式不是零, 我们就取 $r=n-2$. 若不然, A 的每一个 $n-2$ 级子阵的行列式都是零. 我们考虑 A 的 $n-3$ 级子阵. 若有一个 $n-3$ 级子阵的行列式不是零, 我们就取 $r=n-3$. $\cdots\cdots$ 若不然, A 的每一个 2 级子阵的行列式都是零. 我们考虑 A 的 1 级子阵. 因为 $A\neq 0$, 故 A 一定有 1 级子阵的行列式不是零. 此时, 取 $r=1$ 即可.)

我们设 A 的 r 级子阵 $A_r = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}$ 的行列式非零, 其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, 且 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. 我们从 $1, 2, \cdots, n$ 中去除 r 个整数 $i_1, i_2, \cdots, i_r$; 此时, 还剩下 $n-r$ 个整数, 我们从中选一个为 i_{r+1}. 类似地, 我们再从 $1, 2, \cdots, n$ 中去除 r 个整数 $j_1, j_2, \cdots, j_r$; 此时, 还剩下 $n-r$ 个整数, 我们从中选一个为 j_{r+1}. 作 $r+1$ 级阵 $E = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r, i_{r+1} \\ j_1, \cdots, j_r, j_{r+1} \end{pmatrix}$. 我们设 i_p 在 $i_1, \cdots, i_r, i_{r+1}$ 中是第 $f(i_p)$ 小的数. 再设 j_p 在 $j_1, \cdots, j_r, j_{r+1}$ 中是第 $g(j_p)$ 小的数. 因为 E 是 A 的一个 $r+1$ 级子阵, 故 $\det(E)=0$. 从而 $E\,\mathrm{adj}(E)=0$. 注意到 $[\mathrm{adj}(E)]_{g(j_{r+1}), f(i_{r+1})} = (-1)^{f(i_{r+1})+g(j_{r+1})}\det(A_r)\neq 0$. 设 $\mathrm{adj}(E)$ 的列 $f(i_{r+1})$ 为 $\boldsymbol{T}$. 那么 $\boldsymbol{T}\neq 0$. 并且, 我们可用完全类似的方法, 证明 $E\boldsymbol{T}=0$.

接下来, 我们设法由此得到一个 $AX=0$ 的非零解. 我们作一个 $n\times 1$ 阵 W, 其中

$$[W]_{\ell,1} = \begin{cases} [\mathrm{adj}(E)]_{g(j_p), f(i_{r+1})}, & \ell = j_p,\ p = 1, \cdots, r, r+1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(通俗地, 我们在适当的位置写零, 变 $(r+1)\times 1$ 阵 $\boldsymbol{T}$ 为一个 $n\times 1$ 阵 W.) 因为 $[W]_{j_{r+1},1}\neq 0$, 故 $W\neq 0$. 我们证明 $AW=0$.

取不超过 n 的正整数 q. 则

$$\begin{aligned} [AW]_{q,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1} \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n \\ \ell = j_p \\ 1\leqslant p\leqslant r+1}} [A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1} + \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n \\ \text{其他}}} [A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n \\ \ell=j_p \\ 1\leqslant p\leqslant r+1}} [A]_{q,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})} + \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n \\ \text{其他}}} [A]_{q,\ell}\, 0$$

$$= \sum_{p=1}^{r+1} [A]_{q,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}.$$

若 q 等于某个 i_t, 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{i_t,1} &= \sum_{p=1}^{r+1} [A]_{i_t,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})} \\
&= \sum_{p=1}^{r+1} [E]_{f(i_t),g(j_p)}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})} \\
&= [E \operatorname{adj}(E)]_{f(i_t),f(i_{r+1})} \\
&= [0]_{f(i_t),f(i_{r+1})} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

若 q 不等于 $i_1, \cdots, i_r, i_{r+1}$ 中的任何一个, 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{p=1}^{r+1} [A]_{q,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})} \\
&= \sum_{p=1}^{r+1} [A]_{q,j_p}(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_p)} \det(E(f(i_{r+1})|g(j_p))).
\end{aligned}$$

作一个 $r+1$ 级阵 C_q, 其中

$$[C_q]_{h,g(j_p)} = \begin{cases} [E]_{h,g(j_p)}, & h \neq f(i_{r+1}); \\ [A]_{q,j_p}, & h = f(i_{r+1}). \end{cases}$$

于是, $C_q(f(i_{r+1})|g(j_p)) = E(f(i_{r+1})|g(j_p))$. 从而

$$[AW]_{q,1} = \sum_{p=1}^{r+1} [A]_{q,j_p}(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_p)} \det(E(f(i_{r+1})|g(j_p)))$$

$$= \sum_{p=1}^{r+1} [C_q]_{f(i_{r+1}),g(j_p)}(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_p)} \det(C_q(f(i_{r+1})|g(j_p)))$$
$$= \det(C_q).$$

再作一个 $r+1$ 级阵 $D_q = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r, q \\ j_1, \cdots, j_r, j_{r+1} \end{pmatrix}$. 不难看出, 适当地交换 C_q 的行的次序, 即可变 C_q 为 D_q. 根据反称性, $\det(C_q) = \pm\det(D_q)$. (具体地, 设 q 在 $i_1, \cdots, i_r, q$ 中是第 u 小的数. 那么, 当 $f(i_{r+1}) = u$ 时, $C_q = D_q$. 当 $f(i_{r+1}) < u$ 时, 我们交换行 $f(i_{r+1})$ 与 $f(i_{r+1}) + 1$, 再交换行 $f(i_{r+1}) + 1$ 与 $f(i_{r+1}) + 2$, $\cdots\cdots$, 再交换行 $u-1$ 与 u, 作 $u - f(i_{r+1})$ 次相邻行的交换, 即可变 C_q 为 D_q. 当 $f(i_{r+1}) > u$ 时, 我们交换行 $f(i_{r+1})$ 与 $f(i_{r+1}) - 1$, 再交换行 $f(i_{r+1}) - 1$ 与 $f(i_{r+1}) - 2$, $\cdots\cdots$, 再交换行 $u+1$ 与 u, 作 $f(i_{r+1}) - u$ 次相邻行的交换, 即可变 C_q 为 D_q.) 因为 D_q 是 A 的一个 $r+1$ 级子阵, 故其行列式为零. 从而

$$[AW]_{q,1} = \det(C_q) = \pm\det(D_q) = 0.$$

综上, 我们找到了一个 $n \times 1$ 阵 W 使 $AW = 0$, 且 $W \neq 0$. 证毕.

1.24　由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (4)

注　本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

本节没有新的知识.

综合前几节的讨论, 我们有如下定理.

定理 1.101　设 A 是 n 级阵, B 是 $n\times 1$ 阵, X 是未知的 $n\times 1$ 阵.

(1) 当 $\det(A)\neq 0$ 时, $AX=B$ 有唯一的解;

(2) 当 $\det(A)=0$ 时, $AX=B$ 要么无解, 要么有多于一个解.

这就是由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组的解的定性的理论 (青春版). 不过, 当 $\det(A)=0$ 时, 如何进一步地**判断** $AX=B$ 是否有解? 这是此理论无法解答的问题.

若 $\det(A)\neq 0$, 则, 定量地, 我们可用 Cramer 公式写出 $AX=B$ 的 (唯一的) 解. 不过, 若 $AX=B$, 但 $\det(A)=0$, 我们如何写出它的 (所有的) 解?

我会在接下来的几节里, 讨论一般的由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组, 并解决这些问题.

1.25　由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (1)

注　本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

在接下来的若干节里, 我想用行列式讨论由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组的解. 我希望您注意到, 方程数 m 不一定等于未知数之数 n.

讨论由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组的解时, 我们先对一种特别情形作了定量的讨论 (Cramer 公式), 再对较一般的情形作了定性的讨论; 换句话说, 我们当时是先定量, 再定性. 不过, 这次, 讨论由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组时, 我们先定性, 再定量. 这么作, 会较方便一些.

或许, 您记得, 若一个 n 级阵 A 的行列式为零, 则 $AX = 0$ 有非零解. 或许, 您还记得, $AX = 0$ 是否有非零解跟 $AX = B$ (有解时) 是否有唯一的解有关. 对一般的由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组来说, 我们也有类似的结论.

本节, 我们讨论, 线性方程组有解时, 解是否唯一.

我们先看一个较简单的事实.

定理 1.102　设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 B 是 $m\times 1$ 阵. 设 $n\times 1$ 阵 C 适合 $AC = B$.
(1) 若 $AX = 0$ 只有零解, 则 $AX = B$ 的解唯一;
(2) 若存在非零的 $n\times 1$ 阵 D 使 $AD = 0$, 则 $AX = B$ 的解不唯一.

证　(1) 设 $n\times 1$ 阵 Y 适合 $AY = B$. 则

$$A(Y - C) = AY - AC = B - B = 0.$$

故 $Y - C$ 是 $AX = 0$ 的一个解. 因为 $AX = 0$ 只有零解, 故 $Y - C = 0$. 从而 $Y = C$.

(2) 因为 $D \neq 0$, 故 $C + D \neq C$. 因为 $A(C + D) = AC + AD = B + 0 = B$, 且 $C + D \neq C$, 故 $AX = B$ 的解不唯一.　证毕.

由此可见, 若 $AX = 0$ 有非零解, 则 $AX = B$ 有解时, 其解不唯一. 若 $AX = 0$ 只有零解, 则 $AX = B$ 有解时, 其解唯一.

接着, 我们讨论, $AX = 0$ 是否有非零解. 不过, 为了使讨论简单一些, 我们要作一些准备.

定理 1.103 设 A 是 $m \times n$ 阵. 若 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则对任何高于 r 的整数 s, A 没有行列式非零的 s 级子阵.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设命题 $P(s)$ 为:

A 没有行列式非零的 s 级子阵.

则我们的目标是: 对任何高于 r 的整数 s, $P(s)$ 是正确的.

$P(r+1)$ 是正确的.

假定 $P(t)$ 是正确的. 我们由此证, $P(t+1)$ 也是正确的. 若 A 不存在 $t+1$ 级子阵, 此事自然是正确的. 若 A 存在 $t+1$ 级子阵, 利用定义, 按列 1 展开其行列式, 可知, 此子阵的行列式是 A 的 $t+1$ 个 t 级子阵的行列式的倍的和. 由此可知, A 没有行列式非零的 $t+1$ 级子阵.

所以, $P(t+1)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

定理 1.104 设 A 是 $m \times n$ 阵. 存在一个唯一的非负整数 r, 使:

(1) A 有一个行列式非零的 r 级子阵;

(2) A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

证 唯一性是较简单的. 设还有非负整数 s 适合条件:

(1′) A 有一个行列式非零的 s 级子阵;

(2′) A 没有行列式非零的 $s+1$ 级子阵.

反设 $s > r$. 既然 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 故 A 没有行列式非零的 s 级子阵. 这跟 (1′) 矛盾. 所以, $s \leqslant r$. 类似地, 我们可证 $r \leqslant s$. 从而 $s = r$.

下面, 我们说明存在性. 我们设 t 是 m 与 n 中的较小者. 若 A 有行列式非零的 t 级子阵, 我们可取 $r = t$; 否则, 我们代 t 以 $t-1$. 若 A 有行列式非零的 $t-1$ 级子阵, 我们可取 $r = t-1$; 否则, 我们代 $t-1$ 以 $t-2$. ⋯⋯ 反复地作下去, 我们一定能找到此 r. (注意到, 我们约定 “0 级阵” 的行列式为 1, 所以这个过程一定能结束.) 证毕.

定理 1.105 (零的作用) 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 B 是 $m\times 1$ 阵. 设 k 是一个不超过 m 的正整数. 作一个 $(m+1)\times n$ 阵 $\underline{A}$, 其中

$$[\underline{A}]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\leqslant k;\\ 0, & i=k+1;\\ [A]_{i-1,j}, & i>k+1.\end{cases}$$

(通俗地, $\underline{A}$ 是在 A 的行 k 下写零行作成的阵.) 再作一个 $(m+1)\times 1$ 阵 $\underline{B}$, 其中

$$[\underline{B}]_{i,1}=\begin{cases}[B]_{i,1}, & i\leqslant k;\\ 0, & i=k+1;\\ [B]_{i-1,1}, & i>k+1.\end{cases}$$

(通俗地, $\underline{B}$ 是在 B 的行 k 下写零作成的阵.)

(1) 若 $n\times 1$ 阵 C 适合 $AC=B$, 则 $\underline{A}C=\underline{B}$.

(2) 若 $n\times 1$ 阵 C 适合 $\underline{A}C=\underline{B}$, 则 $AC=B$.

(3) 若 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 $\underline{A}$ 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

(4) 若 $\underline{A}$ 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

证 (1) 设 $AC=B$. 我们要证 $\underline{A}C=\underline{B}$.

首先, $\underline{A}C$ 与 $\underline{B}$ 的尺寸都是 $(m+1)\times 1$.

若 $i\leqslant k$, 则

$$\begin{aligned}[\underline{A}C]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n}[\underline{A}]_{i,\ell}[C]_{\ell,1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[C]_{\ell,1}\\ &= [AC]_{i,1}\\ &= [B]_{i,1}=[\underline{B}]_{i,1}.\end{aligned}$$

若 $i = k+1$, 则

$$\begin{aligned}[\underline{A}C]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [\underline{A}]_{i,\ell}[C]_{\ell,1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} 0\,[C]_{\ell,1}\\ &= 0 = [\underline{B}]_{i,1}.\end{aligned}$$

若 $i > k+1$, 则

$$\begin{aligned}[\underline{A}C]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [\underline{A}]_{i,\ell}[C]_{\ell,1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i-1,\ell}[C]_{\ell,1}\\ &= [AC]_{i-1,1}\\ &= [B]_{i-1,1} = [\underline{B}]_{i,1}.\end{aligned}$$

由此可见, $\underline{A}C = \underline{B}$.

(2) 设 $\underline{A}C = \underline{B}$. 我们要证 $AC = B$.

首先, AC 与 B 的尺寸都是 $m \times 1$.

其次, 注意到

$$[A]_{i,j} = \begin{cases}[\underline{A}]_{i,j}, & i \leqslant k;\\ [\underline{A}]_{i+1,j}, & i > k.\end{cases}$$

类似地,

$$[B]_{i,1} = \begin{cases}[\underline{B}]_{i,1}, & i \leqslant k;\\ [\underline{B}]_{i+1,1}, & i > k.\end{cases}$$

若 $i \leqslant k$, 则

$$\begin{aligned}[AC]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i,\ell}[C]_{\ell,1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} [\underline{A}]_{i,\ell}[C]_{\ell,1} \\ &= [\underline{A}C]_{i,1} \\ &= [\underline{B}]_{i,1} = [B]_{i,1}.\end{aligned}$$

若 $i > k$, 则

$$\begin{aligned}[AC]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i,\ell}[C]_{\ell,1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} [\underline{A}]_{i+1,\ell}[C]_{\ell,1} \\ &= [\underline{A}C]_{i+1,1} \\ &= [\underline{B}]_{i+1,1} = [B]_{i,1}.\end{aligned}$$

由此可见, $AC = B$.

(3) 注意到, A 的子阵都是 $\underline{A}$ 的子阵. 所以, 若 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 则 $\underline{A}$ 也有一个行列式非零的 r 级子阵. 对 $\underline{A}$ 的每一个子阵来说, 要么 $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 被选中, 要么 $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 不被选中. 所以, 那些 $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 不被选中的 $r+1$ 级子阵 (若存在) 一定是 A 的 $r+1$ 级子阵 (若存在), 故其行列式为零. 而那些 $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 被选中的 $r+1$ 级子阵 (若存在) 有一行的元全是零, 故其行列式为零. 从而, $\underline{A}$ 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

(4) 对 $\underline{A}$ 的每一个子阵来说, 要么 $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 被选中, 要么 $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 不被选中. 设 $\underline{A}$ 有一个行列式非零的 r 级子阵. 那么, 这个子阵一定不含元全为零的行. 特别地, 对此子阵而言, $\underline{A}$ 的行 $k+1$ 一定不被选中. 所以, 这也是 A 的一个 r 级子阵. 所以, A 也有一个行列式非零的 r 级子阵. 注意到, A 的子阵都是 $\underline{A}$ 的子阵. 既然 $\underline{A}$ 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 那么 A 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 证毕.

这是本节的首个重要的结论.

定理 1.106 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 设 $r<n$. 则 $AX=0$ 有非零解.

证 设 A 是 $m\times n$ 阵.

我们无妨设 $m\geqslant n$. 若 $m<n$, 我们作一个 n 级阵 $\underline{A}$, 其中

$$[\underline{A}]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\leqslant m;\\ 0, & i>m.\end{cases}$$

(通俗地, $\underline{A}$ 是在 A 的行 m 下写 $n-m$ 个零行作成的阵.) 由此, 不难得到: (a) 若 $n\times 1$ 阵 C 适合 $\underline{A}C=0$, 则 $AC=0$; (b) $\underline{A}$ 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 所以, 若我们找到了 $\underline{A}X=0$ 的非零解, 则我们也找到了 $AX=0$ 的非零解. 以下, 我们设 $m\geqslant n$.

若 $A=0$, 我们任取一个非零的 $n\times 1$ 阵 S. 则 $AS=0$.

以下, 我们假定 $A\neq 0$; 也就是说, A 有一个元不是零 (同时, 这也相当于 $n>1$: 回想 1 级阵的行列式是什么). 从而 $r\geqslant 1$.

我们设 A 的 r 级子阵 $A_r=A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r\\ j_1,\cdots,j_r\end{pmatrix}$ 的行列式非零, 其中 $i_1<i_2<\cdots<i_r$, 且 $j_1<j_2<\cdots<j_r$. 我们从 1, 2, $\cdots$, m 中去除 r 个整数 i_1, i_2, $\cdots$, i_r; 此时, 还剩下 $m-r$ 个整数, 我们从中选一个为 i_{r+1}. 类似地, 我们再从 1, 2, $\cdots$, n 中去除 r 个整数 j_1, j_2, $\cdots$, j_r; 此时, 还剩下 $n-r$ 个整数, 我们从中选一个为 j_{r+1}. 作 $r+1$ 级阵 $E=A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r,i_{r+1}\\ j_1,\cdots,j_r,j_{r+1}\end{pmatrix}$. 我们设 i_p 在 i_1, $\cdots$, i_r, i_{r+1} 中是第 $f(i_p)$ 小的数. 再设 j_p 在 j_1, $\cdots$, j_r, j_{r+1} 中是第 $g(j_p)$ 小的数. 因为 E 是 A 的一个 $r+1$ 级子阵, 故 $\det(E)=0$. 从而 $E\operatorname{adj}(E)=0$. 注意到 $[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_{r+1}),f(i_{r+1})}=(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_{r+1})}\det(A_r)\neq 0$.

接下来, 我们设法由此得到一个 $AX=0$ 的非零解. 我们作一个 $n\times 1$ 阵 W, 其中

$$[W]_{\ell,1}=\begin{cases}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}, & \ell=j_p,\ p=1,\cdots,r,r+1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(通俗地, 我们在适当的位置写零, 变 $\operatorname{adj}(E)$ 的列 $f(i_{r+1})$ 为一个 $n\times 1$ 阵 W.) 因为 $[W]_{j_{r+1},1}\neq 0$, 故 $W\neq 0$. 我们证明 $AW=0$.

取不超过 m 的正整数 q. 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{\ell=1}^{n}[A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1}\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n\\ \ell=j_p\\ 1\leqslant p\leqslant r+1}}[A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1}+\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n\\ \text{其他}}}[A]_{q,\ell}[W]_{\ell,1}\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n\\ \ell=j_p\\ 1\leqslant p\leqslant r+1}}[A]_{q,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}+\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n\\ \text{其他}}}[A]_{q,\ell}\,0\\
&= \sum_{p=1}^{r+1}[A]_{q,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}.
\end{aligned}$$

若 q 等于某个 i_t, 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{i_t,1} &= \sum_{p=1}^{r+1}[A]_{i_t,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}\\
&= \sum_{p=1}^{r+1}[E]_{f(i_t),g(j_p)}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}\\
&= [E\operatorname{adj}(E)]_{f(i_t),f(i_{r+1})}\\
&= [0]_{f(i_t),f(i_{r+1})}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

若 q 不等于 $i_1, \cdots, i_r, i_{r+1}$ 中的任何一个, 则

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{p=1}^{r+1}[A]_{q,j_p}[\operatorname{adj}(E)]_{g(j_p),f(i_{r+1})}\\
&= \sum_{p=1}^{r+1}[A]_{q,j_p}(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_p)}\det(E(f(i_{r+1})|g(j_p))).
\end{aligned}$$

作一个 $r+1$ 级阵 C_q, 其中

$$[C_q]_{h,g(j_p)}=\begin{cases}[E]_{h,g(j_p)}, & h\neq f(i_{r+1});\\ [A]_{q,j_p}, & h=f(i_{r+1}).\end{cases}$$

于是, $C_q(f(i_{r+1})|g(j_p)) = E(f(i_{r+1})|g(j_p))$. 从而

$$\begin{aligned}
[AW]_{q,1} &= \sum_{p=1}^{r+1} [A]_{q,j_p}(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_p)} \det(E(f(i_{r+1})|g(j_p))) \\
&= \sum_{p=1}^{r+1} [C_q]_{f(i_{r+1}),g(j_p)}(-1)^{f(i_{r+1})+g(j_p)} \det(C_q(f(i_{r+1})|g(j_p))) \\
&= \det(C_q).
\end{aligned}$$

再作一个 $r+1$ 级阵 $D_q = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r, q \\ j_1, \cdots, j_r, j_{r+1} \end{pmatrix}$. 不难看出, 适当地交换 C_q 的行的次序, 即可变 C_q 为 D_q. 根据反称性, $\det(C_q) = \pm\det(D_q)$. (具体地, 设 q 在 $i_1, \cdots, i_r, q$ 中是第 u 小的数. 那么, 当 $f(i_{r+1}) = u$ 时, $C_q = D_q$. 当 $f(i_{r+1}) < u$ 时, 我们交换行 $f(i_{r+1})$ 与 $f(i_{r+1})+1$, 再交换行 $f(i_{r+1})+1$ 与 $f(i_{r+1})+2$, ⋯ ⋯, 再交换行 $u-1$ 与 u, 作 $u-f(i_{r+1})$ 次相邻行的交换, 即可变 C_q 为 D_q. 当 $f(i_{r+1}) > u$ 时, 我们交换行 $f(i_{r+1})$ 与 $f(i_{r+1})-1$, 再交换行 $f(i_{r+1})-1$ 与 $f(i_{r+1})-2$, ⋯ ⋯, 再交换行 $u+1$ 与 u, 作 $f(i_{r+1})-u$ 次相邻行的交换, 即可变 C_q 为 D_q.) 因为 D_q 是 A 的一个 $r+1$ 级子阵, 故其行列式为零. 从而

$$[AW]_{q,1} = \det(C_q) = \pm\det(D_q) = 0.$$

综上, 我们找到了一个 $n\times 1$ 阵 W 使 $AW = 0$, 且 $W \neq 0$. 证毕.

这是本节的另一个重要的结论.

定理 1.107 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 A 有一个行列式非零的 n 级子阵 (此时, A 当然没有行列式非零的 $n+1$ 级子阵). 则 $AX = 0$ 只有零解.

证 设 $n\times 1$ 阵 C 适合 $AC = 0$. 设 A 的 n 级子阵

$$E = A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

的行列式非零, 其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant m$. 因为 C 适合

$$\begin{aligned}
[A]_{1,1}[C]_{1,1} + [A]_{1,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{1,n}[C]_{n,1} &= 0, \\
[A]_{2,1}[C]_{1,1} + [A]_{2,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{2,n}[C]_{n,1} &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \\
[A]_{m,1}[C]_{1,1} + [A]_{m,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{m,n}[C]_{n,1} &= 0,
\end{aligned}$$

故 C 当然也适合

$$\begin{aligned}
[A]_{i_1,1}[C]_{1,1} + [A]_{i_1,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{i_1,n}[C]_{n,1} &= 0, \\
[A]_{i_2,1}[C]_{1,1} + [A]_{i_2,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{i_2,n}[C]_{n,1} &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \\
[A]_{i_n,1}[C]_{1,1} + [A]_{i_n,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{i_n,n}[C]_{n,1} &= 0,
\end{aligned}$$

即 $EC = 0$. 因为 $\det(E) \neq 0$, 故, 由 Cramer 公式, 有 $C = 0$. 证毕.

现在, 我们作一个小结.

定理 1.108 设 A 是 $m \times n$ 阵. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

(1) 若 $r < n$, 则 $AX = 0$ 有非零解;

(2) 若 $r = n$, 则 $AX = 0$ 只有零解.

定理 1.109 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 B 是 $m\times 1$ 阵. 设 $n\times 1$ 阵 C 适合 $AC = B$; 也就是说, $AX = B$ 有解. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

(1) 若 $r < n$, 则 $AX = B$ 的解不唯一;

(2) 若 $r = n$, 则 $AX = B$ 的解唯一.

1.26 由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (2)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

前面, 我们讨论了 "$AX = B$ 有解时, 解是否唯一" 问题. 此事的回答跟 A 的子阵的行列式有关. 设 A 有 n 列. 当 A 有一个行列式非零的 n 级子阵时, 此方程组的解唯一; 当 A 没有行列式非零的 n 级子阵时, 此方程组的解不唯一.

接着, 自然地, 我们想讨论线性方程组何时有解. 或许, 一个好的想法是: 我们先讨论 $AX = B$ 有解时, A, B 应适合什么条件; 然后, 反过来, 我们再讨论适合这些条件的 A, B 是否能使 $AX = B$ 有解.

我们会用此思想研究此事. 不过, 在此之前, 请允许我介绍一件有用的小事.

定理 1.110 设 A 是 n 级阵. 设 p, q 是二个不超过 n 的正整数, 且 $p \neq q$. 设 x 是一个数. 作 n 级阵 E, 其中

$$[E]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \neq q; \\ [A]_{i,q} + x[A]_{i,p}, & j = q. \end{cases}$$

(通俗地, 我们加 A 的列 p 的 x 倍于列 q, 不改变其他的列, 得阵 E.) 则 $\det(E) = \det(A)$.

类似地, 若我们加 A 的行 p 的 x 倍于行 q, 不改变其他的行, 得阵 F, 则我们也有 $\det(F) = \det(A)$.

证 我证明关于列的事; 我们可用类似的方法证明关于行的事 (或者, 利用行列式与转置的关系).

设 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

先设 $p < q$. 为方便说话, 我们写

$$f(u, v) = \det[a_1, \cdots, a_{p-1}, u, a_{p+1}, \cdots, a_{q-1}, v, a_{q+1}, \cdots, a_n].$$

于是, $f(a_p, a_q)$ 就是 $\det(A)$, 而 $f(a_p, a_q + xa_p)$ 就是 $\det(E)$. 利用多线性与交

错性,

$$\begin{aligned}\det(E) &= f(a_p, a_q + xa_p)\\ &= f(a_p, a_q) + xf(a_p, a_p)\\ &= f(a_p, a_q) + x0\\ &= f(a_p, a_q)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

再设 $p > q$. 为方便说话, 我们写

$$g(u, v) = \det[a_1, \cdots, a_{q-1}, u, a_{q+1}, \cdots, a_{p-1}, v, a_{p+1}, \cdots, a_n].$$

于是, $g(a_q, a_p)$ 就是 $\det(A)$, 而 $g(a_q + xa_p, a_p)$ 就是 $\det(E)$. 利用多线性与交错性,

$$\begin{aligned}\det(E) &= g(a_q + xa_p, a_p)\\ &= g(a_q, a_p) + xg(a_p, a_p)\\ &= g(a_q, a_p) + x0\\ &= g(a_q, a_p)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

证毕.

现在, 我们可以研究, 若 $AX = B$ 有解, 则 A, B 应适合什么条件.

定理 1.111 设 A 是 $m \times n$ 阵. 设 B 是 $m \times 1$ 阵. 设存在 $n \times 1$ 阵 C 适合 $AC = B$. 作一个 $m \times (n+1)$ 阵 G, 其中

$$[G]_{i,j} = \begin{cases}[A]_{i,j}, & j \leqslant n;\\ [B]_{i,1}, & j = n+1.\end{cases}$$

(通俗地, 在 A 的最后一列的右侧加入一列 B, 得到尺寸较大的阵 G.) 则一定存在一个非负整数 r, 使 A 有一个行列式非零的 r 级子阵 (从而 G 也有一个行列式非零的 r 级子阵), 但 G 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵 (从而 A 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵).

证 我们知道, 存在一个非负整数 r, 使 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 我们证明, G 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

若 G 根本没有 $r+1$ 级子阵, 则 G 当然也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

若 G 有 $r+1$ 级子阵, 那么, 对 G 的每一个 $r+1$ 级子阵来说, 要么 G 的列 $n+1$ 被选中, 要么 G 的列 $n+1$ 不被选中.

若 G 的列 $n+1$ 不被选中, 那么, 这个子阵就是 A 的 $r+1$ 级子阵, 故其行列式为零.

若 G 的列 $n+1$ 被选中, 我们说明, 这个子阵的行列式是 A 的一些 $r+1$ 级子阵的行列式的倍的和, 故其行列式仍为零. 因为 $AC = B$, 故, 对任何不超过 m 的正整数 i,

$$[B]_{i,1} = [A]_{i,1}[C]_{1,1} + [A]_{i,2}[C]_{2,1} + \cdots + [A]_{i,n}[C]_{n,1},$$

即

$$[G]_{i,n+1} = [G]_{i,1}[C]_{1,1} + [G]_{i,2}[C]_{2,1} + \cdots + [G]_{i,n}[C]_{n,1}.$$

设这个子阵为

$$D = G\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r, i_{r+1} \\ j_1, \cdots, j_r, n+1 \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r < i_{r+1} \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$. 我们加 D 的列 1 的 $-[C]_{j_1,1}$ 倍于列 $r+1$, 得阵 D_1, 则 $\det(D_1) = \det(D)$. 我们加 D_1 的列 2 的 $-[C]_{j_2,1}$ 倍于列 $r+1$, 得阵 D_2, 则 $\det(D_2) = \det(D_1) = \det(D)$. ⋯⋯ 我们加 D_{r-1} 的列 r 的 $-[C]_{j_r,1}$ 倍于列 $r+1$, 得阵 D_r, 则 $\det(D_r) = \det(D_{r-1}) = \det(D)$. 注意到, D_r 的列 $1, 2, \cdots, r$ 分别跟 D 的列 $1, 2, \cdots, r$ 相等; 不过,

$$\begin{aligned}
[D_r]_{s,r+1} &= [G]_{i_s,n+1} - \sum_{\ell=1}^{r} [G]_{i_s,j_\ell}[C]_{j_\ell,1} \\
&= \sum_{1\leqslant t\leqslant n} [G]_{i_s,t}[C]_{t,1} - \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 等于某个 } j_\ell}} [G]_{i_s,t}[C]_{t,1} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} [G]_{i_s,t}[C]_{t,1}.
\end{aligned}$$

为方便说话, 我们记 $(r+1)\times n$ 阵

$$A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r, i_{r+1} \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

的列 $1, 2, \cdots, n$ 为 $h_1, h_2, \cdots, h_n$. 于是, D_r 的列 $1, 2, \cdots, r$ 就是 $h_{j_1}, h_{j_2}, \cdots, h_{j_r}$, 而 D_r 的列 $r+1$ 是

$$\sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} [C]_{t,1} h_t.$$

从而, 利用多线性,

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \det(D_r) \\
&= \det\left[h_{j_1}, \cdots, h_{j_r}, \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} [C]_{t,1} h_t\right] \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} [C]_{t,1} \det[h_{j_1}, \cdots, h_{j_r}, h_t].
\end{aligned}$$

适当地交换 $[h_{j_1}, \cdots, h_{j_r}, h_t]$ 的列的次序, 利用反称性, 有

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} [C]_{t,1} \det[h_{j_1}, \cdots, h_{j_r}, h_t] \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} (\pm)[C]_{t,1} \det\left(A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r, i_{r+1} \\ j_1, \cdots, j_r, t \end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant n \\ t\text{ 不等于任何 } j_\ell}} (\pm)[C]_{t,1}\, 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

证毕.

1.27 由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (3)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

前面, 我们讨论了 $AX = B$ 有解时, A, B 应适合的条件:

定理 1.111 设 A 是 $m \times n$ 阵. 设 B 是 $m \times 1$ 阵. 设存在 $n \times 1$ 阵 C 适合 $AC = B$. 作一个 $m \times (n+1)$ 阵 G, 其中

$$[G]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \leqslant n; \\ [B]_{i,1}, & j = n+1. \end{cases}$$

(通俗地, 在 A 的最后一列的右侧加入一列 B, 得到尺寸较大的阵 G.) 则一定存在一个非负整数 r, 使 A 有一个行列式非零的 r 级子阵 (从而 G 也有一个行列式非零的 r 级子阵), 但 G 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵 (从而 A 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵).

那么, 反过来, 若 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但 G 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 $AX = B$ 是否有解? 此事的回答是 “是”. 不过, 为了论证此事, 我们要作一些准备.

定理 1.112 设 A 是 $m \times n$ 阵, 且 $A \neq 0$. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$A_r = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}$$

(其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$), 但 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 那么, 对任何不超过 m 的正整数 p, 一定存在 r 个数 $d_{p,1}$, $d_{p,2}$, $\cdots$, $d_{p,r}$, 使对任何不超过 n 的正整数 q,

$$\begin{aligned} [A]_{p,q} &= [A]_{i_1,q} d_{p,1} + [A]_{i_2,q} d_{p,2} + \cdots + [A]_{i_r,q} d_{p,r} \\ &= \sum_{s=1}^{r} [A]_{i_s,q} d_{p,s}. \end{aligned}$$

我们也可如此说前面的结论:

定理 1.113 设 A 是 $m\times n$ 阵, 且 $A\neq 0$. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$A_r = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}$$

(其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$), 但 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 设 A 的行 1, 2, ⋯, m 为 a_1, a_2, ⋯, a_m. 那么, 对任何不超过 m 的正整数 p, 一定存在 r 个数 $d_{p,1}$, $d_{p,2}$, ⋯, $d_{p,r}$, 使

$$\begin{aligned} a_p &= d_{p,1}a_{i_1} + d_{p,2}a_{i_2} + \cdots + d_{p,r}a_{i_r} \\ &= \sum_{s=1}^{r} d_{p,s}a_{i_s}. \end{aligned}$$

通俗地, 这个定理说, 任给一个非零阵 A, 我们总能找出它的某 r 行 a_{i_1}, a_{i_2}, ⋯, a_{i_r}, 使 A 的每一行都可被写为这 r 行的数乘的和, 且由这 r 行作成的子阵一定有一个行列式非零的 r 级子阵.

例 1.114 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

不难看出, A 有一个 3 级子阵, 其行列式非零:

$$\det\left(A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,2,3 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

不过, A 没有行列式非零的 4 级子阵. 我们考虑 A 的列 4, 5. 任取 A 的一个 4 级子阵. 若 A 的列 4 或列 5 被选中, 那么其行列式显然为零. 若 A 的列 4 与列 5 都不被选中, 则这个子阵一定是

$$A\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 1,2,3,6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

不难算出, 它的行列式为零.

我们说, A 的每一行一定可被写为 A 的前 3 行的数乘的和. 设 A 的行 1, 2, 3, 4 为 a_1, a_2, a_3, a_4. 则

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1a_1 + 0a_2 + 0a_3,\\
a_2 &= 0a_1 + 1a_2 + 0a_3,\\
a_3 &= 0a_1 + 0a_2 + 1a_3,\\
a_4 &= 0a_1 + 1a_2 + 1a_3.
\end{aligned}$$

并且, 由这 3 行作成的子阵一定有一个行列式非零的 3 级子阵: 3 级单位阵就是一个.

顺便一提, A 的每一行当然可被写为 A 的前 4 行的数乘的和:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 + 0a_4,\\
a_2 &= 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 + 0a_4,\\
a_3 &= 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 + 0a_4,\\
a_4 &= 0a_1 + 0a_2 + 0a_3 + 1a_4.
\end{aligned}$$

可是, 由这 4 行作成的子阵没有行列式非零的 4 级子阵.

证 任取不超过 m 的正整数 p.

若 p 等于某个 i_s $(s = 1, 2, \cdots, r)$, 我们取

$$d_{p,v} = \begin{cases} 1, & v = s;\\ 0, & v \neq s. \end{cases}$$

于是, 对任何不超过 n 的正整数 q,

$$[A]_{i_1,q}d_{p,1} + [A]_{i_2,q}d_{p,2} + \cdots + [A]_{i_r,q}d_{p,r} = [A]_{i_s,q}1 = [A]_{p,q}.$$

下设 p 不等于任何 i_s.

考虑由 r 个 r 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组

$$\begin{cases}[A]_{i_1,j_1}x_1+[A]_{i_2,j_1}x_2+\cdots+[A]_{i_r,j_1}x_r=[A]_{p,j_1},\\ [A]_{i_1,j_2}x_1+[A]_{i_2,j_2}x_2+\cdots+[A]_{i_r,j_2}x_r=[A]_{p,j_2},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ [A]_{i_1,j_r}x_1+[A]_{i_2,j_r}x_2+\cdots+[A]_{i_r,j_r}x_r=[A]_{p,j_r},\end{cases}$$

即

$$A_r^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[A]_{p,j_1}\\ [A]_{p,j_2}\\ \vdots\\ [A]_{p,j_r}\end{bmatrix}.$$

因为 $\det(A_r^{\mathrm{T}})=\det(A_r)\neq 0$, 故, 由 Cramer 公式, 存在 r 个数 $d_{p,1}, d_{p,2}, \cdots, d_{p,r}$, 使

$$\begin{aligned}&[A]_{i_1,j_1}d_{p,1}+[A]_{i_2,j_1}d_{p,2}+\cdots+[A]_{i_r,j_1}d_{p,r}=[A]_{p,j_1},\\ &[A]_{i_1,j_2}d_{p,1}+[A]_{i_2,j_2}d_{p,2}+\cdots+[A]_{i_r,j_2}d_{p,r}=[A]_{p,j_2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &[A]_{i_1,j_r}d_{p,1}+[A]_{i_2,j_r}d_{p,2}+\cdots+[A]_{i_r,j_r}d_{p,r}=[A]_{p,j_r}.\end{aligned}$$

我们由此证明, 对任何不超过 n 的正整数 q,

$$[A]_{p,q}=[A]_{i_1,q}d_{p,1}+[A]_{i_2,q}d_{p,2}+\cdots+[A]_{i_r,q}d_{p,r}.$$

若 q 等于某个 j_ℓ, 显然. 下设 q 不等于任何 j_ℓ.

考虑 A 的 $r+1$ 级子阵

$$E=A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r,p\\ j_1,\cdots,j_r,q\end{pmatrix}.$$

我们用 “算二次 (dufoje)” 思想, 证我们想要的等式.

一方面, 我们知道, 既然 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 故 $\det(E)=0$.

另一方面, 我们也可适当地作一些辅助阵, 它们的行列式等于 E 的行列式; 从而, 计算这些辅助阵的行列式, 也就相当于计算 E 的行列式. 为方便, 我

们记 $i_{r+1}=p$, $j_{r+1}=q$. 设 i_s 是在 $i_1, \cdots, i_r, i_{r+1}$ 中第 $f(i_s)$ 小的数; 设 j_ℓ 是在 $j_1, \cdots, j_r, j_{r+1}$ 中第 $g(j_\ell)$ 小的数. 我们加 E 的行 $f(i_1)$ 的 $-d_{p,1}$ 倍于行 $f(p)$, 得阵 E_1, 则 $\det(E_1)=\det(E)$. 我们加 E_1 的行 $f(i_2)$ 的 $-d_{p,2}$ 倍于行 $f(p)$, 得阵 E_2, 则 $\det(E_2)=\det(E_1)=\det(E)$. ⋯⋯ 我们加 E_{r-1} 的行 $f(i_r)$ 的 $-d_{p,r}$ 倍于行 $f(p)$, 得阵 E_r, 则 $\det(E_r)=\det(E_{r-1})=\det(E)$. 注意到, E_r 的行 $f(i_1), f(i_2), \cdots, f(i_r)$ 分别跟 E 的行 $f(i_1), f(i_2), \cdots, f(i_r)$ 相等; 不过,

$$[E_r]_{f(p),g(v)}=[A]_{p,v}-\sum_{s=1}^{r}[A]_{i_s,v}d_{p,s},$$

其中 $v=j_1, \cdots, j_r, q$. 所以, 当 $g(v)\neq g(q)$ 时, $[E_r]_{f(p),g(v)}=0$. 我们按行 $f(p)$ 展开 E_r 的行列式, 有

$$\begin{aligned}\det(E_r)&=(-1)^{f(p)+g(q)}[E_r]_{f(p),g(q)}\det(E_r(f(p)|g(q)))\\&=(-1)^{f(p)+g(q)}\det(A_r)\left([A]_{p,q}-\sum_{s=1}^{r}[A]_{i_s,q}d_{p,s}\right).\end{aligned}$$

回想, $0=\det(E)$, 且 $\det(E)=\det(E_r)$. 比较二次计算的结果, 我们应有

$$0=(-1)^{f(p)+g(q)}\det(A_r)\left([A]_{p,q}-\sum_{s=1}^{r}[A]_{i_s,q}d_{p,s}\right).$$

注意到, $(-1)^{f(p)+g(q)}\det(A_r)\neq 0$, 故

$$[A]_{p,q}-\sum_{s=1}^{r}[A]_{i_s,q}d_{p,s}=0.$$

证毕.

现在, 我们可以证明本节的重要结论了.

定理 1.115　设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 B 是 $m\times 1$ 阵. 作一个 $m\times(n+1)$ 阵 G, 其中

$$[G]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & j\leqslant n;\\ [B]_{i,1}, & j=n+1.\end{cases}$$

(通俗地, 在 A 的最后一列的右侧加入一列 B, 得到尺寸较大的阵 G.) 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵 (从而 G 也有一个行列式非零的 r 级子阵), 但 G 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵 (从而 A 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵). 则存在一个 $n\times 1$ 阵 C, 使 $AC=B$.

证 先设 $A=0$. 那么, A 有一个行列式非零的 0 级子阵, 但 G 没有行列式非零的 1 级子阵. 所以 $G=0$. 所以 $B=0$. 那么, 任何一个 $n\times 1$ 阵 C 都适合 $AC=B$.

下设 $A\neq 0$. 设 A 的 r 级子阵

$$A_r = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}$$

(其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$) 的行列式非零. A_r 当然也是 G 的子阵, 且

$$A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}.$$

所以, 对任何不超过 m 的正整数 p, 一定存在 r 个数 $d_{p,1}, d_{p,2}, \cdots, d_{p,r}$, 使对任何不超过 $n+1$ 的正整数 q,

$$\begin{aligned}[G]_{p,q} &= [G]_{i_1,q}d_{p,1}+[G]_{i_2,q}d_{p,2}+\cdots+[G]_{i_r,q}d_{p,r} \\ &= \sum_{s=1}^{r}[G]_{i_s,q}d_{p,s}.\end{aligned}$$

考虑由 r 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组

$$\begin{cases} [A]_{i_1,1}x_1+[A]_{i_1,2}x_2+\cdots+[A]_{i_1,n}x_n=[B]_{i_1,1}, \\ [A]_{i_2,1}x_1+[A]_{i_2,2}x_2+\cdots+[A]_{i_2,n}x_n=[B]_{i_2,1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ [A]_{i_r,1}x_1+[A]_{i_r,2}x_2+\cdots+[A]_{i_r,n}x_n=[B]_{i_r,1}. \end{cases}$$

我们说, 这个方程组一定有解.

若 $r=n$, 则这是一个由 n 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组. 因为 $\det(A_r)\neq 0$, 故, 由 Cramer 公式, 此方程组有一个 (唯一的) 解.

若 $r<n$, 从 $1, 2, \cdots, n$ 去除 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 后, 还剩 $n-r$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-r$ 个数为 $j_{r+1}, \cdots, j_n$. 我们可改写此方程组为

$$\sum_{\ell=1}^{r}[A]_{p,j_\ell}x_{j_\ell}=[B]_{p,1}-\sum_{r<\ell\leqslant n}[A]_{p,j_\ell}x_{j_\ell},$$

其中 $p = i_1, i_2, \cdots, i_r$, 下同.

设 $f_{j_{r+1}}, \cdots, f_{j_r}$ 为任何的 $n-r$ 个数. 我们考虑由 r 个 r 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组

$$\sum_{\ell=1}^{r} [A]_{p,j_\ell} y_\ell = [B]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [A]_{p,j_\ell} f_{j_\ell}.$$

利用阵等式, 我们可写

$$A_r \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i_1} \\ z_{i_2} \\ \vdots \\ z_{i_r} \end{bmatrix},$$

其中

$$z_p = [B]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [A]_{p,j_\ell} f_{j_\ell}.$$

因为 $\det(A_r) \neq 0$, 故, 由 Cramer 公式, 存在 r 个数 $f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots, f_{j_r}$, 使

$$\sum_{\ell=1}^{r} [A]_{p,j_\ell} f_{j_\ell} = [B]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [A]_{p,j_\ell} f_{j_\ell}.$$

从而

$$\sum_{\ell=1}^{n} [A]_{p,j_\ell} f_{j_\ell} = [B]_{p,1}.$$

设 n 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 适合

$$\begin{aligned}
[A]_{i_1,1}c_1 + [A]_{i_1,2}c_2 + \cdots + [A]_{i_1,n}c_n &= [B]_{i_1,1}, \\
[A]_{i_2,1}c_1 + [A]_{i_2,2}c_2 + \cdots + [A]_{i_2,n}c_n &= [B]_{i_2,1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots, \\
[A]_{i_r,1}c_1 + [A]_{i_r,2}c_2 + \cdots + [A]_{i_r,n}c_n &= [B]_{i_r,1}.
\end{aligned}$$

作 $n \times 1$ 阵 C, 其中 $[C]_{i,1} = c_i$. 我们证明, $AC = B$.

若 i 等于某 i_s, 则

$$\begin{aligned}
[AC]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i,\ell}[C]_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i,\ell}c_\ell \\
&= [B]_{i,1}.
\end{aligned}$$

若 i 不等于任何一个 i_s, 则

$$\begin{aligned}
[AC]_{i,1} &= \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i,\ell}[C]_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} [G]_{i,\ell}[C]_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{r} [G]_{i_s,\ell} d_{i,s} \right) [C]_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{s=1}^{r} [G]_{i_s,\ell} d_{i,s} [C]_{\ell,1} \\
&= \sum_{s=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{n} [G]_{i_s,\ell} d_{i,s} [C]_{\ell,1} \\
&= \sum_{s=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i_s,\ell} d_{i,s} c_\ell \\
&= \sum_{s=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i_s,\ell} c_\ell d_{i,s} \\
&= \sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{\ell=1}^{n} [A]_{i_s,\ell} c_\ell \right) d_{i,s} \\
&= \sum_{s=1}^{r} [B]_{i_s,1} d_{i,s} \\
&= \sum_{s=1}^{r} [G]_{i_s,n+1} d_{i,s} \\
&= [G]_{i,n+1}
\end{aligned}$$

$$= [B]_{i,1}.$$

证毕.

结合前几节的讨论, 我们可以得到判断 $AX = B$ 是否有解, 与有解时其解是否唯一的方法 (定性的理论, 完整版):

定理 1.116 设 A 是 $m \times n$ 阵. 设 B 是 $m \times 1$ 阵. 作一个 $m \times (n+1)$ 阵 G, 其中

$$[G]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \leqslant n; \\ [B]_{i,1}, & j = n+1. \end{cases}$$

(通俗地, 在 A 的最后一列的右侧加入一列 B, 得到尺寸较大的阵 G.) 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

(1) 若 G 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 $AX = B$ 有解. 进一步地, 若 $r < n$, 则 $AX = B$ 的解不唯一; 若 $r = n$, 则 $AX = B$ 的解唯一.

(2) 若 G 有一个行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 $AX = B$ 无解.

1.28 由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (4)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 “选学内容” 的节) 的理解.

前面, 我们得到了线性方程组的解的定性的理论:

定理 1.116 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 B 是 $m\times 1$ 阵. 作一个 $m\times(n+1)$ 阵 G, 其中

$$[G]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & j\leqslant n;\\ [B]_{i,1}, & j=n+1.\end{cases}$$

(通俗地, 在 A 的最后一列的右侧加入一列 B, 得到尺寸较大的阵 G.) 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

(1) 若 G 也没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 $AX=B$ 有解. 进一步地, 若 $r<n$, 则 $AX=B$ 的解不唯一; 若 $r=n$, 则 $AX=B$ 的解唯一.

(2) 若 G 有一个行列式非零的 $r+1$ 级子阵, 则 $AX=B$ 无解.

现在, 我们作定量的讨论: 当 $AX=B$ 有解时, 我们试作出公式, 以表示它的解.

设 A 是一个 $m\times n$ 阵. 设 B 是一个 $m\times 1$ 阵. 设 $AX=B$ 有解.

若 $A=0$, 则因 $AX=B$ 有解, 必有 $B=0$. 此时, 显然, 每一个 $n\times 1$ 阵都是解. 下设 $A\neq 0$. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$T=A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r\\ j_1,\cdots,j_r\end{pmatrix}$$

(其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$), 但没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 为说话方便, 我们作一个 $r\times n$ 阵

$$U=A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r\\ 1,\cdots,n\end{pmatrix},$$

与一个 $r\times 1$ 阵

$$V=B\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r\\ 1\end{pmatrix}.$$

注意到, U 有一个行列式非零的 r 级子阵 T.

我们回想上节的讨论. 为了解方程组 $AX = B$, 即

$$\begin{cases}[A]_{1,1}x_1 + [A]_{1,2}x_2 + \cdots + [A]_{1,n}x_n = [B]_{1,1},\\ [A]_{2,1}x_1 + [A]_{2,2}x_2 + \cdots + [A]_{2,n}x_n = [B]_{2,1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ [A]_{m,1}x_1 + [A]_{m,2}x_2 + \cdots + [A]_{m,n}x_n = [B]_{m,1},\end{cases}$$

我们考虑了由这 m 个方程的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 个方程作成的方程组

$$\begin{cases}[A]_{i_1,1}x_1 + [A]_{i_1,2}x_2 + \cdots + [A]_{i_1,n}x_n = [B]_{i_1,1},\\ [A]_{i_2,1}x_1 + [A]_{i_2,2}x_2 + \cdots + [A]_{i_2,n}x_n = [B]_{i_2,1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ [A]_{i_r,1}x_1 + [A]_{i_r,2}x_2 + \cdots + [A]_{i_r,n}x_n = [B]_{i_r,1},\end{cases}$$

即 $UX = V$. 当时, 我们已经证明了, $UX = V$ 的解都是 $AX = B$ 的解. 反过来, $AX = B$ 的解显然都是 $UX = V$ 的解, 因为后者的方程全部都是来自前者的. 这么看来, $AX = B$ 跟 $UX = V$ 有着相同的解. 所以, 研究 $AX = B$ 的解的公式, 相当于研究 $UX = V$ 的解的公式.

若 $r = n$, 则我们直接用 Cramer 公式, 即可写出 $UX = V$ 的唯一的解 (注意, 此时 U 是一个 $r \times r$ 阵)

$$X = \frac{1}{\det(U)} \operatorname{adj}(U)\, V.$$

我们也可较直接地表达此解. 设 $U\{k, V\}$ 是以 $r \times 1$ 阵 V 代 U 的列 k 后得到的阵. 则

$$x_k = \frac{\det(U\{k, V\})}{\det(U)}.$$

下设 $r < n$. 我们试写出方程组 $UX = V$ 的所有的解.

定理 1.117 设 V 是一个 $r \times 1$ 阵. 设 U 是一个 $r \times n$ 阵, 其中 $r < n$, 且 U 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$T = U\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$. 从 $1, 2, \cdots, n$ 去除 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 后, 还剩 $n-r$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-r$ 个数为 $j_{r+1}, \cdots, j_n$. 再设 U 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

(1) 设 $c_{j_{r+1}}, \cdots, c_{j_n}$ 是 $n-r$ 个常数. 作 $n \times 1$ 阵 C, 其中

$$[C]_{j_k,1} = \begin{cases} \dfrac{\det(T\{k,V\})}{\det(T)} - \sum\limits_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \dfrac{\det(T\{k,u_{j_\ell}\})}{\det(T)}, & k \leqslant r; \\ c_{j_k}, & k > r. \end{cases}$$

其中 $T\{k,Y\}$ 是以 $r \times 1$ 阵 Y 代 T 的列 k 后得到的阵. 则 $UC = V$.

(2) 若 $n \times 1$ 阵 D 适合 $UD = V$, 则存在 $n-r$ 个数 $c_{j_{r+1}}, \cdots, c_{j_n}$, 使

$$[D]_{j_k,1} = \begin{cases} \dfrac{\det(T\{k,V\})}{\det(T)} - \sum\limits_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \dfrac{\det(T\{k,u_{j_\ell}\})}{\det(T)}, & k \leqslant r; \\ c_{j_k}, & k > r. \end{cases}$$

换句话说, $UX = V$ 的每一个解都可被 (1) 中的公式表达.

证 (1) 我们可改写方程组 $UX = V$ 为

$$\sum_{\ell=1}^{r} [U]_{p,j_\ell} x_{j_\ell} = [V]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [U]_{p,j_\ell} x_{j_\ell},$$

其中 $p = 1, 2, \cdots, r$, 下同. 考虑由 r 个 r 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组

$$\sum_{\ell=1}^{r} [U]_{p,j_\ell} y_\ell = [V]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [U]_{p,j_\ell} c_{j_\ell}.$$

利用阵等式, 我们可写

$$T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = V - \sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} u_{j_\ell}.$$

因为 $\det(T) \neq 0$, 故, 由 Cramer 公式, 存在 r 个数 $c_{j_1}, c_{j_2}, \cdots, c_{j_r}$, 使

$$\sum_{\ell=1}^{r} [U]_{p,j_\ell} c_{j_\ell} = [V]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [U]_{p,j_\ell} c_{j_\ell},$$

其中

$$\begin{aligned} c_{j_k} &= \frac{1}{\det(T)} \det\left(T\left\{k, V - \sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} u_{j_\ell}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{\det(T)} \det(T\{k,V\}) - \frac{1}{\det(T)} \sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \det(T\{k, u_{j_\ell}\}) \\ &= \frac{\det(T\{k,V\})}{\det(T)} - \sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \frac{\det(T\{k,u_{j_\ell}\})}{\det(T)}. \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{\ell=1}^{n} [U]_{p,j_\ell} c_{j_\ell} = [V]_{p,1}.$$

注意到 $[C]_{j_k,1} = c_{j_k}$. 所以, $UC = V$.

(2) 设 D 适合 $UD = V$. 则

$$\sum_{\ell=1}^{n} [U]_{p,j_\ell} [D]_{j_\ell,1} = [V]_{p,1}.$$

从而

$$\sum_{\ell=1}^{r} [U]_{p,j_\ell} [D]_{j_\ell,1} = [V]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [U]_{p,j_\ell} [D]_{j_\ell,1}.$$

取 $c_{j_\ell} = [D]_{j_\ell,1}$, $\ell > r$. 考虑方程组

$$\sum_{\ell=1}^{r} [U]_{p,j_\ell} y_\ell = [V]_{p,1} - \sum_{r<\ell\leqslant n} [U]_{p,j_\ell} c_{j_\ell}.$$

由 (1), 我们知道

$$y_k = \frac{\det(T\{k,V\})}{\det(T)} - \sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \frac{\det(T\{k,u_{j_\ell}\})}{\det(T)}$$

(其中 $k = 1, 2, \cdots, r$, 下同) 是一个解; 另一方面, $y_k = [D]_{j_k,1}$ 也是一个解. 因为 $\det(T) \neq 0$, 故, 由 Cramer 公式, 这二组解应是相同的, 即

$$[D]_{j_k,1} = \frac{\det(T\{k,V\})}{\det(T)} - \sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \frac{\det(T\{k,u_{j_\ell}\})}{\det(T)}.$$

证毕.

注意到, 当 $r = n$ 时, 不可能有数 ℓ 适合 $r < \ell \leqslant n$. 既然没有数被加, 那么, 形如

$$\sum_{r<\ell\leqslant n} f(\ell)$$

的式是零. 用这种约定, 我们可统一地写在 $r = n$ 与 $r < n$ 这二种情形下解的公式.

定理 1.118 设 V 是一个 $r \times 1$ 阵. 设 U 是一个 $r \times n$ 阵, 其中 $r \leqslant n$, 且 U 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$T = U\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$. 从 $1, 2, \cdots, n$ 去除 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 后, 还剩 $n - r$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n - r$ 个数为 $j_{r+1}, \cdots, j_n$. 再设 U 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 那么, $UX = V$ 的解**恰**为

$$x_{j_k} = \begin{cases} \dfrac{\det(T\{k, V\})}{\det(T)} - \displaystyle\sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell} \dfrac{\det(T\{k, u_{j_\ell}\})}{\det(T)}, & k \leqslant r; \\ c_{j_k}, & k > r, \end{cases}$$

其中 $c_{j_{r+1}}, \cdots, c_{j_n}$ 是任何的 $n - r$ 个数.

最后, 我们总结这几节的关于线性方程组的主要结果.

定理 1.119 设 A 是 $m \times n$ 阵. 设 B 是 $m \times 1$ 阵. 作一个 $m \times (n+1)$ 阵 G, 其中

$$[G]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \leqslant n; \\ [B]_{i,1}, & j = n + 1. \end{cases}$$

(通俗地, 在 A 的最后一列的右侧加入一列 B, 得到尺寸较大的阵 G.) 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但 A 没有行列式非零的 $r + 1$ 级子阵; 设 G 有一个行列式非零的 s 级子阵, 但 G 没有行列式非零的 $s + 1$ 级子阵. 设 X 是未知的 $n \times 1$ 阵.

(1) 因为 A 是 G 的子阵, 故 A 的子阵也是 G 的子阵. 则 $s=r$ 或 $s>r$.

(2) 若 $s>r$, 则 $AX=B$ 无解. 也就是说, 若 $AX=B$ 有解, 必 $s=r$.

(3) 若 $s=r$, 则 $AX=B$ 有解. 也就是说, 若 $AX=B$ 无解, 必 $s>r$.

(4) 设 $s=r$. 则 $AX=B$ 有解. 若 $r=n$, 则 $AX=B$ 的解唯一; 若 $r<n$, 则 $AX=B$ 的解不唯一.

(5) 设 $A\neq 0$. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$T=A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{pmatrix}$$

(其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$), 但 G 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 则 $s=r$. 则 $AX=B$ 有解.

记 $r\times n$ 阵

$$U=A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

于是, 可视 T 为 U 的一个行列式非零的 r 级子阵. 再记 $r\times 1$ 阵

$$V=B\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则 $UX=V$ 有解, $AX=B$ 的解是 $UX=V$ 的解, 且 $UX=V$ 的解是 $AX=B$ 的解.

从 $1, 2, \cdots, n$ 去除 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 后, 还剩 $n-r$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-r$ 个数为 $j_{r+1}, \cdots, j_n$. 再设 U 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 那么, $UX=V$ 的解 (即 $AX=B$ 的解) **恰**为

$$x_{j_k}=\begin{cases} \dfrac{\det(T\{k, V\})}{\det(T)}-\displaystyle\sum_{r<\ell\leqslant n} c_{j_\ell}\dfrac{\det(T\{k, u_{j_\ell}\})}{\det(T)}, & k\leqslant r; \\ c_{j_k}, & k>r, \end{cases}$$

其中 $c_{j_{r+1}}, \cdots, c_{j_n}$ 是任何的 $n-r$ 个数, $T\{k, Y\}$ 是以 $r\times 1$ 阵 Y 代 T 的列 k 后得到的阵, 且 $x_i=[X]_{i,1}$, $i=1, 2, \cdots, n$.

1.29 由 m 个 n 元 $\leqslant 1$ 次方程作成的方程组 (5)

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

线性方程组的故事要结束了. 毕竟, 我们已解决线性方程组的三个较重要的问题:

(1) 一个线性方程组何时有解?

(2) 一个线性方程组有解时, 其解是否唯一?

(3) 一个线性方程组有解时, 我们如何找到它的全部的解?

我们用行列式回答了这三个问题, 作了一个较完整的线性方程组的理论. 所以, 理论地, 给了一个线性方程组, 我们可以计算一些行列式以确定它是否有解, 且有解时其解为何.

不过, 计算一个方阵的行列式并不是什么简单的事情: 3 级阵的行列式的较具体的公式含 6 项, 而 4 级阵的行列式的较具体的公式含 24 项. 所以, 像 Cramer 公式那样, 我们又作了一个 "较理论的" 理论.

但是, 此理论仍然是重要的. 或许, 您还记得, 任给一个阵 A, 必存在唯一的非负整数 r, 使 A 有一个行列式非零的 r 级子阵, 但 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 聪明的数学家意识到, 此 r 十分地重要, 故专门为它起了一个名字, "**秩**". 然后, 他们研究了秩, 发现: (a) 可以施适当的变换于阵 A, 得到一个新阵 E, 且 A 与 E 有相同的秩; (b) "适当的变换" 跟计算方阵的行列式比, 有着较少的计算量 (具体地, 加、减、乘、除的次数); (c) E 的秩不难计算, 甚至可被直接看出. 于是, 联合这个发现与我们的理论, 就是一个更好的线性方程组的理论. 若您对此事感兴趣, 您可以见线性代数 (或高等代数) 教材.

我就说这么多吧.

1.30 Binet–Cauchy 公式

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

或许, (方) 阵的行列式与阵的积的定义都是较复杂的 (跟阵的转置、加、减、数乘等对比). 不过, 这二种较复杂的运算有着较不平凡的联系.

设 A 是一个 $m\times n$ 阵, B 是一个 $n\times m$ 阵. 根据阵的积的定义, BA 是一个 n 级阵, 故它有行列式.

定理 1.120 (Binet–Cauchy 公式) 设 A, B 分别是 $m\times n$, $n\times m$ 阵.

(1) 若 $n>m$, 则 $\det(BA)=0$.

(2) 若 $n\leqslant m$, 则

$$\begin{aligned}&\det(BA)\\=&\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m}\det\left(B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\j_1,j_2,\cdots,j_n\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix}j_1,j_2,\cdots,j_n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

特别地, 若 $n=m$, 则因适合条件 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m$ 的 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 是, 且只能是, $1, 2, \cdots, n$, 故

$$\begin{aligned}\det(BA)=&\det\left(B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right)\\=&\det(B)\det(A).\end{aligned}$$

我用二个例助您理解, 此定理在说什么.

例 1.121 设

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7&10\\8&11\\9&12\end{bmatrix}.$$

不难算出,

$$AB=\begin{bmatrix}76&103\\100&136\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}27&61&95\\30&68&106\\33&75&117\end{bmatrix}.$$

直接计算, 可知

$$\det(AB) = 76 \cdot 136 - 100 \cdot 103 = 36,$$

而

$$\begin{aligned}\det(BA) = &\ \ 27 \cdot 68 \cdot 117 + 30 \cdot 75 \cdot 95 + 33 \cdot 61 \cdot 106 \\ &- 27 \cdot 75 \cdot 106 - 30 \cdot 61 \cdot 117 - 33 \cdot 68 \cdot 95 \\ = &\ 0.\end{aligned}$$

或许, 前面的计算是较复杂的. 我们试用 Binet–Cauchy 公式, 再计算它们.

因为 A, B 的尺寸分别是 2×3, 3×2, 而 $3 > 2$, 根据 (1), $\det(BA) = 0$ (注意到, BA 是 3 级阵).

因为 $2 \leqslant 3$, 故, 根据 (2),

$$\begin{aligned}&\det(AB) \\ = &\ \det\left(A\binom{1,2}{1,2}\right)\det\left(B\binom{1,2}{1,2}\right) + \det\left(A\binom{1,2}{1,3}\right)\det\left(B\binom{1,3}{1,2}\right) \\ &+ \det\left(A\binom{1,2}{2,3}\right)\det\left(B\binom{2,3}{1,2}\right).\end{aligned}$$

这里, 要注意到, 适合条件 "$1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant 3$" 的 (j_1, j_2) 恰有三组: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$. 不难写出

$$\begin{aligned}A\binom{1,2}{1,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B\binom{1,2}{1,2} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}, \\ A\binom{1,2}{1,3} &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B\binom{1,3}{1,2} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}, \\ A\binom{1,2}{2,3} &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B\binom{2,3}{1,2} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

从而

$$\det(AB) = (-2)\cdot(-3) + (-4)\cdot(-6) + (-2)\cdot(-3) = 36.$$

例 1.122 设

$$A=\begin{bmatrix}2&5\\3&7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}9&6\\4&8\end{bmatrix}.$$

不难算出

$$AB=\begin{bmatrix}38&52\\55&74\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}36&87\\32&76\end{bmatrix}.$$

可以看到, $AB\neq BA$.

不过, $\det(AB)=\det(BA)$. 一方面, 我们可直接验证:

$$\det(AB)=38\cdot 74-55\cdot 52=-48,$$
$$\det(BA)=36\cdot 76-32\cdot 87=-48.$$

另一方面, Binet–Cauchy 公式指出,

$$\begin{aligned}\det(AB)&=\det(A)\det(B)\\&=\det(B)\det(A)\\&=\det(BA).\end{aligned}$$

毕竟, 数的乘法是可换的.

为较简单地论证公式, 我们要三个新事实; 为证明这三个新事实的前二个, 我们要一些老的公式.

定理 1.30 设 A 是 n 级阵 $(n\geqslant 1)$. 设 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$\begin{aligned}&\det(A)\\&=\sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}} s(i_1,i_2,\cdots,i_n)\,s(j_1,j_2,\cdots,j_n)\,[A]_{i_1,j_1}[A]_{i_2,j_2}\cdots[A]_{i_n,j_n}.\end{aligned}$$

取 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$, 并注意到 $s(1,2,\cdots,n)=1$, 有

$$\det(A)=\sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 互不相同}}} s(i_1,i_2,\cdots,i_n)\,[A]_{i_1,1}[A]_{i_2,2}\cdots[A]_{i_n,n}.$$

定理 1.38 设 n 级阵 A 的列 1, 2, ⋯, n 分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 设 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ 是不超过 n 的正整数, 且**互不相同**. 则

$$\det[a_{\ell_1}, a_{\ell_2}, \cdots, a_{\ell_n}] = s(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)\det(A).$$

现在, 我要开始展现三个新事实了.

定理 1.123 设 C 为 $n \times m$ 阵, 且 $m \geqslant n$. 设 C 的列 1, 2, ⋯, m 分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_m$. 设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是不超过 m 的正整数, 且互不相同. 设 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的自然排列. 则

$$\det[c_{k_1}, c_{k_2}, \cdots, c_{k_n}] = s(k_1, k_2, \cdots, k_n)\det[c_{j_1}, c_{j_2}, \cdots, c_{j_n}].$$

证 设 k_t 在 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的自然排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 里的位置为 $f(k_t)$ ($t = 1, 2, \cdots, n$). 注意, $f(j_t) = t$. 并且, 若 $k_t < k_v$, 必有 $f(k_t) < f(k_v)$. 反过来, 若 $f(k_t) < f(k_v)$, 必有 $k_t < k_v$. (我用一个简单的例助您理解. 设 $m = 9$, $n = 3$. 设 k_1, k_2, k_3 分别为 8, 9, 6. 那么, k_1, k_2, k_3 的自然排列 j_1, j_2, j_3 是 6, 8, 9. 故 $f(k_1) = f(j_2) = f(8) = 2$, $f(k_2) = f(j_3) = f(9) = 3$, $f(k_3) = f(j_1) = f(6) = 1$.) 从而 $\operatorname{sgn}(k_v - k_t) = \operatorname{sgn}(f(k_v) - f(k_t))$.

作阵 $G = [c_{j_1}, c_{j_2}, \cdots, c_{j_n}]$. 设 G 的列 1, 2, ⋯, n 分别是 $g_1, g_2, \cdots, g_n$. 则

$$[c_{k_1}, c_{k_2}, \cdots, c_{k_n}] = [g_{f(k_1)}, g_{f(k_2)}, \cdots, g_{f(k_n)}].$$

故

$$\begin{aligned}\det[c_{k_1}, c_{k_2}, \cdots, c_{k_n}] &= \det[g_{f(k_1)}, g_{f(k_2)}, \cdots, g_{f(k_n)}] \\ &= s(f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_n))\det[g_1, g_2, \cdots, g_n] \\ &= s(k_1, k_2, \cdots, k_n)\det[c_{j_1}, c_{j_2}, \cdots, c_{j_n}].\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.124 设 D 为 $m \times n$ 阵, 且 $m \geqslant n$. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是不超过 m 的正整数, 且 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. 则

$$\begin{aligned}&\det\left(D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n\end{pmatrix}\right) \\ = &\sum_{\substack{k_1, k_2, \cdots, k_n \text{是} \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \text{的排列}}} s(k_1, k_2, \cdots, k_n)[D]_{k_1,1}[D]_{k_2,2}\cdots[D]_{k_n,n}.\end{aligned}$$

证 设

$$H = D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

不难看出, $[H]_{u,v} = [D]_{i_u,v}$.

记 $f(i_t) = t$ $(t = 1, 2, \cdots, n)$. 设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的一个排列. 那么, $f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_n)$ 一定是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 反过来, 若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 则 $i_{v_1}, i_{v_2}, \cdots, i_{v_n}$ 一定是 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的一个排列. 并且, 若 $k_t < k_v$, 必有 $f(k_t) < f(k_v)$. 反过来, 若 $f(k_t) < f(k_v)$, 必有 $k_t < k_v$. 从而 $\operatorname{sgn}(k_v - k_t) = \operatorname{sgn}(f(k_v) - f(k_t))$. 故

$$\begin{aligned}
&\det\left(D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}\right) \\
=\ & \det(H) \\
=\ & \sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 是} \\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 的排列}}} s(f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_n))\,[H]_{f(k_1),1}[H]_{f(k_2),2}\cdots[H]_{f(k_n),n} \\
=\ & \sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 是} \\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 的排列}}} s(k_1, k_2, \cdots, k_n)\,[D]_{k_1,1}[D]_{k_2,2}\cdots[D]_{k_n,n}.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.125 设 $n \leqslant m$. 设数 $f(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ (其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 过 $1, 2, \cdots, m$) 适合: 若 $k_p = k_q$ $(1 \leqslant p < q \leqslant n)$, 则 $f(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 0$. 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant m} f(k_1, k_2, \cdots, k_n) \\
=\ & \sum_{\substack{1\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant m \\ k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 互不相同}}} f(k_1, k_2, \cdots, k_n) \\
=\ & \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m}\ \sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 是} \\ j_1,j_2,\cdots,j_n\text{ 的排列}}} f(k_1, k_2, \cdots, k_n).
\end{aligned}$$

证 由 f 的性质可知, 前一个等式成立. 后一个等式也不难. 注意到, 要从 m 个不同的数里**有前后次序地**选 n 个不同的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 我们可以这样: 先**从小到大地**从这 m 个数里选 n 个不同的数 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 再**有前后次序地**作这 n 个数的排列 $k_1, k_2, \cdots, k_n$. 所以后一个等式也成立. 证毕.

现在, 我们证明 Binet–Cauchy 公式.

证 设 B 的列 $1, 2, \cdots, m$ 分别是 $b_1, b_2, \cdots, b_m$. 设 A 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 那么

$$\begin{aligned} BA &= [Ba_1, Ba_2, \cdots, Ba_n] \\ &= \left[\sum_{k_1=1}^{m}[A]_{k_1,1}b_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{m}[A]_{k_2,2}b_{k_2}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{m}[A]_{k_n,n}b_{k_n}\right]. \end{aligned}$$

利用行列式的多线性, 有

$$\begin{aligned} &\det(BA) \\ =\ &\det\left[\sum_{k_1=1}^{m}[A]_{k_1,1}b_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{m}[A]_{k_2,2}b_{k_2}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{m}[A]_{k_n,n}b_{k_n}\right] \\ =\ &\sum_{k_1=1}^{m}[A]_{k_1,1}\det\left[b_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{m}[A]_{k_2,2}b_{k_2}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{m}[A]_{k_n,n}b_{k_n}\right] \\ =\ &\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m}[A]_{k_1,1}[A]_{k_2,2}\det\left[b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{m}[A]_{k_n,n}b_{k_n}\right] \\ =\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ =\ &\sum_{1\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant m}[A]_{k_1,1}[A]_{k_2,2}\cdots[A]_{k_n,n}\det[b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, b_{k_n}]. \end{aligned}$$

记 $f(k_1, k_2, \cdots, k_n) = [A]_{k_1,1}[A]_{k_2,2}\cdots[A]_{k_n,n}\det[b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, b_{k_n}]$. 根据行列式的交错性, 当 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 中有二个数相同时, $f(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 0$.

(1) 若 $n > m$, 则 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 中总是有二个相同 (抽屉原理). 所以, 每一项都是零. 故 $\det(BA) = 0$.

(2) 若 $n \leqslant m$, 那么 $\det(BA)$ 等于

$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m}\ \sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 是}\\ j_1,j_2,\cdots,j_n\text{ 的排列}}}[A]_{k_1,1}[A]_{k_2,2}\cdots[A]_{k_n,n}\det[b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, b_{k_n}].$$

因为 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leqslant m$, 且 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的排列, 故

$$\det[b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, b_{k_n}] = s(k_1, k_2, \cdots, k_n)\det[b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_n}],$$

从而 $\det(BA)$ 等于

$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m}\det[b_{j_1},b_{j_2},\cdots,b_{j_n}]\cdot\sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 是}\\ j_1,j_2,\cdots,j_n\text{ 的排列}}}s(k_1,k_2,\cdots,k_n)\,[A]_{k_1,1}[A]_{k_2,2}\cdots[A]_{k_n,n}.$$

注意到

$$\sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 是}\\ j_1,j_2,\cdots,j_n\text{ 的排列}}}s(k_1,k_2,\cdots,k_n)\,[A]_{k_1,1}[A]_{k_2,2}\cdots[A]_{k_n,n}=\det\left(A\begin{pmatrix}j_1,j_2,\cdots,j_n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right).$$

再注意到, 因为 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m$, 故, 由子阵的记号的定义,

$$[b_{j_1},b_{j_2},\cdots,b_{j_n}]=B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\j_1,j_2,\cdots,j_n\end{pmatrix}.$$

从而

$$\det(BA)=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant m}\det\left(B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\j_1,j_2,\cdots,j_n\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix}j_1,j_2,\cdots,j_n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right).$$

证毕.

1.31 杂例

例 1.126 设 A 是 n 级阵. 设 k 是数. 求证: $\det(kA) = k^n \det(A)$.

这里, 我展现一种用行列式定义的方法.
不过, 先回想定义:

定义 1.22 (行列式) 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的行列式

$$\det(A) = \begin{cases} [A]_{1,1}, & n = 1; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[A]_{i,1} \det(A(i|1)), & n \geqslant 2. \end{cases}$$

证 我们用数学归纳法证明此事. 取数 k. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对任何 n 级阵 A,

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 是正确的. 任取 1 级阵 $A = [a]$. 那么, $kA = [ka]$. 所以,

$$\det(kA) = ka = k^1 \det(A).$$

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取 m 级阵 A. 按 kA 的列 1 展开, 有

$$\begin{aligned} \det(kA) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1}[kA]_{i,1} \det((kA)(i|1)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1}k[A]_{i,1} \det((kA)(i|1)). \end{aligned}$$

注意到, 每个 $(kA)(i|1)$ 都是 $m-1$ 级阵. 并且, 不难验证, $(kA)(i|1) = k(A(i|1))$.
从而, 根据假定,

$$\det((kA)(i|1)) = k^{m-1} \det(A(i|1)).$$

所以

$$\begin{aligned}\det(kA) &= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}k[A]_{i,1}k^{m-1}\det(A(i|1))\\ &= kk^{m-1}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1))\\ &= k^m\det(A).\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

当然, 本题也有其他的解法. 若您适当地运用行列式的性质, 您或许能较简单地解此题.

在讲后一个例前, 我有必要提及阵的新记号.

定义 1.127 设 A, B, C, D 分别是 $m\times s$, $n\times s$, $m\times t$, $n\times t$ 阵. 我们约定, 记号

$$\begin{bmatrix} A & C\\ B & D\end{bmatrix}$$

表示一个 $(m+n)\times(s+t)$-阵 M, 且对任何不超过 $m+n$ 的正整数 i 与不超过 $s+t$ 的正整数 j,

$$[M]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\leqslant m,\ j\leqslant s;\\ [B]_{i-m,j}, & i>m,\ j\leqslant s;\\ [C]_{i,j-s}, & i\leqslant m,\ j>s;\\ [D]_{i-m,j-s}, & i>m,\ j>s.\end{cases}$$

比如, 设

$$A=\begin{bmatrix}10 & 12 & 14\\ 11 & 13 & 15\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}16 & 20 & 24\\ 17 & 21 & 25\\ 18 & 22 & 26\\ 19 & 23 & 27\end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 28 & 30 & 32 & 34 & 36 \\ 29 & 31 & 33 & 35 & 37 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 38 & 42 & 46 & 50 & 54 \\ 39 & 43 & 47 & 51 & 55 \\ 40 & 44 & 48 & 52 & 56 \\ 41 & 45 & 49 & 53 & 57 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 14 & 28 & 30 & 32 & 34 & 36 \\ 11 & 13 & 15 & 29 & 31 & 33 & 35 & 37 \\ 16 & 20 & 24 & 38 & 42 & 46 & 50 & 54 \\ 17 & 21 & 25 & 39 & 43 & 47 & 51 & 55 \\ 18 & 22 & 26 & 40 & 44 & 48 & 52 & 56 \\ 19 & 23 & 27 & 41 & 45 & 49 & 53 & 57 \end{bmatrix}.$$

设 A, B, C, D 分别是 $m \times s$, $n \times s$, $m \times t$, $n \times t$ 阵. 再设

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}.$$

不难验证, 若 $i \leqslant m$, 且 $j \leqslant s$, 则

$$M(i|j) = \begin{bmatrix} A(i|j) & C(i|) \\ B(|j) & D \end{bmatrix},$$

其中 $B(|j)$ 表示去除 B 的列 j 后得到的阵 (不去除它的行), $C(i|)$ 表示去除 C 的行 i 后得到的阵 (不去除它的列).

例 1.128 设 A, D 分别是 n, t 级阵. 设 C 是 $n \times t$ 阵. 求证:

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D),$$

其中左下角的 0 指 $t \times n$ 零阵.

我还是用定义解此题. 若您学过 “按多列 (行) 展开行列式”, 您或许能较简单地解此题.

证 我们用数学归纳法证明此事. 取 t 级阵 D. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对任何 n 级阵 A, 任何 $n\times t$ 阵 C,

$$\det\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & D\end{bmatrix}=\det(A)\det(D),$$

其中左下角的 0 指 $t\times n$ 零阵.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 是正确的. 设 $A=[a]$. 记

$$J=\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & D\end{bmatrix},$$

其中左下角的 0 指 $t\times 1$ 零阵. 则

$$\begin{aligned}
&\det(J)\\
=&\sum_{i=1}^{1+t}(-1)^{i+1}[J]_{i,1}\det(J(i|1))\\
=&\sum_{i=1}^{1}(-1)^{i+1}[J]_{i,1}\det(J(i|1))+\sum_{i=2}^{1+t}(-1)^{i+1}[J]_{i,1}\det(J(i|1))\\
=&(-1)^{1+1}[J]_{1,1}\det(J(1|1))+\sum_{i=2}^{1+t}(-1)^{i+1}0\det(J(i|1))\\
=&[A]_{1,1}\det(D)\\
=&\det(A)\det(D).
\end{aligned}$$

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取 m 级阵 A. 记

$$M=\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & D\end{bmatrix},$$

其中左下角的 0 指 $t\times m$ 零阵. 则

$$
\begin{aligned}
&\det(M)\\
=&\sum_{i=1}^{m+t}(-1)^{i+1}[M]_{i,1}\det(M(i|1))\\
=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[M]_{i,1}\det(M(i|1))+\sum_{i=m+1}^{m+t}(-1)^{i+1}[M]_{i,1}\det(M(i|1))\\
=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(M(i|1))+\sum_{i=m+1}^{m+t}(-1)^{i+1}0\det(M(i|1))\\
=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(M(i|1)).
\end{aligned}
$$

注意到, $1\leqslant i\leqslant m$ 时,

$$
M(i|1)=\begin{bmatrix} A(i|1) & C(i|) \\ 0 & D \end{bmatrix},
$$

其中左下角的 0 指 $t\times(m-1)$ 零阵. 根据假定,

$$
\det(M(i|1))=\det(A(i|1))\det(D).
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\det(M)=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1))\det(D)\\
=&\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1))\right)\det(D)\\
=&\det(A)\det(D).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

1.32 La lasta leciono

注 本节是选学内容; 换句话说, 您不学本节, 并不会影响您对任何必学内容 (也就是, 未声明为 "选学内容" 的节) 的理解.

这是 "最后一课", la lasta leciono.

恭喜! 您学完了本章; 或者说, 我的行列式课程完了. 您可能会想: "我还能再学些什么?" 我认为, 这个问题, 较难回答: 毕竟, 行列式只是一个工具而已. 比如, 学完我的课程后, 可以进一步地学习线性代数 (或高等代数).

若您想见别的文献, 以下的说明或许对您是有用的.

习惯地, 几乎每一个 (说汉语的) 作者都说 "矩阵", 而不是 "阵" (当然, "方阵" 是一个例外).

习惯地, 人们叫一个 $1 \times n$ 阵为一个行向量, 叫一个 $m \times 1$ 阵为一个列向量. 行向量与列向量可被统一地叫作向量. 不过, 当初我写作时, 不想给您较多挑战, 故我未正式地引入 "向量" 二字.

我一般表 A 的 (i, j)-元以 $[A]_{i,j}$. 此记号自然是较准确的; 并且, 我们甚至可自由地代括号里的单文字 A 以较复杂的文字, 如 $3A + 4B$ (当 A, B 是同尺寸的阵时), 且较方便地作计算:

$$[3A + 4B]_{i,j} = [3A]_{i,j} + [4B]_{i,j} = 3[A]_{i,j} + 4[B]_{i,j}.$$

不过, 此记号自然是较复杂的.

其实, 大多数作者, 习惯地, 不用记号 $[A]_{i,j}$, 而是用较简单的记号 a_{ij} (注意到, 这儿没有逗号):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [A]_{m,1} & [A]_{m,2} & \cdots & [A]_{m,n} \end{bmatrix}.$$

于是, 在此写法下, A 的 $(2, 3)$-元是 a_{23}, B 的 $(4, 2)$-元是 b_{42} (但是, 若 i, j 的一个不能被 "单文字" 表示时, 逗号仍被用: 比如, C 的 $(11, 9)$-元是 $c_{11,9}$). 这种记号可被较方便地写, 但是, 这种记号, 要求阵被 "单文字" 表示. 比如, 设 A, B 分别是 $m \times s$, $s \times n$ 阵. 习惯地, 不写 AB 的 (i, j)-元为 ab_{ij} (因为, ab_{ij}, 习惯

地, 会被理解为一个数 a 跟 B 的 (i,j)-元 b_{ij} 的积), 而是记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ (也就是说, 为 $\boldsymbol{AB}$ 取 "小名" $\boldsymbol{C}$), 再说 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j)-元

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

有的作者不用括号 [ ], 而是用括号 ( ), 以包围数表, 作成一个阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

有的作者用大写拉丁字母 $\boldsymbol{O}$ 表示一个零阵.

有的作者用大写拉丁字母 $\boldsymbol{E}$ 表示一个单位阵. 也有的作者用阿拉伯数字 1 表示一个单位阵.

有的作者用加粗的文字表示阵. 具体地, 他们写 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{I}$, $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{O}$, $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$, $\cdots$, 而不是 A, B, C, E, I, 1, O, 0, x, $\cdots$. 这较好地区分了阵与不是阵的对象. 不过, 加粗的文字不便手写, 故此类记号一般是印刷专用的.

一些作者, 习惯地, 写一个方阵 A 的行列式 $\det(A)$ 为 $|A|$. 若 A 的元被具体地写出, 则有记号

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right| \\ &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

其实, 历史地, 行列式比阵早出现; 于是, 行列式有专门的竖线记号.

一些作者讲行列式时, 会提及 "余子式" 与 "代数余子式". 通俗地, 一个

方阵 A 的 (i,j)-元 $a_{i,j}$ 的余子式 $M_{i,j}$, 是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

一个方阵 A 的 (i,j)-元 $a_{i,j}$ 的代数余子式 $A_{i,j}$ (有的作者记其为 $C_{i,j}$), 是 $(-1)^{i+j}M_{i,j}$. 于是, 不难看出, 对任何不超过 n 的正整数 i, j,

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1}a_{i,1}M_{i,1} + (-1)^{i+2}a_{i,2}M_{i,2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{i,n}M_{i,n} \\ &= (-1)^{1+j}a_{1,j}M_{1,j} + (-1)^{2+j}a_{2,j}M_{2,j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{n,j}M_{n,j}, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n} \\ &= a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}. \end{aligned}$$

我没有讲这二个概念, 因为我引入了子阵**及其记号** (有些作者不介绍表示子阵的记号). 其实, 余子式就是子阵的行列式: $M_{i,j} = \det(A(i|j))$. 这么看来, 我不必引入余子式, 也不必引入代数余子式了. 并且, 我 “不想给您较多挑战”.

有的作者写方阵 A 的古伴 $\operatorname{adj}(A)$ 为 A^*, 且叫 “古伴” (即 “古典伴随阵”) 为 “伴随” “伴随阵”.

我希望, 这些说明, 可助您较顺利地适应其他的文献上的符号. 或许, 就像嬴政统一文字那样, 数学的符号也应被统一; 可是, 此事有些难. 我能作的事, 至多是助您适应这些符号.

最后, 我想说, 行列式并不只是代数的工具. 行列式在微积分与几何里也是有用的; 您可以去相关的文献里找到更多的讨论.

我就说这么多. 再见.

附录 A　2 元 2 次式

本章, 我们研究 2 元 2 次式.

A.1　准备

为方便, 定义

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ & - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}. \end{aligned}$$

可用此法助记此式. 此式含 6 项, 每一项都是不同行不同列的 3 个数的积. 我们在原 3 行 3 列的数表的右侧复写它, 作成一个 3 行 6 列的数表. 由左上至右下的对角线 (实线) 上的数的积的和减由右上至左下的对角线 (虚线) 上的数的积的和即为得数.

$$\begin{array}{|ccc|ccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}$$

本章的 “数” 都是复数. 这是因为, 在我们的讨论里, 我们要 “开根”, 而不是所有的实数都能 (在实数里) 开根 (比如, 一定不存在实数 x 使 $x^2 = -1$). 但是, 我们总是可以在复数里开根. 具体地,

定理 A.1　设 z 是复数. 一定存在复数 w 使 $w^2 = z$.

有时, 我们还要 “开立方根”. 我们在中学里知道, 每一个实数都能 (在实数里) 开立方根. 不过, 进一步地, 我们也有

定理 A.2　设 z 是复数. 一定存在复数 v 使 $v^3 = z$.

在此, 我就不证明这二个定理了. 就像在中学时, 您接受 “对任何的非负实数 y, 必有非负实数 x 使 $x^2 = y$” 与 “对任何的实数 y, 必有实数 u 使 $u^3 = y$” 那样, 您也接受它们就好. 我们要讨论的内容并不依赖它们如何被论证.

下面, 我展现一些我们要用到的恒等式.

定理 A.3 设 a, b, x 是复数, 且 $a \neq 0$. 则

$$ax^2 + 2bx = \frac{(ax+b)^2 - b^2}{a}.$$

特别, 取 $a = 1$, 知

$$x^2 + 2bx = (x+b)^2 - b^2.$$

证

$$\begin{aligned}\frac{(ax+b)^2 - b^2}{a} &= \frac{(ax+b+b)(ax+b-b)}{a} \\ &= \frac{(ax+2b)ax}{a} \\ &= (ax+2b)x \\ &= ax^2 + 2bx.\end{aligned}$$

证毕.

定理 A.4 设 a, b 是复数. 则

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

证

$$\begin{aligned}a^3 - b^3 &= a^3 - ab^2 + ab^2 - b^3 \\ &= a(a^2 - b^2) + (a-b)b^2 \\ &= (a-b)a(a+b) + (a-b)b^2 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

最后, 换 b 为 $-b$, 即得另一个公式. 证毕.

定理 A.5 设 $\omega = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$. 则 $\omega^2 + \omega = -1$, 且 $\omega^3 = 1$.

证 注意到 $2\omega + 1 = \mathrm{i}\sqrt{3}$. 平方, 可知

$$4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3.$$

整理, 即知.

最后, 注意到 $1 = 1^2 = 1^3$, $\omega = \omega \cdot 1$, 故

$$\omega^3 = 1 + (\omega^3 - 1^3) = 1 + (\omega - 1)(\omega^2 + \omega \cdot 1 + 1^2) = 1.$$ 证毕.

定理 A.6 设 a, b 是复数. 则

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3.$$

证

$$\begin{aligned}
&a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
=\ &a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\
=\ &(a+b)(a^2 - ab + b^2) + (a+b)(3ab) \\
=\ &(a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\
=\ &(a+b)^3.
\end{aligned}$$

最后, 换 b 为 $-b$, 即得另一个公式. 证毕.

定理 A.7 设 a, b, c 是复数. 设 $\omega = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$. 则

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
&= (a+b+c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c).
\end{aligned}$$

证

$$\begin{aligned}
&a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
=\ &a^3 + ((b+c)^3 - 3b^2c - 3bc^2) - 3abc \\
=\ &a^3 + (b+c)^3 - (a+b+c)(3bc) \\
=\ &(a + (b+c))(a^2 - a(b+c) + (b+c)^2) - (a+b+c)(3bc) \\
=\ &(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
=&4(a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2))\\
=&(2a)^2-2\cdot 2a\cdot(b+c)+4(b^2-bc+c^2)\\
=&(2a-b-c)^2-(b+c)^2+(4b^2-4bc+4c^2)\\
=&(2a-b-c)^2+3(b^2-2bc+c^2)\\
=&(2a-b-c)^2-(2\omega+1)^2(b-c)^2\\
=&(2a-b-c+(2\omega+1)(b-c))(2a-b-c-(2\omega+1)(b-c))\\
=&(2a+2\omega b-2(\omega+1)c)(2a-2(\omega+1)b+2\omega c)\\
=&4(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
=&(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).
\end{aligned}$$

证毕.

定理 A.8 设 x, b, c 是复数. 设 $\omega=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$. 则

$$x^3-3bcx-(b^3+c^3)=(x-(b+c))(x-(\omega b+\omega^2 c))(x-(\omega^2 b+\omega c)).$$

证 代上个定理的 a, b, c 以 $x, -b, -c$. 证毕.

上个定理允许我们解缺 2 次项的 1 元 3 次方程.

具体地, 设 $Ax^3+Cx+D=0$ 是缺 2 次项的 1 元 3 次方程 ($A\neq 0$). 以 A 除方程的二侧, 有

$$x^3+C'x+D'=0,$$

其中 $C'=C/A$, $D'=D/A$. 若 $C'=0$, 这就是开立方根问题. 下设 $C'\neq 0$.

考虑方程组

$$\begin{cases}-3uv=C',\\ -(u^3+v^3)=D'.\end{cases}$$

若我们能找到一组解 $u = u_0, v = v_0$, 取 b, c 为 u_0, v_0. 则

$$\begin{aligned} x^3 + C'x + D' &= x^3 - 3bcx - (b^3 + c^3) \\ &= (x - (b + c))(x - (\omega b + \omega^2 c))(x - (\omega^2 b + \omega c)). \end{aligned}$$

这样, 我们就找到了 $x^3 + C'x + D' = 0$ 的解.

现在, 我们只要解方程组

$$\begin{cases} -3uv = C', \\ -(u^3 + v^3) = D'. \end{cases}$$

我们先考虑, 若 $u = u_0, v = v_0$ 是一组解, 它们应适合什么性质. 既然 $C' \neq 0$, 且 $-3u_0v_0 = C'$, 故 $v_0 = -\frac{C'}{3u_0}$. 从而

$$-u_0^3 + \frac{(C')^3}{27u_0^3} = D'.$$

也就是说, u_0^3 是 1 元 2 次方程

$$z^2 + D'z - \frac{(C')^3}{27} = 0$$

的解.

我们熟知, 1 元 2 次方程总是有一个解. 故, 我们设复数 z_0 适合

$$z_0^2 + D'z_0 - \frac{(C')^3}{27} = 0.$$

开立方根, 可知, 存在一个复数 b 使 $b^3 = z_0$. 再记 $c = -\frac{C'}{3b}$. 不难验证, 这么取的 b, c 适合 $-3bc = C'$, 且 $-(b^3 + c^3) = D'$.

定理 A.9 作适当的换元, 每一个 1 元 3 次方程都可被化为缺 2 次项的方程.

证 取 1 元 3 次方程 $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. 代 x 以 $y - \frac{B}{3A}$, 有

$$Ay^3 + \left(C - \frac{B^2}{3A}\right)y + D + \frac{2B^3}{27A^2} - \frac{BC}{3A} = 0.$$

证毕.

所以, 理论地, 我们可解任何一个 1 元 3 次方程. 不过, 这种解方程的方法有些复杂, 故我们一般不用它.

A.2　2 元 2 次式

设 A, B, C, D, E, F 为复数. 形如

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

的式是一个 2 元 ⩽2 次式. 若 A, B, C 至少有一个不是零, 就说它是一个 2 元 2 次式. 若 A, B, C 全是零, 就说它是一个 2 元 ⩽1 次式. 若 A, B, C 全是零, 但 D, E 至少有一个不是零, 就说它是一个 2 元 1 次式; 若 A, B, C, D, E 都是零, 那么它就是一个常数.

定理 A.10　设 A, B, C, D, E, F 为复数. 设 $f(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$. 那么, 当 A, B, C, D, E, F 全为零时, 对任何的复数对 (z,w), $f(z,w)=0$. 反过来, 若对任何的复数对 (z,w), $f(z,w)=0$, 则 A, B, C, D, E, F 全为零.

证　前半部分是显然的, 因为零跟任何数的积都是零. 我们看后半部分.

假定, 对任何的复数对 (z,w), $f(z,w) = 0$. 因为 $f(0,0) = 0$, 故 $F = 0$. 因为 $f(1,0) = A + 2D + F = A + 2D = 0$, 且 $f(-1,0) = A - 2D + F = A - 2D = 0$, 故 $A = D = 0$. 因为 $f(0,1) = C + 2E + F = C + 2E = 0$, 且 $f(0,-1) = C - 2E + F = C - 2E = 0$, 故 $C = E = 0$. 最后, 因为 $f(1,1) = A + 2B + C + 2D + 2E + F = 2B = 0$, 故 $B = 0$.　证毕.

定理 A.11　设 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ 都是复数. 设 $f_i(x,y) = A_ix^2 + 2B_ixy + C_iy^2 + 2D_ix + 2E_iy + F_i$ $(i = 1, 2)$. 那么, "对任何复数对 (z,w), 必 $f_1(z,w) = f_2(z,w)$" 相当于 "$A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, $D_1 = D_2$, $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$".

证　设

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f_1(x,y) - f_2(x,y) \\ &= (A_1 - A_2)x^2 + 2(B_1 - B_2)xy + (C_1 - C_2)y^2 \\ &\quad + 2(D_1 - D_2)x + 2(E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2). \end{aligned}$$

施上个定理于 $g(x,y)$ 即可.　证毕.

定义 A.12　设 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$. 定义 $f(x,y)$ 的判别式

$$\begin{aligned}\varDelta=&\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}\\ =&ACF+BED+DBE-AEE-BBF-DCD\\ =&ACF+2BED-(AE^2+CD^2+FB^2).\end{aligned}$$

2 元 ⩽2 次式 $f(x,y)$ 的判别式是否为零与是否可写 $f(x,y)$ 为二个 2 元 ⩽1 次式的积有关.

定理 A.13　设 $f(x,y)=(a_1x+a_2y+a_3)(a_4x+a_5y+a_6)$. 则 $f(x,y)$ 的判别式为零.

证　展开 $f(x,y)$, 有

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F,$$

其中

$$\begin{aligned}&A=a_1a_4,\quad C=a_2a_5,\quad F=a_3a_6,\\ &2B=a_1a_5+a_2a_4,\\ &2D=a_1a_6+a_3a_4,\\ &2E=a_2a_6+a_3a_5.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\varDelta=&ACF+2BED-(AE^2+CD^2+FB^2)\\ =&\frac{1}{4}(4ACF+2B\cdot 2E\cdot 2D)-\frac{1}{4}(A(2E)^2+C(2D)^2+F(2B)^2)\\ =&\frac{1}{4}(4a_1a_2a_3a_4a_5a_6+a_2a_3^2a_5a_4^2+a_2^2a_3a_6a_4^2+a_1a_3^2a_5^2a_4+a_1a_2^2a_6^2a_4\\ &\quad+2a_1a_2a_3a_5a_6a_4+a_1^2a_2a_5a_6^2+a_1^2a_3a_5^2a_6)\\ &-\frac{1}{4}(a_1a_3^2a_4a_5^2+2a_1a_2a_3a_4a_6a_5+a_1a_2^2a_4a_6^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+a_2a_3^2a_5a_4^2+2a_1a_2a_3a_5a_6a_4+a_1^2a_2a_5a_6^2\\
&+a_2^2a_3a_6a_4^2+2a_1a_2a_3a_5a_6a_4+a_1^2a_3a_5^2a_6)\\
=\ &0.
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 A.14　设 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ 的判别式为零. 则存在复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 使

$$f(x,y)=(a_1x+a_2y+a_3)(a_4x+a_5y+a_6).$$

证　设

$$\Delta=ACF+2BED-(AE^2+CD^2+FB^2)=0.$$

我们分类讨论.

(1) $A=B=C=0$. 则

$$f(x,y)=2Dx+2Ey+F=(0x+0y+1)(2Dx+2Ey+F).$$

(2) $A=C=0$, 但 $B\neq 0$. 则

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=2Bxy+2Dx+2Ey+F\\
&=\frac{2}{B}(Bx\cdot By+D\cdot Bx+E\cdot By)+F\\
&=\frac{2}{B}(Bx\cdot By+D\cdot Bx+E\cdot By+DE-DE)+F\\
&=\frac{2}{B}(Bx\cdot By+D\cdot Bx+E\cdot By+DE)-\frac{2}{B}\cdot DE+F\\
&=\frac{2}{B}(Bx+E)(By+D)-\frac{2ED-FB}{B}\\
&=\left(1x+0y+\frac{E}{B}\right)(0x+2By+2D)-\frac{2BED-FB^2}{B^2}.
\end{aligned}
$$

因为 $\Delta=0$, 且 $A=C=0$, 故

$$\Delta=0+2BED-(0+0+FB^2)=2BED-FB^2=0.$$

从而

$$f(x,y)=\left(1x+0y+\frac{E}{B}\right)(0x+2By+2D).$$

(3) $A \neq 0$. 则

$$
\begin{aligned}
& f(x, y) \\
= & Ax^2 + 2(By + D)x + (Cy^2 + 2Ey + F) \\
= & \frac{(Ax + By + D)^2 - (By + D)^2}{A} + (Cy^2 + 2Ey + F) \\
= & \frac{1}{A}(Ax + By + D)^2 + \frac{1}{A}((AC - B^2)y^2 + 2(AE - BD)y) + \frac{AF - D^2}{A}.
\end{aligned}
$$

我们要进一步地分类讨论.

(3.1) $AC - B^2 = 0$. 此时, $C = \frac{B^2}{A}$. 故

$$
\begin{aligned}
\varDelta &= A \cdot \frac{B^2}{A} \cdot F + 2BED - AE^2 - \frac{B^2 D^2}{A} - FB^2 \\
&= -\frac{1}{A}(A^2 E^2 - 2AEBD + B^2 D^2) \\
&= -\frac{1}{A}(AE - BD)^2.
\end{aligned}
$$

因为 $\varDelta = 0$, 故 $AE - BD = 0$. 从而

$$
f(x, y) = \frac{(Ax + By + D)^2 - (D^2 - AF)}{A}.
$$

设复数 d 适合 $d^2 = D^2 - AF$. 则

$$
f(x, y) = \frac{1}{A}(Ax + By + D + d)(Ax + By + D - d).
$$

也就是

$$
f(x, y) = \left(1x + \frac{B}{A}y + \frac{D + d}{A}\right)(Ax + By + (D - d)).
$$

(3.2) $AC - B^2 \neq 0$. 此时

$$
\begin{aligned}
& (AC - B^2)y^2 + 2(AE - BD)y \\
= & \frac{1}{AC - B^2}((AC - B^2)y + (AE - BD))^2 - \frac{(AE - BD)^2}{AC - B^2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(x, y) = \quad & \frac{(Ax + By + D)^2}{A} - \frac{((B^2 - AC)y + (BD - AE))^2}{A(B^2 - AC)} \\
& + \frac{AF - D^2}{A} - \frac{(AE - BD)^2}{A(AC - B^2)}.
\end{aligned}
$$

也就是

$$f(x,y)=\frac{(Ax+By+D)^2}{A}-\frac{((B^2-AC)y+(BD-AE))^2}{A(B^2-AC)}+\frac{\Delta}{AC-B^2}.$$

因为 $\Delta=0$, 故

$$f(x,y)=\frac{(Ax+By+D)^2}{A}-\frac{((B^2-AC)y+(BD-AE))^2}{A(B^2-AC)}.$$

设复数 e 适合 $e^2=B^2-AC$. 设 $f=\frac{BD-AE}{e}$. 则

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=\frac{(Ax+By+D)^2}{A}-\frac{(e^2y+ef)^2}{Ae^2}\\
&=\frac{(Ax+By+D)^2}{A}-\frac{(ey+f)^2}{A}\\
&=\frac{1}{A}(Ax+By+D+ey+f)(Ax+By+D-ey-f)\\
&=\left(1x+\frac{B+e}{A}y+\frac{D+f}{A}\right)(Ax+(B-e)y+(D-f)).
\end{aligned}$$

(4) $C\neq 0$. 则

$$f(x,y)=Cy^2+2Byx+Ax^2+2Ey+2Dx+F.$$

考虑 2 元 ⩽2 次式

$$g(x,y)=Cx^2+2Bxy+Ay^2+2Ex+2Dy+F.$$

换句话说, 对任何复数对 (z,w),

$$g(z,w)=f(w,z).$$

我们计算 $g(x,y)$ 的判别式:

$$\begin{aligned}
\Delta'&=\begin{vmatrix}C&B&E\\B&A&D\\E&D&F\end{vmatrix}\\
&=CAF+2BDE-(CD^2+AE^2+FB^2)\\
&=ACF+2BED-(AE^2+CD^2+FB^2)\\
&=\Delta.
\end{aligned}$$

从而, 由 (3), 存在复数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 使

$$g(x,y) = (a_1x + a_2y + a_3)(a_4x + a_5y + a_6).$$

所以

$$f(x,y) = g(y,x) = (a_2x + a_1y + a_3)(a_5x + a_4y + a_6).$$

证毕.

综上, 我们得到本章的重要的定理:

定理 A.15 设 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$. 若 $f(x,y)$ 的判别式为零, 则我们必可写其为二个 (复系数的) 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积; 反过来, 若 $f(x,y)$ 是二个 (复系数的) 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积, 则其判别式必为零.

我们看二个例.

例 A.16 设

$$b(x,y) = 24x^2 + 20xy - 16y^2 - 14x - 26y - 2.$$

A, B, C, D, E, F 分别是 24, 10, −16, −7, −13, −2. 由此可知, $b(x,y)$ 之判别式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 24 & 10 & -7 \\ 10 & -16 & -13 \\ -7 & -13 & -2 \end{vmatrix} = -484.$$

所以, 我们无法写其为二个 (关于 x, y 的) 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积.

例 A.17 设 $f(x,y) = x^2 + y^2$. 不难算出, $f(x,y)$ 的判别式是 0. 所以, $f(x,y)$ 可被写为二个 (关于 x, y 的) 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积.

但是, 这二个 $\leqslant 1$ 次式的系数不能全是实数.

反设存在**实数** $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 使

$$x^2 + y^2 = (a_1x + a_2y + a_3)(a_4x + a_5y + a_6).$$

代 x, y 以 0, 0, 知 $0 = a_3a_6$. 因为乘法是可交换的, 故无妨设 $a_3 = 0$.

代 x, y 以 1, 0, 知 $1 = a_1(a_4 + a_6)$; 代 x, y 以 −1, 0, 知 $1 = -a_1(-a_4 + a_6) = a_1(a_4 - a_6)$. 由此可知 $a_4 + a_6 = a_4 - a_6$, 故 $a_6 = 0$. 从而 $a_1a_4 = 1$. 故 $a_4 = a_1^{-1}$.

代 x, y 以 0, 1, 知 $a_2a_5 = 1$. 故 $a_5 = a_2^{-1}$. 从而

$$x^2 + y^2 = (a_1x + a_2y)(a_1^{-1}x + a_2^{-1}y).$$

代 x, y 以 1, 1, 有

$$2 = (a_1 + a_2) \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1a_2},$$

即

$$a_1^2 + a_2^2 = 0.$$

所以

$$0 = (a_1^2 + a_2^2) \cdot a_5^2 = (a_1a_5)^2 + 1.$$

因为 a_1, a_5 是实数, 故 a_1a_5 也是实数. 但是, 我们知道, 任何实数的平方加 1 不可能是 0. 这是矛盾.

其实,

$$x^2 + y^2 = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y).$$

A.3 2 元 2 次方程组

本节, 我们讨论如何求解方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0, \end{cases} \tag{A.1}$$

其中 $f_i(x,y)=A_ix^2+2B_ixy+C_iy^2+2D_ix+2E_iy+F_i\ (i=1,2)$.

我们看一个简单的例.

例 A.18 解方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)=x^2-y^2-4x+4=0, \\ f_2(x,y)=x^2+y^2-2x=0. \end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned} f_1(x,y)&=x^2-y^2-4x+4 \\ &=(x^2-4x+4)-y^2 \\ &=(x-2)^2-y^2 \\ &=(x-2+y)(x-2-y). \end{aligned}$$

故

$$x=2-y \quad 或 \quad x=2+y.$$

联立 $x=2-y$ 与 $f_2(x,y)=0$, 可解出

$$(x,y)=(1,1) \quad 或 \quad (x,y)=(2,0).$$

联立 $x=2+y$ 与 $f_2(x,y)=0$, 可解出

$$(x,y)=(1,-1) \quad 或 \quad (x,y)=(2,0).$$

经验证, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,0)$ 都是解.

不难算出 $f_1(x,y)$ 的判别式

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

所以, 理论地, $f_1(x,y)$ 确实可被写为二个 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积. 不过, $f_2(x,y)$ 的判别式

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

所以, $f_2(x,y)$ 不可被写为二个 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积.

由此可见, 若我们能写方程组 (A.1) 的一个方程的左侧为二个 2 元 $\leqslant 1$ 次式的积, 则我们可解二次 (dufoje) 1 元 $\leqslant 2$ 次方程, 以算出方程组的解.

不过, 不是所有的方程组都这么简单.

例 A.19　解方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 11 = 0, \\ f_2(x,y) = 3x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0. \end{cases}$$

我们试用老方法解此方程组. 不过, 试了试, 发现 $f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 好像都 “不可被分解”. 此时, 我们来计算判别式. $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ 的判别式分别是

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -36,$$

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 13.$$

看来, 我们没法像上个例那样简单地解此方程组.

不过, 我们并非无计可施.

定理 A.20　设 k 是复数. 则方程组 (A.1) 与方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)+kf_2(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \tag{A.2}$$

同解.

证　任取方程组 (A.1) 的一个解 (s,t). 于是, $f_1(s,t)=f_2(s,t)=0$. 从而 $f_1(s,t)+kf_2(s,t)=0+k0=0$. 也就是说, 方程组 (A.1) 的每一个解都是方程组 (A.2) 的解.

反过来, 任取方程组 (A.2) 的一个解 (u,v). 于是, $f_1(u,v)+kf_2(u,v)=f_2(u,v)=0$. 从而 $f_1(u,v)=(f_1(u,v)+kf_2(u,v))-kf_2(u,v)=0-k0=0$. 也就是说, 方程组 (A.2) 的每一个解都是方程组 (A.1) 的解.　　证毕.

根据上个定理, 方程组 (A.1) 与方程组 (A.2) 同解. 那么, 能否取适当的 k, 使方程组 (A.2) 的首个方程的左侧可被写为二个 2 元 ⩽1 次式的积? 我们计算 $f_3(x,y)=f_1(x,y)+kf_2(x,y)$ 的判别式:

$$\begin{aligned}\varDelta_3 &= \begin{vmatrix} A_1+kA_2 & B_1+kB_2 & D_1+kD_2 \\ B_1+kB_2 & C_1+kC_2 & E_1+kE_2 \\ D_1+kD_2 & E_1+kE_2 & F_1+kF_2 \end{vmatrix} \\ &= \varDelta_1+c_1k+c_2k^2+\varDelta_2k^3,\end{aligned}$$

其中, $\varDelta_i$ 是 $f_i(x,y)$ 的判别式 $(i=1,2)$, 且

$$c_1=\begin{vmatrix} A_2 & B_1 & D_1 \\ B_2 & C_1 & E_1 \\ D_2 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_1 & B_2 & D_1 \\ B_1 & C_2 & E_1 \\ D_1 & E_2 & F_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_2 \\ B_1 & C_1 & E_2 \\ D_1 & E_1 & F_2 \end{vmatrix},$$

$$c_2=\begin{vmatrix} A_1 & B_2 & D_2 \\ B_1 & C_2 & E_2 \\ D_1 & E_2 & F_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_2 & B_1 & D_2 \\ B_2 & C_1 & E_2 \\ D_2 & E_1 & F_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_1 \\ B_2 & C_2 & E_1 \\ D_2 & E_2 & F_1 \end{vmatrix}.$$

$\varDelta_3$ 是一个 (关于 k 的) 1 元 ⩽3 次式, 故 $\varDelta_3=0$ 是一个 1 元 ⩽3 次方程. 理论地, 这是可解的. 解出一个 k. 从而, 我们可用 “老方法” 解跟方程组 (A.1) 同解的方程组 (A.2), 进而得到方程组 (A.1) 的解.

例 A.19 (续)　我们解当时未能求解的方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 11 = 0, \\ f_2(x,y) = 3x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0. \end{cases}$$

待定复数 k. 作出同解方程组

$$\begin{cases} f_3(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f_3(x,y) &= f_1(x,y) + k f_2(x,y) \\ &= (1+3k)x^2 + (3-k)y^2 + 2(1-2k)x + (-3k-11). \end{aligned}$$

计算 $f_3(x,y)$ 的判别式

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1+3k & 0 & 1-2k \\ 0 & 3-k & 0 \\ 1-2k & 0 & -3k-11 \end{vmatrix} \\ &= (k-3)(13k^2+32k+12). \end{aligned}$$

所以, 我们可取 $k=3$. 则

$$f_3(x,y) = 10x^2 - 10x - 20 = 10(x-2)(x+1).$$

从而 $x=2$ 或 $x=-1$. 联立 $x=2$ 与 $f_2(x,y)=0$, 可解出

$$(x,y) = (2,1) \quad \text{或} \quad (x,y) = (2,-1).$$

联立 $x=-1$ 与 $f_2(x,y)=0$, 可解出

$$(x,y) = (-1,2) \quad \text{或} \quad (x,y) = (-1,-2).$$

经验证, $(2,1), (2,-1), (-1,2), (-1,-2)$ 都是解.

A.4 1 元 4 次方程

我们知道, 理论地, 每一个 1 元 m 次方程都是可被 (根式) 求解的, 其中 $m=1,2,3$. 现在, 我展现一种解 1 元 4 次方程的方法.

任取一个 1 元 4 次方程 $Ax^4+2Dx^3+Fx^2+2Ex+C=0$, 其中 $A\neq 0$. 若 $C=0$, 则我们可写

$$Ax^4+2Dx^3+Fx^2+2Ex=x(Ax^3+2Dx^2+Fx+2E).$$

括号里有一个 1 元 3 次式. 这, 理论地, 是可解的. 所以, 接下来, 我们假定 $C\neq 0$.

假定 s 是 $Ax^4+2Dx^3+Fx^2+2Ex+C=0$ 的一个解. 因为 $C\neq 0$, 故 $s\neq 0$. 从而

$$As^2+2Ds+F+\frac{2E}{s}+\frac{C}{s^2}=0.$$

由此可见, $(s,1/s)$ 是 2 元 2 次方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)=Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \\ f_2(x,y)=2xy-2=0 \end{cases} \tag{A.3}$$

的一个解.

反过来, 设 (u,v) 是这个方程组的一个解. 那么, $v=1/u$. 从而

$$Au^2+\frac{C}{u^2}+2Du+\frac{2E}{u}+F=0,$$

即

$$Au^4+C+2Du^3+2Eu+Fu^2=0.$$

故 u 是 $Ax^4+2Dx^3+Fx^2+2Ex+C=0$ 的一个解.

这么看来, 我们可变解 1 元 4 次方程的问题为解 2 元 2 次方程组的问题.

待定复数 k. 作一个跟方程组 (A.3) 同解的方程组

$$\begin{cases} f_3(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f_3(x,y) &= f_1(x,y) + kf_2(x,y) \\ &= Ax^2 + 2kxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + (F-2k). \end{aligned}$$

计算 $f_3(x,y)$ 的判别式

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} A & k & D \\ k & C & E \\ D & E & F-2k \end{vmatrix} \\ &= 2k^3 - Fk^2 - 2(AC-DE)k + (ACF - AE^2 - CD^2). \end{aligned}$$

Δ_3 是一个 (关于 k 的) 1 元 3 次式, 故 $\Delta_3 = 0$ 是一个 1 元 3 次方程. 理论地, 这是可解的. 解出一个 k. 从而, 我们可用 “老方法” 解方程组, 进而得到 1 元 4 次方程的解.

例 A.21 解方程

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x - 24 = 0.$$

注意到 0 次项 (-24) 非零, 故此方程无零解. 考虑解方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 - 6x + 11 - 6y - 24y^2 = 0, \\ f_2(x,y) = 2xy - 2 = 0. \end{cases}$$

此方程组的解的首个分量即为原方程的解.

待定复数 k. 作出同解方程组

$$\begin{cases} f_3(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f_3(x,y) &= f_1(x,y) + kf_2(x,y) \\ &= x^2 + 2kxy - 24y^2 - 6x - 6y + (11-2k). \end{aligned}$$

计算 $f_3(x, y)$ 的判别式

$$\begin{aligned}\varDelta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ k & -24 & -3 \\ -3 & -3 & 11-2k \end{vmatrix} \\ &= (k-1)(2k^2-9k+57).\end{aligned}$$

所以, 我们可取 $k = 1$. 则

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= x^2 + 2xy - 24y^2 - 6x - 6y + 9 \\ &= x^2 + 2x(y-3) - 24y^2 - 6y + 9 \\ &= (x+y-3)^2 - (y-3)^2 - 24y^2 - 6y + 9 \\ &= (x+y-3)^2 - (5y)^2 \\ &= (x-4y-3)(x+6y-3). \end{aligned}$$

所以

$$x - 4y - 3 = 0 \quad 或 \quad x + 6y - 3 = 0.$$

从而

$$x^2 - 4xy - 3x = 0 \quad 或 \quad x^2 + 6xy - 3x = 0.$$

因为 $2xy - 2 = 0$, 故

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad 或 \quad x^2 - 3x + 6 = 0.$$

注意, 我们的目的是求解 (原方程的) x, 而 y 只是辅助量, 故我们用 $y = 1/x$ 消去了 y, 进而直接求解 x. 我们不必同时解出 x 与 y.

1 元 2 次方程是不难求解的. 不难算出

$$x = -1 \quad 或 \quad x = 4 \quad 或 \quad x = \frac{3 + \mathrm{i}\sqrt{15}}{2} \quad 或 \quad x = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{15}}{2}.$$

经验证, 它们都是原方程的解.

附录 B　求和号、求积号、数学归纳法

我在这儿简要地介绍求和号、求积号、数学归纳法.

B.1　求和号

为简便地表达求和, 人们聪明地作了 “求和号” $\sum$. (或许, 您知道, “和” 用 Esperanto 说, 是 sumo. 拉丁字母 S, s 对应希腊字母 Σ, σ/ς.)

设 $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ 是 $n-m+1$ 个数 ($n \geqslant m$). 我们可简单地写这 $n-m+1$ 个数的和

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \tag{B.1}$$

为

$$\sum_{i=m}^{n} a_i. \tag{B.2}$$

比如

$$6 + 5x + 4x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 = \sum_{i=0}^{5} (6-i)x^i,$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{i=1}^{n} i.$$

式 (B.2) 的 i 是 “求和指标”, 它只起一个辅助的作用. 当我们还原式 (B.2) 为式 (B.1) 时, 求和指标 i 不应出现. 比如, 我们也可写式 (B.1) 为

$$\sum_{j=m}^{n} a_j.$$

所以, 我们可用任何文字作求和指标, 除非此文字跟其他的文字混淆. 比如, s 行 t 列的矩形数表

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,t} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,t} \end{matrix} \tag{B.3}$$

的第 i 行的 t 个数的和是

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,t} = \sum_{j=1}^{t} a_{i,j}.$$

这里, 我们不能用文字 i 作求和指标, 因为

$$\sum_{i=1}^{t} a_{i,i}$$

的意思是

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{t,t}.$$

有时, 被加的数用二个或多个指标编号. 比如, 我们计算矩形数表 (B.3) 的 st 个数的和 S. 因为数的加法适合结合律与交换律, 故我们可按任何的次序求和. 特别地, 我们可以先求行 i 的 t 个数的和

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,t} = \sum_{j=1}^{t} a_{i,j},$$

再累加每一行的和, 即得

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{t} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{t} a_{2,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{t} a_{s,j} \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{t} a_{i,j} \right). \end{aligned}$$

为方便, 我们写

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{t} a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} a_{i,j}.$$

这就是 “2 重求和”.

当然, 我们还可以先求列 j 的 s 个数的和

$$a_{1,j} + a_{2,j} + \cdots + a_{s,j} = \sum_{i=1}^{s} a_{i,j},$$

再累加每一列的和, 即得

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{s} a_{i,1} + \sum_{i=1}^{s} a_{i,2} + \cdots + \sum_{i=1}^{s} a_{i,t} \\ &= \sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}. \end{aligned}$$

比较这二次计算的结果, 我们有

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}.$$

通俗地, 我们可 "交换求和号的次序", 而不影响和.

类似地, 我们可引入 "3 重求和"

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u} a_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u} a_{i,j,k}\right).$$

在此基础上, 我们可引入 "4 重求和"

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u}\sum_{\ell=1}^{v} a_{i,j,k,\ell} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{u}\sum_{\ell=1}^{v} a_{i,j,k,\ell}\right).$$

⋯ ⋯ 在此基础上, 我们可引入 "p 重求和"

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}}\sum_{i_p=1}^{n_p} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p} = \sum_{i_1=1}^{n_1}\left(\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}}\sum_{i_p=1}^{n_p} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p}\right).$$

特别地, 若 $n_1 = n_2 = \cdots = n_p = n$, 我们可简单地写

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{p-1}=1}^{n}\sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p} = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_p=1}^{n} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p}.$$

有时, 虽然被加的数用若干个指标编号, 但是被加的并不是其全部, 而是指标适合某些条件的那一部分. 这时, 我们在求和号下写出指标适合的条件. 比如

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\\
=\ & a_{1,2}\\
&+a_{1,3}+a_{2,3}\\
&+a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_{1,n}+a_{2,n}+\cdots+a_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

又比如, 若 ℓ 是某个不超过 n 的正整数, 则

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq\ell}} a_i = a_1+\cdots+a_{\ell-1}+a_{\ell+1}+\cdots+a_n.$$

最后, 有一件小事值得一提. 设 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 是一些被编号的数. 设 R_1, R_2 是关于指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的约束. 若不存在**同时**适合 R_1, R_2 的指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 则, 根据加法的结合律与交换律,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }R_1\text{ 或 }R_2} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\\
=&\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }R_1} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}+\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }R_2} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}.
\end{aligned}\tag{B.4}$$

比如,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant 10} i=\sum_{1\leqslant i\leqslant 4} i+\sum_{5\leqslant i\leqslant 10} i,$$
$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_{i,j}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{i,j}.$$

由此可见, 当**不存在**指标适合约束 N 时 (也就是说, N 是 “空约束” 时), 为使式 (B.4) 仍成立, 我们定义 (或, 约定)

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }N} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=0.\tag{B.5}$$

比如,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 1} a_{i,j} = 0.$$

为解释此约定, 我们任取一个约束 R. 既然不存在指标适合约束 N, 自然, 也不存在指标同时适合 N, R. 再注意到, “$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 适合 N 或 R” 相当于 “$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 适合 R”. 所以,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \\
= &\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } N \text{ 或 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \\
= &\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } N} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} + \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}.
\end{aligned}$$

化简, 即得式 (B.5).

B.2　求积号

为简便地表达求积, 人们聪明地作了 “求积号” $\prod$. (或许, 您知道, “积” 用 Esperanto 说, 是 produto. 拉丁字母 P, p 对应希腊字母 Π, π.)

设 $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ 是 $n-m+1$ 个数 $(n \geqslant m)$. 我们可简单地写这 $n-m+1$ 个数的积

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n \tag{B.6}$$

为

$$\prod_{i=m}^{n} a_i. \tag{B.7}$$

比如

$$6 \cdot 5x \cdot 4x^2 \cdot 3x^3 \cdot 2x^4 \cdot x^5 = \prod_{i=0}^{5} (6-i)x^i,$$

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

式 (B.7) 的 i 是 “求积指标”, 它只起一个辅助的作用. 当我们还原式 (B.7) 为式 (B.6) 时, 求积指标 i 不应出现. 比如, 我们也可写式 (B.6) 为

$$\prod_{j=m}^{n} a_j.$$

所以, 我们可用任何文字作求积指标, 除非此文字跟其他的文字混淆. 比如, s 行 t 列的矩形数表

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,t} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,t} \end{array} \tag{B.8}$$

的第 i 行的 t 个数的积是

$$a_{i,1} \cdot a_{i,2} \cdot \cdots \cdot a_{i,t} = \prod_{j=1}^{t} a_{i,j}.$$

这里, 我们不能用文字 i 作求积指标, 因为

$$\prod_{i=1}^{t} a_{i,i}$$

的意思是

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \cdots \cdot a_{t,t}.$$

有时, 被乘的数用二个或多个指标编号. 比如, 我们计算矩形数表 (B.8) 的 st 个数的积 P. 因为数的乘法适合结合律与交换律, 故我们可按任何的次序求积. 特别地, 我们可以先求行 i 的 t 个数的积

$$a_{i,1} \cdot a_{i,2} \cdot \cdots \cdot a_{i,t} = \prod_{j=1}^{t} a_{i,j},$$

再累乘每一行的积, 即得

$$\begin{aligned} P &= \prod_{j=1}^{t} a_{1,j} \cdot \prod_{j=1}^{t} a_{2,j} \cdot \cdots \cdot \prod_{j=1}^{t} a_{s,j} \\ &= \prod_{i=1}^{s} \left(\prod_{j=1}^{t} a_{i,j} \right). \end{aligned}$$

为方便, 我们写

$$\prod_{i=1}^{s} \left(\prod_{j=1}^{t} a_{i,j} \right) = \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{t} a_{i,j}.$$

这就是 “2 重求积”.

当然, 我们还可以先求列 j 的 s 个数的积

$$a_{1,j} \cdot a_{2,j} \cdot \cdots \cdot a_{s,j} = \prod_{i=1}^{s} a_{i,j},$$

再累乘每一列的积, 即得

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=1}^{s} a_{i,1} \cdot \prod_{i=1}^{s} a_{i,2} \cdot \cdots \cdot \prod_{i=1}^{s} a_{i,t} \\ &= \prod_{j=1}^{t} \left(\prod_{i=1}^{s} a_{i,j} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{t} \prod_{i=1}^{s} a_{i,j}. \end{aligned}$$

比较这二次计算的结果, 我们有

$$\prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{t} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{t} \prod_{i=1}^{s} a_{i,j}.$$

通俗地, 我们可 “交换求积号的次序”, 而不影响积.

类似地, 我们可引入 “3 重求积”

$$\prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{t} \prod_{k=1}^{u} a_{i,j,k} = \prod_{i=1}^{s} \left(\prod_{j=1}^{t} \prod_{k=1}^{u} a_{i,j,k} \right).$$

在此基础上, 我们可引入 “4 重求积”

$$\prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{t} \prod_{k=1}^{u} \prod_{\ell=1}^{v} a_{i,j,k,\ell} = \prod_{i=1}^{s} \left(\prod_{j=1}^{t} \prod_{k=1}^{u} \prod_{\ell=1}^{v} a_{i,j,k,\ell} \right).$$

$\cdots\cdots$ 在此基础上, 我们可引入 “p 重求积”

$$\prod_{i_1=1}^{n_1} \prod_{i_2=1}^{n_2} \cdots \prod_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}} \prod_{i_p=1}^{n_p} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p} = \prod_{i_1=1}^{n_1} \left(\prod_{i_2=1}^{n_2} \cdots \prod_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}} \prod_{i_p=1}^{n_p} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p} \right).$$

特别地, 若 $n_1 = n_2 = \cdots = n_p = n$, 我们可简单地写

$$\prod_{i_1=1}^{n} \prod_{i_2=1}^{n} \cdots \prod_{i_{p-1}=1}^{n} \prod_{i_p=1}^{n} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p} = \prod_{i_1,i_2,\cdots,i_p=1}^{n} a_{i_1,i_2,\cdots,i_{p-1},i_p}.$$

有时, 虽然被乘的数用若干个指标编号, 但是被乘的并不是其全部, 而是指标适合某些条件的那一部分. 这时, 我们在求积号下写出指标适合的条件. 比如

$$\begin{aligned}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\\ =\ &a_{1,2}\\ &\cdot a_{1,3}\cdot a_{2,3}\\ &\cdot a_{1,4}\cdot a_{2,4}\cdot a_{3,4}\\ &\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdot a_{1,n}\cdot a_{2,n}\cdot\cdots\cdot a_{n-1,n}.\end{aligned}$$

又比如, 若 ℓ 是某个不超过 n 的正整数, 则

$$\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq\ell}} a_i = a_1\cdot\cdots\cdot a_{\ell-1}\cdot a_{\ell+1}\cdot\cdots\cdot a_n.$$

最后, 有一件小事值得一提. 设 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 是一些被编号的数. 设 R_1, R_2 是关于指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的约束. 若不存在**同时**适合 R_1, R_2 的指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 则, 根据乘法的结合律与交换律,

$$\begin{aligned}&\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }R_1\text{ 或 }R_2} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\\ =\ &\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }R_1} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\cdot\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }R_2} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}.\end{aligned}\tag{B.9}$$

比如,

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant 10} i=\prod_{1\leqslant i\leqslant 4} i\cdot\prod_{5\leqslant i\leqslant 10} i,$$

$$\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_{i,j}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\cdot\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{i,j}.$$

由此可见, 当**不存在**指标适合约束 N 时 (也就是说, N 是 “空约束” 时), 为使式 (B.9) 仍成立, 我们定义 (或, 约定)

$$\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{ 适合 }N} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=1.\tag{B.10}$$

比如,

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 1} a_{i,j} = 1.$$

为解释此约定, 我们设

$$x = \prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } N} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}.$$

我们**任**取一个约束 R. 既然不存在指标适合约束 N, 自然, 也不存在指标同时适合 N, R. 再注意到, “i_1, i_2, ⋯, i_n 适合 N 或 R” 相当于 “i_1, i_2, ⋯, i_n 适合 R”. 所以,

$$\begin{aligned}
&\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \\
=&\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } N \text{ 或 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \\
=&\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } N} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \cdot \prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}.
\end{aligned}$$

特别地, 代 R 以 N, 有 $x = x^2$, 即 $x = 0$ 或 $x = 1$. 若我们取 $x = 0$, 则对**任何的**约束 R, 必有

$$\prod_{i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 适合 } R} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} = 0;$$

也就是说, 若我们取 $x = 0$, 则任何多个数的积都是 0. 这是不合理的. 所以, 我们不得不取 $x = 1$; 也就是说, 我们不得不约定式 (B.10).

或许, 您已经发现, 因为数的加法跟乘法都适合结合律与交换律, 故求和号与求积号有着相似的性质.

B.3 数学归纳法

数学归纳法是一种**演绎地**证明命题的方法.

定理 B.1 (数学归纳法) 设 $P(n)$ 是跟整数 n 有关的句子. 设存在一个整数 n_0 使:

(1) (起始步) $P(n_0)$ 为真;

(2) (递推步) 对**每一个**不低于 n_0 的整数 n, "若 $P(n)$ 为真, 则 $P(n+1)$ 为真" 是真的.

那么, 对每一个不低于 n_0 的整数 n, $P(n)$ 是真的.

形象地, 我们可视每一个 $P(n)$ 为一本竖立的书. 我们视 "$P(n)$ 为真" 为 "第 n 本书倒下". 假定, 我们推倒了第 1 本书 $P(1)$ (这对应 "起始步"), 且一本书倒下**总会**使跟在它后面的那一本书倒下 (这对应 "递推步"). 那么, 第 1 本书, 与其后面的书, 都应倒下.

我们看一个具体的例.

例 B.2 设 n 是正整数. 用数学归纳法证明

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{B.11}$$

既然, 我们要证, 对**正整数** n, 式 (B.11) 是正确的, 我们可试取 $n_0=1$, 并设命题 $P(n)$: $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$. 我们验证数学归纳法的条件, 即起始步与递推步, 是否**都**成立.

(1) $P(n_0)$ 即 $P(1)$, 即 $1=1^2$. 这显然是对的. 故起始步成立.

(2) 我们假定 $P(n)$ 是对的, 其中 $n\geqslant n_0=1$. 我们要**由此**证明 $P(n+1)$ **也**是对的:

$$\begin{aligned}
&1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)\\
=&(1+3+\cdots+(2n-1))+(2n+1)\\
=&n^2+(2n+1)\\
=&(n+1)^2.
\end{aligned}$$

其中, 从行 2 到行 3, 我们用到了 "$P(n)$ 为真" 的假定 (我们叫这样的假定为**归纳假定**). 所以, (若 $P(n)$ 是对的, 则) $P(n+1)$ 是对的. 故递推步成立.

根据数学归纳法原理, $P(n)$ 对任何正整数 n 都是成立的.

值得注意的是, 数学归纳法只是证明命题的**一种**方法. 其实, 我们可用更简单的方法证式 (B.11). 我们记

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2(n-1)-1) + (2n-1).$$

因为数的加法适合结合律与交换律, 故

$$S_n = (2n-1) + (2(n-1)-1) + \cdots + 3 + 1.$$

从而, 仍由结合律与交换律,

$$2S_n = (1 + (2n-1)) + (3 + (2(n-1)-1)) + \cdots + ((2n-1)+1) = 2n \cdot n.$$

由此可知 $S_n = n^2$.

在数学归纳法里, 起始步与递推步是缺一不可的.

例 B.3 (缺起始步) 设 n 是正整数. 用数学归纳法 "证明"

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2 + 1. \tag{B.12}$$

既然, 我们要证, 对正整数 n, 式 (B.12) 是正确的, 我们可试取 $n_0 = 1$, 并设命题 $P'(n)$: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2 + 1$. 我们验证数学归纳法的条件, 即起始步与递推步, 是否都成立.

(1) $P'(n_0)$ 即 $P'(1)$, 即 $1 = 1^2 + 1$. 这显然是对的. 故起始步成立.

(2) 我们假定 $P'(n)$ 是对的, 其中 $n \geqslant n_0 = 1$. 我们要由此证明 $P'(n+1)$ 也是对的:

$$\begin{aligned}
&\quad 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\
&= (1 + 3 + \cdots + (2n-1)) + (2n+1) \\
&= (n^2+1) + (2n+1) \\
&= (n+1)^2 + 1.
\end{aligned}$$

其中, 从行 2 到行 3, 我们用到了 “$P'(n)$ 为真” 的假定. 所以, (若 $P'(n)$ 是对的, 则) $P'(n+1)$ 是对的. 故递推步成立.

所以, 根据数学归纳法, 式 (B.12) 是正确的. 可是, 式 (B.12) 不可能是对的! 上个例说, 左侧是 n^2, 而 n^2 跟 n^2+1 不可能相等.

我在哪儿出了问题? 不难看出, 起始步出问题了: 我 “错误地” 认为 $P'(1)$ 是对的.

由此可见, 数学归纳法的起始步是不可少的.

例 B.4 (缺递推步) 用数学归纳法 “证明” 命题 $Q(n)$ (n 为正整数): 对任何 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 它 (们) 都相等.

既然, 我们要证, 对正整数 n, $Q(n)$ 是正确的, 我们可试取 $n_0 = 1$. 我们验证数学归纳法的条件, 即起始步与递推步, 是否都成立.

(1) $Q(n_0)$ 即 $Q(1)$, 即: 对任何 1 个数 a_1, 它 (们) 都相等. 一般地, 我们认为, 一个数总是等于自己. 所以, $Q(1)$ 是对的. 故起始步成立.

(2) 我们假定 $Q(n)$ 是对的, 其中 $n \geqslant n_0 = 1$. 我们要由此证明 $Q(n+1)$ 也是对的. 任取 $n+1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$. 考虑这 $n+1$ 个数的前 n 个: $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 因为 $Q(n)$ 是对的, 故

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

再考虑这 $n+1$ 个数的后 n 个: $a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$. 仍因 $Q(n)$ 是对的, 故

$$a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}.$$

既然 $a_1 = a_2, \cdots \cdots, a_n = a_{n+1}$, 故

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}.$$

所以, (若 $Q(n)$ 是对的, 则) $Q(n+1)$ 是对的. 故递推步成立.

所以, 根据数学归纳法, 对每一个正整数 n, $Q(n)$ 是正确的. 可是, 这甚至不合常识: 毕竟, 0 与 1 就是不相同的二个数.

我在哪儿出了问题? 其实, $Q(1)$ 是不能推出 $Q(2)$ 的. 但是, $Q(2)$ 的确可推出 $Q(3)$; 甚至, 不难看出, 对每一个不低于 2 的整数 n, “若 $Q(n)$ 为真, 则 $Q(n+1)$ 为真” 是对的. 虽然如此, 因存在一个不低于 n_0 的整数 1, 使 “若 $Q(1)$ 为真, 则 $Q(2)$ 为真” 是错的, 故递推步不成立.

由此可见, 数学归纳法的递推步也是不可少的.

最后, 我用二个较复杂的例助您更好地理解与运用数学归纳法.

例 B.5 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 适合

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 1, & n = 2; \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

用数学归纳法证明: 对任何正整数 n,

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

根据前面的经验, 我们试取 $n_0 = 1$, 并设命题 $P(n)$: $a_n = (2^n - (-1)^n)/3$. 验证起始步时, 没有什么问题:

$$\frac{2^1 - (-1)^1}{3} = \frac{3}{3} = 1 = a_1.$$

可是, 在验证递推步时, 我们发现, 我们无法由 $P(1)$ 推出 $P(2)$. 毕竟, 此数列的前 2 项被**定义为** 1, a_1 跟 a_2 无关.

那么, 既然选 n_0 为 1 不合适, 我们能否选 n_0 为 2? 首先, $P(2)$ 也是对的:

$$\frac{2^2 - (-1)^2}{3} = \frac{3}{3} = 1 = a_2.$$

可是, 我们仍无法由 $P(n)$ 推出 $P(n+1)$ (注意, 此处已假定 $n \geqslant 2$). 我们假定 $P(n)$ 是对的; 换句话说, 我们假定 $a_n = (2^n - (-1)^n)/3$. 我们要证 $a_{n+1} = (2^{n+1} - (-1)^{n+1})/3$. 根据此数列的定义, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. 我们可代 a_n 以归纳假定, 但 a_{n-1} 不可换.

我们无妨考虑用数学归纳法证明命题 $Q(n)$: $P(n)$ 与 $P(n+1)$ 是正确的.

首先, $Q(1)$ 是对的; 我们验证过了, 对吧?

然后, 我们假定 $Q(n)$ 是对的. 我们要由此证明 $Q(n+1)$ 是对的. 既然 $Q(n)$ 是对的, 那么 $P(n)$ 跟 $P(n+1)$ 都是对的. 为了证明 $Q(n+1)$ 是对的, 我们要证 $P(n+1)$ 与 $P((n+1)+1)$, 即 $P(n+1)$ 与 $P(n+2)$ 都是对的. 根据假定,

$P(n+1)$ 是对的. 我们只要证 $P(n+2)$ 也是对的, 即可知, $Q(n+1)$ 是对的:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n \\
&= \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} + 2 \cdot \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot (-1)^n \\
&= \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n \\
&= \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3}.
\end{aligned}$$

所以, (若 $Q(n)$ 是对的, 则) $Q(n+1)$ 是对的.

根据数学归纳法原理, $Q(n)$ 对任何正整数 n 都是成立的. 进而, $P(n)$ 对任何正整数 n 是成立的.

当然, 我们还可考虑, 用数学归纳法证命题 $R(n)$ (n 为不低于 2 的整数): 对任何不超过 n 的正整数 k, $P(k)$ 是正确的. (注意, 此处的 $n_0 = 2$; 并且, 我留此事为您的习题.) 这样, 我们也能证明, $P(n)$ 对任何正整数 n 是成立的.

由此可见:

(1) 不是每一个跟整数相关的命题都能**直接地**被数学归纳法证明.

(2) 有时, 为运用数学归纳法, 我们要恰当地作辅助命题.

(3) 有时, 辅助命题的作法多于一个.

例 B.6　设 a, b 是正整数. 若存在正整数 c 使 $a = bc$, 我们就说, b 是 a 的一个**因子**.

注意到, 1 是每一个正整数的因子.

显然, 每一个正整数 a 都有因子 1, a (注意, 这不一定是二个互不相同的数, 除非 $a > 1$). 我们说, 这是 a 的**平凡的**因子.

设正整数 $a > 1$. 若 a 没有不是平凡的因子 (也就是说, a 有且只有平凡的因子), 我们说, a 是一个**素数**. 比如, 2, 3, 5, 7 都是素数, 但 4, 6, 8, 9 都不是素数. (根据定义, 1 也不是素数.)

我们证明: **一定可写一个高于 1 的整数为若干个素数的积**. 具体地, 设命题 $P(n)$: 存在若干个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 使

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

那么, 我们的目标就是, 当 $n \geqslant 2$ 时, $P(n)$ 是正确的.

我们试直接用数学归纳法证 $P(n)$. 取 $n_0 = 2$. 因为 2 是一个素数, 故它当然是 “一个素数的积” (即自己). 但是, 我们似乎无法由 $P(n)$ 推出 $P(n+1)$, 因为, n 跟 $n+1$ 的因子似乎没有 “有意思的联系”. (因子的定义涉及乘法, 且跟加法的关系不是那么紧密. 试想: 若您知道 2 是 n 的因子, 那您知道 $n+1$ 有哪些不是平凡的因子的因子吗? 不好说吧?)

根据上个例的经验, 我们试作辅助命题 $Q(n)$: $P(n)$ 与 $P(n+1)$ 是正确的. 取 $n_0 = 2$. 不难验证, $Q(n_0)$ 是正确的. 但是, 我们似乎仍无法由 $Q(n)$ 推出 $Q(n+1)$.

现在, 您看我的表演吧. 我作辅助命题 $R(n)$: 对每一个高于 1 且不低于 n 的整数 i, $P(i)$ 是正确的. 现在, 我要用数学归纳法证: 当 $n \geqslant 2$ 时, $R(n)$ 是正确的.

取 $n_0 = 2$. 不难验证, $R(n_0)$ 是正确的.

现在, 设 $R(m-1)$ 是正确的. 我要由此证 $R(m)$ 也是正确的. (这跟 “设 $R(n)$ 是正确的, 由此证 $R(n+1)$ 是正确的” 的本质是一样的; 我只是换 n 为 $m-1$ 而已. 毕竟, n, $m-1$ 只是 “编号”.)

因为 $R(m-1)$ 是正确的, 故 $P(2), \cdots, P(m-1)$ 都是正确的. 所以, 若我们能由此证明 $P(m)$ 是正确的, 则 $R(m)$ 是正确的.

若 m 是一个素数, 则 m 当然是 “一个素数的积” (即自己). 那, 假如 m 不是一个素数, 会如何? 既然 m 不是一个素数, 那么, 按定义, 它就有不是平凡的因子的因子 b. 也就是说, 存在一个高于 1, 且低于 m 的整数 b, 存在一个整数 c, 使 $m = bc$. 不难看出, 此 c 也是高于 1, 且低于 m 的. 所以, $P(b)$, $P(c)$ 是正确的. 也就是说, 存在素数 $p_1, \cdots, p_u$ 使 $b = p_1 \cdots p_u$, 且存在素数 $p_{u+1}, \cdots, p_v$ 使 $c = p_{u+1} \cdots p_v$. 从而

$$m = bc = p_1 \cdots p_u p_{u+1} \cdots p_v$$

也是若干个素数的积.

由此可见, $R(m)$ 是正确的.

根据数学归纳法原理, $R(n)$ 对任何高于 1 的整数 n 都是成立的. 进而, $P(n)$ 对任何高于 1 的整数 n 是成立的.

B.4 结合律、交换律、分配律

本节, 我想讨论结合律、交换律、分配律.

我们知道, 数的加法适合结合律与交换律; 数的乘法也适合结合律与交换律; 并且, 乘法与加法适合分配律. 具体地, 我们设 a, b, c 是 (任何的) 三个数. 那么, 加法的结合律就是 $(a+b)+c=a+(b+c)$; 乘法的结合律就是 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$; 加法的交换律就是 $a+b=b+a$; 乘法的交换律就是 $a\cdot b=b\cdot a$; 分配律是 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ 与 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, 其中, 形如 $a\cdot b+c\cdot d$ 的文字应被理解为 $(a\cdot b)+(c\cdot d)$ (我们通常先算乘法, 再算加法).

这些运算律看上去较抽象, 但我们一直都在用它们作计算.

例 B.7 在小学, 我们学过乘法表. 利用乘法表与数的运算律, 我们可以作二个较大的数的乘法. 比如,

$$
\begin{aligned}
&23\cdot 57\\
={}&23\cdot(50+7)\\
={}&23\cdot 50+23\cdot 7\\
={}&23\cdot(5\cdot 10)+23\cdot 7\\
={}&(23\cdot 5)\cdot 10+23\cdot 7\\
={}&(23\cdot 5)\cdot 10+23\cdot 7\\
={}&((20+3)\cdot 5)\cdot 10+(20+3)\cdot 7\\
={}&(20\cdot 5+3\cdot 5)\cdot 10+(20\cdot 7+3\cdot 7)\\
={}&(100+15)\cdot 10+(140+21)\\
={}&115\cdot 10+161\\
={}&1\,150+161\\
={}&(1\,000+150)+161\\
={}&1\,000+(150+161)\\
={}&1\,000+((100+50)+(100+61))\\
={}&1\,000+(((100+50)+100)+61)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1\,000 + ((100 + (50 + 100)) + 61)\\
&= 1\,000 + ((100 + (100 + 50)) + 61)\\
&= 1\,000 + (((100 + 100) + 50) + 61)\\
&= 1\,000 + ((100 + 100) + (50 + 61))\\
&= 1\,000 + (200 + (50 + (60 + 1)))\\
&= 1\,000 + (200 + ((50 + 60) + 1))\\
&= 1\,000 + (200 + ((50 + (50 + 10)) + 1))\\
&= 1\,000 + (200 + (((50 + 50) + 10) + 1))\\
&= 1\,000 + (200 + ((100 + 10) + 1))\\
&= 1\,000 + ((200 + (100 + 10)) + 1)\\
&= 1\,000 + (((200 + 100) + 10) + 1)\\
&= 1\,000 + ((200 + 100) + (10 + 1))\\
&= 1\,000 + (300 + (10 + 1))\\
&= 1\,000 + (300 + 11)\\
&= 1\,000 + 311\\
&= 1\,311.
\end{aligned}
$$

其实, 我还是略了几步; 完整地写出计算过程过于复杂了.

在小学, 我们就知道, 因为加法 (乘法) 适合结合律与交换律, 故当我们求若干个数的和 (积) 时, 我们可随意地交换这些数的次序, 且可以任何方式作加法 (乘法). 比如,

$$
\begin{aligned}
&((23 + 52) + 77) + 48\\
&= (23 + 52) + (77 + 48)\\
&= (23 + 52) + (48 + 77)\\
&= (23 + (52 + 48)) + 77\\
&= (23 + 100) + 77\\
&= (100 + 23) + 77\\
&= 100 + (23 + 77)
\end{aligned}
$$

$$= 100 + 100$$
$$= 200.$$

不过, 小学教材没有证明此事; 初中教材似乎也没有证明此事; 高中教材似乎也没有证明此事. 所以, 此事的论证, 留给了其他人.

现在, 我接受这个挑战. 不过, 为了方便说话, 我要一些新的概念.

定义 B.8 设 a, b 是二个文字. 我们叫形如 (a, b) 的文字为**有序对**.

再设 c, d 也是二个文字. 说二个有序对 $(a, b), (c, d)$ 相等, 就是说 $a = c$ **且** $b = d$.

定义 B.9 **集**是具有某种特定性质的对象作成的一个整体. 我们叫它的对象为**元**.

无元的集是**空集**. 自然地, 至少含一个元的集, 是**非空的**.

若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a **属于** A 或 A **包含** a. 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a **不属于** A 或 A **不包含** a.

一般地, 若集 A 由元 $a, b, c, \cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \cdots\}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象作成. 我们写

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例 B.10 当我们视所有的整数为一个整体时, 这个整体, 就是**整数集**. 习惯地, 我们表之以 $\mathbb{Z}$.

我们常记由全体非负整数 (自然数) 作成的集为 $\mathbb{N}$. 那么, 我们可写

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

不难看出, $-1 \in \mathbb{Z}$, 但 $-1 \notin \mathbb{N}$.

我们可写

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}.$$

我们也可写

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ 或 } -x \in \mathbb{N}\}.$$

定义 B.11 设 S, T 是二个非空的集. 定义

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S, t \in T\}.$$

例 B.12 设 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$. 那么,

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}.$$

不过,

$$B \times A = \{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}.$$

可以看到, 虽然 $A \times B$ 与 $B \times A$ 的元的数目是相同的, 但二者的元是不一样的.

抽象地看, $a+b$ 的 $+$, 其实是一个对应法则: $+$ 变一个有序对 (a,b) 为某一个**唯一确定的**数 s; 这个数, 可被表示为 $a+b$. 类似地, $\cdot$ 变一个有序对 (a,b) 为某一个**唯一确定的**数 p; 这个数, 可被表示为 $a \cdot b$; 甚至, 特别地, 它也可被表示为 ab.

定义 B.13 设 S 是一个非空的集. 设对应法则 $\circ$ 适合: **任取** $S \times S$ 的一个有序对 (a,b), 必存在 S 里的**唯一的**一个元 r, 使在对应法则 $\circ$ 下, (a,b) 跟 r 对应. (也就是说: (a) 任取 S 的二元 a, b (不必互不相同), 存在 S 的元 r, 使在对应法则 $\circ$ 下, (a,b) 跟 r 对应; (b) 若在对应法则 $\circ$ 下, (a,b) 跟 r 对应, 且 (a,b) 跟 t 对应, 则 $r = t$.) 那么, 我们说, $\circ$ 是 S 的一个**二元运算**.

设在对应法则 $\circ$ 下, (a,b) 跟 r 对应. 我们表此事以 $a \circ b = r$.

例 B.14 加法与乘法都是 $\mathbb{N}$ 的二元运算: 二个给定的非负整数 a, b 的和 (或积) 是被唯一确定的非负整数 $a+b$ (或 ab). 不过, 减法不是: 二个非负整数的差不一定是非负整数.

但是, 减法是 $\mathbb{Z}$ 的二元运算. 当然, 加法与乘法也是.

设 S 为非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 文字 $a \circ b \circ c$ 是否有意义? 显然, 我们并没有定义它的含义; 毕竟, 二元运算每次只对二个元作运算. 但是, 我们总是可以先挑二个元作运算, 然后再作一次运算. 比如, 先施 $\circ$ 于 a, b, 可得 $(a \circ b) \circ c$; 先施 $\circ$ 于 b, c, 可得 $a \circ (b \circ c)$. 二者不一定相同; 毕竟, 二元运算是相当自由的.

例 B.15 $(11-5)-2 \neq 11-(5-2)$.

不过, 当然, 也有 $(a \circ b) \circ c$ 总是等于 $a \circ (b \circ c)$ 的情形.

定义 B.16 设 S 是一个非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 若对 S 的任何三元 a, b, c (不一定是互不相同的, 下同), 必有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

我们说, $\circ$ 适合**结合律**.

通俗地, 结合律说, 若非空的集 S 的二元运算 $\circ$ 适合结合律, a, b, c 为 S 的任何**三**元, 则无论如何加括号 (但不改元的前后次序), 其结果都是相等的. 所以, $a \circ b \circ c$ 是有意义的.

我们看看结合律有什么用.

设 S 是非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $\circ$ 适合结合律. 设 a, b, c, d 是 S 的 4 个元. 考虑文字 $a \circ b \circ c \circ d$. 显然, 它并没有什么含义 (二元运算每次只对二个元作运算). 不过, 我们总是可以二个二个地作运算. 具体地, 我们有如下 5 种结合 (加括号) 方式:

$$\begin{aligned}
r_{4,1} &= ((a \circ b) \circ c) \circ d, \\
r_{4,2} &= (a \circ (b \circ c)) \circ d, \\
r_{4,3} &= (a \circ b) \circ (c \circ d), \\
r_{4,4} &= a \circ ((b \circ c) \circ d), \\
r_{4,5} &= a \circ (b \circ (c \circ d)).
\end{aligned}$$

不难用结合律验证, $r_{4,2}, r_{4,3}, r_{4,4}, r_{4,5}$ 都等于 $r_{4,1}$:

$$\begin{aligned}
r_{4,5} &= a \circ (b \circ (c \circ d)) \\
&= a \circ ((b \circ c) \circ d) && (r_{4,4}) \\
&= (a \circ (b \circ c)) \circ d && (r_{4,2}) \\
&= ((a \circ b) \circ c) \circ d && (r_{4,1}) \\
&= (a \circ b) \circ (c \circ d). && (r_{4,3})
\end{aligned}$$

所以, 通俗地, 若非空的集 S 的二元运算 $\circ$ 适合结合律, a, b, c, d 为 S 的任何 4 元, 则无论如何加括号 (但不改元的前后次序), 其结果都是相等的.

我们有理由认为, 改 3, 4 为任何高于 2 的整数, 此事仍成立. 为证明它, 我们引入一个小小的记号.

定义 B.17　设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 S 的 n 个元. 定义

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \begin{cases} a_1, & n = 1; \\ a_1 \circ a_2, & n = 2; \\ [a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] \circ a_n, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

由此可见, $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 就是从前向后地, 二个二个地施 $\circ$ 于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 得到的结果.

为方便, 我们说, 施 $\circ$ 于 S 的一个元 a 的结果就是 a 自己.

现在我们证明十分重要的一件事.

定理 B.18　设非空的集 S 的二元运算 $\circ$ 适合结合律, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 S 的任何 n 元. 则无论如何加括号 (但不改元的前后次序), 其结果都是相等的.

证　注意到, 有限多个元, 只有有限多个加括号的方式. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有 s_n 种加括号的方式 (比如, $s_1 = s_2 = 1, s_3 = 2, s_4 = 5$). 设以第 i 种加括号的方式算出的结果为 $r_{n,i}$. 我们证明: 它们都等于 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ (值得注意的是, 这也是一种加括号的方式, 故它必跟 $r_{n,1}, r_{n,2}, \cdots, r_{n,s_n}$ 中的一个有相同的计算式). 具体地, 设命题 $P(n)$ 为

任取 S 的 n 元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 无论如何加括号 (但不改元的前后次序), 施 $\circ$ 于此 n 元的结果都等于 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

我们再作一个辅助命题 $Q(n)$:

对任何不超过 n 的正整数 i, $P(i)$ 是正确的.

我们用数学归纳法证明: 对每一个正整数 n, $Q(n)$ 是正确的.

取 $n_0 = 3$. 显然, $Q(3)$ 是正确的.

现在, 我们假定, $Q(m-1)$ 是正确的. 我们要证, $Q(m)$ 也是正确的.

因为 $Q(m-1)$ 是正确的, 故 $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(m-1)$ 都是正确的. 所以, 若我们能由此证明 $P(m)$ 是正确的, 则 $Q(m)$ 是正确的.

任取 S 的 m 元 a_1, a_2, $\cdots$, a_m. 任取一个 $r_{m,i}$. 注意到, 无论如何加括号作计算, 最后的那一步总是二个元的计算 (可回想 4 个元时的情形). 我们设 $r_{m,i} = b_1 \circ b_2$, 其中 b_1 是结合 a_1, a_2, $\cdots$, a_m 的前 k 个元的结果, 而 b_2 是结合 a_1, a_2, $\cdots$, a_m 的后 $m-k$ 个元的结果. 注意到 k, $m-k$ 都低于 m, 也都不低于 1 (因为 $k \geqslant 1$), 故, 由假定,

$$b_1 = [a_1, a_2, \cdots, a_k], \quad b_2 = [a_{k+1}, \cdots, a_m].$$

若 $m-k=1$, 那么 b_2 就是 a_m 自己. 故

$$r_{m,i} = [a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}] \circ a_m = [a_1, a_2, \cdots, a_m].$$

若 $m-k>1$, 则

$$\begin{aligned}
r_{m,i} &= b_1 \circ b_2 \\
&= [a_1, a_2, \cdots, a_k] \circ [a_{k+1}, \cdots, a_{m-1}, a_m] \\
&= [a_1, a_2, \cdots, a_k] \circ ([a_{k+1}, \cdots, a_{m-1}] \circ a_m) \\
&= ([a_1, a_2, \cdots, a_k] \circ [a_{k+1}, \cdots, a_{m-1}]) \circ a_m \\
&= [a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{m-1}] \circ a_m \\
&= [a_1, a_2, \cdots, a_m].
\end{aligned}$$

所以, $Q(m)$ 是正确的.

根据数学归纳法原理, $Q(n)$ 对任何正整数 n 都是成立的. 进而, $P(n)$ 对任何正整数 n 是成立的. 证毕.

设 $\circ$ 是非空的集 S 的一个适合结合律的二元运算. 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为 S 的任何 n 元. 以后, 我们简单地写

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

为

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n.$$

当然, 因为结合律, 我们也可表任何一种加括号的方式以上式.

设 S 为非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $a, b \in S$. 自然地, $a \circ b$ 与 $b \circ a$ 都有意义. 因为二元运算是相当自由的, 故二者不一定相等.

例 B.19 $7 - 3 \neq 3 - 7$.

不过, 当然, 也有 $a \circ b$ 总是等于 $b \circ a$ 的情形.

定义 B.20 设 S 是一个非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 若对 S 的任何二元 a, b, 必有

$$a \circ b = b \circ a,$$

我们说, $\circ$ 适合**交换律**.

现在, 我们证明前面提到的重要事实: 当我们求若干个数的和 (积) 时, 我们可随意地交换这些数的次序, 且可以任何方式作加法 (乘法).

定理 B.21 设非空的集 S 的二元运算 $\circ$ 适合结合律与交换律, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 S 的任何 n 元. 则无论如何加括号与交换元的前后次序, 其结果都是相等的.

证 设命题 $P(n)$ 为

任取 S 的 n 元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 无论如何加括号与交换元的前后次序, 施 $\circ$ 于此 n 元的结果都等于 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$.

我们用数学归纳法证明: 对每一个正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 是对的, 因为没法换.

$P(2)$ 是对的, 因为交换律.

现在, 我们假定, $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证, $P(m)$ 也是正确的.

任取 S 的 m 元 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 是不超过 m 的正整数, 且互不相同. 因为结合律, 故, 无论如何加括号, 施 $\circ$ 于 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ 的结果都等于 $a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_m}$. 我们证它等于 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_m$ 即可.

若 $i_m = m$, 则 $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$ 是不超过 $m-1$ 的正整数, 且互不相同. 故

$$\begin{aligned}
&a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{m-1}} \circ a_{i_m} \\
&= (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{m-1}}) \circ a_m \\
&= (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{m-1}) \circ a_m \\
&= a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{m-1} \circ a_m.
\end{aligned}$$

若 $i_m \neq m$, 我们设 $i_j = m$. 则 (若 $i_1 = m$, 则 $a_{i_1} \circ \cdots \circ a_{i_{j-1}}$ 不出现)

$$\begin{aligned}
&a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_m} \\
&= (a_{i_1} \circ \cdots \circ a_{i_{j-1}}) \circ (a_{i_j} \circ (a_{i_{j+1}} \circ \cdots \circ a_{i_m})) \\
&= (a_{i_1} \circ \cdots \circ a_{i_{j-1}}) \circ ((a_{i_{j+1}} \circ \cdots \circ a_{i_m}) \circ a_{i_j}) \\
&= ((a_{i_1} \circ \cdots \circ a_{i_{j-1}}) \circ (a_{i_{j+1}} \circ \cdots \circ a_{i_m})) \circ a_m \\
&= (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{m-1}) \circ a_m \\
&= a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{m-1} \circ a_m.
\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 根据数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

值得一提的是, 只有交换律而没有结合律的二元运算是没有这个好性质的.

例 B.22 定义 $\mathbb{Z}$ 上的二元运算 $a \circ b = ab - (a+b)$. 不难验证, $\circ$ 适合交换律. 我们取 a, b, c, d 为 2, 3, 5, 7. 于是,

$$\begin{aligned}
(2 \circ 3) \circ (5 \circ 7) = 1 \circ 23 = -1, \\
(2 \circ 5) \circ (3 \circ 7) = 3 \circ 11 = 19.
\end{aligned}$$

不难发现, $\circ$ 不适合结合律:

$$\begin{aligned}
(1 \circ 0) \circ 0 = -1 \circ 0 = 1, \\
1 \circ (0 \circ 0) = 1 \circ 0 = -1.
\end{aligned}$$

最后, 我们看分配律.

定义 B.23　设 S 是一个非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $\oplus$ 也是 S 的一个二元运算.

若对 S 的任何三元 a, b, c, 必有

$$a \circ (b \oplus c) = (a \circ b) \oplus (a \circ c),$$

我们说, $\circ$ 与 $\oplus$ 适合**左分配律**.

若对 S 的任何三元 a, b, c, 必有

$$(a \oplus b) \circ c = (a \circ c) \oplus (b \circ c),$$

我们说, $\circ$ 与 $\oplus$ 适合**右分配律**.

若 $\circ$ 与 $\oplus$ 既适合左分配律, 也适合右分配律, 我们说, $\circ$ 与 $\oplus$ 适合**分配律**.

若 $\oplus$ 适合结合律, 我们可得到如下三个结果.

定理 B.24　设 S 是一个非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $\oplus$ 是 S 的一个二元运算, 且适合结合律. 再设 $\circ$ 与 $\oplus$ 适合左分配律. 则对 S 的任何 $n+1$ 元 $b, a_1, a_2 \cdots, a_n$,

$$b \circ (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) = (b \circ a_1) \oplus (b \circ a_2) \oplus \cdots \oplus (b \circ a_n).$$

证　设命题 $P(n)$ 为

任取 S 的 $n+1$ 元 $b, a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$b \circ (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) = (b \circ a_1) \oplus (b \circ a_2) \oplus \cdots \oplus (b \circ a_n).$$

我们用数学归纳法证明: 对每一个正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 是对的 (显然).

$P(2)$ 是对的, 因为左分配律.

现在, 我们假定, $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证, $P(m)$ 也是正确的.

任取 S 的 $m+1$ 元 $b, a_1, a_2, \cdots, a_m$. 则

$$\begin{aligned}
& b \circ (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_m) \\
= {} & b \circ ((a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_{m-1}) \oplus a_m) \\
= {} & (b \circ (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_{m-1})) \oplus (b \circ a_m) \\
= {} & ((b \circ a_1) \oplus (b \circ a_2) \oplus \cdots \oplus (b \circ a_{m-1})) \oplus (b \circ a_m) \\
= {} & (b \circ a_1) \oplus (b \circ a_2) \oplus \cdots \oplus (b \circ a_m).
\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 根据数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

您可用完全类似的方法, 证明如下二个事实. 我就不证了.

定理 B.25 设 S 是一个非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $\oplus$ 是 S 的一个二元运算, 且适合结合律. 再设 $\circ$ 与 $\oplus$ 适合右分配律. 则对 S 的任何 $n+1$ 元 $b, a_1, a_2 \cdots, a_n$,

$$(a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) \circ b = (a_1 \circ b) \oplus (a_2 \circ b) \oplus \cdots \oplus (a_n \circ b).$$

定理 B.26 设 S 是一个非空的集. 设 $\circ$ 是 S 的一个二元运算. 设 $\oplus$ 是 S 的一个二元运算, 且适合结合律. 再设 $\circ$ 与 $\oplus$ 适合分配律. 则对 S 的任何 $n+1$ 元 $b, a_1, a_2 \cdots, a_n$,

$$\begin{aligned}
b \circ (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) &= (b \circ a_1) \oplus (b \circ a_2) \oplus \cdots \oplus (b \circ a_n), \\
(a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) \circ b &= (a_1 \circ b) \oplus (a_2 \circ b) \oplus \cdots \oplus (a_n \circ b).
\end{aligned}$$

附录 C　后日谈

我其实还有一些想说的话. 不过, 这些话较不适合在第一章讲; 当然, 也较不适合在附录 A 或附录 B 讲. 所以, 我就在这儿讲.

C.1　我要如何定义行列式?

行列式是什么? 我认为, 就像迹那样 (注: n 级阵 A 的**迹**是 $[A]_{1,1}+[A]_{2,2}+\cdots+[A]_{n,n}$), 行列式也只是方阵一个属性而已. 不过, 这个看法, 多少有些不全面; 毕竟, 这可能会使人认为, “行列式就是个 ‘新定义运算’ 而已”. 行列式是有用的; 至少, 不说线性代数 (或高等代数), 它在微积分与几何里, 也是有用的.

出于多种原因, 我决定, 写一本行列式的入门教材. 既然是**入门**教材, 它自然要简单一些. 我能想到至少三种 (差别较大的) 定义方式:

定义 C.1 (归纳定义)　设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的行列式

$$\det(A) = \begin{cases} [A]_{1,1}, & n = 1; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[A]_{i,1} \det(A(i|1)), & n \geqslant 2. \end{cases}$$

定义 C.2 (组合定义)　设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 定义 A 的行列式

$$\det(A) = \sum_{\substack{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n \\ i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n)\,[A]_{i_1,1}[A]_{i_2,2}\cdots[A]_{i_n,n},$$

其中

$$s(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \prod_{1\leqslant p<q\leqslant n} \operatorname{sgn}(i_q - i_p)$$

是文字列 (或者, “排列”, 因为这里的 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是互不相同的) $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的符号.

定义 C.3 (公理定义)　设 f 是定义在全体 n 级阵上的函数. 若 f 适合如下三条, 则说 f 是 (n 级阵的) **一个**行列式函数 (自然地, 若 A 是 n 级阵, 则 $f(A)$ 是 A 的**一个**行列式):

(1) (规范性) 若 I 是 n 级单位阵, 则 $f(I) = 1$.

(2) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_1, \cdots,$

$a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n \times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}&f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_n])\\=\ &sf([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]) + tf([a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n]).\end{aligned}$$

(3) (交错性) 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $f(A) = 0$.

值得注意的是, 这里的定义是关于列的. 我们知道, 一个阵的行列式等于其转置的行列式, 故阵的行与阵的列在行列式里的地位是一样的, 进而我们也可用关于行的版本定义行列式. 这, 我认为, 只是个人的喜好而已. 毕竟, 行或列不是本质的. 规范性、多线性、交错性是本质.

粗略地, 我想到的三种定义, 对初学行列式的人, 都是有一定挑战的, 因为它们都涉及了 "非高中数学内容". 归纳定义不好, 因为学生不一定熟悉数学归纳法. 当我是高中生时, 数学归纳法至少是必学的; 可是, 过了几年, 新教材里的数学归纳法是选学内容, 且新高考也不再考它. 组合定义不好, 因为学生不一定熟悉 (比数学归纳法抽象的) 排列或置换. 并且, 在一些线性代数 (或高等代数) 教材里, 排列或置换的理论似乎只为行列式所用. 公理定义不好, 因为它有些抽象. 这要一定的准备. 据说, 老的中学数学有 "2 级行列式" "3 级行列式" (即, 2 级阵的行列式与 3 级阵的行列式); 可是, 我是高中生时, (必学的) 教材没有了行列式; (必学的) 新教材自然也没有行列式. 我认为, 这么讲行列式, 会使更多的初学者不解 (若学生没有什么准备知识).

虽然这三个定义都对初学者有一定的挑战, 我还是选了归纳定义; 毕竟, 我想, 数学归纳法应是每一个 (学数学的) 人都了解的 (基础的) 原理.

于是, 我开始写本书的第一章.

C.2 我要讲阵吗?

理论地, 我可不用阵讲行列式. 具体地, 我可以这么定义行列式.

定义 C.4 我们叫下面用二条竖线围起来的由 n 行 n 列元作成的式为一个 n **级行列式**:

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{C.1}$$

它由 n 行 n 列, 共 n^2 个元作成. 我们叫行 i 的 n 个元 $a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n}$ 为行列式 D 的行 i, 叫列 j 的 n 个元 $a_{1,j}, a_{2,j}, \cdots, a_{n,j}$ 为行列式 D 的列 j. 我们叫行 i, 列 j 交点上的元 $a_{i,j}$ 为行列式 D 的 (i, j)-元.

我们定义 $a_{i,j}$ 的**余子式** $M_{i,j}$ 为由行列式 D 中去除行 i 列 j 后剩下的 $n-1$ 行与 $n-1$ 列元作成的行列式:

$$M_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

当 $n = 1$ 时, 定义式 (C.1) 为

$$D = a_{1,1}. \tag{C.2}$$

当 $n \geqslant 2$ 时, 归纳地定义式 (C.1) 为

$$\begin{aligned} D &= a_{1,1}M_{1,1} - a_{2,1}M_{2,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,1}M_{n,1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}a_{i,1}M_{i,1}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

可以看到, 在这个定义里, “行列式” 至少有二种意思: 一是形如式 (C.1) 的方形数表的式, 二是由式 (C.2), (C.3) 定义的一个数. 既然式 (C.1) 只是一

个式, 又因为二个式相等是指它们的结果相等, 故, 有着不一样的元的二个 n 级行列式可能相等.

我如何定义行列式? 我先定义阵 (矩形数表), 再定义方阵 (方形数表) 的行列式是施一定的规则于方阵得到的数. (具体地, 您看第一章, 节 5, 6 即知.)

由此可见, 这个定义跟第一章的定义, 在思想上, 是有一些区别的. 我用的定义视行列式为方阵的一个属性, 而这个定义, 是一个 “形如式 (C.1) 的方形数表的式”, 或 “由式 (C.2), (C.3) 确定的数”.

历史地, 行列式比阵早出现. 所以, 这种不涉及阵的定义, 是较古典的. 逻辑地, 它没有什么问题. 不过, 教学地, 有的学生区分行列式与阵是有些挑战的. 毕竟, 二者长得差不多, 且阵 (的运算) 与行列式对线性代数 (或高等代数) 的初学者来说都是有一定挑战的.

我想到的解决此问题的方法就是先讲阵 (至少, 一定要先讲阵的记号), 再讲行列式. 这样, 初学者更能体会, 行列式是方阵的一个属性. 至少, 我不想在入门课给学生较多挑战.

类似地, 历史地, 对数比指数早出现. 可是, 我们在高中学数学时, 也并没有先讲对数, 再讲指数. 相反, 教材用指数讲对数.

最后, 我以一个较形象的例结束本节.

我在前面说过, n 级阵 A 的迹是 $[A]_{1,1}+[A]_{2,2}+\cdots+[A]_{n,n}$. 能否不用阵定义迹? 我想, 理论地, 当然可以. 我试作了一个定义. 您看看它如何吧.

定义 C.5　我们叫下面用括号 { } (注意, 这只是我自己选的一个记号) 围起来的由 n 行 n 列元作成的式为一个 n **级迹**:

$$T=\begin{Bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{Bmatrix}. \tag{C.4}$$

它由 n 行 n 列, 共 n^2 个元作成. 我们叫行 i 的 n 个元 $a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n}$ 为迹 T 的行 i, 叫列 j 的 n 个元 $a_{1,j}, a_{2,j}, \cdots, a_{n,j}$ 为迹 T 的列 j. 我们叫行 i, 列 j 交点上的元 $a_{i,j}$ 为迹 T 的 (i,j)-元.

我们定义式 (C.4) 为

$$\boldsymbol{T} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}.$$

这是一个个人喜好问题. 不同的人, 会有不同的想法.

C.3 行列式的性质

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, x, y$ 是 $n+2$ 个 $n\times 1$ 阵. 设 $A=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$. 设 s 是一个数. 行列式有如下性质:

(1) 一个方阵与其转置的行列式相等. 于是, 我不必同时讲行的性质与列的性质, 因为您总可用转置, 译列的性质为行的性质 (或译行的性质为列的性质).

(2) 若一个阵的某一列是二组数的和, 那么此阵的行列式等于二个阵的行列式的和, 而这二个阵, 除这一列以外, 全与原阵的对应的列一样. 用公式写, 就是

$$\begin{aligned} & \det[\cdots, a_{j-1}, x+y, a_{j+1}, \cdots] \\ = & \det[\cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots] + \det[\cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots], \end{aligned}$$

其中, 未写的列是不变的, 下同.

(3) 以一个数乘阵的一列后得到的阵的行列式等于以此数乘原阵的行列式. 用公式写, 就是

$$\det[\cdots, a_{j-1}, sx, a_{j+1}, \cdots] = s\det[\cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots].$$

(4) 若一个阵有二列相同, 则其行列式为零.

(5) 若交换一个阵的二列, 则其行列式变号.

(6) 若一个阵有二列成比例, 则其行列式为零. (利用性质 (3) (4) 即知.)

(7) 若加一个阵的一列的倍于另一列, 则其行列式不变. (利用性质 (2) (6) 即知.)

(8) 单位阵的行列式是 1.

(9) 设 j 是不超过 n 的正整数. 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

不难看出, (2) (3) 的联合是多线性, 且 (4) 就是交错性.

这些性质是有用的. 我们看几个例.

例 C.6　设 n 级阵 A 适合: 当 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 形象地,

$$A = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n-1} & [A]_{1,n} \\ 0 & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n-1} & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & [A]_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [A]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

我们计算 $\det(A)$.

按列 1 展开, 有

$$\begin{aligned} \det(A) = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} \det(A(i|1)) \\ & = (-1)^{1+1}[A]_{1,1} \det(A(1|1)) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} \det(A(i|1)) \\ & = [A]_{1,1} \det(A(1|1)) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1}\, 0 \det(A(i|1)) \\ & = [A]_{1,1} \det(A(1|1)). \end{aligned}$$

不难看出, 当 $1 \leqslant j < i \leqslant n-1$ 时, 也有 $[A(1|1)]_{i,j} = 0$. 于是, 类似地,

$$\det(A(1|1)) = [A(1|1)]_{1,1} \det((A(1|1))(1|1)) = [A]_{2,2} \det(A(1,2|1,2)).$$

故

$$\det(A) = [A]_{1,1}[A]_{2,2} \det(A(1,2|1,2)).$$

$\cdots\cdots$

最后, 我们得到

$$\begin{aligned} \det(A) &= [A]_{1,1}[A]_{2,2} \cdots [A]_{n-1,n-1} \det(A(1,2,\cdots,n-1|1,2,\cdots,n-1)) \\ &= [A]_{1,1}[A]_{2,2} \cdots [A]_{n-1,n-1}[A]_{n,n} \\ &= [A]_{1,1}[A]_{2,2} \cdots [A]_{n,n}. \end{aligned}$$

例 C.7 设 n 级阵 A 适合: 当 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 形象地,

$$A = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & [A]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

我们计算 $\det(A)$.

不难看出, A 的转置 A^{T} 适合: 当 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 时, $[A^{\mathrm{T}}]_{i,j} = [A]_{j,i} = 0$. 由性质 (1) 与上例的结果,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^{\mathrm{T}}) \\ &= [A^{\mathrm{T}}]_{1,1}[A^{\mathrm{T}}]_{2,2} \cdots [A^{\mathrm{T}}]_{n,n} \\ &= [A]_{1,1}[A]_{2,2} \cdots [A]_{n,n}. \end{aligned}$$

例 C.8 运用性质 (7), 可作出一些零, 简化计算. 比如, 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2+9 \\ 3 & 5 & 7+5 \\ 8 & 1 & 6+1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2+9+4 \\ 3 & 5 & 7+5+3 \\ 8 & 1 & 6+1+8 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 3 & 5 & 15 \\ 8 & 1 & 15 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 4 & 9 - 15 \cdot \frac{1}{15} & 15 \\ 3 & 5 - 15 \cdot \frac{1}{15} & 15 \\ 8 & 1 - 15 \cdot \frac{1}{15} & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{bmatrix} 4-15\cdot\frac{8}{15} & 8 & 15 \\ 3-15\cdot\frac{8}{15} & 4 & 15 \\ 8-15\cdot\frac{8}{15} & 0 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} -4 & 8 & 15 \\ -5 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} -4+8\cdot\frac{5}{4} & 8 & 15 \\ -5+4\cdot\frac{5}{4} & 4 & 15 \\ 0+0\cdot\frac{5}{4} & 0 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} 6 & 8 & 15 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \\
&= 6\cdot 4\cdot 15 \\
&= 360.
\end{aligned}
$$

我们用 3 级阵的行列式的公式验证结果:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= 4\cdot 5\cdot 6+3\cdot 1\cdot 2+8\cdot 9\cdot 7-4\cdot 1\cdot 7-3\cdot 9\cdot 6-8\cdot 5\cdot 2 \\
&= 120+6+504-28-162-80 \\
&= 360.
\end{aligned}
$$

例 C.9 设

$$
A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}.
$$

则

$$
\det(A) = \det\begin{bmatrix} 16 & 3-2 & 2 & 13 \\ 5 & 10-11 & 11 & 8 \\ 9 & 6-7 & 7 & 12 \\ 4 & 15-14 & 14 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{bmatrix} 16-13 & 3-2 & 2 & 13 \\ 5-8 & 10-11 & 11 & 8 \\ 9-12 & 6-7 & 7 & 12 \\ 4-1 & 15-14 & 14 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 13 \\ -3 & -1 & 11 & 8 \\ -3 & -1 & 7 & 12 \\ 3 & 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

利用性质 (6) 可知, 最后一个阵的行列式为 0. 所以, A 的行列式也是 0.

我们当然也可用 4 级阵的行列式的公式验证结果. 不过, 这较复杂. 首先, 根据定义,

$$
\begin{aligned}
&\det(A) \\
= \quad &(-1)^{1+1}[A]_{1,1}\det(A(1|1)) + (-1)^{2+1}[A]_{2,1}\det(A(2|1)) \\
&+ (-1)^{3+1}[A]_{3,1}\det(A(3|1)) + (-1)^{4+1}[A]_{4,1}\det(A(4|1)).
\end{aligned}
$$

可算出

$$
\det(A(1|1)) = \det\begin{bmatrix} 10 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 12 \\ 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} = 136,
$$

$$
\det(A(2|1)) = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 6 & 7 & 12 \\ 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} = -408,
$$

$$
\det(A(3|1)) = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 10 & 11 & 8 \\ 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} = -408,
$$

$$
\det(A(4|1)) = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 10 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 12 \end{bmatrix} = 136.
$$

所以

$$
\det(A) = 16 \cdot 136 - 5 \cdot (-408) + 9 \cdot (-408) - 4 \cdot 136 = 0.
$$

例 C.10 设 x, y 是数. 作 n 级阵 A 如下:

$$[A]_{i,j}=\begin{cases}x, & i=j;\\ y, & i\neq j.\end{cases}$$

形象地,

$$A=\begin{bmatrix}x & y & \cdots & y & y\\ y & x & \cdots & y & y\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y & y & \cdots & x & y\\ y & y & \cdots & y & x\end{bmatrix}.$$

我们计算 $\det(A)$.

我们加 A 的列 $1, 2, \cdots, n-1$ 于列 n, 得 n 级阵

$$A_1=\begin{bmatrix}x & y & \cdots & y & x+(n-1)y\\ y & x & \cdots & y & x+(n-1)y\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y & y & \cdots & x & x+(n-1)y\\ y & y & \cdots & y & x+(n-1)y\end{bmatrix}.$$

注意到, A_1 的前 $n-1$ 列与 A 的前 $n-1$ 列一样, 但 A_1 的列 n 的元全是 $x+(n-1)y$. 用 $n-1$ 次性质 (7), 有 $\det(A)=\det(A_1)$.

作 n 级阵

$$A_2=\begin{bmatrix}x & y & \cdots & y & 1\\ y & x & \cdots & y & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y & y & \cdots & x & 1\\ y & y & \cdots & y & 1\end{bmatrix}.$$

注意到, A_2 的前 $n-1$ 列与 A_1 的前 $n-1$ 列一样, 但 A_2 的列 n 的元全是 1. 用性质 (3), 有 $\det(A)=\det(A_1)=(x+(n-1)y)\det(A_2)$.

我们加 A_2 的列 n 的 $-y$ 倍于列 1, 列 n 的 $-y$ 倍于列 2, ⋯⋯, 列 n 的 $-y$ 倍于列 $n-1$, 得 n 级阵

$$A_3 = \begin{bmatrix} x-y & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x-y & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

用 $n-1$ 次性质 (7), 有 $\det(A) = (x+(n-1)y)\det(A_2) = (x+(n-1)y)\det(A_3)$. 注意到, $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 时, 有 $[A_3]_{i,j} = 0$. 故

$$\det(A_3) = (x-y)^{n-1} \cdot 1 = (x-y)^{n-1}.$$

故

$$\det(A) = (x+(n-1)y)\det(A_3) = (x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}.$$

例 C.11 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是数. 作 n 级阵 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 如下:

$$[V(x_1, x_2, \cdots, x_n)]_{i,j} = x_i^{j-1}.$$

形象地,

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

我们计算 $\det(V(x_1, x_2, \cdots, x_n))$.

我们加 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的列 $n-1$ 的 $-x_n$ 倍于列 n, 列 $n-2$ 的 $-x_n$ 倍

于列 $n-1$, ⋯⋯, 列 1 的 $-x_n$ 倍于列 2, 得 n 级阵

$$
\begin{aligned}
&A\\
=&\begin{bmatrix}
1 & x_1-x_n & x_1^2-x_1x_n & \cdots & x_1^{n-2}-x_1^{n-3}x_n & x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_n\\
1 & x_2-x_n & x_2^2-x_2x_n & \cdots & x_2^{n-2}-x_2^{n-3}x_n & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_n\\
1 & x_3-x_n & x_3^2-x_3x_n & \cdots & x_3^{n-2}-x_3^{n-3}x_n & x_3^{n-1}-x_3^{n-2}x_n\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2}-x_{n-1}^{n-3}x_n & x_{n-1}^{n-1}-x_{n-1}^{n-2}x_n\\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}\\
=&\begin{bmatrix}
1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1-x_n) & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\
1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\
1 & x_3-x_n & x_3(x_3-x_n) & \cdots & x_3^{n-3}(x_3-x_n) & x_3^{n-2}(x_3-x_n)\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix};
\end{aligned}
$$

具体地,

$$
[A]_{i,j}=\begin{cases}1, & j=1;\\ x_i^{j-1}-x_i^{j-2}x_n=x_i^{j-2}(x_i-x_n), & j>2.\end{cases}
$$

由性质 (7), 有

$$
\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_n))=\det(A).
$$

按行 n 展开, 有

$$
\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_n))=\det(A)=(-1)^{n+1}\det(B),
$$

其中 $B=A(n|1)$, 且 $[B]_{i,j}=x_i^{j-1}(x_i-x_n)$; 形象地,

$$
B=\begin{bmatrix}
x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1-x_n) & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\
x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\
x_3-x_n & x_3(x_3-x_n) & \cdots & x_3^{n-3}(x_3-x_n) & x_3^{n-2}(x_3-x_n)\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)
\end{bmatrix}.
$$

用 $n-1$ 次性质 (3) (关于行), 有

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{B}) &= (x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}))\\ &= (-1)^{n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_n))\\ =\ &(-1)^{n+1}\det(\boldsymbol{B})\\ =\ &(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}))\\ =\ &(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})).\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}&\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}))\\ =\ &(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-2})).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_n)) = \ &(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\ &\cdot(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\\ &\cdot\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_{n-2})).\end{aligned}$$

⋯ ⋯

最后, 我们有

$$\begin{aligned}\det(V(x_1,x_2,\cdots,x_n)) = \ &(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\ &\cdot(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\\ &\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdot(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\ &\cdot(x_2-x_1)\\ &\cdot\det(V(x_1))\\ = \ &(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\\
&\cdot \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdot (x_3-x_1)(x_3-x_2)\\
&\cdot (x_2-x_1)\\
&\cdot 1\\
=&\prod_{2\leqslant v\leqslant n}\prod_{1\leqslant u\leqslant v-1}(x_v-x_u)\\
=&\prod_{1\leqslant u<v\leqslant n}(x_v-x_u).
\end{aligned}
$$

不难看出, 若 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的行列式非零, 则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相同; 反过来, 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相同, 则 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的行列式非零.

例 C.12 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个数. 作 n 级阵 $C(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 如下:

$$
[C(a_1, a_2, \cdots, a_n)]_{i,j} = \begin{cases} -a_{n-i+1}, & j = n; \\ 1, & 2 \leqslant i = j+1 \leqslant n; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

形象地,

$$
C(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}
$$

. 设 x 是一个数. 记 $P(x; a_1, a_2, \cdots, a_n) = xI_n - C(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 形象地,

$$
P(x; a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_1 \end{bmatrix}.
$$

我们计算 $\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))$.

注意到, 当 $1<j<n$ 时, $[P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,j}=0$. 于是, 按行 1 展开, 有

$$\begin{aligned}&\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))\\=\ &(-1)^{1+1}[P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,1}\det((P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|1))\\&+(-1)^{1+n}[P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,n}\det((P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|n)).\end{aligned}$$

不难写出,

$$[P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,1}=x,\quad [P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,n}=a_n.$$

不难写出,

$$\begin{aligned}(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|1)&=\begin{bmatrix}x&\cdots&0&0&a_{n-1}\\-1&\cdots&0&0&a_{n-2}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&-1&x&a_2\\0&\cdots&0&-1&x+a_1\end{bmatrix}\\&=P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}).\end{aligned}$$

故

$$\det((P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|1))=\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})).$$

不难写出,

$$(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|n)=\begin{bmatrix}-1&x&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&x\\0&0&\cdots&0&-1\end{bmatrix};$$

具体地,

$$[(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|n)]_{i,j}=\begin{cases}-1,&1\leqslant i=j\leqslant n-1;\\x,&1\leqslant i=j-1\leqslant n-2;\\0,&\text{其他}.\end{cases}$$

故 $1 \leqslant j < i \leqslant n-1$ 时, 有 $[(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|n)]_{i,j} = 0$. 则

$$\det((P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|n)) = (-1)^{n-1}.$$

综上,

$$\begin{aligned}
&\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)) \\
= \quad &(-1)^{1+1}[P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,1}\det((P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|1)) \\
&+(-1)^{1+n}[P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)]_{1,n}\det((P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n))(1|n)) \\
=\ &x\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}))+(-1)^{1+n}a_n(-1)^{n-1} \\
=\ &x\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}))+a_n.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})) = x\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-2}))+a_{n-1}.$$

故

$$\begin{aligned}
\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)) &= x\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}))+a_n \\
&= x(x\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-2}))+a_{n-1})+a_n \\
&= x^2\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-2}))+a_{n-1}x+a_n.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

最后, 我们有

$$\begin{aligned}
\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_n)) &= x\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}))+a_n \\
&= x^2\det(P(x;a_1,a_2,\cdots,a_{n-2}))+a_{n-1}x+a_n \\
&= \ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= x^{n-1}\det(P(x;a_1))+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\
&= x^{n-1}(x+a_1)+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\
&= x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.
\end{aligned}$$

虽然我写了不少例, 我并不想在本书具体地介绍如何计算一个阵的行列式; 那或许不是我的事. 我的目标只是带您入门行列式; 这些例的目的是使您更好地理解行列式的性质. 若您对计算一个阵的行列式的方法感兴趣, 您可以见一些线性代数 (或高等代数) 教材, 或者找相关的文献.

C.4　排列

一般地, 在以组合定义定义行列式的教材里, 排列 (或置换) 的一些基本的性质是必要的, 因为它们对论证行列式的性质有用 (通俗地, 这些教材用排列研究行列式). 我想在本节用行列式研究排列 (通俗地, 我要反着干).

研究排列时, 有一种行为相当重要.

定义 C.13 (对换)　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一个排列. 设 i, j 是不超过 n 的二个不等的正整数. 我们交换此排列的第 i 个文字与第 j 个文字 (也就是说, 交换文字 a_i, a_j), 且不改变其他的文字, 则, 我们得到了一个新的排列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 其中

$$b_k = \begin{cases} a_j, & k = i; \\ a_i, & k = j; \\ a_k, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们说, 变 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的行为是一次**对换**. 特别地, 若 $j = i+1$ 或 $j = i-1$ (通俗地, 这就是说, a_i, a_j, 或 a_j, a_i, 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 里, 是相邻的二个文字), 我们说, 这一次对换是一次**相邻对换**.

例 C.14　考虑排列 I: 3, 2, 5, 1, 4. 交换 3 与 1 的位置, 得到排列 II: 1, 2, 5, 3, 4. 我们说, 变 I 为 II 的行为是一次对换.

还是考虑排列 I. 交换 1 与 4 的位置, 得到排列 III: 3, 2, 5, 4, 1. 变 I 为 III 的行为当然也是一次对换. 不过, 因为 1, 4 在 I 里是相邻的二个文字, 故我们也可说, 变 I 为 III 的行为是一次相邻对换.

值得注意的是, 一次对换的结果可以跟多次相邻对换的结果一样. 比如, 为了变 I 为 II, 我们可以这么干:

交换 3 与 2 的位置, 得排列 IV: 2, 3, 5, 1, 4;

交换 3 与 5 的位置, 得排列 V: 2, 5, 3, 1, 4;

交换 3 与 1 的位置, 得排列 VI: 2, 5, 1, 3, 4;

交换 5 与 1 的位置, 得排列 VII: 2, 1, 5, 3, 4;

交换 2 与 1 的位置, 得排列 VIII: 1, 2, 5, 3, 4.

可以看到, 我们利用 5 次相邻对换实现了一次 (不是相邻的) 对换. 注意到, 这是一个奇数.

其实, 不难看出这么一件事. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一个排列, i, j 是不超过 n 的二个不等的正整数, 且 $i < j$. 则, 我们可作 $2(j-i)-1$ 次相邻对换以交换此排列的第 i 个文字与第 j 个文字.

相邻对换与逆序数有如下关系.

定理 C.15 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的 n 个整数. 设排列 I: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的逆序数 $\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n) = T$. 那么, 我们可作 T 次相邻对换变排列 I 为其自然排列.

证 我们先设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列. 作命题 $P(n)$:

任取 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 我们可作 $\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 次相邻对换变其为自然排列 $1, 2, \cdots, n$.

我们用数学归纳法证明, 对任何正整数 n, $P(n)$ 成立.

$P(1)$ 是正确的. 毕竟, 1 只有 1 个排列: 1. 我们不必作任何对换, 它已是自然排列. 排列 1 的逆序数自然是 0.

现在, 我们设 $P(m-1)$ 是正确的. 我们证 $P(m)$ 也是正确的. 任取 $1, 2, \cdots, m$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 那么, 一定存在, 且只存在一个不超过 m 的正整数 k, 使 $a_k = m$. 我们交换 m 与 a_{k+1}, 再交换 m 与 a_{k+2}, $\cdots\cdots$, 再交换 m 与 a_m, 从而可变 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 $a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_m, m$. 这 $m-k$ 次相邻对换使 m 是最后一个数 (若 $a_m = m$, 则不必作对换了, 故此关系仍成立), 且新排列的前 $m-1$ 个整数 $a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_m$ 是 $1, 2, \cdots, m-1$ 的排列. 由假定, 我们可作 $T_{m-1} = \tau(a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_m)$ 次相邻对换, 变 $a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_m$ 为其自然排列 $1, 2, \cdots, m-1$. 所以, 我们可作 $T_{m-1} + (m-k)$ 次相邻对换变 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为其自然排列 $1, 2, \cdots, m$.

注意到, 每一个适合条件 $1 \leqslant i < j \leqslant m$ 的有序整数对 (i, j) **恰**适合以下三个条件之一: (a) $i \neq k$ 且 $j \neq k$; (b) $i = k$ 且 $k < j \leqslant m$; (c) $1 \leqslant i < k$ 且 $j = k$. 再注意到, 对每一个不等于 k, 且不超过 m 的正整数 ℓ, 必有 $a_\ell < m$.

故

$$
\begin{aligned}
&\tau(a_1, a_2, \cdots, a_m)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \rho(a_i, a_j)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant m\\ i,j\neq k}} \rho(a_i, a_j) + \sum_{k<j\leqslant m} \rho(a_k, a_j) + \sum_{1\leqslant i<k} \rho(a_i, a_k)\\
&= \tau(a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_m) + \sum_{k<j\leqslant m} 1 + \sum_{1\leqslant i<k} 0\\
&= T_{m-1} + (m-k).
\end{aligned}
$$

从而, 我们可作 $\tau(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 次相邻对换变 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为其自然排列 1, 2, ···, m.

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 对任何正整数 n, $P(n)$ 成立.

最后, 我们看一般的情形.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的自然排列是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 我们记 $f(c_i) = i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$). (通俗地, $f(a_i)$ 表示 a_i 是第 $f(a_i)$ **小**的数.) 那么, 不难看出, 若 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的一个排列, 则 $f(d_1), f(d_2), \cdots, f(d_n)$ 是 1, 2, ···, n 的一个排列; 反过来, 若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 1, 2, ···, n 的一个排列, 则 $c_{v_1}, c_{v_2}, \cdots, c_{v_n}$ 一定是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的一个排列. 也不难看出, 若 $d_t < d_v$, 必有 $f(d_t) < f(d_v)$. 反过来, 若 $f(d_t) < f(d_v)$, 必有 $d_t < d_v$. 从而, $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)$ 的逆序数等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的逆序数. 我们分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 取 "小名" $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)$, 即可用老方法, 作跟 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的逆序数一样多的次数的相邻对换, 变 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为其自然排列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. (注意到, 我们总是可用类似的手法, 变一般的排列的研究为 1, 2, ···, n 的排列的研究. 所以, 当我们得到 1, 2, ···, n 的排列的**只跟逆序有关**的性质后, 我们总可译其为一般的排列的性质.)

证毕.

定理 C.16　设排列 I: $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 施一次对换于排列 I, 得排列 II: $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 则

$$s(b_1, b_2, \cdots, b_n) = -s(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

(通俗地, 一次对换变排列的号.)

证　无妨设排列 I, II 都是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列; 可用我之前提到的手法推广此事于任何的排列.

设 n 级单位阵 $I = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$. 作二个 n 级阵 $A = [e_{a_1}, e_{a_2}, \cdots, e_{a_n}]$, $B = [e_{b_1}, e_{b_2}, \cdots, e_{b_n}]$. 那么, B 可被认为是交换了 A 的二列, 且不变其他列得到的阵. 从而,

$$\begin{aligned}
&s(b_1, b_2, \cdots, b_n)\\
&= s(b_1, b_2, \cdots, b_n) \det(I)\\
&= \det(B)\\
&= -\det(A)\\
&= -s(a_1, a_2, \cdots, a_n) \det(I)\\
&= -s(a_1, a_2, \cdots, a_n).
\end{aligned}$$

证毕.

定理 C.17　设 $n \geqslant 2$. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的整数. 那么, 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的全部排列中, 符号为 1 的排列跟符号为 -1 的排列的数目相等.

证　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的自然排列是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 不难看出, 每一个 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的排列都是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的排列, 且每一个 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的排列都是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的排列,

无妨设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 分别为 $1, 2, \cdots, n$; 可用我之前提到的手法推广此事于任何的排列.

作 n 级阵 U, 其中 $[U]_{i,j} = 1$ (通俗地, U 的每一个元都是 1). 根据交错性, $\det(U) = 0$. 根据完全展开 (取 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$),

$$\begin{aligned}
0 &= \det(U)\\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n\\ i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n)\, [U]_{i_1,1} [U]_{i_2,2} \cdots [U]_{i_n,n}\\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n\\ i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ 互不相同}}} s(i_1, i_2, \cdots, i_n).
\end{aligned}$$

我问一个简单的问题: 设有 k 个数, 每一个都是 1 或 -1. 若它们的和为零, 请问, 有几个 1, 有几个 -1? 我想, 您能答出, 1 跟 -1 的个数都是 $k/2$.　　证毕.

由此可见, 完全展开 n 级阵 ($n \geqslant 2$) 的行列式的公式里, 符号为 1 的项跟符号为 -1 的项的数目都是 $(n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1)/2$.

最后, 我想说公理定义的事.

或许, 您还记得, 我在第一章, 节 14, "用行列式的性质确定行列式" 里说过, 行列式的规范性、多线性、交错性可确定行列式:

定理 C.18 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n \times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n \times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned} &f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_n]) \\ =\ &sf([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]) + tf([a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n]). \end{aligned}$$

(2) (交错性) 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $f(A) = 0$.

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A) = f(I) \det(A)$.

特别地, 若 $f(I) = 1$ (规范性), 则 f 就是行列式.

还记得我如何证此事吗? 我作了一个辅助函数

$$g(A) = f(A) - f(I) \det(A).$$

可以验证, g 是多线性的、交错性的, 且 $g(I) = 0$. 于是, 设法证对任何 n 级阵 A, $g(A) = 0$ 即可. 我为什么要作这个 g?

为解释此事, 我们看, 若我不作此 g, 会如何. 首先, 因为 f 的多线性与交错性, 我们可类似地写出

$$f(A) = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ 互不相同}}} [A]_{i_1,1}[A]_{i_2,2} \cdots [A]_{i_n,n} f([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]),$$

其中 e_k 是 n 级单位阵 I 的列 k.

接着, 我们要确定 $f([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}])$. 由多线性与交错性, 我们可推出反称性. 这样, 我们可以适当地交换 $[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]$ 的列, 可变其为 $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$, 即 n 级单位阵 I. 从而, 存在一个由 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 确定的数 $\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, 它等于 1 或 -1, 使

$$f([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]) = \sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n) f(I).$$

故

$$f(A) = f(I) \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ 互不相同}}} \sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n) [A]_{i_1,1} [A]_{i_2,2} \cdots [A]_{i_n,n}.$$

问题来了: $\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 究竟是什么?

我们回想, 任给 1, 2, ⋯, n 的一个排列 i_1, i_2, ⋯, i_n, 我们总可作 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 次相邻对换变其为自然排列. 所以, 我们可作 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 次列的交换 (每次交换二列), 变 $[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]$ 为 I. 由反称性,

$$\begin{aligned} & f([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]) \\ = & (-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)} f([e_1, e_2, \cdots, e_n]) \\ = & s(i_1, i_2, \cdots, i_n) f(I). \end{aligned}$$

所以, $\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 其实就是 $s(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 再根据完全展开 (取 j_1, j_2, ⋯, j_n 为 1, 2, ⋯, n), 可知 $f(A) = f(I) \det(A)$.

由此可见, 理论地, 不作辅助函数 g 也是可证此事的. 但是, 跟作辅助函数 g 的论证相比, 这个试直接计算 $f(A)$ 的论证至少用到了二件事:

(1) 作跟逆序数一样多的次数的相邻对换, 可变一个排列为其自然排列;

(2) 完全展开行列式的公式.

注意到, (1) 是我已提到的, 而 (2) (在我的教学里) 是选学的内容. 所以, 为了使论证更好地被理解, 也为了简化论证, 我作了辅助函数. g 的一个特点是 $g(I) = 0$. 所以, 利用反称性变 $g([e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}])$ 为 $g(I)$ 时, 我们不必关注变了几次号, 也不必关注如何变 i_1, i_2, ⋯, i_n 为 1, 2, ⋯, n (比如, 要变 3, 2, 5, 1, 4 为 1, 2, 3, 4, 5, 可以考虑交换 5, 4 的位置, 再交换 4, 1 的位置, 再交换 3, 1 的位置); 我们知道, **可适当地交换文字的位置**, 变 i_1, i_2, ⋯, i_n 为 1, 2, ⋯, n, 即可. “零跟任何数的积都是零” 起了较大的作用.

用同样的手法, 可证

定理 C.19　设 c 是常数. 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n \times 1$ 阵 a_1, ⋯,

$a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n \times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$
\begin{aligned}
&f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_n]) \\
=\ &sf([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]) + tf([a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n]).
\end{aligned}
$$

(2) (交错性) 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $f(A) = 0$.

(3) (“规范性”) $f(I) = c$.

设定义在全体 n 级阵上的函数 h 也适合这三条性质. 则对任何 n 级阵 A, $f(A) = h(A)$.

证 作辅助函数 $g(A) = f(A) - h(A)$. 此 g 也有多线性与交错性, 且 $g(I) = 0$. 然后, 用我 (在第一章, 节 14) 用过的手法即可. (注意, 此事甚至没提到 “行列式” “det” 等文字.) 证毕.

C.5 Binet–Cauchy 公式

我要介绍证 Binet–Cauchy 公式的另一种方法.

在第一章, 节 *30* 里, 我用完全展开行列式的公式证明了它. 这种证法至少有二个好处:

(1) 记号较简单;

(2) 方便您对比选学内容 “Binet–Cauchy 公式” 与必学内容 “Binet–Cauchy 公式 (青春版)”.

当然, 此证法的一个较大的缺点是 “用到了完全展开 (或, 组合定义相关的公式)”. 若您真地不会 (或, 不想用) 完全展开, 且您又想了解如何证明 Binet–Cauchy 公式, 我在这儿给一个利用按多列展开行列式的公式的证明. 至少, 按多列展开行列式 (及其论证) 不涉及 “排列” “逆序数” “符号” 等概念.

这个论证是我初学 Binet–Cauchy 公式时学到的证明. 这个论证体现了重要思想 “算二次 (dufoje)”; 聪明的数学家利用此原则, 得到了不少有名的等式.

为方便, 请允许我引用按多列展开行列式公式与 Binet–Cauchy 公式.

定理 C.20 设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 k 是不超过 n 的正整数. 设 j_1, j_2, $\cdots$, j_k 是不超过 n 的正整数, 且 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. 则

$$\det(A) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \det\left(A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}\right) \cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} \det(A(i_1, i_2, \cdots, i_k | j_1, j_2, \cdots, j_k)).$$

定理 C.21 (Binet–Cauchy 公式) 设 A, B 分别是 $m \times n$, $n \times m$ 阵.

(1) 若 $n > m$, 则 $\det(BA) = 0$.

(2) 若 $n \leqslant m$, 则

$$\det(BA) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leqslant m} \det\left(B\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ j_1, j_2, \cdots, j_n \end{pmatrix}\right) \det\left(A\begin{pmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}\right).$$

特别地, 若 $n = m$, 则因适合条件 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leqslant m$ 的 j_1, j_2, $\cdots$, j_n,

是, 且只能是, 1, 2, ⋯, n, 故

$$\begin{aligned}\det(BA) &= \det\left(B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right)\\ &= \det(B)\det(A).\end{aligned}$$

有几件较重要小事值得一提.

(1) 若一个方阵有一行的元全是 0, 则其行列式为 0.

可以直接用定义 (按列 1 展开行列式) 论证此事; 可用按一行展开行列式的公式论证此事; 当然, 也可利用 (关于行的) 多线性论证此事. 我就不在这儿证了.

(2) 若加一个阵的一列的倍于另一列, 则其行列式不变.

这就是我在前面提到的行列式的一个性质.

(3) 设 A, B, C, D 分别是 $m\times s$, $n\times s$, $m\times t$, $n\times t$ 阵. 那么,

$$\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix}$$

表示一个 $(m+n)\times(s+t)$-阵 M, 且对任何不超过 $m+n$ 的正整数 i 与不超过 $s+t$ 的正整数 j,

$$[M]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\leqslant m,\ j\leqslant s;\\ [B]_{i-m,j}, & i>m,\ j\leqslant s;\\ [C]_{i,j-s}, & i\leqslant m,\ j>s;\\ [D]_{i-m,j-s}, & i>m,\ j>s.\end{cases}$$

这是我们在第一章, 节 31 里见过的记号. 现在, 我要进一步地发展此记号. 具体地, 设 A, B 分别是 $m\times s$, $n\times s$ 阵. 那么,

$$\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$$

表示一个 $(m+n)\times s$-阵 L, 且对任何不超过 $m+n$ 的正整数 i 与不超过 s 的正整数 j,

$$[L]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\leqslant m;\\ [B]_{i-m,j}, & i>m.\end{cases}$$

类似地, 设 A, C 分别是 $m\times s$, $m\times t$ 阵. 那么,

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$$

表示一个 $m\times(s+t)$-阵 H, 且对任何不超过 m 的正整数 i 与不超过 $s+t$ 的正整数 j,

$$[H]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & j\leqslant s;\\ [C]_{i,j-s}, & j>s.\end{cases}$$

证　设 A, B 分别是 $m\times n$, $n\times m$ 阵. 作 $m+n$ 级阵

$$J=\begin{bmatrix} I_m & A\\ -B & 0\end{bmatrix},$$

其中左上角的 I_m 是 m 级单位阵, 右下角的 0 是 $n\times n$ 零阵 (元全为 0 的阵).

我们用二种方式计算 J 的行列式.

一方面, 我们按列 $m+1, m+2, \cdots, m+n$ 展开, 有

$$\begin{aligned}\det(J)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant m+n}&\det\left(J\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_n\\ m+1,m+2,\cdots,m+n\end{pmatrix}\right)\\ &\cdot(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n)}\\ &\cdot\det\left(J(i_1,i_2,\cdots,i_n|m+1,m+2,\cdots,m+n)\right).\end{aligned}$$

注意到, 若 $i_n>m$, 则因 $J\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_n\\ m+1,m+2,\cdots,m+n\end{pmatrix}$ 的行 n 的元全是 0, 故这个子阵的行列式为 0. 特别地, 若 $n>m$, 则 i_n 必高于 m (抽屉原理). 故 $n>m$ 时, J 的行列式为 0.

当 $n\leqslant m$ 时, 我们去除使 $i_n>m$ 的 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 有

$$\begin{aligned}\det(J)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant m}&\det\left(J\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_n\\ m+1,m+2,\cdots,m+n\end{pmatrix}\right)\\ &\cdot(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n)}\\ &\cdot\det\left(J(i_1,i_2,\cdots,i_n|m+1,m+2,\cdots,m+n)\right).\end{aligned}$$

不难看出, 因为 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant m$,

$$J\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ m+1, m+2, \cdots, m+n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

且

$$J(i_1, i_2, \cdots, i_n | m+1, m+2, \cdots, m+n) = \begin{bmatrix} I_m(i_1, i_2, \cdots, i_n |) \\ -B \end{bmatrix},$$

其中 $I_m(i_1, i_2, \cdots, i_n|)$ 表示去除 I_m 的行 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 后 (不改变列) 得到的阵. 按列 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 展开 $T_{i_1,i_2,\cdots,i_n} = J(i_1, i_2, \cdots, i_n | m+1, m+2, \cdots, m+n)$ 的行列式, 有

$$\begin{aligned}
&\det(T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}) \\
= &\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant m} \det\left(T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\begin{pmatrix} k_1, k_2, \cdots, k_n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix}\right) \\
&\qquad \cdot (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_n+i_1+i_2+\cdots+i_n} \det(T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(k_1, k_2, \cdots, k_n | i_1, i_2, \cdots, i_n)).
\end{aligned}$$

注意到, 若 $k_1 \leqslant m-n$, 则因 $T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\begin{pmatrix} k_1, k_2, \cdots, k_n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix}$ 的行 1 的元全是 0, 故这个子阵的行列式为 0. 并且, 若 $k_1 > m-n$, 则 k_1, k_2, $\cdots$, k_n 是, 且只能是 $m-n+1$, $m-n+2$, $\cdots$, m. 故

$$\begin{aligned}
&\det(T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}) \\
= &\det\left(T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\begin{pmatrix} m-n+1, m-n+2, \cdots, m \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix}\right) \\
&\cdot (-1)^{(m-n+1)+(m-n+2)+\cdots+m+i_1+i_2+\cdots+i_n} \\
&\cdot \det(T_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(m-n+1, m-n+2, \cdots, m | i_1, i_2, \cdots, i_n)) \\
= &\det\left((-B)\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix}\right) \\
&\cdot (-1)^{(m-n+1)+(m-n+2)+\cdots+(m-n+n)+i_1+i_2+\cdots+i_n} \\
&\cdot \det(I_m(i_1, i_2, \cdots, i_n | i_1, i_2, \cdots, i_n)) \\
= &(-1)^{(m-n+1)+(m-n+2)+\cdots+(m-n+n)+i_1+i_2+\cdots+i_n}(-1)^n \det\left(B\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\det(J)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant m}&\det\left(A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right)\\&\cdot(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n)}\\&\cdot(-1)^{(m-n+1)+(m-n+2)+\cdots+(m-n+n)+i_1+i_2+\cdots+i_n}(-1)^n\\&\cdot\det\left(B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\i_1,i_2,\cdots,i_n\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n)}\\&\cdot(-1)^{(m-n+1)+(m-n+2)+\cdots+(m-n+n)+i_1+i_2+\cdots+i_n}\cdot(-1)^n\\=&(-1)^{2(i_1+i_2+\cdots+i_n)}\cdot(-1)^{2mn}\cdot(-1)^{2(1+2+\cdots+n)}\cdot(-1)^{n-n^2}\\=&(-1)^{-n(n-1)}\\=&1,\end{aligned}$$

故

$$\det(J)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant m}\det\left(B\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\i_1,i_2,\cdots,i_n\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\right).$$

另一方面,我们也可用行列式的性质,施适当的变换于 J,得一个新阵 K,且 J, K 的行列式相等. 具体地,我们加 J 的列 1 的 $-[A]_{1,1}$ 倍于其列 $m+1$,列 2 的 $-[A]_{2,1}$ 倍于其列 $m+1$, ……,列 m 的 $-[A]_{m,1}$ 倍于其列 $m+1$,得

$$J_1=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0&[A]_{1,2}&\cdots&[A]_{1,n}\\0&1&\cdots&0&0&[A]_{2,2}&\cdots&[A]_{2,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&[A]_{m,2}&\cdots&[A]_{m,n}\\-[B]_{1,1}&-[B]_{1,2}&\cdots&-[B]_{1,m}&p_{1,1}&0&\cdots&0\\-[B]_{2,1}&-[B]_{2,2}&\cdots&-[B]_{2,m}&p_{2,1}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-[B]_{n,1}&-[B]_{n,2}&\cdots&-[B]_{n,m}&p_{n,1}&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} p_{k,1} &= (-[B]_{k,1})(-[A]_{1,1}) + (-[B]_{k,2})(-[A]_{2,1}) + \cdots + (-[B]_{k,m})(-[A]_{m,1}) \\ &= [B]_{k,1}[A]_{1,1} + [B]_{k,2}[A]_{2,1} + \cdots + [B]_{k,m}[A]_{m,1} \\ &= [BA]_{k,1}. \end{aligned}$$

根据行列式的性质, $\det(J) = \det(J_1)$.

我们加 J_1 的列 1 的 $-[A]_{1,2}$ 倍于其列 $m+2$, 列 2 的 $-[A]_{2,2}$ 倍于其列 $m+2$, ⋯ ⋯, 列 m 的 $-[A]_{m,2}$ 倍于其列 $m+2$, 得

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & [A]_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & [A]_{m,n} \\ -[B]_{1,1} & -[B]_{1,2} & \cdots & -[B]_{1,m} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & 0 \\ -[B]_{2,1} & -[B]_{2,2} & \cdots & -[B]_{2,m} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -[B]_{n,1} & -[B]_{n,2} & \cdots & -[B]_{n,m} & p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} p_{k,2} &= (-[B]_{k,1})(-[A]_{1,2}) + (-[B]_{k,2})(-[A]_{2,2}) + \cdots + (-[B]_{k,m})(-[A]_{m,2}) \\ &= [B]_{k,1}[A]_{1,2} + [B]_{k,2}[A]_{2,2} + \cdots + [B]_{k,m}[A]_{m,2} \\ &= [BA]_{k,2}. \end{aligned}$$

根据行列式的性质, $\det(J_1) = \det(J_2)$, 故 $\det(J) = \det(J_2)$.

⋯ ⋯

我们加 J_{n-1} 的列 1 的 $-[A]_{1,n}$ 倍于其列 $m+n$, 列 2 的 $-[A]_{2,n}$ 倍于其

列 $m+n$, $\cdots\cdots$, 列 m 的 $-[A]_{m,n}$ 倍于其列 $m+n$, 得

$$\begin{aligned}J_n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -[B]_{1,1} & -[B]_{1,2} & \cdots & -[B]_{1,m} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ -[B]_{2,1} & -[B]_{2,2} & \cdots & -[B]_{2,m} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -[B]_{n,1} & -[B]_{n,2} & \cdots & -[B]_{n,m} & p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & BA \end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中右上角的 0 是 $m \times n$ 零阵, 且

$$\begin{aligned}p_{k,n} &= (-[B]_{k,1})(-[A]_{1,n}) + (-[B]_{k,2})(-[A]_{2,n}) + \cdots + (-[B]_{k,m})(-[A]_{m,n}) \\ &= [B]_{k,1}[A]_{1,n} + [B]_{k,2}[A]_{2,n} + \cdots + [B]_{k,m}[A]_{m,n} \\ &= [BA]_{k,n}.\end{aligned}$$

根据行列式的性质, $\det(J_n) = \det(J_{n-1})$, 故 $\det(J) = \det(J_n)$.

我们要如何计算 J_n 的行列式? 我给您三条路: (a) 用第一章, 节 31 的第 2 个例 (计算 J_n 的转置的行列式); (b) 按行 $1, 2, \cdots, m$ 展开; (c) 按列 $m+1$, $m+2$, $\cdots$, $m+n$ 展开. 总之, 若您没错, 您可算出,

$$\det(J) = \det(J_n) = \det(I_m)\det(BA) = \det(BA).$$

现在, 我们比较这二次计算的结果. 这就是 Binet–Cauchy 公式.　　证毕.

我还想说一些话.

设 A, B 分别是 $s \times n$ 与 $m \times s$ 阵. 不难看出, BA 有意义, 且 BA 是一个 $m \times n$ 阵. BA 可能不是一个方阵, 故说 BA 的行列式可能是无意义的. 但是, 我们仍可说 BA 的子阵的行列式, 若这个子阵是正方的. 设 k 是一个既不超过 m, 也不超过 n 的正整数. 设 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$; 设 $1 \leqslant \ell_1 < \cdots < \ell_k \leqslant n$. 我们说, 我们可以用 B 与 A 的 k 级子阵的行列式写出 BA 的 k 级子阵

$$F = (BA)\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ \ell_1, \cdots, \ell_k \end{pmatrix}$$

的行列式.

首先, 我们注意到

$$(BA)\binom{i_1,\cdots,i_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k} = B\binom{i_1,\cdots,i_k}{1,\cdots,s} A\binom{1,\cdots,s}{\ell_1,\cdots,\ell_k}.$$

为说明此事, 我们设

$$D = B\binom{i_1,\cdots,i_k}{1,\cdots,s}, \quad C = A\binom{1,\cdots,s}{\ell_1,\cdots,\ell_k}.$$

则 D, C 分别是 $k\times s$, $s\times k$ 阵, 且 $[D]_{u,j} = [B]_{i_u,j}$, $[C]_{i,v} = [A]_{i,\ell_v}$. 则

$$\begin{aligned}
[DC]_{u,v} &= \sum_{p=1}^{s} [D]_{u,j}[C]_{j,v} \\
&= \sum_{p=1}^{s} [B]_{i_u,j}[A]_{j,\ell_v} \\
&= [BA]_{i_u,\ell_v} \\
&= [F]_{u,v}.
\end{aligned}$$

现在, 我们可以对 C, D 用 Binet–Cauchy 公式了. 我再说一次, C 是 $s\times k$ 的, 且 D 是 $k\times s$ 的. 于是:

(1) 若 $k > s$, 则 $\det(DC) = 0$;

(2) 若 $k \leqslant s$, 则

$$\begin{aligned}
&\det(DC) \\
= &\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant s} \det\left(D\binom{1,\cdots,k}{j_1,\cdots,j_k}\right)\det\left(C\binom{j_1,\cdots,j_k}{1,\cdots,k}\right) \\
= &\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant s} \det\left(B\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k}\right)\det\left(A\binom{j_1,\cdots,j_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k}\right).
\end{aligned}$$

综上, 我们有

定理 C.22 设 A, B 分别是 $s\times n$ 与 $m\times s$ 阵. 设 k 是一个既不超过 m, 也不超过 n 的正整数. 设 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m$; 设 $1\leqslant \ell_1<\cdots<\ell_k\leqslant n$.

(1) 若 $k > s$, 则

$$\det\left((BA)\binom{i_1,\cdots,i_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k}\right)=0;$$

(2) 若 $k \leqslant s$, 则

$$\begin{aligned}&\det\left((BA)\binom{i_1,\cdots,i_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k}\right)\\=&\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant s}\det\left(B\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k}\right)\det\left(A\binom{j_1,\cdots,j_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k}\right).\end{aligned}$$

可视此事为 Binet–Cauchy 公式的一个推广: 若 $m = n$, $k = n$, 且 $i_u = \ell_u = u$ $(u = 1, 2, \cdots, n)$, 则这就是 Binet–Cauchy 公式.

若我们取 $m = n = s$, 则

定理 C.23 设 A, B 是 n 级阵. 设 k 是一个不超过 n 的正整数. 设 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$; 设 $1 \leqslant \ell_1 < \cdots < \ell_k \leqslant n$. 则

$$\begin{aligned}&\det\left((BA)\binom{i_1,\cdots,i_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k}\right)\\=&\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(B\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k}\right)\det\left(A\binom{j_1,\cdots,j_k}{\ell_1,\cdots,\ell_k}\right).\end{aligned}$$

我们知道, A 的一个子阵不但可被认为是取 A 的一些行与一些列交叉处的元按原来的次序作成的新阵, 还可被认为是去除 A 的一些行与一些列后, 剩下的元按原来的次序作成的阵. 所以, 对称地, 我们当然可如此改写前面的结论:

定理 C.24 设 A, B 是 n 级阵. 设 k 是一个不超过 n 的正整数. 设 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$; 设 $1 \leqslant \ell_1 < \cdots < \ell_k \leqslant n$. 则

$$\begin{aligned}&\det((BA)(i_1,\cdots,i_k|\ell_1,\cdots,\ell_k))\\=&\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det(B(i_1,\cdots,i_k|j_1,\cdots,j_k))\det(A(j_1,\cdots,j_k|\ell_1,\cdots,\ell_k)).\end{aligned}$$

C.6　按一行展开行列式

本节, 我想用定义 (按列 1 展开), 证明按一行展开行列式的公式.

定理 C.25　设 A 是 n 级阵 ($n \geqslant 1$). 设 i 为整数, 且 $1 \leqslant i \leqslant n$. 则

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

证　我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对任何 n 级阵 A, 对任何不超过 n 的正整数 i,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} \det(A(i|j)).$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 显然是正确的.

可以验证, $P(2)$ 也是正确的 (习题).

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的. 任取一个 m 级阵 A. 任取不超过 m 的正整数 i. 为方便, 我们记 $f = (-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1))$. 则 (第 2 个等号利用了假定, 并注意到, A 的行 i (其中 $k \neq i$) 对应 $A(k|1)$ 的行 $i - \rho(i,k)$, A 的列 j (其中 $j \neq 1$) 对应 $A(k|1)$ 的列 $j-1$)

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
&= f + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m\\ k \neq i}} (-1)^{k+1}[A]_{k,1} \det(A(k|1))\\
&= f + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m\\ k \neq i}} (-1)^{k+1}[A]_{k,1} \sum_{j=2}^{m} (-1)^{i-\rho(i,k)+j-1} [A]_{i,j} \det(A(k,i|1,j))\\
&= f + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m\\ k \neq i}} \sum_{j=2}^{m} (-1)^{k+1}[A]_{k,1} (-1)^{i-\rho(i,k)+j-1} [A]_{i,j} \det(A(k,i|1,j))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f + \sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m \\ k\neq i}} (-1)^{k+1}[A]_{k,1}(-1)^{i-\rho(i,k)+j-1}[A]_{i,j} \det(A(k,i|1,j)) \\
&= f + \sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m \\ k\neq i}} (-1)^{i+j}[A]_{i,j}(-1)^{k-\rho(k,i)+1}[A]_{k,1} \det(A(k,i|1,j)) \\
&= f + \sum_{j=2}^{m} (-1)^{i+j}[A]_{i,j} \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m \\ k\neq i}} (-1)^{k-\rho(k,i)+1}[A]_{k,1} \det(A(k,i|1,j)) \\
&= f + \sum_{j=2}^{m} (-1)^{i+j}[A]_{i,j} \det(A(i|j)).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

C.7 方阵与其转置的行列式相等

本节, 我想证明: 一个方阵与其转置的行列式相等.

其实, 在第一章, 节 15, 我已用定义 (按列 1 展开) **与**按行 1 展开证明了它. 不过, 我想, 知道别的证明也好.

以下, 设 $P(n)$ 为命题

对**任何** n 级阵 A,

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A).$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

证 (同时用按列 1 展开与按行 1 展开) 见第一章, 节 15. 证毕.

证 (用按一列展开) $P(1)$ 是正确的. 毕竟, 1 级阵的转置就是自己.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取一个 m 级阵 A. 一方面, 我们知道, 对任何数 x, 与任何正整数 s, 必有

$$x = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} x.$$

另一方面, 我们已知, 对每一个 s 级阵 B, 与每一个不超过 s 的正整数 j,

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+j}[B]_{i,j} \det(B(i|j)).$$

最后, 注意到, 既然 $[A]_{i,j} = [A^{\mathrm{T}}]_{j,i}$, 则, 不难验证, $A^{\mathrm{T}}(i|j) = (A(j|i))^{\mathrm{T}}$. 结合这三件事, 与用过多次的加法的结合律与交换律, 并利用假定 (第 4 个等号), 我们有

$$\begin{aligned} &\det(A^{\mathrm{T}}) \\ = &\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \det(A^{\mathrm{T}}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[A^{\mathrm{T}}]_{i,j}\det(A^{\mathrm{T}}(i|j))\\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[A]_{j,i}\det((A(j|i))^{\mathrm{T}})\\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[A]_{j,i}\det(A(j|i))\\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{j+i}[A]_{j,i}\det(A(j|i))\\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+i}[A]_{j,i}\det(A(j|i))\\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\det(A)\\
&= \det(A).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

证 (用按列 1 展开)　作辅助命题 $Q(n)$:

$P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是正确的.

我们用数学归纳法证明: 对任何高于 1 的整数 n, $Q(n)$ 是正确的. 由此, 我们可知, 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

不难验证 $Q(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $Q(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $Q(m)$ 也是正确的. 既然 $Q(m-1)$ 是正确的, 则 $P(m-2)$ 与 $P(m-1)$ 是正确的. 所以, 若我们能由此证明 $P(m)$ 是正确的, 则 $Q(m)$ 是正确的.

任取一个 m 级阵 A. 则

$$
\begin{aligned}
&\det(A^{\mathrm{T}})\\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A^{\mathrm{T}}]_{i,1}\det(A^{\mathrm{T}}(i|1))\\
&= \quad (-1)^{1+1}[A^{\mathrm{T}}]_{1,1}\det(A^{\mathrm{T}}(1|1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} \det(A^{\mathrm{T}}(i|1)) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) && (1) \\
& + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} \det(A(1|i)) && (2) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1+1} [A]_{k,1} \det(A(1,k|i,1)) && (3) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{i=2}^{m} \sum_{k=2}^{m} (-1)^{i+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} (-1)^{k-1+1} [A]_{k,1} \det(A(1,k|i,1)) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{k=2}^{m} \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} (-1)^{k-1+1} [A]_{k,1} \det(A(1,k|i,1)) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{k=2}^{m} \sum_{i=2}^{m} (-1)^{k+1} [A]_{k,1} (-1)^{i-1+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} \det(A(1,k|i,1)) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} [A]_{k,1} \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i-1+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} \det(A(1,k|i,1)) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} [A]_{k,1} \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i-1+1} [A^{\mathrm{T}}]_{i,1} \det(A^{\mathrm{T}}(i,1|1,k)) && (4) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\
& + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} [A]_{k,1} \det(A^{\mathrm{T}}(1|k)) && (5) \\
= \quad & (-1)^{1+1} [A]_{1,1} \det(A(1|1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}[A]_{k,1}\det(A(k|1)) \qquad (6)\\
&=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}[A]_{k,1}\det(A(k|1))\\
&=\det(A).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 所以, $Q(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立.

我简单地作一些解释吧.

(1) (2) 都利用了假定 $P(m-1)$. 注意, $A^{\mathrm{T}}(i|1)$ 的转置是 $A(1|i)$.

(3) 利用了按列 1 展开. 注意, $[A]_{k,1}$ 是 $A(1|i)$ 的 $(k-1,1)$-元 $(i,k>1)$.

(4) 利用了假定 $P(m-2)$. 注意, $A(1,k|i,1)$ 的转置是 $A^{\mathrm{T}}(i,1|1,k)$.

(5) 利用了按列 1 展开. 注意, $[A^{\mathrm{T}}]_{i,1}$ 是 $A^{\mathrm{T}}(1|k)$ 的 $(i-1,1)$-元 $(i,k>1)$.

(6) 利用了假定 $P(m-1)$. 注意, $A^{\mathrm{T}}(1|k)$ 的转置是 $A(k|1)$. 证毕.

C.8 (关于列的) 多线性

本节, 我想证明 (关于列的) 多线性.

其实, 在第一章, 节 13, 我已用按一列展开行列式的公式证明了它. 不过, 我想, 知道别的证明也好.

以下, 设 $P(n)$ 为命题

对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}&\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_n]\\ =\ & s\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]+t\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n].\end{aligned}$$

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

证 (用按一列展开) 见第一章, 节 13. 证毕.

证 (用按列 1 展开) 不难验证 $P(1)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取不超过 m 的正整数 j. 任取 $m-1$ 个 $m\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_m$. 任取二个 $m\times 1$ 阵 x, y, 任取二个数 s, t. 作三个 m 级阵 A, B, C: A, B, C 的列 k 为 a_k $(k\neq j)$; A 的列 j 为 x; B 的列 j 为 y; C 的列 j 为 $sx+ty$. 那么,

$$\begin{aligned}\det(A)&=\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_m],\\ \det(B)&=\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_m],\\ \det(C)&=\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_m].\end{aligned}$$

不难发现, 若 $k\neq j$, 则 $[A]_{i,k}=[B]_{i,k}=[C]_{i,k}$, 故 $A(i|j)=B(i|j)=C(i|j)$.

设 $j=1$. 那么

$$\begin{aligned}&\det(C)\\ =\ &\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[C]_{i,j}\det(C(i|j))\\ =\ &\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}(s[A]_{i,j}+t[B]_{i,j})\det(C(i|j))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= s\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(C(i|j)) + t\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[B]_{i,j}\det(C(i|j))\\
&= s\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(A(i|j)) + t\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}[B]_{i,j}\det(B(i|j))\\
&= s\det(A) + t\det(B).
\end{aligned}
$$

设 $j > 1$. 设 $A(i|1)$, $B(i|1)$, $C(i|1)$ 的列 $j-1$ 分别是 p, q, r. 则 $r = sp + tq$. 由假定, $\det(C(i|1)) = s\det(A(i|1)) + t\det(B(i|1))$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\det(C)\\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[C]_{i,1}\det(C(i|1))\\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[C]_{i,1}(s\det(A(i|1)) + t\det(B(i|1)))\\
&= s\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[C]_{i,1}\det(A(i|1)) + t\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[C]_{i,1}\det(B(i|1))\\
&= s\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1)) + t\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[B]_{i,1}\det(B(i|1))\\
&= s\det(A) + t\det(B).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

证 (用按行 1 展开) 不难验证 $P(1)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取不超过 m 的正整数 j. 任取 $m-1$ 个 $m\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_m$. 任取二个 $m\times 1$ 阵 x, y, 任取二个数 s, t. 作三个 m 级阵 A, B, C: A, B, C 的列 k 为 a_k $(k \neq j)$; A 的列 j 为 x; B 的列 j 为 y; C 的列 j 为 $sx+ty$. 那么,

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det[a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_m],\\
\det(B) &= \det[a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_m],\\
\det(C) &= \det[a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_m].
\end{aligned}
$$

一方面, 若 $k = j$, 则 $[C]_{1,k} = x[A]_{1,k} + y[B]_{1,k}$, 且 $A(1|k) = B(1|k) = C(1|k)$. 另一方面, 若 $k \neq j$, 则 $[A]_{i,k} = [B]_{i,k} = [C]_{i,k}$. 设 $A(1|k)$, $B(1|k)$, $C(1|k)$ 的列 $j - \rho(j,k)$ 分别是 p, q, r. 则 $r = sp + tq$. 由假定, $\det(C(1|k)) = s\det(A(1|k)) + t\det(B(1|k))$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\det(C)\\
&= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{1+k}[C]_{1,k}\det(C(1|k))\\
&= (-1)^{1+j}[C]_{1,j}\det(C(1|j)) + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[C]_{1,k}\det(C(1|k))\\
&= \quad (-1)^{1+j}(s[A]_{1,j} + t[B]_{1,j})\det(C(1|j))\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[C]_{1,k}(s\det(A(1|k)) + t\det(B(1|k)))\\
&= \quad s(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(C(1|j)) + t(-1)^{1+j}[B]_{1,j}\det(C(1|j))\\
&\quad + s\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[C]_{1,k}\det(A(1|k))\\
&\quad + t\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[C]_{1,k}\det(B(1|k))\\
&= \quad s(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(A(1|j)) + t(-1)^{1+j}[B]_{1,j}\det(B(1|j))\\
&\quad + s\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}\det(A(1|k))\\
&\quad + t\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[B]_{1,k}\det(B(1|k))\\
&= \quad s(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(A(1|j)) + s\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}\det(A(1|k))\\
&\quad + t(-1)^{1+j}[B]_{1,j}\det(B(1|j)) + t\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j}}(-1)^{1+k}[B]_{1,k}\det(B(1|k))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= s\sum_{k=1}^{m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}\det(A(1|k)) + t\sum_{k=1}^{m}(-1)^{1+k}[B]_{1,k}\det(B(1|k))\\
&= s\det(A) + t\det(B).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

C.9　按前二列展开行列式

本节, 我想证明一个公式. 它在交错性的一个证明与反称性的一个证明里有用.

定理 C.26　设 A 是 n 级阵 $(n \geqslant 2)$. 则

$$\det(A) = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \det \begin{bmatrix} [A]_{i,1} & [A]_{i,2} \\ [A]_{k,1} & [A]_{k,2} \end{bmatrix} (-1)^{i+k+1+2} \det(A(i,k|1,2)).$$

证　注意到, 当 $d_2 \neq d_1$ 时, $[A]_{d_2,2}$ 是 $A(d_1|1)$ 的 $(d_2 - \rho(d_2,d_1), 1)$-元. 从而

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
={}& \sum_{d_1=1}^{n} (-1)^{d_1+1}[A]_{d_1,1} \det(A(d_1|1))\\
={}& \sum_{d_1=1}^{n} (-1)^{d_1+1}[A]_{d_1,1} \sum_{\substack{1 \leqslant d_2 \leqslant n \\ d_2 \neq d_1}} (-1)^{d_2-\rho(d_2,d_1)+1}[A]_{d_2,2} \det(A(d_1,d_2|1,2))\\
={}& \sum_{d_1=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant d_2 \leqslant n \\ d_2 \neq d_1}} (-1)^{d_1+1}[A]_{d_1,1}(-1)^{d_2-\rho(d_2,d_1)+1}[A]_{d_2,2} \det(A(d_1,d_2|1,2))\\
={}& \sum_{\substack{1 \leqslant d_1,d_2 \leqslant n \\ d_1 \neq d_2}} (-1)^{d_1+1}[A]_{d_1,1}(-1)^{d_2-\rho(d_2,d_1)+1}[A]_{d_2,2} \det(A(d_1,d_2|1,2))\\
={}& \sum_{\substack{1 \leqslant d_1,d_2 \leqslant n \\ d_1 \neq d_2}} (-1)^{\rho(d_1,d_2)}[A]_{d_1,1}[A]_{d_2,2}(-1)^{d_1+d_2+1+2} \det(A(d_1,d_2|1,2))\\
={}& \sum_{\substack{1 \leqslant d_1,d_2 \leqslant n \\ d_1 < d_2}} (-1)^{\rho(d_1,d_2)}[A]_{d_1,1}[A]_{d_2,2}(-1)^{d_1+d_2+1+2} \det(A(d_1,d_2|1,2))\\
&+ \sum_{\substack{1 \leqslant d_1,d_2 \leqslant n \\ d_1 > d_2}} (-1)^{\rho(d_1,d_2)}[A]_{d_1,1}[A]_{d_2,2}(-1)^{d_1+d_2+1+2} \det(A(d_1,d_2|1,2))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\ i<k}} (-1)^{\rho(i,k)}[A]_{i,1}[A]_{k,2}(-1)^{i+k+1+2}\det\left(A(i,k|1,2)\right)\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leqslant k,i\leqslant n\\ k>i}} (-1)^{\rho(k,i)}[A]_{k,1}[A]_{i,2}(-1)^{k+i+1+2}\det\left(A(k,i|1,2)\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} \left([A]_{i,1}[A]_{k,2}-[A]_{k,1}[A]_{i,2}\right)(-1)^{i+k+1+2}\det\left(A(i,k|1,2)\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} \det\begin{bmatrix}[A]_{i,1} & [A]_{i,2}\\ [A]_{k,1} & [A]_{k,2}\end{bmatrix}(-1)^{i+k+1+2}\det\left(A(i,k|1,2)\right).
\end{aligned}
$$

证毕.

C.10 (关于列的) 交错性

本节, 我想证明 (关于列的) 交错性.

其实, 在第一章, 节 13, 我已用按一列展开行列式的公式证明了它. 不过, 我想, 知道别的证明也好.

以下, 设 $P(n)$ 为命题

对每一个有完全相同的二列的 n 级阵 A, 其行列式必为零.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

证 (用按一列展开) 见第一章, 节 13. 证毕.

在介绍其他的证明前, 我要介绍二个有用的事实.

定理 C.27 设命题 I: 若一个方阵有**相邻的**二列相同, 则其行列式为零. 设命题 II: 交换方阵 A 的**相邻的**二列, 得方阵 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$. 则, 用行列式的 (关于列的) 多线性, 我们可由 I 推出 II.

证 设 A 是一个 n 级阵 ($n \geqslant 2$). 设 A 的列 $1, 2, \cdots, n$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 设 $1 \leqslant j < n$. 交换 A 的列 j, $j+1$, 得 B. 记

$$f_j(x, y) = \det[\cdots, a_{j-1}, x, y, a_{j+2}, \cdots].$$

那么, $f_j(a_j, a_{j+1}) = \det(A)$, $f_j(a_{j+1}, a_j) = \det(B)$. 则

$$\begin{aligned}
0 &= f_j(a_j + a_{j+1}, a_j + a_{j+1}) \\
&= f_j(a_j, a_j + a_{j+1}) + f_j(a_{j+1}, a_j + a_{j+1}) \\
&= (f_j(a_j, a_j) + f_j(a_j, a_{j+1})) + (f_j(a_{j+1}, a_j) + f_j(a_{j+1}, a_{j+1})) \\
&= f_j(a_j, a_{j+1}) + f_j(a_{j+1}, a_j) \\
&= \det(A) + \det(B).
\end{aligned}$$

证毕.

定理 C.28 设命题 II: 交换方阵 A 的**相邻的**二列, 得方阵 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$. 设命题 III: 交换方阵 A 的二列, 得方阵 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$. 则, 我们可由 II 推出 III.

证 设 A 是 n 级阵, 设交换 A 的列 p, q 后得到的阵为 B $(p < q)$. 我们证明: $\det(B) = -\det(A)$.

我们交换 A 的列 $p, p+1$, 得阵 B_1. 则 $\det(B_1) = -\det(A)(-1)^1 \det(A)$. 我们交换 B_1 的列 $p+1, p+2$, 得阵 B_2. 则 $\det(B_2) = -\det(B_1) = (-1)^2 \det(A)$. ⋯⋯ 我们交换 B_{q-p-1} 的列 $q-1, q$, 得阵 B_{q-p}. 则 $\det(B_{q-p}) = -\det(B_{q-p-1}) = (-1)^{q-p} \det(A)$.

记 $C_0 = B_{q-p}$. 则 $\det(C_0) = (-1)^{q-p} \det(A)$. 我们交换 C_0 的列 $q-2, q-1$, 得阵 C_1. 则 $\det(C_1) = -\det(C_0) = (-1)^{q-p+1} \det(A)$. 我们交换 C_1 的列 $q-3, q-2$, 得阵 C_2. 则 $\det(C_2) = -\det(C_1) = (-1)^{q-p+2} \det(A)$. ⋯⋯ 我们交换 C_{q-p-2} 的列 $p, p+1$, 得阵 C_{q-p-1}. 则 $\det(C_{q-p-1}) = -\det(C_{q-p-2}) = (-1)^{q-p+(q-p-1)} \det(A)$. 不难看出, $B = C_{q-p-1}$. 所以, $\det(B) = (-1)^{2(q-p)-1} \det(A) = -\det(A)$. 证毕.

好的. 现在, 我介绍交错性的其他的证明.

证 (同时用按列 1 展开与按前二列展开) $P(1)$ 不证自明.

不难验证 $P(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的 $(m \geqslant 3)$. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取一个 m 级阵 A.

设 A 的列 1, 2 相同. 则

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} \det \begin{bmatrix} [A]_{i,1} & [A]_{i,2} \\ [A]_{k,1} & [A]_{k,2} \end{bmatrix} (-1)^{i+k+1+2} \det(A(i,k|1,2)) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} \det \begin{bmatrix} [A]_{i,1} & [A]_{i,1} \\ [A]_{k,1} & [A]_{k,1} \end{bmatrix} (-1)^{i+k+1+2} \det(A(i,k|1,2)) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} 0\,(-1)^{i+k+1+2} \det(A(i,k|1,2)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

设 A 的列 $j, j+1$ 相同 $(1 < j < m)$. 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} \det(A(i|1)).$$

注意, $A(i|1)$ 的列 $j-1, j$ 相同. 由假定, $\det(A(i|1)) = 0$. 故 $\det(A) = 0$.

综上, 若 A 的**相邻的**二列相同, 则其行列式为零.

现假定 A 的列 p, q 相同 $(1 \leqslant p < q \leqslant m)$. 若 $q - p = 1$, 则这是相邻的二列, 故 $\det(A) = 0$. 若 $q - p > 1$, 则交换列 $p, q-1$, 得阵 B. B 有相邻的二列相同, 故 $\det(B) = 0$. 从而, 由 "有用的事实", $\det(A) = -\det(B) = 0$.

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

注意到, 因为在按列 1 展开行列式的公式里, 列 1 与其他列的地位不一样, 用它证明一个关于二列的性质对列 1 与其他列成立是有些挑战的. 不过, 若我们用按行 1 展开行列式的公式, 则这是较简单的.

证 (用按行 1 展开) $P(1)$ 不证自明.

不难验证 $P(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的 $(m \geqslant 3)$. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

设 A 的列 $j, j+1$ 相同 $(1 \leqslant j < m)$.

注意, $[A]_{1,j} = [A]_{1,j+1}$, 且 $A(1|j) = A(1|j+1)$. 再注意, 若 $k \neq j, j+1$, 则 $A(1|k)$ 有 (相邻的) 二列相同. 由假定, $\det(A(1|k)) = 0$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\det(A)\\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{1+k} [A]_{1,k} \det(A(1|k))\\
&= \quad (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)) + (-1)^{1+j+1} [A]_{1,j+1} \det(A(1|j+1))\\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m\\ k \neq j, j+1}} (-1)^{1+k} [A]_{1,k} \det(A(1|k))\\
&= \quad (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)) + (-1)^{1+j+1} [A]_{1,j} \det(A(1|j))\\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m\\ k \neq j, j+1}} (-1)^{1+k} [A]_{1,k}\, 0\\
&= (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j)) - (-1)^{1+j} [A]_{1,j} \det(A(1|j))\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

综上, 若 A 的**相邻的**二列相同, 则其行列式为零.

现假定 A 的列 p, q 相同 $(1 \leqslant p < q \leqslant m)$. 若 $q - p = 1$, 则这是相邻的二列, 故 $\det(A) = 0$. 若 $q - p > 1$, 则交换列 $p, q - 1$, 得阵 $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{B}$ 有相邻的二列相同, 故 $\det(\boldsymbol{B}) = 0$. 从而, 由 "有用的事实", $\det(A) = -\det(\boldsymbol{B}) = 0$.

所以, $\boldsymbol{P}(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立.　　证毕.

C.11 (关于列的) 反称性

本节, 我想证明 (关于列的) 反称性.

其实, 在第一章, 节 13, 我已用多线性与交错性证明了它. 不过, 我想, 知道别的证明也好.

以下, 设 $P(n)$ 为命题

对任何 n 级阵 A, 对任何不超过 n 且高于 1 的整数 q, 对任何低于 q 的正整数 p, 必 $\det(B) = -\det(A)$, 其中 B 是交换 A 的列 p, q 后得到的阵.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

证 (用按一列展开) $P(1)$ 不证自明.

不难验证 $P(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的 ($m \geqslant 3$). 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取一个 m 级阵 A. 任取一个不超过 m 且高于 1 的整数 q. 任取一个低于 q 的正整数 p. 交换 A 的列 p, q, 得 B. 在 $1, 2, \cdots, m$ 这 m 个数里, 我们必定能找到一个数 j, 它既不等于 p, 也不等于 q. 则

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j}[B]_{i,j} \det(B(i|j)).$$

注意, $[B]_{i,j} = [A]_{i,j}$. 再注意, $B(i|j)$ 可被认为是交换 $A(i|j)$ 的二列所得到的 $m-1$ 级阵. 由假定, $\det(B(i|j)) = -\det(A(i|j))$. 从而

$$\begin{aligned}\det(B) = & \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j}[A]_{i,j}(-\det(A(i|j))) \\ = & -\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j}[A]_{i,j} \det(A(i|j)) \\ = & -\det(A).\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

在介绍其他的证明前, 我要介绍一个有用的事实.

定理 C.28 设命题 II: 交换方阵 A 的**相邻的**二列, 得方阵 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$. 设命题 III: 交换方阵 A 的二列, 得方阵 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$. 则, 我们可由 II 推出 III.

证 略. 证毕.

好的. 现在, 我介绍反称性的其他的证明.

证 (同时用按列 1 展开与按前二列展开) $P(1)$ 不证自明.

不难验证 $P(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的 $(m \geqslant 3)$. 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取一个 m 级阵 A. 任取一个低于 m 的正整数 j. 交换 A 的列 $j, j+1$, 得 B.

设 $j = 1$. 注意到, $i \neq k$ 时, $A(i,k|1,2) = B(i,k|1,2)$. 则

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} \det \begin{bmatrix} [B]_{i,1} & [B]_{i,2} \\ [B]_{k,1} & [B]_{k,2} \end{bmatrix} (-1)^{i+k+1+2} \det(B(i,k|1,2)) \\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} \det \begin{bmatrix} [A]_{i,2} & [A]_{i,1} \\ [A]_{k,2} & [A]_{k,1} \end{bmatrix} (-1)^{i+k+1+2} \det(A(i,k|1,2)) \\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} \left(-\det \begin{bmatrix} [A]_{i,1} & [A]_{i,2} \\ [A]_{k,1} & [A]_{k,2} \end{bmatrix} \right) (-1)^{i+k+1+2} \det(A(i,k|1,2)) \\
&= -\det(A).
\end{aligned}
$$

设 $j > 1$. 则

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} [B]_{i,1} \det(B(i|1)).$$

注意, $[B]_{i,1} = [A]_{i,1}$. 再注意, $B(i|1)$ 可被认为是交换 $A(i|1)$ 的二列所得到的 $m-1$ 级阵. 由假定, $\det(B(i|1)) = -\det(A(i|1))$. 从而

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} (-\det(A(i|1))) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} \det(A(i|1))
\end{aligned}
$$

$$= -\det(A).$$

综上, 交换方阵的**相邻的**二列, 则其行列式变号.

由 "有用的事实", 交换方阵的二列, 则其行列式变号.

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

注意到, 因为在按列 1 展开行列式的公式里, 列 1 与其他列的地位不一样, 用它证明一个关于二列的性质对列 1 与其他列成立是有些挑战的. 不过, 若我们用按行 1 展开行列式的公式, 则这是较简单的.

证 (用按行 1 展开) $P(1)$ 不证自明.

不难验证 $P(2)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(m-1)$ 是正确的 ($m \geqslant 3$). 我们要证 $P(m)$ 也是正确的.

任取一个 m 级阵 A. 任取一个低于 m 的正整数 j. 交换 A 的列 j, $j+1$, 得 B.

注意, $[A]_{i,j} = [B]_{i,j+1}$, $[A]_{i,j+1} = [B]_{i,j}$. 再注意, $k \neq j, j+1$ 时, $[A]_{i,k} = [B]_{i,k}$. 则 $A(i|j) = B(i|j+1)$, $A(i|j+1) = B(i|j)$. 若 $k \neq j, j+1$, 则 $B(i|k)$ 可被认为是交换 $A(i|k)$ 的 (相邻的) 二列所得到的 $m-1$ 级阵. 由假定, $\det(B(i|k)) = -\det(A(i|k))$. 从而

$$\begin{aligned}
&\det(B)\\
= &\sum_{k=1}^{m} (-1)^{1+k}[B]_{1,k}\det(B(1|k))\\
= &\quad (-1)^{1+j}[B]_{1,j}\det(B(1|j)) + (-1)^{1+j+1}[B]_{1,j+1}\det(B(1|j+1))\\
&+ \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j,j+1}} (-1)^{1+k}[B]_{1,k}\det(B(1|k))\\
= &\quad (-1)^{1+j}[A]_{1,j+1}\det(A(1|j+1)) + (-1)^{1+j+1}[A]_{1,j}\det(A(1|j))\\
&+ \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j,j+1}} (-1)^{1+k}[A]_{1,k}(-\det(A(1|k)))\\
= &\quad -(-1)^{1+j+1}[A]_{1,j+1}\det(A(1|j+1)) - (-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(A(1|j))\\
&- \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ k\neq j,j+1}} (-1)^{1+k}[A]_{1,k}\det(A(1|k))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k=1}^{m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}\det(A(1|k)) \\
&= -\det(A).
\end{aligned}
$$

综上, 交换方阵的**相邻的**二列, 则其行列式变号.
由 “有用的事实”, 交换方阵的二列, 则其行列式变号.
所以, $\boldsymbol{P}(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

C.12　反称性的应用

反称性是有用的.

由行列式的定义, 不难证明, 对任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $b_2, \cdots, b_n$, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\det[sx+ty, b_2, \cdots, b_n] = s\det[x, b_2, \cdots, b_n] + t\det[y, b_2, \cdots, b_n].$$

利用反称性, 当 $j>1$ 时,

$$\begin{aligned}
&\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, sx+ty, a_{j+1}, \cdots, a_n]\\
={}&-\det[sx+ty, \cdots, a_{j-1}, a_1, a_{j+1}, \cdots, a_n]\\
={}&-(s\det[x, \cdots, a_{j-1}, a_1, a_{j+1}, \cdots, a_n] + t\det[y, \cdots, a_{j-1}, a_1, a_{j+1}, \cdots, a_n])\\
={}&s(-\det[x, \cdots, a_{j-1}, a_1, a_{j+1}, \cdots, a_n]) + t(-\det[y, \cdots, a_{j-1}, a_1, a_{j+1}, \cdots, a_n])\\
={}&s\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n] + t\det[a_1, \cdots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \cdots, a_n].
\end{aligned}$$

我们也可由反称性推出交错性. 设方阵 A 的列 p, q 是相同的 $(p<q)$. 我们交换 A 的列 p, q, 得阵 B. 根据反称性, $\det(B) = -\det(A)$. 不过, 因为 A 的列 p, q 是相同的, 故 $B=A$. 所以, $\det(A) = -\det(A)$. 由此可知 $\det(A)=0$.

我们可由反称性得到按 (任何) 一列展开行列式的公式. 设 A 是一个 n 级阵 $(n\geqslant 2)$. 设 $j\neq 1$. 交换 A 的列 $j-1$, j, 得阵 B_1. 交换 B_1 的列 $j-2$, $j-1$, 得阵 B_2. ⋯⋯ 交换 B_{j-2} 的列 1, 2, 得阵 B_{j-1}. 此时, 可以发现, B_{j-1} 的列 1 即为 A 的列 j (即 $[B_{j-1}]_{i,1} = [A]_{i,j}$), 且 $B_{j-1}(i|1) = A(i|j)$. 我们作了 $j-1$ 次 (相邻的) 列的交换, 故

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{j-1}\det(B_{j-1})\\
&= (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[B]_{i,1}\det(B_{j-1}(i|1))\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|j))\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{i,j}\det(A(i|j)).
\end{aligned}$$

C.13 用行列式的性质确定行列式

本节, 我想讨论如何用行列式的性质确定行列式.

我们知道, 多线性与交错性可 “基本确定” 行列式:

定理 C.29 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) (多线性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 a_1, $\cdots$, a_{j-1}, a_{j+1}, $\cdots$, a_n, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$\begin{aligned}&f([a_1,\cdots,a_{j-1},sx+ty,a_{j+1},\cdots,a_n])\\=&sf([a_1,\cdots,a_{j-1},x,a_{j+1},\cdots,a_n])+tf([a_1,\cdots,a_{j-1},y,a_{j+1},\cdots,a_n]).\end{aligned}$$

(2) (交错性) 若 n 级阵 A 有二列完全相同, 则 $f(A)=0$.

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A)=f(I)\det(A)$.

特别地, 若 $f(I)=1$ (规范性), 则 f 就是行列式.

现在, 我要展示一些变体.

定理 C.30 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) 对任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$f([sx+ty,a_2,\cdots,a_n])=sf([x,a_2,\cdots,a_n])+tf([y,a_2,\cdots,a_n]).$$

(2) (反称性) 设 A 是 n 级阵, 设交换 A 的列 p 与列 q 后得到的阵为 B ($p<q$). 则 $f(B)=-f(A)$.

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A)=f(I)\det(A)$.

特别地, 若 $f(I)=1$ (规范性), 则 f 就是行列式.

证 见上节的讨论. 我们可由 (1) 与反称性, 得到多线性; 我们可由反称性, 得到交错性. 证毕.

我们也可代反称性以 “相邻反称性”: “设 A 是 n 级阵, 设交换 A 的列 p 与列 $p+1$ 后得到的阵为 B ($p<n$). 则 $f(B)=-f(A)$.” 毕竟, 相邻反称性可推出反称性.

我们也可代交错性以 “相邻交错性”: “若 n 级阵 A 有相邻的二列完全相同, 则 $f(A) = 0$.” 毕竟, 多线性与相邻交错性可推出相邻反称性, 相邻反称性可推出反称性, 且相邻交错性与反称性可推出交错性 (见 “(关于列的) 交错性” 的讨论).

接着, 我要展现一个 “大不一样的” 变体. 不过, 我要先定义一种行为:

定义 C.31 (倍加) 设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 设 p, q 是二个不超过 n 的正整数, **且** $p \neq q$**.** 设 s 是一个数. 作 $m \times n$ 阵 B, 其中

$$[B]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \neq q; \\ [A]_{i,q} + s[A]_{i,p}, & j = q. \end{cases}$$

(通俗地, 我们加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得阵 B.) 我们说, 变 A 为 B 的行为是一次 (列的) **倍加**.

注意到, s 可以取 0, 而这相当于 $B = A$. 所以, 我们认为, “什么都不变” 也是一次倍加.

利用多线性与交错性, 我们有

定理 C.32 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 多线性与交错性. 则 f 适合 “倍加不变性”:

设 A 是一个 n 级阵. 设 p, q 是二个不超过 n 的正整数, **且** $p \neq q$**.** 设 s 是一个数. 作 n 级阵 B, 其中

$$[B]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \neq q; \\ [A]_{i,q} + s[A]_{i,p}, & j = q. \end{cases}$$

则 $f(B) = f(A)$.

证 设 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

先设 $p < q$. 为方便说话, 我们写

$$g(u, v) = f([a_1, \cdots, a_{p-1}, u, a_{p+1}, \cdots, a_{q-1}, v, a_{q+1}, \cdots, a_n]).$$

于是, $g(a_p, a_q)$ 就是 $f(A)$, 而 $g(a_p, a_q + sa_p)$ 就是 $f(B)$. 利用多线性与交错性,

$$\begin{aligned} f(B) &= g(a_p, a_q + sa_p) \\ &= g(a_p, a_q) + sg(a_p, a_p) \\ &= g(a_p, a_q) + s0 \\ &= g(a_p, a_q) \\ &= f(A). \end{aligned}$$

再设 $p > q$. 为方便说话, 我们写

$$h(u, v) = f([a_1, \cdots, a_{q-1}, u, a_{q+1}, \cdots, a_{p-1}, v, a_{p+1}, \cdots, a_n]).$$

于是, $h(a_q, a_p)$ 就是 $f(A)$, 而 $h(a_q + sa_p, a_p)$ 就是 $f(B)$. 利用多线性与交错性,

$$\begin{aligned} f(B) &= h(a_q + sa_p, a_p) \\ &= h(a_q, a_p) + sh(a_p, a_p) \\ &= h(a_q, a_p) + s0 \\ &= h(a_q, a_p) \\ &= f(A). \end{aligned}$$

证毕.

现在, 我要引出本节的主要结论.

定理 C.33　设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) 倍加不变性.

(2) (多齐性) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n \times 1$ 阵 a_1, $\cdots$, a_{j-1}, a_{j+1}, $\cdots$, a_n, 任何 $n \times 1$ 阵 x, 任何数 s, 有

$$f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx, a_{j+1}, \cdots, a_n]) = sf([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]).$$

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A) = f(I) \det(A)$.

特别地, 若 $f(I) = 1$ (规范性), 则 f 就是行列式.

此事是重要的, 故我会给二个证明.

不难看出, 倍加不变性与多齐性可推出交错性. 具体地, 设 A 的列 p, q 相同, 且 $p \neq q$. 加 A 的列 q 的 -1 倍于列 p, 得阵 B. 那么, B 的列 p 的元全为零. 由多齐性, $f(B) = 0$. 由倍加不变性, $f(A) = f(B) = 0$.

倍加不变性与多齐性还可推出反称性. 设 $p < q$. 记

$$g(u, v) = f([a_1, \cdots, a_{p-1}, u, a_{p+1}, \cdots, a_{q-1}, v, a_{q+1}, \cdots, a_n]).$$

则

$$\begin{aligned} g(a_q, a_p) &= g(a_q + 1a_p, a_p) \\ &= g(a_p + a_q, a_p) \\ &= g(a_p + a_q, a_p + (-1)(a_p + a_q)) \\ &= g(a_p + a_q, -a_q) \\ &= g(a_p + a_q + 1(-a_q), -a_q) \\ &= g(a_p, (-1)a_q) \\ &= (-1)g(a_p, a_q) \\ &= -g(a_p, a_q). \end{aligned}$$

假如, 我们能推出, 对任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_2, a_3, \cdots, a_n$, 任何二个 $n\times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$f([sx + ty, a_2, \cdots, a_n]) = sf([x, a_2, \cdots, a_n]) + tf([y, a_2, \cdots, a_n]),$$

那么, 利用反称性, 我们即得多线性.

在第一章, 节 27 里, 有如下结论:

定理 C.34 设 A 是 $m \times n$ 阵, 且 $A \neq 0$. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$A_r = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}$$

(其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$), 但 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 设 A 的行 $1, 2, \cdots, m$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 那么, 对任何不超过 m 的正整数 p, 一定存在 r 个数 $d_{p,1}, d_{p,2}, \cdots, d_{p,r}$, 使

$$\begin{aligned} a_p &= d_{p,1}a_{i_1} + d_{p,2}a_{i_2} + \cdots + d_{p,r}a_{i_r} \\ &= \sum_{s=1}^{r} d_{p,s}a_{i_s}. \end{aligned}$$

利用类似的方法, 或利用转置, 我们可证

定理 C.35　设 A 是 $m \times n$ 阵, 且 $A \neq 0$. 设 A 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$A_r = A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r \end{pmatrix}$$

(其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$), 但 A 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵. 设 A 的列 1, 2, ⋯, n 为 a_1, a_2, ⋯, a_n. 那么, 对任何不超过 n 的正整数 q, 一定存在 r 个数 $d_{1,q}$, $d_{2,q}$, ⋯, $d_{r,q}$, 使

$$\begin{aligned} a_q &= d_{1,q}a_{j_1} + d_{2,q}a_{j_2} + \cdots + d_{r,q}a_{j_r} \\ &= \sum_{s=1}^{r} d_{s,q}a_{j_s}. \end{aligned}$$

利用此事, 我们即可证明, 对任何 $n-1$ 个 $n \times 1$ 阵 a_2, a_3, ⋯, a_n, 任何二个 $n \times 1$ 阵 x, y, 任何二个数 s, t, 有

$$f([sx+ty, a_2, \cdots, a_n]) = sf([x, a_2, \cdots, a_n]) + tf([y, a_2, \cdots, a_n]).$$

由此, 我们可证多线性.

证　作 $n \times (n-1)$ 阵 $B = [a_2, a_3, \cdots, a_n]$; 也就是说, B 的列 $j-1$ 是 a_j.

若 $B = 0$, 由多齐性,

$$0 = f([sx+ty, a_2, \cdots, a_n]) = f([x, a_2, \cdots, a_n]) = f([y, a_2, \cdots, a_n]).$$

下设 $B \neq 0$. 那么, 存在一个低于 n 的正整数 r, 使 B 有一个行列式非零的 r 级子阵

$$B_r = B\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ j_1 - 1, \cdots, j_r - 1 \end{pmatrix}$$

(其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$, $2 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$), 但 B 没有行列式非零的 $r+1$ 级子阵.

若 $r < n-1$, 那么, 必存在**不等于** j_1, ⋯, j_r 的正整数 q, 与 r 个数 $d_{1,q}$, $d_{2,q}$, ⋯, $d_{r,q}$, 使

$$a_q = d_{1,q}a_{j_1} + d_{2,q}a_{j_2} + \cdots + d_{r,q}a_{j_r}.$$

任取 $n\times 1$ 阵 z. 记

$$g(u)=f([z,a_2,\cdots,a_{q-1},u,a_{q+1},\cdots,a_n]).$$

利用倍加不变性,

$$\begin{aligned}
g(a_q)&=g(a_q+(-d_{1,q})a_{j_1})\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=g(a_q+(-d_{1,q})a_{j_1}+\cdots+(-d_{r,q})a_{j_r})\\
&=g(a_q-(d_{1,q}a_{j_1}+\cdots+d_{r,q}a_{j_r}))\\
&=g(0).
\end{aligned}$$

利用多齐性, $g(0)=0$. 故 $g(a_q)=0$. 所以,

$$0=f([sx+ty,a_2,\cdots,a_n])=f([x,a_2,\cdots,a_n])=f([y,a_2,\cdots,a_n]).$$

下设 $r=n-1$.

设从 1, 2, ⋯, n 去除 i_1, i_2, ⋯, i_{n-1} 后, 还剩一个数 i_n. 设 a_1 是 n 级单位阵的列 i_n. 作 n 级阵 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$. 则 $A(i_n|1)=B_r$. 不难算出, $\det(A)=(-1)^{i_n+1}\det(B_r)\neq 0$.

作 $n\times(n+2)$ 阵 $C=[a_1,a_2,\cdots,a_n,x,y]$. 于是, C 有一个行列式非零的 n 级子阵 A, 但 C 没有行列式非零的 $n+1$ 级子阵. 所以, 一定存在 n 个数 d_1, d_2, ⋯, d_n, 使 $x=d_1a_1+d_2a_2+\cdots+d_na_n$, 也一定存在 n 个数 d_1', d_2', ⋯, d_n', 使 $y=d_1'a_1+d_2'a_2+\cdots+d_n'a_n$. 所以, $sx+ty=(sd_1+td_1')a_1+(sd_2+td_2')a_2+\cdots+(sd_n+td_n')a_n$.

记 $h(z)=f([z,a_2,\cdots,a_n])$. 则

$$\begin{aligned}
f([x,a_2,\cdots,a_n])&=h(x)\\
&=h(x-d_2a_2)\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=h(x-d_2a_2-\cdots-d_na_n)\\
&=h(d_1a_1)\\
&=d_1h(a_1).
\end{aligned}$$

同理,

$$f([y, a_2, \cdots, a_n]) = d_1' h(a_1),$$
$$f([sx+ty, a_2, \cdots, a_n]) = (sd_1 + td_1')h(a_1).$$

比较, 得

$$\begin{aligned} &f([sx+ty, a_2, \cdots, a_n]) \\ &= sf([x, a_2, \cdots, a_n]) + tf([y, a_2, \cdots, a_n]). \end{aligned}$$

证毕.

接下来, 我展现另一个证明. 此证明或许更有意思.

定理 C.36 设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 利用若干次 (列的) 倍加, 我们可变 A 为一个 $m \times n$ 阵 B, 使当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

对**任何**正整数 m, 对**任何** $m \times n$ 阵, 利用若干次倍加 (指 "列的倍加", 下同), 我们可变 A 为一个 $m \times n$ 阵 B, 使当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 显然是对的.

假定 $P(n-1)$ 是对的. 我们由此证 $P(n)$ 也是对的.

任取正整数 m. 任取一个 $m \times n$ 阵 A.

我们先说明, 利用若干次倍加, 我们可变 A 为一个 $m \times n$ 阵 C, 使当 $1 < j$ 时, $[C]_{1,j} = 0$.

若 A 的行 1 的元全是零, 我们 "什么都不变", 取 C 为 A.

若 $[A]_{1,1} \neq 0$, 我们可加 A 的列 1 的 $-[A]_{1,2}/[A]_{1,1}$ 倍于列 2, 得阵 A_2. 那么, $[A_2]_{1,2} = 0$, 且 $[A_2]_{1,j} = [A]_{1,1}$ $(j \neq 2)$. 接着, 我们可加 A_2 的列 1 的 $-[A_2]_{1,3}/[A_2]_{1,1}$ 倍于列 3, 得阵 A_3. 那么, $[A_3]_{1,k} = 0$ $(k = 2, 3)$, 且 $[A_3]_{1,j} = [A_2]_{1,j}$ $(j \neq 3)$. ⋯ ⋯ 接着, 我们可加 A_{n-1} 的列 1 的 $-[A_{n-1}]_{1,n}/[A_{n-1}]_{1,1}$ 倍于列 n, 得阵 A_n. 那么, $[A_n]_{1,k} = 0$ $(k = 2, 3, \cdots, n)$. 我们取 C 为 A_n.

若 $[A]_{1,1} = 0$, 但有某 $[A]_{1,j} \neq 0$ $(j \neq 1)$, 我们加 A 的列 j 的 1 倍于列 1, 得阵 D. 那么, $[D]_{1,1} \neq 0$, 这就转化问题为前面讨论过的情形.

综上, 作若干次倍加, 我们可变 A 为一个 $m \times n$ 阵 C, 使当 $1 < j$ 时, $[C]_{1,j} = 0$.

考虑 C 的右下角的 $(m-1)\times(n-1)$ 子阵 $C(1|1)$. 由假定, 作若干次倍加, 我们可变 $C(1|1)$ 为一个 $(m-1)\times(n-1)$ 阵 G, 使当 $i < j$ 时, $[G]_{i,j} = 0$.

注意到, 既然当 $1 < j$ 时, $[C]_{1,j} = 0$, 那么, 无论如何对 C 的不是列 1 的列作倍加, 所得的阵的 $(1, j)$-元一定是零. 那么, 作若干次倍加后, 我们可变 C 为一个 $m \times n$ 阵 B, 使当 i 或 j 为 1 时, $[B]_{i,j} = [C]_{i,j}$, 且 i 与 j 不为 1 时, $[B]_{i,j} = [G]_{i-1,j-1}$. 所以, 当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$.

所以, $P(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

定理 C.37 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与多齐性. 设 A 是一个 n 级阵, 且当 $i < j$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 则 $f(A) = f(I_n)\det(A)$.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与多齐性. 设 A 是一个 n 级阵, 且当 $i < j$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 则 $f(A) = f(I_n)\det(A)$.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 显然是对的.

假定 $P(n-1)$ 是对的. 我们由此证 $P(n)$ 也是对的.

任取一个 n 级阵 A, 且当 $i < j$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 所以, A 形如

$$\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & [A]_{n,n} \end{bmatrix}$$

那么, 由多齐性,

$$f(A) = [A]_{n,n} f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\right).$$

利用 $n-1$ 次倍加不变性,

$$f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right),$$

故

$$f(A) = f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)[A]_{n,n}.$$

考虑定义在全体 $n-1$ 级阵上的函数

$$g(X) = f\left(\begin{bmatrix} [X]_{1,1} & [X]_{1,2} & \cdots & [X]_{1,n-1} & 0 \\ [X]_{2,1} & [X]_{2,2} & \cdots & [X]_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [X]_{n-1,1} & [X]_{n-1,2} & \cdots & [X]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

不难验证, g 适合倍加不变性与多齐性. 注意到, 若 $i < j$, 则 $A(n|n)$ 的 (i, j)-元为零. 故, 由假定,

$$g(A(n|n)) = g(I_{n-1}) \det(A(n|n)) = f(I_n) \det(A(n|n)).$$

从而

$$
\begin{aligned}
&f\left(\begin{bmatrix}
[A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
[A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
[A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}\right)\\
&= g(A(n|n)) = f(I_n)\det(A(n|n)).
\end{aligned}
$$

则

$$f(A) = f(I_n)\det(A(n|n))\,[A]_{n,n} = f(I_n)\det(A).$$

所以, $P(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

有了这些准备, 我们即可证明本节的主要结论.

证 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与多齐性.

任取一个 n 级阵 A. 利用若干次倍加, 我们可变 A 为一个 n 级阵 B, 使当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$. 因为倍加不变性, $f(B) = f(A)$. 由上个定理, $f(B) = f(I)\det(B)$. 故 $f(A) = f(I)\det(B) = f(I)\det(A)$. (反过来, 不难验证, 若我们定义 $f(A) = f(I)\det(A)$, 则 f 适合倍加不变性与多齐性.) 证毕.

C.14 类行列式

在上节, 我们知道, 若定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与多齐性, 则 $f(A) = f(I)\det(A)$. 我们用了二种方法证明此事: 一种方法证明 f 适合多线性, 并使用已知的确定行列式的定理; 另一种方法不使用多线性, 也不使用已知的确定行列式的定理. 后一种方法可被推广, 得到确定 "类行列式" 的定理. 不过, 我们先定义一类函数.

定义 C.38 设 m 是定义在数上的函数. 若 $m(1) = 1$, 且对任何数 s, t, 有 $m(st) = m(s)\,m(t)$, 则 m 是**保乘的**.

显然, 恒等函数 $m(t) = t$ 是保乘的. 若 k 是正整数, 由次方的性质, 可以验证, $m(t) = t^k$ 也是保乘的. 此外, 绝对值函数 $m(t) = |t|$ 也是保乘的 (因为 $|1| = 1$, 且对任何数 a, b, 有 $|ab| = |a|\,|b|$).

定理 C.39 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) 倍加不变性.

(2) ("多齐性的变体") 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n \times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何 $n \times 1$ 阵 x, 任何数 s, 有

$$f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx, a_{j+1}, \cdots, a_n]) = m(s)f([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]),$$

其中, 定义在数上的函数 m 是保乘的: $m(1) = 1$, 且对任何数 s, t, 有 $m(st) = m(s)\,m(t)$.

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A) = f(I)\,m(\det(A))$.

为证明此事, 我们先证如下命题.

定理 C.40 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与 "多齐性的变体". 设 A 是一个 n 级阵, 且当 $i < j$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 则 $f(A) = f(I_n)\,m(\det(A))$.

证 我们用数学归纳法证明此事. 具体地, 设 $P(n)$ 为命题

设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与 "多齐性的变体". 设 A 是一个 n 级阵, 且当 $i < j$ 时, $[A]_{i,j} = 0$. 则 $f(A) = f(I_n)\,m(\det(A))$.

则, 我们的目标是: 对任何正整数 n, $P(n)$ 是正确的.

$P(1)$ 显然是对的.

假定 $P(n-1)$ 是对的. 我们由此证 $P(n)$ 也是对的.

任取一个 n 级阵 A, 且当 $i<j$ 时, $[A]_{i,j}=0$. 所以, A 形如

$$\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & [A]_{n,n} \end{bmatrix}$$

那么, 由 "多齐性的变体",

$$f(A)=m([A]_{n,n})f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\right).$$

利用 $n-1$ 次倍加不变性,

$$\begin{aligned} & f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\right) \\ = & f\left(\begin{bmatrix} [A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

故

$$f(A)=f\left(\begin{bmatrix}[A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\right)m([A]_{n,n}).$$

考虑定义在全体 $n-1$ 级阵上的函数

$$g(X)=f\left(\begin{bmatrix}[X]_{1,1} & [X]_{1,2} & \cdots & [X]_{1,n-1} & 0\\ [X]_{2,1} & [X]_{2,2} & \cdots & [X]_{2,n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ [X]_{n-1,1} & [X]_{n-1,2} & \cdots & [X]_{n-1,n-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\right).$$

不难验证, g 适合倍加不变性与“多齐性的变体”. 注意到, 若 $i<j$, 则 $A(n|n)$ 的 (i,j)-元为零. 故, 由假定,

$$g(A(n|n))=g(I_{n-1})\,m(\det(A(n|n)))=f(I_n)\,m(\det(A(n|n))).$$

从而

$$\begin{aligned}&f\left(\begin{bmatrix}[A]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &=g(A(n|n))=f(I_n)\,m(\det(A(n|n))).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}f(A)&=f(I_n)\,m(\det(A(n|n)))\,m([A]_{n,n})\\ &=f(I_n)\,m(\det(A(n|n))\,[A]_{n,n})\\ &=f(I_n)\,m(\det(A)).\end{aligned}$$

所以, $P(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

有了这些准备, 我们即可证明本节的主要结论.

证 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合倍加不变性与 “多齐性的变体”.

任取一个 n 级阵 A. 利用若干次倍加, 我们可变 A 为一个 n 级阵 B, 使当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$. 因为倍加不变性, $f(B) = f(A)$. 由上个定理, $f(B) = f(I)\, m(\det(B))$. 故 $f(A) = f(I)\, m(\det(B)) = f(I)\, m(\det(A))$. (反过来, 不难验证, 若我们定义 $f(A) = f(I)\, m(\det(A))$, 则 f 适合倍加不变性与 “多齐性的变体”.) 证毕.

特别地, 取 m 为绝对值函数, 我们有

定理 C.41 设定义在全体 n 级阵上的函数 f 适合:

(1) 倍加不变性.

(2) 对任何不超过 n 的正整数 j, 任何 $n-1$ 个 $n\times 1$ 阵 $a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$, 任何 $n\times 1$ 阵 x, 任何数 s, 有

$$f([a_1, \cdots, a_{j-1}, sx, a_{j+1}, \cdots, a_n]) = |s| f([a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n]).$$

那么, 对任何 n 级阵 A, $f(A) = f(I)\, |\det(A)|$.

设您在研究某数学问题. 设您发现, 您研究的一个量可被认为是定义在 n 级阵上的函数 (n 是某个正整数), 且适合倍加不变性与 “多齐性的变体”. 那么, 由本节的定理, 它是一个跟行列式有关的量. 这不是偶然的; 这是必然的. 这是好的, 我想.

C.15　绝对值的性质 (1)

设 a 是实数. 则 a 的绝对值

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

如下命题是正确的.

(1) $|0| = 0$; 若实数 a 适合 $|a| = 0$, 则 $a = 0$.

因为 $0 \geqslant 0$, 故 $|0| = 0$.

若 $a > 0$, 则 $|a| = a > 0$; 若 $a < 0$, 则 $|a| = -a > 0$. 于是, 若 $|a| = 0$, 则 a 不能是正数, 也不能是负数, 故 $a = 0$.

(2) 对任何实数 a, 必 $|a| \geqslant 0$.

我们已知, 若 $a > 0$ 或 $a < 0$, 则 $|a| > 0$. 另外, $|0| = 0$.

(3) 对任何实数 a, 必 $|a| \geqslant a \geqslant -|a|$.

若 $a \geqslant 0$, 则 $|a| = a$. 故 $|a| = a \geqslant -a = -|a|$; 若 $a < 0$, 则 $|a| = -a$. 故 $|a| = -a > a = -|a|$.

(4) 设 a, b 是**非负实数**. 若 $a \geqslant b$, 则 $a^2 \geqslant b^2$; 反过来, 若 $a^2 \geqslant b^2$, 则 $a \geqslant b$.

若 $a > b \geqslant 0$, 则 $aa > bb$, 故 $a^2 > b^2$; 若 $a = b \geqslant 0$, 则 $aa = bb$, 故 $a^2 = b^2$; 若 $0 \leqslant a < b$, 则 $aa < bb$, 故 $a^2 < b^2$. 所以, 若 $a \geqslant b$, 则 $a^2 \geqslant b^2$; 反过来, 若 $a^2 \geqslant b^2$, 则因 $a < b$ 无法推出 $a^2 \geqslant b^2$, 故必 $a \geqslant b$.

(5) 对任何实数 a, 必 $|a|^2 = a^2$. 所以, 对任何实数 a, 必 $\sqrt{a^2} = |a|$.

若 $a \geqslant 0$, 则 $|a|^2 = a^2$; 若 $a < 0$, 则 $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$. 因为**非负实数** $|a|$ 适合 $|a|^2 = a^2$, 故由 $\sqrt{\ }$ 的定义, $\sqrt{a^2} = |a|$.

(6) 对任何实数 a, b, 必 $|ab| = |a|\,|b|$.

若 $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, 则 $ab \geqslant 0$, 故 $|ab| = ab = |a|\,|b|$; 若 $a \geqslant 0$, $b < 0$, 则 $ab \leqslant 0$, 故 $|ab| = -ab = a(-b) = |a|\,|b|$; 若 $a < 0$, $b \geqslant 0$, 则 $ab \leqslant 0$, 故 $|ab| = -ab = (-a)b = |a|\,|b|$; 若 $a < 0$, $b < 0$, 则 $ab \geqslant 0$, 故 $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\,|b|$.

(7) 对任何实数 a, b, 必 $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

若 $a + b \geqslant 0$, 则 $|a + b| = a + b \leqslant |a| + |b|$; 若 $a + b < 0$, 则 $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leqslant |-a| + |-b| = |a| + |b|$.

类似地, 若 $a_1, \cdots, a_n$ 是实数, 则

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

可用数学归纳法证它.

(8) 对任何实数 a, b, 必 $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

因为 $|a-b| + |b| \geqslant |(a-b)+b| = |a|$.

这些事实会是有用的.

C.16 绝对值的性质 (2)

设 $z = a + \mathrm{i}b$ 是复数 (其中, i 是虚数单位, a, b 是实数, 下同). 则 z 的绝对值

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

如下命题是正确的.

(1) $|0| = 0$; 若复数 z 适合 $|z| = 0$, 则 $z = 0$.

首先, $|0| = |0 + \mathrm{i}0| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

若 $z = a + \mathrm{i}b$ 适合 $|z| = 0$, 则 $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$. 则 $a^2 + b^2 = 0$. 则 $a = b = 0$. 则 $z = 0$.

(2) 对任何复数 z, 必 $|z| \geqslant 0$.

由 $\sqrt{\ }$ 的定义, 这是显然的.

(3) 对任何复数 z, w, 必 $|zw| = |z|\,|w|$.

设 $z = a + \mathrm{i}b$, 且 $w = c + \mathrm{i}d$. 则

$$\begin{aligned}
|zw|^2 &= |(ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)|^2 \\
&= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\
&= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\
&= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= |z|^2|w|^2 \\
&= (|z|\,|w|)^2.
\end{aligned}$$

因为 $|zw|$ 与 $|z|\,|w|$ 是非负实数, 故 $|zw| = |z|\,|w|$.

顺便, 注意到, 对任何实数 a, b, c, d, 有

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \geqslant (ac - bd)^2.$$

(4) 对任何复数 z, w, 必 $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

设 $z=a+\mathrm{i}b$, 且 $w=c+\mathrm{i}d$. 则

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 &= |(a+c)+\mathrm{i}(b+d)|^2\\
&= (a+c)^2+(b+d)^2\\
&= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)\\
&= |z|^2+|w|^2+2(ac+bd)\\
&\leqslant |z|^2+|w|^2+2|ac+bd|\\
&= |z|^2+|w|^2+2\sqrt{(ac+bd)^2}\\
&= |z|^2+|w|^2+2\sqrt{(ac-(-b)d)^2}\\
&\leqslant |z|^2+|w|^2+2\sqrt{(a^2+(-b)^2)(c^2+d^2)}\\
&\leqslant |z|^2+|w|^2+2\sqrt{(|z|\,|w|)^2}\\
&\leqslant |z|^2+|w|^2+2\sqrt{|z|^2|w|^2}\\
&= |z|^2+|w|^2+2|z|\,|w|\\
&= (|z|+|w|)^2.
\end{aligned}
$$

因为 $|z+w|$ 与 $|z|+|w|$ 是非负实数, 故 $|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

类似地, 若 $z_1, \cdots, z_n$ 是复数, 则

$$|z_1+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+\cdots+|z_n|.$$

可用数学归纳法证它.

(5) 对任何复数 z, w, 必 $|z-w|\geqslant|z|-|w|$.

因为 $|z-w|+|w|\geqslant|(z-w)+w|=|z|$.

这些事实会是有用的.

C.17　绝对值的性质 (3)

设 z, w 是数. 设 z 的绝对值是 $|z|$. 则:

(1) $|0| = 0$; 若数 z 适合 $|z| = 0$, 则 $z = 0$.

(2) $|z| \geqslant 0$.

(3) $|zw| = |z|\,|w|$.

(4) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

(5) $|z - w| \geqslant |z| - |w|$.

这些事实会是有用的.

C.18 关于实数的大小的几个事实

设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是若干个实数. 我们总可从大到小地排它们, 故

定理 C.42 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是若干个实数. 则存在不超过 n 的正整数 i, 使对任何不超过 n 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_k$.

定理 C.43 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是若干个实数 $(n \geqslant 2)$.

(1) 存在不超过 n, 且不等的正整数 i, j, 使对任何不超过 n, 且不等于 i 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_j \geqslant y_k$.

(2) 对任何不超过 n, 且不等于 i 的正整数 k, 必 $y_j \geqslant y_k$.

(3) 对任何不超过 n 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_k$.

设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是若干个**非负**实数, 且不全是零. 从而有某不超过 n 的正整数 p, 使 $y_p > 0$. 再设某不超过 n 的正整数 i 适合: 对任何不超过 n 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_k$. 则 $y_i \geqslant y_p > 0$. 所以

定理 C.44 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是若干个**非负**实数, 且**不全是零**. 则存在不超过 n 的正整数 i, 使对任何不超过 n 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_k$, 且 $y_i > 0$.

定理 C.45 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是若干个**非负**实数, 且**不全是零** $(n \geqslant 2)$.

(1) 存在不超过 n, 且不等的正整数 i, j, 使对任何不超过 n, 且不等于 i 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_j \geqslant y_k$, 且 $y_i > 0$.

(2) 对任何不超过 n, 且不等于 i 的正整数 k, 必 $y_j \geqslant y_k$.

(3) 对任何不超过 n 的正整数 k, 必 $y_i \geqslant y_k$.

(4) 有一个特别的情形值得一提. 设 $y_j = 0$. 由 (2) 知, 对任何不超过 n, 且不等于 i 的正整数 k, 必 $0 = y_j \geqslant y_k \geqslant 0$. 故对任何不超过 n, 且不等于 i 的正整数 k, 必 $y_k = 0$.

C.19　行列式为零的阵的性质

本节, 我们讨论行列式为零的阵的几个性质.

定理 C.46　设 A 是一个 n 级阵. 设 $\det(A)=0$. 则存在不超过 n 的正整数 i, 使

$$|[A]_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|. \tag{C.5}$$

证　因为 $\det(A)=0$, 故有非零的 $n\times 1$ 阵 x, 使 $Ax=0$ (见第一章, 节 *23*).

考虑不全为零的非负实数 $|[x]_{1,1}|$, $|[x]_{2,1}|$, $\cdots$, $|[x]_{n,1}|$. 则有不超过 n 的正整数 i, 使对任何不超过 n 的正整数 u, 有 $|[x]_{i,1}| \geqslant |[x]_{u,1}|$, 且 $|[x]_{i,1}|>0$. 则

$$\begin{aligned}
0 &= [0]_{i,1}\\
&= [Ax]_{i,1}\\
&= \sum_{1\leqslant u\leqslant n} [A]_{i,u}[x]_{u,1}\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} [A]_{i,u}[x]_{u,1} + [A]_{i,i}[x]_{i,1}.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
|[A]_{i,i}|\,|[x]_{i,1}| &= |[A]_{i,i}[x]_{i,1}|\\
&= |-[A]_{i,i}[x]_{i,1}|\\
&= \left|\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} [A]_{i,u}[x]_{u,1}\right|\\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}[x]_{u,1}|\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|\,|[x]_{u,1}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|\,|[x]_{i,1}|\\&=\left(\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|\right)|[x]_{i,1}|.\end{aligned}$$

因为 $|[x]_{i,1}| > 0$, 故式 (C.5) 是对的.　证毕.

不过, 此事反过来不一定是对的.

例 C.47　设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个 2 级阵. 取 $i = 1$ 或 $i = 2$, 即有

$$|[A]_{i,1}| = 0 \leqslant 1 = \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

可是, $\det(A) = 1 \neq 0$.

定理 C.48　设 A 是一个 n 级阵 $(n \geqslant 2)$. 设 $\det(A) = 0$. 则存在不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 使

$$|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}| \leqslant \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\right). \tag{C.6}$$

证　因为 $\det(A) = 0$, 故有非零的 $n \times 1$ 阵 x, 使 $Ax = 0$ (见第一章, 节 *23*).

考虑不全为零的非负实数 $|[x]_{1,1}|, |[x]_{2,1}|, \cdots, |[x]_{n,1}|$. 则有不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 使对任何不超过 n, 且不等于 j 的正整数 p, 有 $|[x]_{j,1}| \geqslant |[x]_{k,1}| \geqslant |[x]_{p,1}|$, 且 $|[x]_{j,1}| > 0$.

注意到, 对任何不超过 n 的正整数 u, 有

$$\begin{aligned}0 &= [0]_{u,1}\\&= [Ax]_{u,1}\\&= \sum_{1\leqslant v\leqslant n} [A]_{u,v}[x]_{v,1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n\\ v\neq u}} [A]_{u,v}[x]_{v,1} + [A]_{u,u}[x]_{u,1}.$$

故

$$-[A]_{u,u}[x]_{u,1} = \sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n\\ v\neq u}} [A]_{u,v}[x]_{v,1}.$$

则

$$\begin{aligned}
|[A]_{u,u}|\,|[x]_{u,1}| &= |[A]_{u,u}[x]_{u,1}| \\
&= |-[A]_{u,u}[x]_{u,1}| \\
&= \left|\sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n\\ v\neq u}} [A]_{u,v}[x]_{v,1}\right| \\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n\\ v\neq u}} |[A]_{u,v}[x]_{v,1}| \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n\\ v\neq u}} |[A]_{u,v}|\,|[x]_{v,1}|.
\end{aligned}$$

则 (取 $u = j$, 并注意到对任何不超过 n, 且不等于 j 的正整数 p, 有 $|[x]_{p,1}| \leqslant |[x]_{k,1}|$)

$$\begin{aligned}
|[A]_{j,j}|\,|[x]_{j,1}| &\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\,|[x]_{p,1}| \\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\,|[x]_{k,1}| \\
&= \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\right)|[x]_{k,1}|,
\end{aligned}$$

且 (取 $u = k$, 并注意到对任何不超过 n 的正整数 q, 有 $|[x]_{q,1}| \leqslant |[x]_{j,1}|$)

$$\begin{aligned}
|[A]_{k,k}|\,|[x]_{k,1}| &\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\,|[x]_{q,1}|\\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\,|[x]_{j,1}|\\
&= \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\Bigg)|[x]_{j,1}|.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&(|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}|)\,(|[x]_{j,1}|\,|[x]_{k,1}|)\\
&\leqslant \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\Bigg)(|[x]_{j,1}|\,|[x]_{k,1}|).
\end{aligned}$$

因为 $|[x]_{j,1}| > 0$, 故

$$(|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}|)\,|[x]_{k,1}| \leqslant \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\Bigg)|[x]_{k,1}|.$$

若 $|[x]_{k,1}| > 0$, 则式 (C.6) 当然是对的. 若 $|[x]_{k,1}| = 0$, 则对任何不超过 n, 且不等于 j 的正整数 p, 有 $0 = |[x]_{k,1}| \geqslant |[x]_{p,1}| \geqslant 0$. 故 $|[x]_{p,1}| = 0$. 故 $[x]_{p,1} = 0$. 则

$$-[A]_{j,j}[x]_{j,1} = \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} [A]_{j,p}[x]_{p,1} = 0.$$

因为 $|[x]_{j,1}| > 0$, 故 $[x]_{j,1} \neq 0$. 从而 $[A]_{j,j} = 0$. 则式 (C.6) 的左侧是零.　证毕.

此事反过来也不一定是对的: 考虑上个例的 A 即可.

我们说, 若存在不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 使式 (C.6) 是对的, 则存在不超过 n 的正整数 i, 使式 (C.5) 是对的. 用反证法, 不难看出, 若式 (C.6) 是

对的, 则

$$|[A]_{j,j}| > \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|$$

与

$$|[A]_{k,k}| > \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|$$

不能全是对的. 故

$$|[A]_{j,j}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|$$

与

$$|[A]_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|$$

的至少一个是对的. 取 i 为 j 或 k 即可.

或许, 您会想:

设 A 是一个 n 级阵 ($n \geqslant 3$). 设 $\det(A) = 0$. 则存在不超过 n, 且互不相同的正整数 j, k, ℓ, 使

$$\begin{aligned}&|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}|\,|[A]_{\ell,\ell}|\\ \leqslant&\left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ r\neq \ell}} |[A]_{\ell,r}|\right).\end{aligned}$$

不过, 这不是对的.

例 C.49 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ 是一个 3 级阵. 不难算出, $\det(A) = 0$. 可是 (此处 j, k, ℓ 分别是 1, 2, 3)

$$\begin{aligned} & |[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}|\,|[A]_{\ell,\ell}| \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 10 \\ &> 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= \Bigg(\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 3 \\ p \neq j}} |[A]_{j,p}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant 3 \\ q \neq k}} |[A]_{k,q}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1 \leqslant r \leqslant 3 \\ r \neq \ell}} |[A]_{\ell,r}|\Bigg). \end{aligned}$$

j, k, ℓ 取其他的数时, 也有类似的结果.

最后, 注意到, 一个阵与其转置的行列式相等: 若 $\det(A) = 0$, 则 $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A) = 0$. 应用前二个定理于 A^{T}, 立得

定理 C.50 设 A 是一个 n 级阵. 设 $\det(A) = 0$. 则存在不超过 n 的正整数 i, 使

$$|[A]_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant n \\ u \neq i}} |[A]_{u,i}|.$$

定理 C.51 设 A 是一个 n 级阵 ($n \geqslant 2$). 设 $\det(A) = 0$. 则存在不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 使

$$|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}| \leqslant \Bigg(\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ p \neq j}} |[A]_{p,j}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant n \\ q \neq k}} |[A]_{q,k}|\Bigg).$$

C.20 判断阵的行列式不是零的方法

我们知道, 若一个阵的行列式是零, 则有形如式 (C.5), (C.6) 的不等式成立. 利用反证法, 我们立得判断阵的行列式不是零的方法:

定理 C.52 设 A 是一个 n 级阵. 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$|[A]_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

则 $\det(A)\neq 0$.

定理 C.53 设 A 是一个 n 级阵 ($n\geqslant 2$). 设对任何不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 必

$$|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}| > \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\Bigg).$$

则 $\det(A)\neq 0$.

当然, 如下命题也是正确的 (利用转置):

定理 C.54 设 A 是一个 n 级阵. 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$|[A]_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{u,i}|.$$

则 $\det(A)\neq 0$.

定理 C.55 设 A 是一个 n 级阵 ($n\geqslant 2$). 设对任何不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 必

$$|[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}| > \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{p,j}|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{q,k}|\Bigg).$$

则 $\det(A)\neq 0$.

这些定理的一个应用或许是, 对于一类阵, 即使我们不计算它的行列式, 我们也可判断它的行列式不是零. 这是好的.

例 C.56　设 $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 是一个 3 级阵. 不难算出, $|9| > |6| + |2|$, $|8| > |4| + |3|$, 且 $|7| > |5| + |1|$. 于是, $\det(A) \neq 0$. (其实, 不难算出, $\det(A) = 327$.)

有时, 一个方阵 A 可能不适合定理的条件, 故我们无法直接地用定理. 不过, 既然我们研究是否 $\det(A) \neq 0$, 我们可找二个跟 A 同尺寸的阵 B, C, 使 BAC 适合定理的条件. 则 $\det(BAC) \neq 0$. 因为 $0 \neq \det(BAC) = \det(B)\det(A)\det(C)$, 必 $\det(A) \neq 0$.

例 C.57　设 $A = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ 13 & 15 & 3 \end{bmatrix}$ 是一个 3 级阵. 不难验算, 我们无法直接地用前 4 个定理的任何一个判断 $\det(A)$ 是否非零.

取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

则

$$BAC = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 10 \\ 8 & 30 & 20 \\ 13 & 15 & 30 \end{bmatrix}.$$

不难算出

$$R_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant 3 \\ u \neq 1}} |[BAC]_{1,u}| = |11| + |10| = 21,$$

$$R_2 = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant 3 \\ u \neq 2}} |[BAC]_{2,u}| = |8| + |20| = 28,$$

$$R_3 = \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant 3\\ u\neq 3}} |[BAC]_{3,u}| = |13| + |15| = 28,$$

且

$$\begin{aligned}
|[BAC]_{1,1}|\,|[BAC]_{2,2}| &= 600 > 588 = R_1R_2,\\
|[BAC]_{1,1}|\,|[BAC]_{3,3}| &= 600 > 588 = R_1R_3,\\
|[BAC]_{2,2}|\,|[BAC]_{3,3}| &= 30^2 > 28^2 = R_2R_3.
\end{aligned}$$

(注意到, 既然我们已算出, 每个 $|[BAC]_{j,j}|\,|[BAC]_{k,k}|$ 都大于 R_jR_k $(j < k)$, 由乘法的交换律, 我们不必再判断每个 $|[BAC]_{j,j}|\,|[BAC]_{k,k}|$ 是否都大于 R_jR_k $(j > k)$.) 故 $\det(BAC) \neq 0$. 则 $\det(A) \neq 0$. (其实, 不难算出, $\det(A) = 476$.)

例 C.58　设 $n \geqslant 2$. 设 n 级阵 A 适合

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 2, & 1 \leqslant i = j \leqslant n;\\ 1 \text{ 或 } -1, & 1 \leqslant i = j-1 \leqslant n-1;\\ 1 \text{ 或 } -1, & 2 \leqslant i = j+1 \leqslant n;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

形象地, 当 $n = 4$ 时, A 形如

$$\begin{bmatrix} 2 & \pm 1 & 0 & 0\\ \pm 1 & 2 & \pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1 & 2 & \pm 1\\ 0 & 0 & \pm 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(这里, 正负号可自由地组合.)

不难算出, 对 $i = 1$ 或 $i = n$, 有

$$|[A]_{i,i}| = 2 > 1 = \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|;$$

对 $1 < i < n$, 有

$$|[A]_{i,i}| = 2 = 2 = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant n \\ u \neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

于是, 对 $n = 2$, 我们可用第 1 个定理, 得到 $\det(A) \neq 0$; 对 $n = 3$, 我们可用第 2 个定理, 得到 $\det(A) \neq 0$; 对 $n \geqslant 4$, 这 4 个定理无法直接地被使用.

我们试找一个 n 级阵 C, 使 AC 适合某个定理的条件, 从而有 $\det(A) \neq 0$. 无妨设

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是待定的非零数. 具体地,

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} c_i, & 1 \leqslant i = j \leqslant n; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

考虑到, 在后面的计算中, c_i 会被经常地取绝对值. 既然如此, 为方便, 我们不如要求 $c_i > 0$. 不难算出, $[AC]_{i,j} = c_j[A]_{i,j}$; 特别地, $|[AC]_{i,i}| = 2c_i$. 记

$$R_i = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant n \\ u \neq i}} |[AC]_{i,u}|.$$

则

$$R_i = \begin{cases} c_2, & i = 1; \\ c_{i-1} + c_{i+1}, & 1 < i < n; \\ c_{n-1}, & i = n. \end{cases}$$

我们希望, 找一组正数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使 $|[AC]_{i,i}| > R_i$, 即

$$\begin{aligned}
2c_1 &> c_2,\\
2c_2 &> c_1 + c_3,\\
2c_3 &> c_2 + c_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
2c_{n-1} &> c_{n-2} + c_n,\\
2c_n &> c_{n-1}.
\end{aligned}$$

这些不等式相当于

$$\begin{aligned}
c_1 &> c_2 - c_1,\\
c_2 - c_1 &> c_3 - c_2,\\
c_3 - c_2 &> c_4 - c_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
c_{n-1} - c_{n-2} &> c_n - c_{n-1},\\
c_n - c_{n-1} &> -c_n.
\end{aligned}$$

我们可试取

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},\\
c_2 - c_1 &= \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\\
c_3 - c_2 &= \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
c_{n-1} - c_{n-2} &= \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},\\
c_n - c_{n-1} &= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

即

$$c_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

不难验证, c_k 是正数, 且

$$|[AC]_{1,1}| - R_1 = 2c_1 - c_2 = 1 - \frac{2}{3} > 0,$$
$$|[AC]_{n,n}| - R_n = 2c_n - c_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n} > 0,$$
$$|[AC]_{i,i}| - R_i = (c_i - c_{i-1}) - (c_{i+1} - c_i) = \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} > 0.$$

故 AC 适合第 1 个定理的条件. 则 $\det(AC) \neq 0$. 故 $\det(A) \neq 0$.

C.21　判断实阵的行列式大于零的方法

最后, 我介绍判断实阵的行列式大于零的方法.

定理 C.59　设 A 是一个 n 级**实阵**. 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$[A]_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

则 $\det(A) > 0$.

我想给二个证明. 第 1 个证明的计算较多, 但它是较直接的.

证 (法 1)　作命题 $P(n)$:

对任何适合如下条件的 n 级实阵 A, 必 $\det(A) > 0$:

对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$[A]_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

我们用数学归纳法证明, 对任何正整数 n, $P(n)$ 是对的.

$P(1)$ 是对的; 这是显然的.

$P(2)$ 是对的. 任取 2 级实阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

其中 $a > |b|$, 且 $d > |c|$. 则

$$\det(A) = ad - bc > |b|\,|c| - bc = |bc| - bc \geqslant 0.$$

设 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证 $P(n)$ 是对的.

设 A 是一个 n 级实阵, 且对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$[A]_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

因为 $[A]_{i,i}$ 大于一个非负数, 故 $0 < [A]_{i,i} = |[A]_{i,i}|$. 作 n 级实阵 $B_1 = A$. 则 $[B_1]_{i,j} = [A]_{i,j}$, 且 $\det(B_1) = \det(A)$.

我们加 B_1 的行 1 的 $-[A]_{2,1}/[A]_{1,1}$ 倍到 B_1 的行 2, 得 n 级实阵 B_2. 则

$$\begin{aligned}
&[B_2]_{i,j} = [B_1]_{i,j}, && i < 2;\\
&[B_2]_{2,1} = 0;\\
&[B_2]_{2,j} = [A]_{2,j} - \frac{[A]_{2,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,j};\\
&\det(B_2) = \det(B_1) = \det(A).
\end{aligned}$$

我们加 B_2 的行 1 的 $-[A]_{3,1}/[A]_{1,1}$ 倍到 B_2 的行 3, 得 n 级实阵 B_3. 则

$$\begin{aligned}
&[B_3]_{i,j} = [B_2]_{i,j}, && i < 3;\\
&[B_3]_{3,1} = 0;\\
&[B_3]_{3,j} = [A]_{3,j} - \frac{[A]_{3,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,j};\\
&\det(B_3) = \det(B_2) = \det(A).
\end{aligned}$$

……

我们加 B_{n-1} 的行 1 的 $-[A]_{n,1}/[A]_{1,1}$ 倍到 B_{n-1} 的行 n, 得 n 级实阵 B_n. 则

$$\begin{aligned}
&[B_n]_{i,j} = [B_{n-1}]_{i,j}, && i < n;\\
&[B_n]_{n,1} = 0;\\
&[B_n]_{n,j} = [A]_{n,j} - \frac{[A]_{n,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,j};\\
&\det(B_n) = \det(B_{n-1}) = \det(A).
\end{aligned}$$

综上, 我们作出了一个 n 级实阵 B_n 适合如下条件:

$$\begin{aligned}
&[B_n]_{1,j} = [A]_{1,j};\\
&[B_n]_{i,1} = 0, && i > 1;\\
&[B_n]_{i,j} = [A]_{i,j} - \frac{[A]_{i,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,j}, && i > 1;\\
&\det(B_n) = \det(A).
\end{aligned}$$

作 $n-1$ 级实阵 $C = B_n(1|1)$. 则

$$[C]_{i,j} = [B_n]_{i+1,j+1} = [A]_{i+1,j+1} - \frac{[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,j+1};$$
$$\det(A) = \det(B_n) = [B_n]_{1,1}\det(B_n(1|1)) = [A]_{1,1}\det(C).$$

注意到, 若 $j \neq k$, 则

$$[A]_{k,k} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq k}} |[A]_{k,u}| \geqslant |[A]_{k,j}|,$$

故

$$\begin{aligned}
[C]_{i,i} &= [A]_{i+1,i+1} - \frac{[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,i+1}\\
&= \frac{[A]_{i+1,i+1}[A]_{1,1} - [A]_{1,i+1}[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}\\
&> \frac{|[A]_{1,i+1}|\,|[A]_{i+1,1}| - [A]_{1,i+1}[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}\\
&= \frac{|[A]_{1,i+1}[A]_{i+1,1}| - [A]_{1,i+1}[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

故 $0 < [C]_{i,i} = |[C]_{i,i}|$.

注意到

$$\begin{aligned}
|[C]_{i,i}| &= \left|[A]_{i+1,i+1} - \frac{[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,i+1}\right|\\
&\geqslant |[A]_{i+1,i+1}| - \left|\frac{[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,i+1}\right|\\
&= |[A]_{i+1,i+1}| - \frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,i+1}|,
\end{aligned}$$

且

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n-1\\ v\neq i}} |[C]_{i,v}| \\
= &\sum_{\substack{2\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[C]_{i,\ell-1}| \\
= &\sum_{\substack{2\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} \left|[A]_{i+1,\ell}-\frac{[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,\ell}\right| \\
\leqslant &\sum_{\substack{2\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} \left(|[A]_{i+1,\ell}|+\left|\frac{[A]_{i+1,1}}{[A]_{1,1}}[A]_{1,\ell}\right|\right) \\
= &\sum_{\substack{2\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} \left(|[A]_{i+1,\ell}|+\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,\ell}|\right) \\
= &\sum_{\substack{2\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{i+1,\ell}|+\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}\sum_{\substack{2\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{1,\ell}| \\
= &\sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{i+1,\ell}|-|[A]_{i+1,1}|+\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}\sum_{2\leqslant \ell\leqslant n} |[A]_{1,\ell}| \\
&\quad -\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,i+1}| \\
= &\sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{i+1,\ell}|-\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,1}|+\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}\sum_{2\leqslant \ell\leqslant n} |[A]_{1,\ell}| \\
&\quad -\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,i+1}| \\
= &\sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{i+1,\ell}|-\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}\left(|[A]_{1,1}|-\sum_{2\leqslant \ell\leqslant n} |[A]_{1,\ell}|\right) \\
&\quad -\frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,i+1}|
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{i+1,\ell}| - \frac{|[A]_{i+1,1}|}{|[A]_{1,1}|}|[A]_{1,i+1}|.$$

故

$$|[C]_{i,i}| - \sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant n-1\\ v\neq i}} |[C]_{i,v}| \geqslant |[A]_{i+1,i+1}| - \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq i+1}} |[A]_{i+1,\ell}| > 0.$$

综上, 由假定, $\det(C) > 0$.

既然 $[A]_{1,1} > 0$, 且 $\det(C) > 0$, 故 $\det(A) = [A]_{1,1}\det(C) > 0$.

所以, $P(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

第 2 个证明的计算较少. 不过, 我们要注意一件小事.

定理 C.60 设 m, b 是实数. 设 $b > 0$, 且对任何不超过 1 的正数 t, 有 $mt + b \neq 0$. 则 $m + b > 0$.

证 用反证法. 反设 $m + b \leqslant 0$. 则 $0 < b \leqslant -m$. 设 $s = b/(-m)$. 则 $0 < s \leqslant 1$. 可是, $ms + b = 0$. 这是矛盾. 证毕.

证 (法 2) 作命题 $P(n)$:

对任何适合如下条件的 n 级实阵 A, 必 $\det(A) > 0$:

对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$[A]_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

我们用数学归纳法证明, 对任何正整数 n, $P(n)$ 是对的.

$P(1)$ 是对的; 这是显然的.

设 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证 $P(n)$ 是对的.

设 A 是一个 n 级实阵, 且对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$[A]_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}|.$$

因为 $[A]_{i,i}$ 大于一个非负数, 故 $0 < [A]_{i,i} = |[A]_{i,i}|$.

作 $n \times n$ 实阵 A_t 如下:

$$[A_t]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & i \neq 1; \\ [A]_{1,1}, & i = j = 1; \\ t\,[A]_{1,j}, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们考虑 A_t 的行列式. 按行 1 展开, 有

$$\begin{aligned} \det(A_t) &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{1+j}[A_t]_{1,j} \det(A_t(1|j)) \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{1+j}[A_t]_{1,j} \det(A(1|j)) \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq 1}} (-1)^{1+j}[A_t]_{1,j} \det(A(1|j)) + (-1)^{1+1}[A_t]_{1,1} \det(A(1|1)) \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq 1}} (-1)^{1+j} t\,[A]_{1,j} \det(A(1|j)) + [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\ &= t \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq 1}} (-1)^{1+j}[A]_{1,j} \det(A(1|j)) + [A]_{1,1} \det(A(1|1)). \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq 1}} (-1)^{1+j}[A]_{1,j} \det(A(1|j)), \\ b &= [A]_{1,1} \det(A(1|1)). \end{aligned}$$

则 m, b 是实数, 且 $\det(A_t) = mt + b$.

作 $n-1$ 级实阵 $C = A(1|1)$, 则 $[C]_{w,y} = [A]_{w+1,y+1}$. 且对 $w < n$,

$$\begin{aligned} [C]_{w,w} &= [A]_{w+1,w+1} \\ &> \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant n \\ u \neq w+1}} |[A]_{w+1,u}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq 1,w+1}} |[A]_{w+1,u}| \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant n-1\\ y\neq w}} |[A]_{w+1,y+1}| \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant n-1\\ y\neq w}} |[C]_{w,y}|.
\end{aligned}
$$

所以, 由假定, $\det(A(1|1)) = \det(C) > 0$. 因为 $[A]_{1,1} > 0$, 我们有 $b > 0$.

设 t 是不超过 1 的正数. 则 $0 \leqslant |t| = t \leqslant 1$. 任取不超过 n 的正整数 i. 若 $i \neq 1$, 则

$$
\begin{aligned}
|[A_t]_{i,i}| &= |[A]_{i,i}| \\
&= [A]_{i,i} \\
&> \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}| \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A_t]_{i,u}|.
\end{aligned}
$$

若 $i = 1$, 则

$$
\begin{aligned}
|[A_t]_{i,i}| &= |[A]_{i,i}| \\
&= [A]_{i,i} \\
&> \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}| \\
&\geqslant |t| \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{i,u}| \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |t|\, |[A]_{i,u}| \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |t\, [A]_{i,u}|
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A_t]_{i,u}|.$$

则 $\det(A_t) \neq 0$. 从而, 对任何不超过 1 的正数 t, 有 $mt + b \neq 0$.

既然 $b > 0$, 且对任何不超过 1 的正数 t, 有 $mt + b \neq 0$, 我们能推出 $m + b > 0$. 故 $\det(A) = \det(A_1) = m + b > 0$.

所以, $P(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

当然, 如下命题也是正确的 (利用转置):

定理 C.61 设 A 是一个 n 级**实阵**. 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必

$$[A]_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq i}} |[A]_{u,i}|.$$

则 $\det(A) > 0$.

我们回看上节的例.

例 C.56 (续) 设 $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2\\ 4 & 8 & 3\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$ 是一个 3 级实阵. 不难算出, $9 > |6|+|2|$, $8 > |4|+|3|$, 且 $7 > |5|+|1|$. 于是, $\det(A) > 0$. (其实, 不难算出, $\det(A) = 327$.)

有时, 一个实方阵 A 可能不适合定理的条件, 故我们无法直接地用定理. 不过, 既然我们研究是否 $\det(A) > 0$, 我们可找二个跟 A 同尺寸的实阵 B, C, 使 $\det(B)\det(C) > 0$, 且 BAC 适合定理的条件. 则 $\det(BAC) > 0$. 因为 $0 < \det(BAC) = \det(B)\det(A)\det(C)$, 且 $\det(B)\det(C) > 0$, 故 $\det(A) > 0$.

例 C.58 (续) 设 $n \geqslant 2$. 设 n 级实阵 A 适合

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 2, & 1 \leqslant i = j \leqslant n;\\ 1 \text{ 或 } -1, & 1 \leqslant i = j-1 \leqslant n-1;\\ 1 \text{ 或 } -1, & 2 \leqslant i = j+1 \leqslant n;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们无法直接地用定理说明 $\det(A) > 0$.

记 $c_k = 1 - 1/(k+1) = k/(k+1) > 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 作 n 级实阵

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix};$$

具体地,

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} c_i, & 1 \leqslant i = j \leqslant n; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

不难算出, $\det(C) > 0$ (其实, $\det(C) = 1/(n+1)$).

现在, 我们证明, $\det(AC) > 0$.

首先, AC 当然是一个实阵. 不难算出, $[AC]_{i,j} = c_j [A]_{i,j}$; 特别地, $[AC]_{i,i} = 2c_i$. 记

$$R_i = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant n \\ u \neq i}} |[AC]_{i,u}|.$$

则

$$R_i = \begin{cases} c_2, & i = 1; \\ c_{i-1} + c_{i+1}, & 1 < i < n; \\ c_{n-1}, & i = n. \end{cases}$$

不难验证,

$$[AC]_{1,1} - R_1 = 2c_1 - c_2 = 1 - \frac{2}{3} > 0,$$
$$[AC]_{n,n} - R_n = 2c_n - c_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n} > 0,$$
$$[AC]_{i,i} - R_i = (c_i - c_{i-1}) - (c_{i+1} - c_i) = \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} > 0.$$

于是, $\det(AC) > 0$.

既然 $0 < \det(AC) = \det(A)\det(C)$, 且 $\det(C) > 0$, 故 $\det(A) > 0$.

我们还有如下定理.

定理 C.62 设 A 是一个 n 级**实阵** ($n \geqslant 2$). 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必 $[A]_{i,i} > 0$. 设对任何不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 必

$$[A]_{j,j}\,[A]_{k,k} > \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\right).$$

则 $\det(A) > 0$.

证 作命题 $P(n)$:

对任何适合如下条件的 n 级实阵 A, 必 $\det(A) > 0$:

(1) 对任何不超过 n 的正整数 i, 必 $[A]_{i,i} > 0$;
(2) 对任何不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 必

$$[A]_{j,j}\,[A]_{k,k} > \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\right).$$

我们用数学归纳法证明, 对任何高于 1 的正整数 n, $P(n)$ 是对的.

$P(2)$ 是对的. 任取 2 级实阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

其中 $ad > |b|\,|c|$. 则

$$\det(A) = ad - bc > |b|\,|c| - bc = |bc| - bc \geqslant 0.$$

设 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证 $P(n)$ 是对的.

设 A 是一个 n 级实阵. 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必 $[A]_{i,i} > 0$. 设对任何不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 必

$$[A]_{j,j}\,[A]_{k,k} > \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\right).$$

作 $n \times n$ 实阵 A_t 如下:

$$[A_t]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & i \neq 1; \\ [A]_{1,1}, & i = j = 1; \\ t\,[A]_{1,j}, & 其他. \end{cases}$$

我们考虑 A_t 的行列式. 按行 1 展开, 有

$$\begin{aligned} \det(A_t) &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (-1)^{1+j}[A_t]_{1,j} \det(A_t(1|j)) \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (-1)^{1+j}[A_t]_{1,j} \det(A(1|j)) \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq 1}} (-1)^{1+j}[A_t]_{1,j} \det(A(1|j)) + (-1)^{1+1}[A_t]_{1,1} \det(A(1|1)) \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq 1}} (-1)^{1+j} t\,[A]_{1,j} \det(A(1|j)) + [A]_{1,1} \det(A(1|1)) \\ &= t \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq 1}} (-1)^{1+j}[A]_{1,j} \det(A(1|j)) + [A]_{1,1} \det(A(1|1)). \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq 1}} (-1)^{1+j}[A]_{1,j} \det(A(1|j)), \\ b &= [A]_{1,1} \det(A(1|1)). \end{aligned}$$

则 m, b 是实数, 且 $\det(A_t) = mt + b$.

作 $n-1$ 级实阵 $C = A(1|1)$. 则 $[C]_{w,y} = [A]_{w+1,y+1}$, 且对 $v, w < n$, 且 $v \neq w$,

$$\begin{aligned} [C]_{v,v}\,[C]_{w,w} &= [A]_{v+1,v+1}\,[A]_{w+1,w+1} \\ &> \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n \\ u\neq v+1}} |[A]_{v+1,u}| \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n \\ u\neq w+1}} |[A]_{w+1,u}| \Bigg) \end{aligned}$$

$$\geqslant \left(\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq 1,v+1}} |[A]_{v+1,u}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant n\\ u\neq 1,w+1}} |[A]_{w+1,u}| \right)$$
$$= \left(\sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant n-1\\ y\neq v}} |[A]_{v+1,y+1}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant n-1\\ y\neq w}} |[A]_{w+1,y+1}| \right)$$
$$= \left(\sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant n-1\\ y\neq v}} |[C]_{v,y}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant n-1\\ y\neq w}} |[C]_{w,y}| \right).$$

所以, 由假定, $\det(A(1|1)) = \det(C) > 0$. 因为 $[A]_{1,1} > 0$, 我们有 $b > 0$.

设 t 是不超过 1 的正数. 则 $0 \leqslant |t| = t \leqslant 1$. 任取不超过 n 的正整数 j, k, 且 $j \neq k$. 若 $j \neq 1$ 且 $k \neq 1$, 则

$$\begin{aligned} |[A_t]_{j,j}|\,|[A_t]_{k,k}| &= |[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}| \\ &= [A]_{j,j}\,[A]_{k,k} \\ &> \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}| \right) \\ &= \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A_t]_{j,p}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A_t]_{k,q}| \right). \end{aligned}$$

若 $j = 1$ 且 $k \neq j$, 则

$$\begin{aligned} |[A_t]_{j,j}|\,|[A_t]_{k,k}| &= |[A]_{j,j}|\,|[A]_{k,k}| \\ &= [A]_{j,j}\,[A]_{k,k} \\ &> \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}| \right) \\ &\geqslant |t| \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{j,p}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}| \right) \\ &= \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |t|\,|[A]_{j,p}| \right) \left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}| \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |t\,[A]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{k,q}|\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A_t]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A_t]_{k,q}|\right).
\end{aligned}
$$

若 $k = 1$ 且 $j \neq k$, 类似地, 我们也有

$$
|[A_t]_{j,j}|\,|[A_t]_{k,k}| > \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A_t]_{j,p}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A_t]_{k,q}|\right).
$$

则 $\det(A_t) \neq 0$. 从而, 对任何不超过 1 的正数 t, 有 $mt + b \neq 0$.

既然 $b > 0$, 且对任何不超过 1 的正数 t, 有 $mt + b \neq 0$, 我们能推出 $m + b > 0$. 故 $\det(A) = \det(A_1) = m + b > 0$.

所以, $P(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

当然, 如下命题也是正确的 (利用转置):

定理 C.63 设 A 是一个 n 级**实阵** ($n \geqslant 2$). 设对任何不超过 n 的正整数 i, 必 $[A]_{i,i} > 0$. 设对任何不超过 n, 且不等的正整数 j, k, 必

$$
[A]_{j,j}\,[A]_{k,k} > \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ p\neq j}} |[A]_{p,j}|\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ q\neq k}} |[A]_{q,k}|\right).
$$

则 $\det(A) > 0$.

例 C.57 (续) 设 $A = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 1\\ 4 & 15 & 1\\ 13 & 15 & 3\end{bmatrix}$ 是一个 3 级实阵.

取实阵

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}.
$$

不难算出, $\det(B) > 0$, 且 $\det(C) > 0$.

不难算出

$$BAC = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 10 \\ 8 & 30 & 20 \\ 13 & 15 & 30 \end{bmatrix}.$$

由此可见, BAC 是实阵, 且 $[BAC]_{i,i} > 0$.

不难算出

$$R_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant 3 \\ u \neq 1}} |[BAC]_{1,u}| = |11| + |10| = 21,$$
$$R_2 = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant 3 \\ u \neq 2}} |[BAC]_{2,u}| = |8| + |20| = 28,$$
$$R_3 = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant 3 \\ u \neq 3}} |[BAC]_{3,u}| = |13| + |15| = 28,$$

且

$$[BAC]_{1,1}\,[BAC]_{2,2} = 600 > 588 = R_1 R_2,$$
$$[BAC]_{1,1}\,[BAC]_{3,3} = 600 > 588 = R_1 R_3,$$
$$[BAC]_{2,2}\,[BAC]_{3,3} = 30^2 > 28^2 = R_2 R_3.$$

(注意到, 既然我们已算出, 每个 $[BAC]_{j,j}\,[BAC]_{k,k}$ 都大于 $R_j R_k$ $(j < k)$, 由乘法的交换律, 我们不必再判断每个 $[BAC]_{j,j}\,[BAC]_{k,k}$ 是否都大于 $R_j R_k$ $(j > k)$.) 故 $\det(BAC) > 0$.

既然 $0 < \det(BAC) = \det(B)\det(A)\det(C)$, 且 $\det(B) > 0$, $\det(C) > 0$, 故 $\det(A) > 0$. (其实, 不难算出, $\det(A) = 476$.)

C.22 消去律

本节, 我们讨论一些运算的消去律.

定理 C.64 设 x, y, z 是数. 若 $x+y=x+z$, 或 $y+x=z+x$, 则 $y=z$.

我们知道:

(1) 存在数 0, 使对任何数 a, 必 $0+a=a=a+0$;

(2) 对任何数 a, 必存在数 $-a$, 使 $(-a)+a=0=a+(-a)$.

那么, 若 $x+y=x+z$, 则

$$(-x)+(x+y)=(-x)+(x+z).$$

由结合律, 有

$$((-x)+x)+y=((-x)+x)+z,$$

即

$$0+y=0+z.$$

故 $y=z$.

类似地, 我们可证, 若 $y+x=z+x$, 则 $y=z$.

类似地:

(3) 存在 $m\times n$ 阵 0, 使对任何 $m\times n$ 阵 X, 必 $0+X=X=X+0$;

(4) 对任何 $m\times n$ 阵 X, 必存在 $m\times n$ 阵 $-X$, 使 $(-X)+X=0=X+(-X)$.

于是, 我们也有,

定理 C.65 设 A, B, C 都是 $m\times n$ 阵. 若 $A+B=A+C$, 或 $B+A=C+A$, 则 $B=C$.

又设 x, y, z 是数. 那么, 若 $xy=xz$, 或 $yx=zx$, 还有 $y=z$ 吗? 不一定. 毕竟, 对任何数 a, 必 $0a=0=a0$. 于是, 虽然 $0\cdot 1=0\cdot 2$, 但 $1\neq 2$.

可是, 若我们还要求 $x\neq 0$, 则 $y=z$ 是对的. 毕竟:

(5) 存在数 1, 使对任何数 a, 必 $1a=a=a1$;

(6) 对任何非零的数 a, 必存在数 a^{-1}, 使 $a^{-1}a=1=aa^{-1}$.

设 $x \neq 0$, 且 $xy = xz$. 则 $x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$. 由结合律, 有 $(x^{-1}x)y = (x^{-1}x)z$. 则 $1y = 1z$. 则 $y = z$.

类似地, 可证, 若 $x \neq 0$, 且 $yx = zx$, 则 $y = z$. 总之,

定理 C.66　设 x, y, z 是数, 且 $x \neq 0$. 若 $xy = xz$, 或 $yx = zx$, 则 $y = z$.

阵的积也有类似的性质. 不过, 由于阵的积是较复杂的, 相关的事实的论证也是较不简单的.

先看一个较简单的事实.

定理 C.67　设 A, B 是 $m \times n$ 阵. 设 $x \neq 0$ 是一个数. 若 $xA = xB$, 则 $A = B$.

证　任取正整数 $i \leqslant m$ 与 $j \leqslant n$. 则

$$x[A]_{i,j} = [xA]_{i,j} = [xB]_{i,j} = x[B]_{i,j}.$$

由数的积的性质, 既然 $x \neq 0$, 则必 $[A]_{i,j} = [B]_{i,j}$.　证毕.

以下是本节的主要结论.

定理 C.68　设 A 是一个 n 级阵, 且 $\det(A) \neq 0$.

设 $n \times m$ 阵 B, C 适合 $AB = AC$. 则 $B = C$.

设 $m \times n$ 阵 F, G 适合 $FA = GA$. 则 $F = G$.

证　我证第 1 个; 我留第 2 个为您的习题.

设 A 是一个 n 级阵, 且 $\det(A) \neq 0$. 又设 $n \times m$ 阵 B, C 适合 $AB = AC$. 则

$$\operatorname{adj}(A)(AB) = \operatorname{adj}(A)(AC).$$

由结合律,

$$(\operatorname{adj}(A)\,A)B = (\operatorname{adj}(A)\,A)C.$$

由古伴的性质,

$$(\det(A)\,I)B = (\det(A)\,I)C,$$

即

$$\det(A)(IB) = \det(A)(IC),$$

即

$$\det(A)B = \det(A)C.$$

因为 $\det(A) \neq 0$, 我们有 $B = C$. 证毕.

以上结论也可被推广. 不过, 还是以上结论更常用, 更常见.

定理 C.69 设 A 是一个 $s \times n$ 阵. 设 A 有一个行列式非零的 n 级子阵

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant s$. 设 $n \times m$ 阵 B, C 适合 $AB = AC$. 则 $B = C$.

设 H 是一个 $n \times t$ 阵. 设 H 有一个行列式非零的 n 级子阵

$$H\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ j_1, j_2, \cdots, j_n \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_n \leqslant t$. 设 $m \times n$ 阵 F, G 适合 $FH = GH$. 则 $F = G$.

证 我证第 1 个; 我留第 2 个为您的习题.

记

$$L = A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

注意到, $[L]_{p,v} = [A]_{i_p,v}$.

从 1, 2, ⋯, s 去除 i_1, i_2, ⋯, i_n 后, 还剩 $s - n$ 个数. 我们从小到大地叫这 $s - n$ 个数为 i_{n+1}, ⋯, i_s.

作 $n \times s$ 阵 X 如下:

$$[X]_{u,i_p} = \begin{cases} [\operatorname{adj}(L)]_{u,p}, & p \leqslant n; \\ 0, & p > n. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
[XA]_{u,v} &= \sum_{p=1}^{s} [X]_{u,p}[A]_{p,v} \\
&= \sum_{p=1}^{s} [X]_{u,i_p}[A]_{i_p,v} \\
&= \sum_{p=1}^{n} [X]_{u,i_p}[A]_{i_p,v} + \sum_{p=n+1}^{s} [X]_{u,i_p}[A]_{i_p,v} \\
&= \sum_{p=1}^{n} [\operatorname{adj}(L)]_{u,p}[L]_{p,v} + \sum_{p=n+1}^{s} 0\,[A]_{i_p,v} \\
&= [\operatorname{adj}(L)\,L]_{u,v} + 0 \\
&= [\det(L)\,I_n]_{u,v}.
\end{aligned}$$

故 $XA = \det(L)\,I_n$.

由 $AB = AC$, 知

$$X(AB) = X(AC),$$

即

$$(XA)B = (XA)C,$$

即

$$(\det(L)\,I_n)B = (\det(L)\,I_n)C,$$

即

$$\det(L)\,(I_nB) = \det(L)\,(I_nC),$$

即

$$\det(L)\,B = \det(L)\,C.$$

因为 $\det(L) \neq 0$, 故 $B = C$.　　证毕.

C.23 古伴的性质 (1)

本节, 我们认识古伴的二个性质.

一个 n 级阵 A 的古伴 $\operatorname{adj}(A)$ 是一个 n 级阵, 其 (i,j)-元

$$[\operatorname{adj}(A)]_{i,j} = (-1)^{j+i} \det(A(j|i)).$$

对任何方阵 A, 有

$$\operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)\, I = A \operatorname{adj}(A).$$

定理 C.70 设 A 是 n 级阵. 则 $\operatorname{adj}(A^{\mathrm{T}}) = (\operatorname{adj}(A))^{\mathrm{T}}$.

证 注意到 $A^{\mathrm{T}}(j|i) = (A(i|j))^{\mathrm{T}}$, 故

$$\begin{aligned}
[\operatorname{adj}(A^{\mathrm{T}})]_{i,j} &= (-1)^{j+i} \det(A^{\mathrm{T}}(j|i)) \\
&= (-1)^{j+i} \det((A(i|j))^{\mathrm{T}}) \\
&= (-1)^{i+j} \det(A(i|j)) \\
&= [\operatorname{adj}(A)]_{j,i} \\
&= [(\operatorname{adj}(A))^{\mathrm{T}}]_{i,j}.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 C.71 设 A 是 n 级阵 $(n \geqslant 2)$. 则 $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

证 不难看出, 若 B 是 n 级阵, k 是数, 则 $\det(kB) = k^n \det(B)$. 于是

$$\begin{aligned}
\det(A)\,(\det(A))^{n-1} &= (\det(A))^n \\
&= (\det(A))^n \det(I) \\
&= \det(\det(A) I) \\
&= \det(A \operatorname{adj}(A)) \\
&= \det(A) \det(\operatorname{adj}(A)).
\end{aligned}$$

若 $\det(A) \neq 0$, 我们可在等式的二侧消去它, 即得结论.

若 $A = 0$, 则 $\operatorname{adj}(A) = 0$, 故 $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$.

若 $A \neq 0$, 且 $\det(A) = 0$, 我们用反证法说明 $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$. 反设 $\det(\operatorname{adj}(A)) \neq 0$. 则

$$\operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)\, I = 0 = \operatorname{adj}(A)\, 0.$$

因为 $\det(\operatorname{adj}(A)) \neq 0$, 由消去律, 有 $A = 0$. 这是矛盾. 证毕.

C.24 古伴的性质 (2)

本节, 我们讨论古伴的子阵的行列式.

定理 C.72 设 A 是 n 级阵. 设 k 是不超过 n 的正整数. 设正整数 i_1, i_2, $\cdots$, i_k 不超过 n, 且是从小到大的. 设正整数 j_1, j_2, $\cdots$, j_k 不超过 n, 且是从小到大的. 则

$$\begin{aligned}&\det\left((\operatorname{adj}(A))\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\ &=(\det(A))^{k-1}(-1)^{j_1+\cdots+j_k+i_1+\cdots+i_k}\det(A(j_1,\cdots,j_k|i_1,\cdots,i_k)).\end{aligned} \tag{C.7}$$

此事对 $k=1$ 是正确的. 此时, 等式的左侧即为 $\operatorname{adj}(A)$ 的 (i_1, j_1)-元, 而等式的右侧是 $1\,(-1)^{j_1+i_1}\det(A(j_1|i_1))$. 这正是古伴的定义.

以下设 $k>1$.

从 $1, 2, \cdots, n$ 去除 $i_1, \cdots, i_k$ 后, 还剩 $n-k$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-k$ 个数为 $i_{k+1}, \cdots, i_n$. 类似地, 从 $1, 2, \cdots, n$ 去除 $j_1, \cdots, j_k$ 后, 还剩 $n-k$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-k$ 个数为 $j_{k+1}, \cdots, j_n$. 作 n 级阵 B 如下:

$$[B]_{i,j_q}=\begin{cases}[\operatorname{adj}(A)]_{i,j_q}, & q\leqslant k;\\ [I_n]_{i,i_q}, & q>k.\end{cases}$$

形象地, B 的列 j_1, $\cdots$, j_k 分别与 $\operatorname{adj}(A)$ 的列 j_1, $\cdots$, j_k 相等, 但 B 的列 j_{k+1}, $\cdots$, j_n 分别是 n 级单位阵 I_n 的列 i_{k+1}, $\cdots$, i_n. 由此可见,

$$B\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}=B(i_{k+1},\cdots,i_n|j_{k+1},\cdots,j_n)=(\operatorname{adj}(A))\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix},$$

且

$$B(i_1,\cdots,i_k|j_1,\cdots,j_k)=B\begin{pmatrix}i_{k+1},\cdots,i_n\\j_{k+1},\cdots,j_n\end{pmatrix}=I_{n-k}.$$

按列 j_{k+1} 展开 $\det(B)$, 有

$$\det(B)=(-1)^{i_{k+1}+j_{k+1}}\,1\det(B(i_{k+1}|j_{j+1})).$$

注意到 B 的列 j_{k+2} 即为 $B(i_{k+1}|j_{k+1})$ 的列 $j_{k+2}-1$. 按列 $j_{k+2}-1$ 展开 $\det(B(i_{k+1}|j_{k+1}))$, 有

$$\det(B(i_{k+1}|j_{k+1})) = (-1)^{i_{k+2}-1+j_{k+2}-1}\,1\det(B(i_{k+1},i_{k+2}|j_{k+1},j_{k+2})).$$

故

$$\det(B) = (-1)^{i_{k+1}+i_{k+2}+j_{k+1}+j_{k+2}}\det(B(i_{k+1},i_{k+2}|j_{k+1},j_{k+2})).$$

⋯ ⋯ 最后, 我们有

$$\det(B) = (-1)^{i_{k+1}+\cdots+i_n+j_{k+1}+\cdots+j_n}\det(B(i_{k+1},\cdots,i_n|j_{k+1},\cdots,j_n)).$$

我们考虑 AB 的行列式. 一方面,

$$\begin{aligned}\det(AB) = {} & \det(A)\det(B)\\ & = (-1)^{i_{k+1}+\cdots+i_n+j_{k+1}+\cdots+j_n}\det(A)\det\left((\operatorname{adj}(A))\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

另一方面, 当 $q \leqslant k$ 时,

$$\begin{aligned}[AB]_{i,j_q} &= \sum_{u=1}^{n}[A]_{i,u}[B]_{u,j_q}\\ &= \sum_{u=1}^{n}[A]_{i,u}[\operatorname{adj}(A)]_{u,j_q}\\ &= [A\operatorname{adj}(A)]_{i,j_q}\\ &= [\det(A)\,I_n]_{i,j_q};\end{aligned}$$

当 $q > k$ 时,

$$\begin{aligned}[AB]_{i,j_q} &= \sum_{u=1}^{n}[A]_{i,u}[B]_{u,j_q}\\ &= \sum_{u=1}^{n}[A]_{i,u}[I_n]_{u,i_q}\\ &= [AI_n]_{i,i_q}\\ &= [A]_{i,i_q}.\end{aligned}$$

形象地, $\boldsymbol{AB}$ 的列 $j_1, \cdots, j_k$ 分别与 $\det(A)\, I_n$ 的列 $j_1, \cdots, j_k$ 相等, 但 $\boldsymbol{AB}$ 的列 $j_{k+1}, \cdots, j_n$ 分别是 A 的列 $i_{k+1}, \cdots, i_n$. 由此可见,

$$(AB)\begin{pmatrix} j_1, \cdots, j_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix} = (AB)(j_{k+1}, \cdots, j_n | j_{k+1}, \cdots, j_n) = \det(A)\, I_k,$$

且

$$(AB)(j_1, \cdots, j_k | j_1, \cdots, j_k) = (AB)\begin{pmatrix} j_{k+1}, \cdots, j_n \\ j_{k+1}, \cdots, j_n \end{pmatrix} = A(j_1, \cdots, j_k | i_1, \cdots, i_k).$$

按列 j_1 展开 $\det(AB)$, 有

$$\det(AB) = (-1)^{j_1+j_1} \det(A) \det((AB)(j_1|j_1)).$$

注意到 AB 的列 j_2 即为 $(AB)(j_1|j_1)$ 的列 $j_2 - 1$. 按列 $j_2 - 1$ 展开 $\det((AB)(j_1|j_1))$, 有

$$\det((AB)(j_1|j_1)) = (-1)^{j_2-1+j_2-1} \det(A) \det((AB)(j_1, j_2|j_1, j_2)).$$

故

$$\det(AB) = (\det(A))^2 \det((AB)(i_1, i_2|j_1, j_2)).$$

$\cdots\cdots$ 最后, 我们有

$$\det(AB) = (\det(A))^k \det((AB)(j_1, \cdots, j_k|j_1, \cdots, j_k)).$$

比较二次计算的结果, 我们应有

$$\begin{aligned}&(-1)^{i_{k+1}+\cdots+i_n+j_{k+1}+\cdots+j_n} \det(A) \det\left((\operatorname{adj}(A))\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}\right) \\ &= (\det(A))^k \det(A(j_1, \cdots, j_k|i_1, \cdots, i_k)).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&i_{k+1} + \cdots + i_n + j_{k+1} + \cdots + j_n \\ &= ((1 + 2 + \cdots + n) - (i_1 + \cdots + i_k)) + ((1 + 2 + \cdots + n) - (j_1 + \cdots + j_k)) \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + n) - (j_1 + \cdots + j_k + i_1 + \cdots + i_k),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\det(A)\ \det\left((\operatorname{adj}(A))\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\ =\ &\det(A)(\det(A))^{k-1}(-1)^{j_1+\cdots+j_k+i_1+\cdots+i_k}\det(A(j_1,\cdots,j_k|i_1,\cdots,i_k)).\end{aligned}$$

若 $\det(A)\neq 0$, 我们可在等式的二侧消去它, 得式 (C.7). 不过, 若 $\det(A)=0$, 会发生什么?

定理 C.73　设 A 是一个 n 级阵. 设 $\det(A)=0$. 则存在不超过 n 的正整数 s, 使对任何不超过 n 的正整数 j, 存在数 m_j, 使对任何不超过 n 的正整数 i, 有 $[\operatorname{adj}(A)]_{i,j}=m_j[\operatorname{adj}(A)]_{i,s}$; 通俗地, 存在不超过 n 的正整数 s, 使 $\operatorname{adj}(A)$ 的任何一列都是 $\operatorname{adj}(A)$ 的列 s 的数乘.

有了此事, 不难看出, 若 $\det(A)=0$, 且 $k>1$, 则

$$\det\left((\operatorname{adj}(A))\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)=0,$$

故式 (C.7) 仍是正确的.

那么, 若我们证明了此事, 则我们也就证明了式 (C.7).

证　若 $\operatorname{adj}(A)=0$, 则 $\operatorname{adj}(A)$ 的每一列都是零. 从而 $\operatorname{adj}(A)$ 的每一列都是 $\operatorname{adj}(A)$ 的列 1 的数乘.

下设 $\operatorname{adj}(A)\neq 0$. 则有不超过 n 的正整数 s, t, 使 $[\operatorname{adj}(A)]_{t,s}\neq 0$. 则 $(-1)^{s+t}\det(A(s|t))\neq 0$. 作 $n-1$ 级阵 $C=A(s|t)$. 则 $\det(C)\neq 0$.

从 $1,2,\cdots,n$ 去除 t 后, 还剩 $n-1$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-1$ 个数为 $i_1,\cdots,i_{n-1}$. 类似地, 从 $1,2,\cdots,n$ 去除 s 后, 还剩 $n-1$ 个数. 我们从小到大地叫这 $n-1$ 个数为 $\ell_1,\cdots,\ell_{n-1}$. 则 $[C]_{p,q}=[A]_{\ell_p,i_q}$. 再记 $i_n=t$, 且 $\ell_n=s$.

设 j 是不超过 n 的正整数. 作 $(n-1)\times 1$ 阵 y_j 如下:

$$[y_j]_{u,1}=[\operatorname{adj}(A)]_{i_u,j};$$

通俗地, 若 D_j 是 $\operatorname{adj}(A)$ 的列 j, 则 y_j 是去除 D_j 的行 t 后的那个 $(n-1)\times 1$ 阵.

则对 $p < n$,

$$\begin{aligned}
[Cy_j]_{p,1} &= \sum_{u=1}^{n-1} [C]_{p,u}[y_j]_{u,1} \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} [A]_{\ell_p,i_u}[\operatorname{adj}(A)]_{i_u,j} \\
&= \sum_{u=1}^{n} [A]_{\ell_p,i_u}[\operatorname{adj}(A)]_{i_u,j} - [A]_{\ell_p,i_n}[\operatorname{adj}(A)]_{i_n,j} \\
&= \sum_{u=1}^{n} [A]_{\ell_p,u}[\operatorname{adj}(A)]_{u,j} - [A]_{\ell_p,t}[\operatorname{adj}(A)]_{t,j} \\
&= [A \operatorname{adj}(A)]_{\ell_p,j} - [A]_{\ell_p,t}[\operatorname{adj}(A)]_{t,j} \\
&= [\det(A)\, I_n]_{\ell_p,j} - [A]_{\ell_p,t}[\operatorname{adj}(A)]_{t,j} \\
&= -[\operatorname{adj}(A)]_{t,j}[A]_{\ell_p,t}.
\end{aligned}$$

作 $(n-1) \times 1$ 阵 z 如下:

$$[z]_{u,1} = [A]_{\ell_u,t};$$

通俗地, 若 w 是 A 的列 t, 则 z 是去除 w 的行 s 后的那个 $(n-1) \times 1$ 阵.

由前面的计算, $Cy_j = -[\operatorname{adj}(A)]_{t,j}z$, 且 $Cy_s = -[\operatorname{adj}(A)]_{t,s}z$. 记

$$m_j = \frac{-[\operatorname{adj}(A)]_{t,j}}{-[\operatorname{adj}(A)]_{t,s}}.$$

则

$$\begin{aligned}
C(m_jy_s) = m_j(Cy_s) = m_j(-[\operatorname{adj}(A)]_{t,s}z) &= (m_j(-[\operatorname{adj}(A)]_{t,s}))z \\
&= -[\operatorname{adj}(A)]_{t,j}z \\
&= Cy_j.
\end{aligned}$$

因为 $\det(C) \neq 0$, 故 $m_jy_s = y_j$. 故 $m_j[\operatorname{adj}(A)]_{i_u,s} = [\operatorname{adj}(A)]_{i_u,j}$, 对 $u < n$. 则 $m_j[\operatorname{adj}(A)]_{i,s} = [\operatorname{adj}(A)]_{i,j}$, 对 $i \leqslant n$. 证毕.

C.25 古伴的性质 (3)

本节, 我们再认识古伴的二个性质.

定理 C.74 设 A 是 n 级阵 $(n \geqslant 2)$. 则 $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-2} A$.

证 设 $n = 2$. 不难算出, 2 级阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的古伴是 $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. 则 $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 的古伴是 $\begin{bmatrix} a & -(-b) \\ -(-c) & d \end{bmatrix}$, 即 A. 注意到, $(\det(A))^{2-2}A = 1A = A$.

下设 $n > 2$. 一方面,

$$\operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(\operatorname{adj}(A))\, I_n = (\det(A))^{n-1}\, I_n;$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(A)((\det(A))^{n-2} A) &= (\det(A))^{n-2}(\operatorname{adj}(A)A)\\ &= (\det(A))^{n-2}(\det(A)\, I_n)\\ &= (\det(A))^{n-1}\, I_n.\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \operatorname{adj}(A)((\det(A))^{n-2}A).$$

若 $\det(A) \neq 0$, 则 $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1} \neq 0$. 由消去律, 我们可在等式的二侧消去 $\operatorname{adj}(A)$, 即得结论.

若 $\det(A) = 0$, 由上节的结论, $\operatorname{adj}(A)$ 的每一个 $n-1$ 级子阵的行列式都是 0. 故 $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = 0 = 0A = (\det(A))^{n-2} A$. 证毕.

定理 C.75 设 A, B 是 n 级阵. 则

$$\operatorname{adj}(BA) = \operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(B).$$

证　注意到

$$\begin{aligned}(BA)\operatorname{adj}(BA) &= \det(BA)\, I\\ &= (\det(B)\det(A))\, I\\ &= (\det(A)\det(B))\, I\\ &= \det(A)(\det(B)\, I)\\ &= \det(A)(B\operatorname{adj}(B))\\ &= B(\det(A)\operatorname{adj}(B))\\ &= B(\det(A)(I\operatorname{adj}(B)))\\ &= B((\det(A)\, I)\operatorname{adj}(B))\\ &= B((A\operatorname{adj}(A))\ \operatorname{adj}(B))\\ &= B(A(\operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(B)))\\ &= (BA)(\operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(B)),\end{aligned}$$

若 $\det(BA) \neq 0$, 由消去律, 即得结论.

若 $\det(BA) = 0$, 我们这么作. 由阵的积的定义,

$$\begin{aligned}[\operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(B)]_{i,j} &= \sum_{u=1}^{n}[\operatorname{adj}(A)]_{i,u}[\operatorname{adj}(B)]_{u,j}\\ &= \sum_{u=1}^{n}(-1)^{u+i}\det(A(u|i))\,(-1)^{j+u}\det(B(j|u))\\ &= \sum_{u=1}^{n}(-1)^{u+i}(-1)^{j+u}\det(A(u|i))\det(B(j|u))\\ &= \sum_{u=1}^{n}(-1)^{j+i}\det(B(j|u))\det(A(u|i))\\ &= (-1)^{j+i}\sum_{u=1}^{n}\det(B(j|u))\det(A(u|i))\\ &= (-1)^{j+i}\det((BA)(j|i))\\ &= [\operatorname{adj}(BA)]_{i,j}.\end{aligned}$$

这里, 我们用了 Binet–Cauchy 公式的推广.　　证毕.

C.26 阵的积, 分块地写

我们知道, 若 B 是 $s\times m$ 阵, 且 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是 $m\times 1$ 阵, 则

$$B\,[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [Ba_1, Ba_2, \cdots, Ba_n].$$

形象地, 这是分块地写阵的积. 证明 $\det(BA) = \det(B)\det(A)$ (A, B 是同级的方阵) 时, 我们用了此事, 使推理更简单.

我要介绍另一种分块地写阵的积的方式.

定理 C.76 设 $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$ 是阵. 设 $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ 都有 r_1 行; 设 $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ 都有 r_2 行; 设 $A_{1,1}$, $A_{2,1}$ 都有 u_1 列; 设 $A_{1,2}$, $A_{2,2}$ 都有 u_2 列. 设 $B_{1,1}$, $B_{1,2}$ 都有 u_1 行; 设 $B_{2,1}$, $B_{2,2}$ 都有 u_2 行; 设 $B_{1,1}$, $B_{2,1}$ 都有 c_1 列; 设 $B_{1,2}$, $B_{2,2}$ 都有 c_2 列. 作 $(r_1+r_2)\times(u_1+u_2)$ 阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix};$$

具体地,

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} [A_{1,1}]_{i,j}, & i\leqslant r_1,\ j\leqslant u_1; \\ [A_{1,2}]_{i,j-u_1}, & i\leqslant r_1,\ j> u_1; \\ [A_{2,1}]_{i-r_1,j}, & i> r_1,\ j\leqslant u_1; \\ [A_{2,2}]_{i-r_1,j-u_1}, & i> r_1,\ j> u_1. \end{cases}$$

作 $(u_1+u_2)\times(c_1+c_2)$ 阵

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix};$$

具体地,

$$[B]_{i,j} = \begin{cases} [B_{1,1}]_{i,j}, & i\leqslant u_1,\ j\leqslant c_1; \\ [B_{1,2}]_{i,j-c_1}, & i\leqslant u_1,\ j> c_1; \\ [B_{2,1}]_{i-u_1,j}, & i> u_1,\ j\leqslant c_1; \\ [B_{2,2}]_{i-u_1,j-c_1}, & i> u_1,\ j> c_1. \end{cases}$$

因为 A 的列数等于 B 的行数, 故 AB 有意义.

记 $C_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j}$, $i, j = 1, 2$. 不难看出, $C_{i,j}$ 是 $r_i \times c_j$ 阵. 作 $(r_1+r_2)\times(c_1+c_2)$ 阵

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix};$$

具体地,

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} [C_{1,1}]_{i,j}, & i \leqslant r_1,\ j \leqslant c_1; \\ [C_{1,2}]_{i,j-c_1}, & i \leqslant r_1,\ j > c_1; \\ [C_{2,1}]_{i-r_1,j}, & i > r_1,\ j \leqslant c_1; \\ [C_{2,2}]_{i-r_1,j-c_1}, & i > r_1,\ j > c_1. \end{cases}$$

则 $AB = C$.

形象地,

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{bmatrix}.$$

于是, 形式地, 分块地写阵的积与直接用定义写阵的积没有区别.

证　注意到

$$\begin{aligned} [AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B]_{k,j}. \end{aligned}$$

若 $j \leqslant c_1$, 则

$$\begin{aligned} [AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B_{1,1}]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B_{2,1}]_{k-u_1,j}. \end{aligned}$$

当 $i \leqslant r_1$ 时,

$$\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B_{1,1}]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B_{2,1}]_{k-u_1,j} \\
&= \sum_{k=1}^{u_1} [A_{1,1}]_{i,k}[B_{1,1}]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A_{1,2}]_{i,k-u_1}[B_{2,1}]_{k-u_1,j} \\
&= [A_{1,1}B_{1,1}]_{i,j} + [A_{1,2}B_{2,1}]_{i,j} \\
&= [A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}]_{i,j} \\
&= [C_{1,1}]_{i,j} \\
&= [C]_{i,j}.
\end{aligned}$$

当 $i > r_1$ 时,

$$\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B_{1,1}]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B_{2,1}]_{k-u_1,j} \\
&= \sum_{k=1}^{u_1} [A_{2,1}]_{i-r_1,k}[B_{1,1}]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A_{2,2}]_{i-r_1,k-u_1}[B_{2,1}]_{k-u_1,j} \\
&= [A_{2,1}B_{1,1}]_{i-r_1,j} + [A_{2,2}B_{2,1}]_{i-r_1,j} \\
&= [A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1}]_{i-r_1,j} \\
&= [C_{2,1}]_{i-r_1,j} \\
&= [C]_{i,j}.
\end{aligned}$$

若 $j > c_1$, 则

$$\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B_{1,2}]_{k,j-c_1} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B_{2,2}]_{k-u_1,j-c_1}.
\end{aligned}$$

当 $i \leqslant r_1$ 时,

$$\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B_{1,2}]_{k,j-c_1} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B_{2,2}]_{k-u_1,j-c_1} \\
&= \sum_{k=1}^{u_1} [A_{1,1}]_{i,k}[B_{1,2}]_{k,j-c_1} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A_{1,2}]_{i,k-u_1}[B_{2,2}]_{k-u_1,j-c_1} \\
&= [A_{1,1}B_{1,2}]_{i,j-c_1} + [A_{1,2}B_{2,2}]_{i,j-c_1} \\
&= [A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2}]_{i,j-c_1} \\
&= [C_{1,2}]_{i,j-c_1} \\
&= [C]_{i,j}.
\end{aligned}$$

当 $i > r_1$ 时,

$$\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{u_1} [A]_{i,k}[B_{1,2}]_{k,j-c_1} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A]_{i,k}[B_{2,2}]_{k-u_1,j-c_1} \\
&= \sum_{k=1}^{u_1} [A_{2,1}]_{i-r_1,k}[B_{1,2}]_{k,j-c_1} + \sum_{k=u_1+1}^{u_1+u_2} [A_{2,2}]_{i-r_1,k-u_1}[B_{2,2}]_{k-u_1,j-c_1} \\
&= [A_{2,1}B_{1,2}]_{i-r_1,j-c_1} + [A_{2,2}B_{2,2}]_{i-r_1,j-c_1} \\
&= [A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2}]_{i-r_1,j-c_1} \\
&= [C_{2,2}]_{i-r_1,j-c_1} \\
&= [C]_{i,j}.
\end{aligned}$$

证毕.

C.27　转置的性质

本节, 我们讨论转置的一些性质.

设 A 是一个 $m\times n$ 阵. 则 A 的转置 A^{T} 是一个 $n\times m$ 阵, 且对 $i\leqslant n$ 与 $j\leqslant m$, 有 $[A^{\mathrm{T}}]_{i,j}=[A]_{j,i}$.

我们已知, 若 A 是一个 $m\times n$ 阵, 则 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$. 我们还知道, 若 A 是一个 n 级阵, 则 $\det(A)=\det(A^{\mathrm{T}})$.

转置当然还有一些性质; 我只是还没提到它们.

定理 C.77　设 A, B 是 $m\times n$ 阵. 设 C 是 $n\times s$ 阵. 设 k 是数. 则:

(1) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(2) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$;

(3) $(AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证　您验证, 等式 (1) 与 (2) 的二侧的阵的尺寸是一样的; 我验证, 等式 (3) 的二侧的阵的尺寸是一样的.

(1) 对 $i\leqslant n$ 与 $j\leqslant m$,

$$\begin{aligned}[(A+B)^{\mathrm{T}}]_{i,j}&=[A+B]_{j,i}\\&=[A]_{j,i}+[B]_{j,i}\\&=[A^{\mathrm{T}}]_{i,j}+[B^{\mathrm{T}}]_{i,j}\\&=[A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}]_{i,j}.\end{aligned}$$

(2) 对 $i\leqslant n$ 与 $j\leqslant m$,

$$\begin{aligned}[(kA)^{\mathrm{T}}]_{i,j}&=[kA]_{j,i}\\&=k[A]_{j,i}\\&=k[A^{\mathrm{T}}]_{i,j}\\&=[kA^{\mathrm{T}}]_{i,j}.\end{aligned}$$

(3) A 是 $m\times n$ 的, C 是 $n\times s$ 的, 故 AC 是 $m\times s$ 的, 故 $(AC)^{\mathrm{T}}$ 是 $s\times m$ 的. 另一方面, C^{T} 是 $s\times n$ 的, A^{T} 是 $n\times m$ 的, 故 $C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 是 $s\times m$ 的. 对 $i\leqslant s$ 与

$j \leqslant m$,

$$\begin{aligned}[(AC)^{\mathrm{T}}]_{i,j} &= [AC]_{j,i} \\ &= \sum_{p=1}^{n} [A]_{j,p}[C]_{p,i} \\ &= \sum_{p=1}^{n} [A^{\mathrm{T}}]_{p,j}[C^{\mathrm{T}}]_{i,p} \\ &= \sum_{p=1}^{n} [C^{\mathrm{T}}]_{i,p}[A^{\mathrm{T}}]_{p,j} \\ &= [C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}]_{i,j}.\end{aligned}$$

证毕.

为方便, 我记下一个简单的推广. 设 A, B, C 分别是 $m \times s$, $s \times t$, $t \times n$ 阵. 则

$$\begin{aligned}(ABC)^{\mathrm{T}} &= ((AB)C)^{\mathrm{T}} \\ &= C^{\mathrm{T}}(AB)^{\mathrm{T}} \\ &= C^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}) \\ &= C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

一般地, 我们有

定理 C.78　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别是 $m_0 \times m_1, m_1 \times m_2, \cdots, m_{n-1} \times m_n$ 阵 (也就是说, A_k 的列数等于 A_{k+1} 的行数, $k = 1, 2, \cdots, n-1$). 则

$$(A_1A_2 \cdots A_n)^{\mathrm{T}} = A_n^{\mathrm{T}} \cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}.$$

证　请允许我留此事为您的习题. 您用数学归纳法即可.　证毕.

C.28　辛阵

设 $2m$ 是一个不低于 2 的偶数. 作 $2m$ 级阵

$$K_m = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix},$$

其中 0 是 m 级零阵; 具体地,

$$[K_m]_{i,j} = \begin{cases} [0]_{i,j}, & i \leqslant m,\ j \leqslant m; \\ [I_m]_{i,j-m}, & i \leqslant m,\ j > m; \\ [-I_m]_{i-m,j}, & i > m,\ j \leqslant m; \\ [0]_{i-m,j-m}, & i > m,\ j > m. \end{cases}$$

更具体地,

$$[K_m]_{i,j} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant i = j - m \leqslant m; \\ -1, & 1 \leqslant i - m = j \leqslant m; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

不难算出, $K_m^{\mathrm{T}} = -K_m$, 且 $K_m K_m = -I_{2m}$.

按列 1 展开 $\det(K_m)$, 有

$$\det(K_m) = (-1)^{m+1}(-1)\det(K_m(m+1|1)) = (-1)^m \det \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

再按行 1 展开 $\det(K_m(m+1|1))$, 有

$$\begin{aligned} \det(K_m(m+1|1)) &= (-1)^{1+m-1}\, 1 \det(K_m(m+1,1|1,m+1)) \\ &= (-1)^m \det(K_{m-1}). \end{aligned}$$

则 $\det(K_m) = \det(K_{m-1})$, 当 $m > 1$. 不难算出 $\det(K_1) = 1$. 则 $\det(K_m) = 1$, 对 $m \geqslant 1$.

现在, 我们可定义辛阵 (simplektika matrico) 了.

定义 C.79　设 A 是一个 $2m$ 级阵. 若 $A^{\mathrm{T}} K_m A = K_m$, 则 A 是一个**辛阵**.

我们可写出辛阵的一些性质.

不难看出, $2m$ 级单位阵 I_{2m} 是一个辛阵. 由 K_m 的性质, 不难验证, K_m 也是一个辛阵.

设 A, B 是 $2m$ 级辛阵. 则

$$\begin{aligned}(AB)^{\mathrm{T}}K_m(AB) &= (B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(K_mA)B\\ &= B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}K_mA)B\\ &= B^{\mathrm{T}}K_mB\\ &= K_m.\end{aligned}$$

因为

$$\det(K_m) = \det(A^{\mathrm{T}}K_mA) = \det(A^{\mathrm{T}})\det(K_m)\det(A) = \det(K_m)(\det(A))^2,$$

且 $\det(K_m) = 1$, 故 $(\det(A))^2 = 1$.

若数 t 适合 $t^2 = 1$, 则

$$(tA)^{\mathrm{T}}K_m(tA) = (tA^{\mathrm{T}})K_m(tA) = t^2(A^{\mathrm{T}}K_mA) = 1K_m = K_m.$$

注意到 $\det(K_mA) = \det(K_m)\det(A) \neq 0$, 且

$$\begin{aligned}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}K_mA^{\mathrm{T}})(K_mA) &= (AK_mA^{\mathrm{T}})(K_mA)\\ &= (AK_m)(A^{\mathrm{T}}K_mA)\\ &= (AK_m)K_m\\ &= A(K_mK_m)\\ &= A(-I_{2m})\\ &= (-I_{2m})A\\ &= (K_mK_m)A\\ &= K_m(K_mA),\end{aligned}$$

故 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}K_mA^{\mathrm{T}} = K_m$.

最后, 注意到

$$\begin{aligned}
(\operatorname{adj}(A))^{\mathrm{T}} K_m \operatorname{adj}(A) &= (\operatorname{adj}(A))^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} K_m A) \operatorname{adj}(A) \\
&= ((\operatorname{adj}(A))^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}) K_m (A \operatorname{adj}(A)) \\
&= (A \operatorname{adj}(A))^{\mathrm{T}} K_m (A \operatorname{adj}(A)) \\
&= (\det(A) I_{2m})^{\mathrm{T}} K_m (\det(A) I_{2m}) \\
&= (\det(A) I_{2m}^{\mathrm{T}}) K_m (\det(A) I_{2m}) \\
&= (\det(A))^2 (I_{2m}^{\mathrm{T}} K_m I_{2m}) \\
&= K_m.
\end{aligned}$$

总结这些结果, 我们有

定理 C.80　(1) I_{2m} 与 K_m 是 $2m$ 级辛阵.

(2) $2m$ 级辛阵 A 的行列式的平方为 1.

(3) 设 A, B 是 $2m$ 级辛阵. 设数 t 适合 $t^2 = 1$. 则 AB, tA, A^{T}, $\operatorname{adj}(A)$ 也是辛阵.

本书是关于行列式的. 于是, 一个自然的问题是, 辛阵的行列式是多少. 我们知道, 辛阵的行列式的平方是 1, 故辛阵的行列式是 1 或 -1. 不过, 不平凡地, 辛阵的行列式**一定**是 1. 我们现有的知识无法解决此事. 我会在后面的几节, 介绍更多的知识, 以解决它.

虽然如此, 我们还是能解决 $2m = 2$ 的情形. 设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

是一个 2 级辛阵. 由 $A^{\mathrm{T}} K_1 A = K_1$, 知

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & ad - bc \\ -(ad - bc) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

故 $\det(A) = ad - bc = 1$.

C.29 反称阵

从本节开始, 我们讨论反称阵与其性质.

定义 C.81 设 A 是一个 n 级阵. 若 $[A]_{i,i}=0$, 且 $[A]_{i,j}+[A]_{j,i}=0$, 则 A 是一个**反称阵**.

例 C.82 不难看出, 1 级反称阵即为 $[0]$, 2 级反称阵形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix},$$

3 级反称阵形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},$$

4 级反称阵形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}.$$

例 C.83 不难验证, $2m$ 级阵 $K_m=\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}$ 是反称阵.

不难看出, $[A]_{i,j}+[A]_{j,i}=0$ 相当于 $A^{\mathrm{T}}=-A$: 注意到 $[A^{\mathrm{T}}]_{i,j}=[A]_{j,i}$ 与 $[-A]_{i,j}=-[A]_{i,j}$. 有时, 这更方便应用.

定理 C.84 设 A, B 是 n 级反称阵. 设 k 是数. 设 X 是 $n\times m$ 阵.

(1) n 级阵 0 是反称阵.

(2) $A+B$ 是反称阵.

(3) kA 是反称阵; 特别地, $(-1)A=-A=A^{\mathrm{T}}$ 也是反称阵.

(4) $X^{\mathrm{T}}AX$ 是反称阵.

证 (1) $0^{\mathrm{T}}=0=-0$, 且 $[0]_{i,i}=0$.

(2) 由转置的性质, $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=(-A)+(-B)=-(A+B)$. 再注意到

$$[A+B]_{i,i}=[A]_{i,i}+[B]_{i,i}=0+0=0.$$

(3) 由转置的性质, $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}=k(-A)=-(kA)$. 再注意到

$$[kA]_{i,i}=k[A]_{i,i}=k0=0.$$

(4) X 是 $n\times m$ 的, 则 AX 是 $n\times m$ 的; X^{T} 是 $m\times n$ 的, 则 $X^{\mathrm{T}}AX$ 是 $m\times m$ 的. 由转置的性质,

$$(X^{\mathrm{T}}AX)^{\mathrm{T}}=X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=X^{\mathrm{T}}(-A)X=-(X^{\mathrm{T}}AX).$$

由阵的积的定义,

$$\begin{aligned}
&[X^{\mathrm{T}}AX]_{i,i}\\
={}&[X^{\mathrm{T}}(AX)]_{i,i}\\
={}&\sum_{\ell=1}^{n}[X^{\mathrm{T}}]_{i,\ell}[AX]_{\ell,i}\\
={}&\sum_{\ell=1}^{n}[X]_{\ell,i}[AX]_{\ell,i}\\
={}&\sum_{\ell=1}^{n}[X]_{\ell,i}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{\ell,k}[X]_{k,i}\right)\\
={}&\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[X]_{\ell,i}[A]_{\ell,k}[X]_{k,i}\\
={}&\sum_{\ell,k=1}^{n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}[A]_{\ell,k}\\
={}&\sum_{1\leqslant\ell=k\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}[A]_{\ell,k}+\sum_{1\leqslant\ell<k\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}[A]_{\ell,k}\\
&+\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}[A]_{\ell,k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\leqslant \ell=k\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}\,0+\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}[A]_{\ell,k}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}[X]_{k,i}[X]_{\ell,i}[A]_{k,\ell}\\
&=0+\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}([A]_{\ell,k}+[A]_{k,\ell})\\
&=\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}[X]_{\ell,i}[X]_{k,i}\,0\\
&=0.
\end{aligned}
$$

于是, $X^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 m 级反称阵. 证毕.

C.30 奇数级反称阵的行列式为 0

我们讨论反称阵的行列式.

我们先计算小级反称阵的行列式.

例 C.85 设 A 是 1 级反称阵. 则 $A = [0]$. 故 $\det(A) = 0$.

例 C.86 设 A 是 2 级反称阵. 则 A 形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

则 $\det(A) = a^2$, 即 $\det(A) = [A]_{1,2}^2$.

例 C.87 设 A 是 3 级反称阵. 则 A 形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \det \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} - (-a) \det \begin{bmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} + (-b) \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ &= a(bc) + (-b)(ac) \\ &= 0. \end{aligned}$$

例 C.88 设 A 是 4 级反称阵. 则 A 形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$
\begin{aligned}
&\det(A)\\
=\ & 0\det\begin{bmatrix}0 & d & e\\ -d & 0 & f\\ -e & -f & 0\end{bmatrix}-(-a)\det\begin{bmatrix}a & b & c\\ -d & 0 & f\\ -e & -f & 0\end{bmatrix}\\
&+(-b)\det\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ -e & -f & 0\end{bmatrix}-(-c)\det\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ -d & 0 & f\end{bmatrix}\\
=\ & a(dfc-ebf+aff)-b(-ebe+afe+edc)+c(adf-dbe+ddc)\\
=\ & af(af-be+cd)-be(af-be+cd)+cd(af-be+cd)\\
=\ & (af-be+cd)^2,
\end{aligned}
$$

即

$$\det(A)=([A]_{1,2}[A]_{3,4}-[A]_{1,3}[A]_{2,4}+[A]_{1,4}[A]_{2,3})^2.$$

我们发现, 1 级反称阵与 3 级反称阵的行列式为 0. 一般地, 我们有

定理 C.89 设 A 是一个奇数级反称阵. 则 $\det(A)=0$.

我的论证会用如下几个事实.

(1) 设 A 是一个 n 级阵. 则

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[A]_{i,1}\det(A(i|1)).$$

这就是按列 1 展开行列式.

(2) 设 A 是一个 n 级阵. 则

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(A(1|j)).$$

这就是按行 1 展开行列式.

(3) 设 A 是一个 n 级阵 ($n \geqslant 3$). 同时用 (1) (2), 有

$$
\begin{aligned}
&\det(A)\\
&= [A]_{1,1}\det(A(1|1)) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\det(A(1|j))\\
&= [A]_{1,1}\det(A(1|1)) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1+1}[A]_{i,1}\det(A(1,i|j,1))\\
&= [A]_{1,1}\det(A(1|1)) + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}(-1)^{i-1+1}[A]_{i,1}\det(A(1,i|j,1))\\
&= [A]_{1,1}\det(A(1|1)) + \sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j-1}[A]_{i,1}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j)).
\end{aligned}
$$

特别地, 若 A 还是一个反称阵, 则

$$\det(A) = \sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j)).$$

(4) 设 A 是一个 n 级阵. 则 $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$. 这就是行列式与转置的关系.

(5) 设 A 是一个 n 级阵. 设 u 是一个数. 则 $\det(uA) = u^n\det(A)$. 特别地, $\det(-A) = (-1)^n\det(A)$.

(6) 设 A 是一个 n 级反称阵 ($n \geqslant 3$). 设 r 是不超过 n 的正整数. 设 s, t 是二个不超过 n 的正整数, 且 $s \neq r$, $t \neq r$. 则 $A(r,t|r,s) = -(A(r,s|r,t))^{\mathrm{T}}$. 并且, $A(r,s|r,s)$ 是一个 $n-2$ 级反称阵.

(7) 每一个适合条件 "i, j 都是不低于 p, 且不低于 q 的整数" 的有序对 (i,j) **恰**适合以下三个条件之一: (a) $p \leqslant i = j \leqslant q$; (b) $p \leqslant i < j \leqslant q$; (c) $p \leqslant j < i \leqslant q$.

(8) 任取一个正奇数 n, 一定存在一个正整数 k 使 $n = 2k-1$.

介绍完这几件事后, 我总算可以证明定理了.

证 记命题 $P(k)$ 为

每一个 $2k-1$ 级反称阵的行列式都是 0.

我们用数学归纳法证明, 对任何正整数 k, $P(k)$ 是正确的.

不难验证 $P(1)$ 是正确的.

现在, 我们假定 $P(k-1)$ 是正确的 ($k \geqslant 2$). 我们要证 $P(k)$ 也是正确的. 记 $n = 2k-1$. 设 A 是一个 n 级反称阵. 那么

$$\begin{aligned}
&\det(A)\\
=&\sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
=&\sum_{2\leqslant i=j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
&+\sum_{2\leqslant j<i\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
=&\sum_{2\leqslant i\leqslant n}(-1)^{i+i}[A]_{1,i}[A]_{1,i}\det(A(1,i|1,i))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{j+i}[A]_{1,j}[A]_{1,i}\det(A(1,j|1,i))\\
=&\sum_{2\leqslant i\leqslant n}[A]_{1,i}^2\det(A(1,i|1,i))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(-(A(1,i|1,j))^{\mathrm{T}})\\
=&\sum_{2\leqslant i\leqslant n}[A]_{1,i}^2\det(A(1,i|1,i))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}\det(A(1,i|1,j))\\
&+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}(-1)^{n-2}\det((A(1,i|1,j))^{\mathrm{T}})\\
=&\sum_{2\leqslant i\leqslant n}[A]_{1,i}^2\det(A(1,i|1,i))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j} \det(A(1,i|1,j)) \\
&+ \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j}(-1)^n \det(A(1,i|1,j)) \\
= &\quad \sum_{2\leqslant i\leqslant n} [A]_{1,i}^2 \det(A(1,i|1,i)) \\
&+ (1+(-1)^n) \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j}[A]_{1,i}[A]_{1,j} \det(A(1,i|1,j)).
\end{aligned}
$$

注意到 $A(1,i|1,i)$ 是 $n-2$ 级, 即 $2(k-1)-1$ 级反称阵; 由假定, 其行列式为 0. 再注意到 $n=2k-1$, 故 $1+(-1)^n=0$. 所以, $\det(A)=0$.

所以, $P(k)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

我们还不了解偶数级反称阵的行列式. 不过, 我们之后会了解它的.

C.31 阵的积与倍加

前面, 在研究行列式的性质时, 我们引入了一种叫 “倍加” 的行为:

定义 C.31 (倍加) 设 A 是一个 $m\times n$ 阵. 设 p, q 是二个不超过 n 的正整数, **且** $p\neq q$**.** 设 s 是一个数. 作 $m\times n$ 阵 B, 其中

$$[B]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & j\neq q;\\ [A]_{i,q}+s[A]_{i,p}, & j=q.\end{cases}$$

(通俗地, 我们加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得阵 B.) 我们说, 变 A 为 B 的行为是一次 (列的) **倍加**.

我们说, 有列的倍加, 也有行的倍加. 具体地, 加 A 的一行的倍于另一行, 且不改变其他的行, 是一次行的倍加.

回想起, 行列式有倍加不变性. 具体地, 若我们加方阵 A 的一列 (行) 的倍于另一列 (行), 且不改变其他的列 (行), 得方阵 B, 则 $\det(B)=\det(A)$.

本节, 我们讨论阵的积与倍加的关系.

设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 A 的列 1, 2, ⋯, n 分别是 a_1, a_2, ⋯, a_n. 则 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$. 再设 n 级单位阵 I_n 的列 1, 2, ⋯, n 分别是 e_1, e_2, ⋯, e_n. 则 $I_n=[e_1,e_2,\cdots,e_n]$. 由 $AI_n=A$, 知

$$[Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n]=A[e_1,e_2,\cdots,e_n]=[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

故 $Ae_j=a_j$, 对任何不超过 n 的正整数 j.

设 $p\neq q$. 我们加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 B. 设 B 的列 1, 2, ⋯, n 分别是 b_1, b_2, ⋯, b_n. 则 $B=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$. 则 $j\neq q$ 时, 有 $b_j=a_j$, 且 $b_q=a_q+sa_p$. 则 $j\neq q$ 时,

$$Be_j=b_j=a_j=Ae_j,$$

且

$$Be_q=b_q=a_q+sa_p=Ae_q+s(Ae_p)=A(e_q+se_p).$$

作 n 级阵 $E(n;p,q;s)=[f_1,f_2,\cdots,f_n]$, 其中

$$f_j=\begin{cases} e_j, & j\neq q;\\ e_q+se_p, & j=q.\end{cases}$$

则 $Be_j=Af_j$, 对任何不超过 n 的正整数 j. 则

$$B=BI_n=[Be_1,Be_2,\cdots,Be_n]=[Af_1,Af_2,\cdots,Af_n]=AE(n;p,q;s).$$

不难写出

$$[E(n;p,q;s)]_{i,j}=\begin{cases} s, & i=p, \text{且 } j=q;\\ [I_n], & \text{其他}.\end{cases}$$

于是, 我们有

定理 C.90 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 p,q 是不超过 n 的正整数, 且 $p\neq q$. 设 s 是数. 作 n 级阵 $E(n;p,q;s)$ 如下:

$$[E(n;p,q;s)]_{i,j}=\begin{cases} s, & i=p, \text{且 } j=q;\\ [I_n], & \text{其他}.\end{cases}$$

(通俗地, 加 I_n 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 $E(n;p,q;s)$.) 那么, 加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 $m\times n$ 阵 $AE(n;p,q;s)$.

证 前面的说明就是一个证明. 当然, 不考虑前面的说明, 我们也可直接用阵的积的定义验证它. 毕竟, 我们的目标是

$$[AE(n;p,q;s)]_{i,j}=\begin{cases} [A]_{i,j}, & j\neq q;\\ [A]_{i,q}+s[A]_{i,p}, & j=q.\end{cases}$$

证毕.

列的倍加可用阵的积实现. 行的倍加当然也可用阵的积实现. 具体地,

定理 C.91 设 A 是 $m\times n$ 阵. 设 p,q 是不超过 m 的正整数, 且 $p\neq q$. 设 s 是数. 作 m 级阵 $E(m;q,p;s)$ 如下:

$$[E(m;q,p;s)]_{i,j}=\begin{cases} s, & i=q, \text{且 } j=p;\\ [I_m], & \text{其他}.\end{cases}$$

(通俗地, 加 I_m 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 m 级阵 $E(m;q,p;s)$.) 那么, 加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 $m\times n$ 阵 $E(m;q,p;s)A$.

证 请允许我留此事为您的习题. 当然, 我想给您一个提示: 证明此事的要点是验证

$$[E(m;q,p;s)A]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\neq q;\\ [A]_{q,j}+s[A]_{p,j}, & i=q.\end{cases}$$

证毕.

我再说几件事. 设 p,q 是不超过 n 的正整数, 且 $p\neq q$.

不难看出, $E(n;p,q;s)$ 的行列式为 1: 毕竟, 这是对单位阵作一次倍加后得到的方阵, 且单位阵的行列式为 1.

不难验证, $E(n;p,q;s)$ 的转置是 $E(n;q,p;s)$; 对比这二个阵的元即可.

最后, 我说, 用阵的积表示倍加是好的. 我们知道, 阵的积适合一些运算律; 于是, 我们或可用阵的运算律发现倍加的某些规律. 反过来, 我们也或可用倍加发现阵的一些性质.

C.32　反称阵与倍加

本节, 我们用倍加研究反称阵.

先看一个简单的结果.

定理 C.92　设 A 是 n 级反称阵. 设 p, q 是不超过 n 的正整数, 且 $p \neq q$. 设 s 是数.

(1) 加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 B. 加 B 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 C. 则 C 是反称阵. 通俗地, 对反称阵先作一次列的倍加, 再作一次对应的行的倍加, 则二次倍加后的阵仍是反称阵.

(2) 在 (1) 中, 先行后列不影响结果. 具体地, 设加 A 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 F. 加 F 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 G. 则 $G = C$.

证　(1) 我用二种方法证明此事.

法 1: 设加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 B. 则

$$[B]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j}, & j \neq q; \\ [A]_{i,q} + s[A]_{i,p}, & j = q. \end{cases}$$

设加 B 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 C. 则

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} [B]_{i,j}, & i \neq q; \\ [B]_{q,j} + s[B]_{p,j}, & i = q. \end{cases}$$

当 $i = q$, 且 $j \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{q,j} + s[B]_{p,j} = [A]_{q,j} + s[A]_{p,j};$$

当 $j = q$, 且 $i \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{i,q} = [A]_{i,q} + s[A]_{i,p};$$

当 $i = q = j$ 时,

$$\begin{aligned}[C]_{i,j} &= [B]_{q,q} + s[B]_{p,q}\\ &= ([A]_{q,q} + s[A]_{q,p}) + s([A]_{p,q} + s[A]_{p,p})\\ &= [A]_{q,q} + s([A]_{q,p} + s[A]_{p,q}) + s^2[A]_{p,p}\\ &= 0 + s0 + s^2 0\\ &= 0\\ &= [A]_{i,j};\end{aligned}$$

当 $i \neq q$, 且 $j \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{i,j} = [A]_{i,j}.$$

由此, 不难验证, C 是一个反称阵.

法 2: 设 u, v 是不超过 n 的正整数, 且 $u \neq v$. 作 n 级阵 $E(n; u, v; s)$ 如下:

$$[E(n; u, v; s)]_{i,j} = \begin{cases} s, & i = u, \text{且 } j = v;\\ [I_n], & \text{其他}.\end{cases}$$

于是, 加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 $B = AE(n; p, q; s)$. 进一步地, 加 B 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 $C = E(n; q, p; s)B$. 则

$$C = E(n; q, p; s)(AE(n; p, q; s)) = (E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} AE(n; p, q; s).$$

故 C 是一个反称阵.

注意到, 法 2 利用了已有的阵的运算律: 法 1 是较直接的; 法 2 是较聪明的.

(2) 不难写出,

$$F = E(n; q, p; s)A = (E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} A,$$

且

$$G = FE(n; p, q; s) = ((E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} A)E(n; p, q; s).$$

因为结合律, 我们有

$$G = (E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}}(AE(n; p, q; s)) = C.$$

证毕.

利用此事, 我们可证明如下重要的定理.

定理 C.93 设 A 是 n 级反称阵. 利用若干次列的倍加, 与对应的行的倍加, 我们可变 A 为形如

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_m & 0 \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

(若 n 是偶数), 或

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

(若 n 是奇数) 的反称阵.

我们约定, 作倍加时, 我们先列后行, 交替地作. 具体地, 我们先作一次列的倍加 (比如, 加列 p 的 s 倍于列 q, 其中 $p \neq q$), 然后立即作一次对应的行的倍加 (加行 p 的 s 倍于行 q). 然后再作一次列的, 且再作一次对应的行的 (若还有) $\cdots\cdots$.

当然, 若 $n = 2$, 则 A 已形如

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

(取式 (C.8) 的 m 为 1); 若 $n = 1$, 则 A 已形如 $[0]$ (取式 (C.9) 的 k 为 0).

证 作命题 $P(n)$: 对任何 n 级反称阵 A, 存在若干次列的倍加, 与对应的行的倍加, 变 A 为一个形如式 (C.8) (若 n 是偶数) 或式 (C.9) (若 n 是奇数) 的反称阵. 再作命题 $Q(n)$: $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. 我们用数学归纳法证明: 对任何高于 1 的整数 n, $Q(n)$ 是对的.

$Q(2)$ 是对的, 因为 $P(1)$ 与 $P(2)$ 是对的; 注意到, 我们可加一列 (行) 的 0 倍于另一列 (行), 从而 "什么也不变".

我们设 $Q(n-1)$ 是对的 ($n \geqslant 3$). 则 $P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $Q(n)$ 是对的, 即 $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. $P(n-1)$ 当然是对的, 由假定. 所以, 我们由假定 "$P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的" 证 $P(n)$ 是对的, 即得 $Q(n)$ 是对的.

任取一个 n 级反称阵 A. 我们先说明: 存在若干次列的倍加, 与对应的行的倍加, 变 A 为一个反称阵 C, 其中 $[C]_{1,j} = [C]_{2,j} = 0$, $[C]_{j,1} = [C]_{j,2} = 0$, 对任何高于 2, 且不超过 n 的正整数 j.

若对任何高于 2, 且不超过 n 的正整数 j, 已有 $[A]_{1,j} = [A]_{2,j} = 0$, $[A]_{j,1} = [A]_{j,2} = 0$, 我们 "什么也不变", 取 $C = A$ 即可.

若 $[A]_{1,2} \neq 0$, 则 $[A]_{2,1}$ 当然也不是零. 我们加 A 的列 2 的 $-[A]_{1,3}/[A]_{1,2}$ 倍于列 3, 且加行 2 的 $-[A]_{3,1}/[A]_{2,1} = -[A]_{1,3}/[A]_{1,2}$ 倍于行 3, 得阵 F_3. 则 F_3 是一个反称阵, $[F_3]_{1,3} = 0$, $[F_3]_{3,1} = 0$, 且 $[F_3]_{1,j} = [A]_{1,j}$, $[F_3]_{j,1} = [A]_{j,1}$ ($j \neq 3$). 接着, 我们加 F_3 的列 2 的 $-[F_3]_{1,4}/[F_3]_{1,2}$ 倍于列 4, 且加行 2 的 $-[F_3]_{4,1}/[F_3]_{2,1} = -[F_3]_{1,4}/[F_3]_{1,2}$ 倍于行 4, 得阵 F_4. 则 F_4 是一个反称阵, $[F_4]_{1,3} = [F_4]_{1,4} = 0$, $[F_4]_{3,1} = [F_4]_{4,1} = 0$, 且 $[F_4]_{1,j} = [F_3]_{1,j}$, $[F_4]_{j,1} = [F_3]_{j,1}$ ($j \neq 4$). …… 接着, 我们加 F_{n-1} 的列 2 的 $-[F_{n-1}]_{1,n}/[F_{n-1}]_{1,2}$ 倍于列 n, 且加行 2 的 $-[F_{n-1}]_{n,1}/[F_{n-1}]_{2,1} = -[F_{n-1}]_{1,n}/[F_{n-1}]_{1,2}$ 倍于行 n, 得阵 F_n. 则 F_n 是一个反称阵, $[F_n]_{1,j} = 0$, $[F_n]_{j,1} = 0$ ($j = 3, 4, \cdots$), 且 $[F_n]_{1,2} = -[F_n]_{2,1} = [A]_{1,2} \neq 0$. 然后, 我们加 F_n 的列 1 的 $-[F_n]_{2,3}/[F_n]_{2,1}$ 倍于列 3, 且加行 1 的 $-[F_n]_{3,2}/[F_n]_{1,2} = -[F_n]_{2,3}/[F_n]_{2,1}$ 倍于行 3, 得阵 G_3. 则 G_3 是一个反称阵, $[G_3]_{2,3} = 0$, $[G_3]_{3,2} = 0$, 且 $[G_3]_{2,j} = [F_n]_{2,j}$, $[G_3]_{j,2} = [F_n]_{j,2}$ ($j \neq 3$). 接着, 我们加 G_3 的列 1 的 $-[G_3]_{2,4}/[G_3]_{2,1}$ 倍于列 4, 且加行 1 的 $-[G_3]_{4,2}/[G_3]_{1,2} = -[G_3]_{2,4}/[G_3]_{2,1}$ 倍于行 4, 得阵 G_4. 则 G_4 是一个反称阵, $[G_4]_{2,3} = [G_4]_{2,4} = 0$, $[G_4]_{3,2} = [G_4]_{4,2} = 0$, 且 $[G_4]_{2,j} = [F_n]_{2,j}$, $[G_4]_{j,2} = [F_n]_{j,2}$ ($j \neq 4$). …… 最后, 我们加 G_{n-1} 的列 1 的 $-[G_{n-1}]_{2,n}/[G_{n-1}]_{2,1}$ 倍于

列 n, 且加行 1 的 $-[G_{n-1}]_{n,2}/[G_{n-1}]_{1,2} = -[G_{n-1}]_{2,n}/[G_{n-1}]_{2,1}$ 倍于行 n, 得阵 G_n. 则 G_n 是一个反称阵, $[G_n]_{1,j} = 0$, $[G_n]_{j,1} = 0$, $[G_n]_{2,j} = 0$, $[G_n]_{j,2} = 0$, $(j = 3, 4, \cdots)$. 取 C 为 G_n 即可.

若 $[A]_{1,2} = -[A]_{2,1} = 0$, 但有某个 $[A]_{\ell,j} \neq 0$ ($\ell = 1$ 或 2, 且 $j > 2$), 我们可加 A 的列 j 于列 $3-\ell$, 且加行 j 于行 $3-\ell$ (注意到, 当 $\ell = 1$ 或 2 时, $3-\ell = 2$ 或 1, 分别地), 得阵 D. 则 $[D]_{\ell,3-\ell} \neq 0$, 这就转化问题为前面讨论过的情形.

综上, 作若干次列的倍加, 与对应的行的倍加, 我们可变 A 为一个反称阵 C, 其中 $[C]_{1,j} = [C]_{2,j} = 0$, $[C]_{j,1} = [C]_{j,2} = 0$, 对任何高于 2, 且不超过 n 的正整数 j.

考虑 C 的右下角的 $n-2$ 级子阵 $C(1,2|1,2)$. 不难看出, 它是一个 $n-2$ 级反称阵. 由假定, 作若干次列的倍加, 与对应的行的倍加, 我们可变 $C(1,2|1,2)$ 为一个反称阵 H, 其中 H 形如式 (C.8) (若 $n-2$ 是偶数) 或式 (C.9) (若 $n-2$ 是奇数).

注意到, 既然当 $2 < j$ 时, $[C]_{1,j} = [C]_{2,j} = 0$, $[C]_{j,1} = [C]_{j,2} = 0$, 那么, 无论如何对 C 的不是列 1 或列 2 的列作倍加, 也无论如何对 C 的不是行 1 或行 2 的行作倍加, 所得的阵的 $(1, j)$-元, $(2, j)$-元, $(j, 1)$-元, $(j, 2)$-元, 一定是零. 所以, 作若干次列的倍加, 与对应的行的倍加后, 我们可变 C 为一个 n 级反称阵 B, 使

$$[B]_{i,j} = \begin{cases} [H]_{i-2,j-2}, & i > 2, \text{且 } j > 2; \\ [A]_{1,2}, & i = 1, \text{且 } j = 2; \\ [A]_{2,1}, & i = 2, \text{且 } j = 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是, B 是形如式 (C.8) (若 n 是偶数) 或式 (C.9) (若 n 是奇数) 的反称阵.

所以, $P(n)$ 是正确的. 则 $Q(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

由倍加与阵的积的关系, 我们有:

定理 C.94 设 A 是 n 级反称阵. 则存在若干个形如 $E(n; p, q; s)$ (s 是一个数; p, q 是不超过 n 的正整数, $p \neq q$) 的阵 E_1, E_2, $\cdots$, E_w, 使 $V^{\mathrm{T}}AV$ 是

形如式 (C.8) (若 n 是偶数) 或式 (C.9) (若 n 是奇数) 的反称阵, 其中 $V = E_1E_2\cdots E_w$.

证 由上个定理, 存在若干个形如 $E(n; p, q; s)$ (s 是一个数; p, q 是不超过 n 的正整数, $p \neq q$) 的阵 $E_1, E_2, \cdots, E_w$, 使

$$E_w^{\mathrm{T}}(E_{w-1}^{\mathrm{T}}\cdots(E_2^{\mathrm{T}}(E_1^{\mathrm{T}}AE_1)E_2)\cdots E_{w-1})E_w$$

是形如式 (C.8) (若 n 是偶数) 或式 (C.9) (若 n 是奇数) 的反称阵. 由结合律, 上式相当于

$$(E_w^{\mathrm{T}}E_{w-1}^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}})A(E_1E_2\cdots E_{w-1}E_w).$$

记 $V = E_1E_2\cdots E_{w-1}E_w$. 由转置的性质, $V^{\mathrm{T}} = E_w^{\mathrm{T}}E_{w-1}^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}$. 故上式相当于 $V^{\mathrm{T}}AV$. 证毕.

我们计算如式 (C.8) 所示的反称阵的行列式. 记

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_m & 0 \end{bmatrix}.$$

按列 $2m$ 展开, 有

$$\begin{aligned} \det(B_m) &= (-1)^{2m-1+2m}[B_m]_{2m-1,2m}\det(B_m(2m-1|2m)) \\ &= -b_m \det\begin{bmatrix} B_{m-1} & 0 \\ 0 & -b_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

再按行 $2m-1$ 展开 $\det(B_m(2m-1|2m))$, 有

$$\begin{aligned} \det(B_m(2m-1|2m)) &= (-1)^{2m-1+2m-1}(-b_m)\det(B_{m-1}) \\ &= -b_m \det(B_{m-1}). \end{aligned}$$

则 $\det(\boldsymbol{B}_m) = \det(\boldsymbol{B}_{m-1})\, b_m^2$, 当 $m > 1$. 不难算出 $\det(\boldsymbol{B}_1) = b_1^2$. 则

$$\det(\boldsymbol{B}_m) = b_1^2 b_2^2 \cdots b_m^2 = (b_1 b_2 \cdots b_m)^2.$$

还有一件事值得一提. 注意到, 倍加不改变行列式. 由此, 我们立得, 奇数级反称阵的行列式为 0: 毕竟, 利用倍加, 我们可变一个奇数级反称阵为一个至少有一列的元全为零的阵.

C.33　Pfaffian

我们说, 行列式是方阵的一个重要的属性. 反称阵是方阵, 故行列式也是反称阵的一个重要的属性. 本节, 我们学习反称阵的另一个属性. 它也是重要的, 且与行列式有关.

定义 C.95 (pfaffian)　设 A 是 n 级**反称阵**. 定义 A 的 **pfaffian** 为

$$\operatorname{pf}(A) = \begin{cases} 0, & n = 1; \\ [A]_{1,2}, & n = 2; \\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n} (-1)^j [A]_{1,j} \operatorname{pf}(A(1, j|1, j)), & n \geqslant 3. \end{cases}$$

注意, 我们只对反称阵定义 pfaffian.

我们计算不高于 4 级的反称阵的 pfaffian.

例 C.96　设 A 是 1 级反称阵. 则 $\operatorname{pf}(A) = 0$.
回想起, $\det(A)$ 也是零.

例 C.97　设 A 是 2 级反称阵. 则 $\operatorname{pf}(A) = [A]_{1,2}$.
回想起, $\det(A) = [A]_{1,2}^2$; 于是, $\det(A) = (\operatorname{pf}(A))^2$.

例 C.98　设 A 是 3 级反称阵. 则

$$\begin{aligned} \operatorname{pf}(A) &= (-1)^2[A]_{1,2} \operatorname{pf}(A(1, 2|1, 2)) + (-1)^3[A]_{1,3} \operatorname{pf}(A(1, 3|1, 3)) \\ &= [A]_{1,2}0 - [A]_{1,3}0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

回想起, $\det(A)$ 也是零.

例 C.99　设 A 是 4 级反称阵. 则

$$\begin{aligned} \operatorname{pf}(A) = &\quad (-1)^2[A]_{1,2} \operatorname{pf}(A(1, 2|1, 2)) + (-1)^3[A]_{1,3} \operatorname{pf}(A(1, 3|1, 3)) \\ &+ (-1)^4[A]_{1,4} \operatorname{pf}(A(1, 4|1, 4)) \\ = &\ [A]_{1,2}[A]_{3,4} - [A]_{1,3}[A]_{2,4} + [A]_{1,4}[A]_{2,3}. \end{aligned}$$

回想起, $\det(A) = ([A]_{1,2}[A]_{3,4} - [A]_{1,3}[A]_{2,4} + [A]_{1,4}[A]_{2,3})^2$; 于是, $\det(A) = (\mathrm{pf}(A))^2$.

看来, 对不高于 4 级的反称阵 A, 我们有 $\det(A) = (\mathrm{pf}(A))^2$. 我们会说明, 这对任何级的反称阵 A 都是对的. 为此, 我们会证明 pfaffian 的一些性质, 再利用这些性质解决此事.

最后, 我们再看一些较特别的阵的 pfaffian 吧.

例 C.100 作 $2m$ 级反称阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_m & 0 \end{bmatrix}.$$

我们计算 $\mathrm{pf}(\boldsymbol{B})$. 由 pfaffian 的定义,

$$\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}) = (-1)^2[\boldsymbol{B}]_{1,2}\,\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}(1,2|1,2)) = b_1\,\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}(1,2|1,2))$$

(注意到, 对任何 $j > 2$, 有 $[\boldsymbol{B}]_{1,j} = 0$). 不难看出,

$$\boldsymbol{B}(1,2|1,2) = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ 0 & 0 & \cdots & -b_m & 0 \end{bmatrix}.$$

则, 类似地,

$$\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}(1,2|1,2)) = b_2\,\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}(1,2,3,4|1,2,3,4)).$$

故

$$\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}) = b_1 b_2\,\mathrm{pf}(\boldsymbol{B}(1,2,3,4|1,2,3,4)).$$

⋯⋯ 最后, 我们算出

$$\mathrm{pf}\,(B) = b_1 b_2 \cdots b_{m-1}\,\mathrm{pf}\,(B(1,2,\cdots,2m-2|1,2,\cdots,2m-2)) = b_1 b_2 \cdots b_{m-1} b_m.$$

回想起, $\det(B) = (b_1 b_2 \cdots b_m)^2$; 于是, $\det(B) = (\mathrm{pf}\,(B))^2$.

例 C.101 设 A 是 n 级反称阵. 设 D 是 t 级反称阵. 作 $n+t$ 级阵

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

不难验证, M 也是一个反称阵. 我们用数学归纳法证明, $\mathrm{pf}\,(M) = \mathrm{pf}\,(A)\,\mathrm{pf}\,(D)$.

作命题 $P(n)$: 对任何 n 级反称阵 A,

$$\mathrm{pf}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \mathrm{pf}\,(A)\,\mathrm{pf}\,(D).$$

再作命题 $Q(n)$: $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. 我们用数学归纳法证明: 对任何高于 1 的整数 n, $Q(n)$ 是对的.

首先, $P(1)$ 是对的, 因为 $n=1$ 时,

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

的行 1 的元全是 0, 故由 pfaffian 的定义, 此阵的 pfaffian 是 0.

然后, $P(2)$ 是对的. 记 $J = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, 其中 A 是 2 级反称阵. 由 pfaffian 的定义,

$$\mathrm{pf}\,(J) = (-1)^2 [J]_{1,2}\,\mathrm{pf}\,(J(1,2|1,2)) = [A]_{1,2}\,\mathrm{pf}\,(D) = \mathrm{pf}\,(A)\,\mathrm{pf}\,(D).$$

由此可见, $Q(2)$ 是对的.

我们设 $Q(n-1)$ 是对的 $(n \geqslant 3)$. 则 $P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $Q(n)$ 是对的, 即 $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. $P(n-1)$ 当然是对的, 由假定. 所以, 我们由假定 “$P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的” 证 $P(n)$ 是对的, 即得 $Q(n)$ 是对的.

任取一个 n 级反称阵 A. 记 $M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$. 则

$$\begin{aligned}
&\operatorname{pf}(M)\\
=&\sum_{2\leqslant j\leqslant n+t}(-1)^j[M]_{1,j}\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))\\
=&\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^j[M]_{1,j}\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))+\sum_{n+1\leqslant j\leqslant n+t}(-1)^j[M]_{1,j}\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))\\
=&\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))+\sum_{n+1\leqslant j\leqslant n+t}(-1)^j 0\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))\\
=&\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(M(1,j|1,j)).
\end{aligned}$$

注意到, $2\leqslant j\leqslant n$ 时,

$$M(1,j|1,j)=\begin{bmatrix} A(1,j|1,j) & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

由假定, $\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))=\operatorname{pf}(A(1,j|1,j))\operatorname{pf}(D)$. 从而

$$\begin{aligned}
\operatorname{pf}(M)&=\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(M(1,j|1,j))\\
&=\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(A(1,j|1,j))\operatorname{pf}(D)\\
&=\left(\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(A(1,j|1,j))\right)\operatorname{pf}(D)\\
&=\operatorname{pf}(A)\operatorname{pf}(D).
\end{aligned}$$

所以, $P(n)$ 是正确的. 则 $Q(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立.

回想起, 当 A 是 n 级阵, D 是 t 级阵, C 是 $n\times t$ 阵时,

$$\det\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}=\det(A)\det(D).$$

那么, 当 A, D 是反称阵, 且 $C=0$ 时, $\det(M)$ 当然也是 $\det(A)\det(D)$. 不过, 用现有的知识, 我们还不知道这个 M 的行列式与 pfaffian 的关系.

在看最后一个例前, 我们先计算一类阵的行列式. 设 A, D 分别是 n 即阵与 t 级阵. 设 C 是 $n\times t$ 阵. 作 $n+t$ 级阵

$$P=\begin{bmatrix} C & A\\ D & 0\end{bmatrix}.$$

我们计算 $\det(P)$. 为此, 我们可用反称性. 具体地, 我们交换 P 的列 $t+1$ 与列 t, 得阵 P_t. 则 $\det(P_t)=(-1)\det(P)$. 再交换 P_t 的列 t 与列 $t-1$, 得阵 P_{t-1}. 则 $\det(P_{t-1})=(-1)\det(P_t)=(-1)^2\det(P)$. ⋯ ⋯ 再交换 P_2 的列 2 与列 1, 得阵 P_1. 则 $\det(P_1)=(-1)\det(P_2)=(-1)^t\det(P)$. 注意到, 我们作了 t 次相邻的列的交换, 使 P 的列 $t+1$ 到列 1 的位置, 且其他的列的相对位置不变. 类似地, 我们再分别对 P_1 的列 $t+2$, ⋯, $t+n$ 也相邻地向左移 t 次, 即可使 P 的列 $t+1$, ⋯, $t+n$ 分别到列 1, ⋯, n 的位置, 变 P 为

$$M=\begin{bmatrix} A & C\\ 0 & D\end{bmatrix}.$$

我们一共作了 $t+(n-1)t=nt$ 次列的交换. 故

$$\det\begin{bmatrix} C & A\\ D & 0\end{bmatrix}=(-1)^{nt}\det\begin{bmatrix} A & C\\ 0 & D\end{bmatrix}=(-1)^{nt}\det(A)\det(D).$$

特别地, 若我们取 $D=-A^{\mathrm{T}}$, 且 $C=0$, 则

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} 0 & A\\ -A^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}&=(-1)^{n^2}\det(-A^{\mathrm{T}})\det(A)\\ &=(-1)^{n^2}(-1)^n\det(A^{\mathrm{T}})\det(A)\\ &=(-1)^{n(n+1)}(\det(A))^2\\ &=(\det(A))^2.\end{aligned}$$

(注意到, $n(n+1)$ 一定是一个偶数.)

例 C.102 设 A 是一个 m 级阵. 为方便, 我们记

$$S(A)=\begin{bmatrix} 0 & A\\ -A^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}.$$

不难看出, $S(A)$ 是一个 $2m$ 级反称阵. 我们用数学归纳法证明, $\mathrm{pf}(A) = (-1)^{m(m-1)/2}\det(A)$. 这也说明, pfaffian 跟行列式有一定的联系.

作命题 $P(m)$: 对任何 m 级阵 A, $\mathrm{pf}(A) = (-1)^{m(m-1)/2}\det(A)$. 我们用数学归纳法证明: 对任何正整数 m, $P(m)$ 是对的.

$P(1)$ 是对的. 设 $A = [a]$. 则 $S(A) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$. 由定义, $\det(A) = a$, 且 $\mathrm{pf}(S(A)) = a = (-1)^{1(1-1)/2}\det(A)$.

我们设 $P(m-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $P(m)$ 是对的.

任取 m 级阵 A. 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}(S(A)) &= \sum_{j=2}^{2m}(-1)^j[S(A)]_{1,j}\,\mathrm{pf}((S(A))(1,j|1,j)) \\
&= \sum_{2\leqslant j\leqslant m}(-1)^j[S(A)]_{1,j}\,\mathrm{pf}((S(A))(1,j|1,j)) \\
&\quad + \sum_{m+1\leqslant j\leqslant 2m}(-1)^j[S(A)]_{1,j}\,\mathrm{pf}((S(A))(1,j|1,j)) \\
&= \sum_{2\leqslant j\leqslant m}(-1)^j 0\,\mathrm{pf}((S(A))(1,j|1,j)) \\
&\quad + \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{m+k}[S(A)]_{1,m+k}\,\mathrm{pf}((S(A))(1,m+k|1,m+k)) \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{m+k}[A]_{1,k}\,\mathrm{pf}(S(A(1|k))) \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{m-1}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}\,\mathrm{pf}(S(A(1|k))) \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}(-1)^{m-1}\,\mathrm{pf}(S(A(1|k))).
\end{aligned}$$

注意到, $A(1|k)$ 是 $m-1$ 级阵. 由假定,

$$\mathrm{pf}(S(A(1|k))) = (-1)^{(m-1)(m-2)/2}\det(A(1|k)).$$

则

$$\mathrm{pf}(S(A)) = \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}(-1)^{m-1}\,\mathrm{pf}(S(A(1|k)))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}(-1)^{m-1}(-1)^{(m-1)(m-2)/2}\det(A(1|k))\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}(-1)^{m(m-1)/2}\det(A(1|k))\\
&= (-1)^{m(m-1)/2}\sum_{1\leqslant k\leqslant m}(-1)^{1+k}[A]_{1,k}\det(A(1|k))\\
&= (-1)^{m(m-1)/2}\det(A).
\end{aligned}
$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立.
最后, 不难看出, $\det(S(A)) = (\det(A))^2 = (\mathrm{pf}\,(S(A)))^2$.

我们作一个小结.

定理 C.103 (1) 设 A, D 是 n 级与 t 级反称阵. 则

$$\mathrm{pf}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \mathrm{pf}\,(A)\,\mathrm{pf}\,(D).$$

(2) 设 A 是 m 级阵. 则

$$\mathrm{pf}\begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{m(m-1)/2}\det(A).$$

特别地, 取 $A = I_m$, 即知 $K_m = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}$ 的 pfaffian 是 $(-1)^{m(m-1)/2}$.

(3)

$$\mathrm{pf}\begin{bmatrix}
0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_m & 0
\end{bmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_m.$$

C.34 Pfaffian 的性质

本节, 我们讨论 pfaffian 的一些性质.

回想起, 1 级反称阵与 3 级反称阵的 pfaffian 为 0. 一般地,

定理 C.104 奇数级反称阵的 pfaffian 为 0.

证 作命题 $P(k)$: 对任何 $2k-1$ 级反称阵 A, 必 $\mathrm{pf}\,(A)=0$. 我们用数学归纳法证明: 对任何正整数 k, $P(k)$ 是对的.

$P(1)$ 不证自明.

我们设 $P(k-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $P(k)$ 是对的.

任取 $2k-1$ 级反称阵 A. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{pf}\,(A) &= \sum_{j=2}^{2k-1}(-1)^j[A]_{1,j}\,\mathrm{pf}\,(A(1,j|1,j))\\ &= \sum_{j=2}^{2k-1}(-1)^j[A]_{1,j}\,0\\ &= 0.\end{aligned}$$

所以, $P(k)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

在讨论较复杂的性质前, 我们先看一个简单的.

定理 C.105 设 m 是整数. 设 A 是 $2m$ 级反称阵. 设 x 是数. 则 $\mathrm{pf}\,(xA)=x^m\,\mathrm{pf}\,(A)$. 特别地, $A^{\mathrm{T}}=(-1)A$ 的 pfaffian 是 $(-1)^m\,\mathrm{pf}\,(A)$.

证 作命题 $P(m)$: 对任何 $2m$ 级反称阵 A, 必 $\mathrm{pf}\,(xA)=x^m\,\mathrm{pf}\,(A)$. 我们用数学归纳法证明: 对任何正整数 m, $P(m)$ 是对的.

$P(1)$ 是对的:

$$\mathrm{pf}\begin{bmatrix}0 & xa\\ -xa & 0\end{bmatrix}=xa=x^1\,\mathrm{pf}\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}.$$

我们设 $P(m-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $P(m)$ 是对的.

任取 $2m$ 级反称阵 A. 则

$$\begin{aligned}
\operatorname{pf}(xA) &= \sum_{j=2}^{2m}(-1)^j[xA]_{1,j}\operatorname{pf}((xA)(1,j|1,j))\\
&= \sum_{j=2}^{2m}(-1)^j x\,[A]_{1,j}\operatorname{pf}(x\,A(1,j|1,j))\\
&= \sum_{j=2}^{2m}(-1)^j x\,[A]_{1,j}x^{m-1}\operatorname{pf}(A(1,j|1,j))\\
&= x\,x^{m-1}\sum_{j=2}^{2m}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(A(1,j|1,j))\\
&= x^m\operatorname{pf}(A).
\end{aligned}$$

所以, $P(m)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

定理 C.106 设 A, B, C 是三个 n 级反称阵. 设 q 是不超过 n 的正整数. 设 s, t 是数. 设 $[A]_{i,j}=[B]_{i,j}=[C]_{i,j}$, 对任何不等于 q, 且不超过 n 的正整数 i, j; 设 $[C]_{i,j}=s[A]_{i,j}+t[B]_{i,j}$, 若 $i=q$ 或 $j=q$. 则

$$\operatorname{pf}(C)=s\operatorname{pf}(A)+t\operatorname{pf}(B).$$

此性质或许跟行列式的多线性有些像, 但不完全一样.

证 作命题 $P(n)$:

对任何数 s, t, 对任何不超过 n 的正整数 q, 对任何适合如下条件的三个 n 级反称阵 A, B, C, 必有 $\operatorname{pf}(C)=s\operatorname{pf}(A)+t\operatorname{pf}(B)$:

(1) $[A]_{i,j}=[B]_{i,j}=[C]_{i,j}$, 对任何不等于 q, 且不超过 n 的正整数 i, j;

(2) $[C]_{i,j}=s[A]_{i,j}+t[B]_{i,j}$, 若 $i=q$ 或 $j=q$.

再作命题 $Q(n)$: $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. 我们用数学归纳法证明: 对任何高于 1 的整数 n, $Q(n)$ 是对的.

$P(1)$ 不证自明.

$P(2)$ 是简单的. 无论 $q=1$ 或 $q=2$, 我们都有 $[C]_{1,2}=s[A]_{1,2}+t[B]_{1,2}$. 则 $\operatorname{pf}(C)=s\operatorname{pf}(A)+t\operatorname{pf}(B)$.

综上, $Q(2)$ 是对的.

我们设 $Q(n-1)$ 是对的 $(n \geqslant 3)$. 则 $P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $Q(n)$ 是对的, 即 $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. $P(n-1)$ 当然是对的, 由假定. 所以, 我们由假定 "$P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的" 证 $P(n)$ 是对的, 即得 $Q(n)$ 是对的.

设 A, B, C 是三个 n 级反称阵. 设 q 是不超过 n 的正整数. 设 s, t 是数. 设 $[A]_{i,j} = [B]_{i,j} = [C]_{i,j}$, 对任何不等于 q, 且不超过 n 的正整数 i, j; 设 $[C]_{i,j} = s[A]_{i,j} + t[B]_{i,j}$, 若 $i = q$ 或 $j = q$.

若 $q = 1$, 则 $[C]_{1,j} = s[A]_{1,j} + t[B]_{1,j}$, 且 $C(1,j|1,j) = A(1,j|1,j) = B(1,j|1,j)$, 对 $j > 1$. 则

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{pf}(C)\\
&= \sum_{j=2}^{n} (-1)^j [C]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
&= \sum_{j=2}^{n} (-1)^j (s[A]_{1,j} + t[B]_{1,j}) \operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
&= s\sum_{j=2}^{n} (-1)^j [A]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,j|1,j)) + t\sum_{j=2}^{n} (-1)^j [B]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
&= s\sum_{j=2}^{n} (-1)^j [A]_{1,j} \operatorname{pf}(A(1,j|1,j)) + t\sum_{j=2}^{n} (-1)^j [B]_{1,j} \operatorname{pf}(B(1,j|1,j))\\
&= s\operatorname{pf}(A) + t\operatorname{pf}(B).
\end{aligned}
$$

设 $q \neq 1$. 那么, 当 $j \neq q$ 时, $[A]_{1,j} = [B]_{1,j} = [C]_{1,j}$, 且 $n-2$ 级反称阵 $A(1,j|1,j)$, $B(1,j|1,j)$, $C(1,j|1,j)$ 适合:

(1′) $[A(1,j|1,j)]_{u,v} = [B(1,j|1,j)]_{u,v} = [C(1,j|1,j)]_{u,v}$, 对任何不等于 $q' = q - \rho(q,1) - \rho(q,j) = q - 1 - \rho(q,j)$, 且不超过 $n-2$ 的正整数 u, v;

(2′) $[C(1,j|1,j)]_{u,v} = s[A(1,j|1,j)]_{u,v} + t[B(1,j|1,j)]_{u,v}$, 若 $u = q'$ 或 $v = q'$.

于是, 由假定, 当 $j \neq q$ 时,

$$\operatorname{pf}(C(1,j|1,j)) = s\operatorname{pf}(A(1,j|1,j)) + t\operatorname{pf}(B(1,j|1,j)).$$

另一方面, 当 $j = q$ 时, $[C]_{1,j} = s[A]_{1,j} + t[B]_{1,j}$, 且 $C(1,j|1,j) = A(1,j|1,j) = B(1,j|1,j)$.

综上, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{pf}(C)\\
&= \sum_{j=2}^{n} (-1)^j [C]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
&= (-1)^q [C]_{1,q} \operatorname{pf}(C(1,q|1,q)) + \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} (-1)^j [C]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
&= \quad (-1)^q (s[A]_{1,j} + t[B]_{1,j}) \operatorname{pf}(C(1,q|1,q))\\
&\quad + \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} (-1)^j [C]_{1,j} (s \operatorname{pf}(A(1,j|1,j)) + t \operatorname{pf}(B(1,j|1,j)))\\
&= \quad s(-1)^q [A]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,q|1,q)) + t(-1)^q [B]_{1,j} \operatorname{pf}(C(1,q|1,q))\\
&\quad + s \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} (-1)^j [C]_{1,j} \operatorname{pf}(A(1,j|1,j)) + t \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} (-1)^j [C]_{1,j} \operatorname{pf}(B(1,j|1,j))\\
&= \quad s(-1)^q [A]_{1,j} \operatorname{pf}(A(1,q|1,q)) + t(-1)^q [B]_{1,j} \operatorname{pf}(B(1,q|1,q))\\
&\quad + s \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} (-1)^j [A]_{1,j} \operatorname{pf}(A(1,j|1,j)) + t \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} (-1)^j [B]_{1,j} \operatorname{pf}(B(1,j|1,j))\\
&= s \sum_{j=2}^{n} (-1)^j [A]_{1,j} \operatorname{pf}(A(1,j|1,j)) + t \sum_{j=2}^{n} (-1)^j [B]_{1,j} \operatorname{pf}(B(1,j|1,j))\\
&= s \operatorname{pf}(A) + t \operatorname{pf}(B).
\end{aligned}
$$

所以, $P(n)$ 是正确的. 则 $Q(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

特别地, 若我们取 $A = B$, 且 $t = 0$, 我们有

定理 C.107 设 A, C 是二个 n 级反称阵. 设 q 是不超过 n 的正整数. 设 s 是数. 设 $[A]_{i,j} = [C]_{i,j}$, 对任何不等于 q, 且不超过 n 的正整数 i, j; 设 $[C]_{i,j} = s[A]_{i,j}$, 若 $i = q$ 或 $j = q$. 则 $\operatorname{pf}(C) = s \operatorname{pf}(A)$.

定理 C.108 设 A 是 n 级反称阵. 设 p, q 是不超过 n 的正整数, 且 $p \neq q$. 设交换 A 的列 p, q, 不改变其他的列, 得阵 B. 设交换 B 的行 p, q, 不改变其他的行, 得阵 C. 则 C 是反称阵, 且 $\operatorname{pf}(C) = -\operatorname{pf}(A)$.

证 我们先说明 C 是反称阵. 不难写出

$$[B]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,q}, & j = p; \\ [A]_{i,p}, & j = q; \\ [A]_{i,j}, & \text{其他}. \end{cases}$$

也不难写出

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} [B]_{q,j}, & i = p; \\ [B]_{p,j}, & i = q; \\ [B]_{i,j}, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $i \neq p, i \neq q, j \neq p, j \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{i,j} = [A]_{i,j};$$

当 $i = p, j \neq p, j \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{q,j} = [A]_{q,j};$$

当 $i = q, j \neq p, j \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{p,j} = [A]_{p,j};$$

当 $j = p, i \neq p, i \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{i,p} = [A]_{i,q};$$

当 $j = q, i \neq p, i \neq q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{i,q} = [A]_{i,p};$$

当 $i = p, j = p$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{q,p} = [A]_{q,q};$$

当 $i = p, j = q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{q,q} = [A]_{q,p};$$

当 $i = q, j = p$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{p,p} = [A]_{p,q};$$

当 $i = q, j = q$ 时,

$$[C]_{i,j} = [B]_{p,q} = [A]_{p,p}.$$

由此, 不难验证, C 是反称阵.

我们再说明 $\mathrm{pf}\,(C) = -\,\mathrm{pf}\,(A)$. 以下, 我们无妨设 $p < q$.

作命题 $P(n)$: 对任何 n 级反称阵 A, 对任何 $1 \leqslant p < q \leqslant n$, 记 B 是交换 A 的列 p, q, 且不改变其他的列得到的阵, 记 C 是交换 B 的行 p, q, 且不改变其他的行得到的阵, 则 $\mathrm{pf}\,(C) = -\,\mathrm{pf}\,(A)$.

再作命题 $Q(n)$: $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. 我们用数学归纳法证明: 对任何高于 1 的整数 n, $Q(n)$ 是对的.

$P(1)$ 不证自明. 既然没有二列或二行可交换, 我们认为, 它是平凡地对的.

$P(2)$ 是简单的. 既然 $n = 2$, 且 $1 \leqslant p < q \leqslant n$, 则 $p = 1, q = 2$. 不难写出, 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, 则交换列 1, 2 与行 1, 2 后, 我们有 $C = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$. 则

$$\mathrm{pf}\,(C) = -a = -\,\mathrm{pf}\,(A).$$

综上, $Q(2)$ 是对的.

我们设 $Q(n-1)$ 是对的 ($n \geqslant 3$). 则 $P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的. 我们要由此证明 $Q(n)$ 是对的, 即 $P(n-1)$ 与 $P(n)$ 是对的. $P(n-1)$ 当然是对的, 由假定. 所以, 我们由假定 “$P(n-2)$ 与 $P(n-1)$ 是对的” 证 $P(n)$ 是对的, 即得 $Q(n)$ 是对的.

设 A 是 n 级反称阵. 设 $1 \leqslant p < q \leqslant n$. 设交换 A 的列 p, q, 不改变其他的列, 得阵 B. 设交换 B 的行 p, q, 不改变其他的行, 得阵 C. 我们分类讨论.

(1) $p=1, q=2$. 当 $d_1>2, d_2>2$, 且 $d_2\neq d_1$ 时, $[A]_{2,d_2}$ 是 $A(1,d_1|1,d_1)$ 的 $(1, d_2-1-\rho(d_2,d_1))$ 元. 则

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{pf}(A)\\
=&\sum_{2\leqslant d_1\leqslant n}(-1)^{d_1}[A]_{1,d_1}\operatorname{pf}(A(1,d_1|1,d_1))\\
=&(-1)^2[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))+\sum_{3\leqslant d_1\leqslant n}(-1)^{d_1}[A]_{1,d_1}\operatorname{pf}(A(1,d_1|1,d_1))\\
=&\quad[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant d_1\leqslant n}(-1)^{d_1}[A]_{1,d_1}\sum_{\substack{3\leqslant d_2\leqslant n\\ d_2\neq d_1}}(-1)^{d_2-1-\rho(d_2,d_1)}\\
&\qquad\qquad\cdot[A]_{2,d_2}\operatorname{pf}(A(1,2,d_1,d_2|1,2,d_1,d_2))\\
=&\quad[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant d_1\leqslant n}\sum_{\substack{3\leqslant d_2\leqslant n\\ d_2\neq d_1}}(-1)^{d_1}[A]_{1,d_1}(-1)^{d_2-1-\rho(d_2,d_1)}\\
&\qquad\qquad\cdot[A]_{2,d_2}\operatorname{pf}(A(1,2,d_1,d_2|1,2,d_1,d_2))\\
=&\quad[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{\substack{3\leqslant d_1,d_2\leqslant n\\ d_2\neq d_1}}(-1)^{d_1+d_2-1-\rho(d_2,d_1)}[A]_{1,d_1}[A]_{2,d_2}\operatorname{pf}(A(1,2,d_1,d_2|1,2,d_1,d_2))\\
=&\quad[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant d_1<d_2\leqslant n}(-1)^{d_1+d_2-1-\rho(d_2,d_1)}[A]_{1,d_1}[A]_{2,d_2}\operatorname{pf}(A(1,2,d_1,d_2|1,2,d_1,d_2))\\
&+\sum_{3\leqslant d_2<d_1\leqslant n}(-1)^{d_1+d_2-1-\rho(d_2,d_1)}[A]_{1,d_1}[A]_{2,d_2}\operatorname{pf}(A(1,2,d_1,d_2|1,2,d_1,d_2))\\
=&\quad[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k-1-1}[A]_{1,j}[A]_{2,k}\operatorname{pf}(A(1,2,j,k|1,2,j,k))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{k+j-1}[A]_{1,k}[A]_{2,j}\operatorname{pf}(A(1,2,k,j|1,2,k,j))\\
=&\quad[A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}[A]_{1,j}[A]_{2,k}\,\mathrm{pf}\,(A(1,2,j,k|1,2,j,k))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}(-1)[A]_{1,k}[A]_{2,j}\,\mathrm{pf}\,(A(1,2,j,k|1,2,j,k))\\
=\ &[A]_{1,2}\,\mathrm{pf}\,(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}\left([A]_{1,j}[A]_{2,k}-[A]_{1,k}[A]_{2,j}\right)\mathrm{pf}\,(A(1,2,j,k|1,2,j,k))\\
=\ &[A]_{1,2}\,\mathrm{pf}\,(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}\det\begin{bmatrix}[A]_{1,j} & [A]_{1,k}\\ [A]_{2,j} & [A]_{2,k}\end{bmatrix}\mathrm{pf}\,(A(1,2,j,k|1,2,j,k)).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pf}\,(C)=\ &[C]_{1,2}\,\mathrm{pf}\,(C(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}\det\begin{bmatrix}[C]_{1,j} & [C]_{1,k}\\ [C]_{2,j} & [C]_{2,k}\end{bmatrix}\mathrm{pf}\,(C(1,2,j,k|1,2,j,k)).
\end{aligned}
$$

注意到, $[C]_{1,2}=-[A]_{1,2}$, 且 $A(1,2|1,2)=C(1,2|1,2)$; 再注意到, $3\leqslant j<k\leqslant n$ 时, $[C]_{1,j}=[A]_{2,j}$, $[C]_{1,k}=[A]_{2,k}$, $[C]_{2,j}=[A]_{1,j}$, $[C]_{2,k}=[A]_{1,k}$, 且 $A(1,2,j,k|1,2,j,k)=C(1,2,j,k|1,2,j,k)$. 故

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pf}\,(C)=\ &-[A]_{1,2}\,\mathrm{pf}\,(A(1,2|1,2))\\
&+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}\det\begin{bmatrix}[A]_{2,j} & [A]_{2,k}\\ [A]_{1,j} & [A]_{1,k}\end{bmatrix}\mathrm{pf}\,(A(1,2,j,k|1,2,j,k)).
\end{aligned}
$$

由此可见, $\mathrm{pf}\,(C)=-\,\mathrm{pf}\,(A)$.

(2) $2\leqslant p=q-1\leqslant n-1$. 则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{pf}\,(A)\\
=\ &\sum_{2\leqslant j\leqslant n}(-1)^{j}[A]_{1,j}\,\mathrm{pf}\,(A(1,j|1,j))\\
=\ &(-1)^{p}[A]_{1,p}\,\mathrm{pf}\,(A(1,p|1,p))+(-1)^{p+1}[A]_{1,p+1}\,\mathrm{pf}\,(A(1,p+1|1,p+1))\\
&+\sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq p,p+1}}(-1)^{j}[A]_{1,j}\,\mathrm{pf}\,(A(1,j|1,j)).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$\begin{aligned}&\mathrm{pf}\,(C)\\=\;&(-1)^p[C]_{1,p}\,\mathrm{pf}\,(C(1,p|1,p))+(-1)^{p+1}[C]_{1,p+1}\,\mathrm{pf}\,(C(1,p+1|1,p+1))\\&+\sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq p,p+1}}(-1)^j[C]_{1,j}\,\mathrm{pf}\,(C(1,j|1,j)).\end{aligned}$$

注意到, $[C]_{1,p}=[A]_{1,p+1}$, $[C]_{1,p+1}=[A]_{1,p}$, 且

$$C(1,p|1,p)=A(1,p+1|1,p+1),$$
$$C(1,p+1|1,p+1)=A(1,p|1,p);$$

再注意到, $j>2$, 且 $j\neq p$, $j\neq p+1$ 时, $[C]_{1,j}=[A]_{1,j}$, 且 $C(1,j|1,j)$ 可被认为是交换 $A(1,j|1,j)$ 的列 p', $p'+1$ 与行 p', $p'+1$ 得到的反称阵 (其中 $p'=p-\rho(p,1)-\rho(p,j)=p-1-\rho(p,j)$). 由假定, $\mathrm{pf}\,(C(1,j|1,j))=(-1)\,\mathrm{pf}\,(A(1,j|1,j))$. 故

$$\begin{aligned}&\mathrm{pf}\,(C)\\=\;&(-1)^p[A]_{1,p+1}\,\mathrm{pf}\,(A(1,p+1|1,p+1))+(-1)^{p+1}[A]_{1,p}\,\mathrm{pf}\,(A(1,p|1,p))\\&+\sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq p,p+1}}(-1)^j[A]_{1,j}(-1)\,\mathrm{pf}\,(A(1,j|1,j)).\end{aligned}$$

由此可见, $\mathrm{pf}\,(C)=-\,\mathrm{pf}\,(A)$.

(3) 其他的情形. 不难看出, 我们已证, 若列 p, q (行 p, q) 是相邻的 (即 $p=q-1$; 注意, 我们已约定 $p<q$), 则 $\mathrm{pf}\,(C)=-\,\mathrm{pf}\,(A)$. 那么, 其他的情形自然是当列 p, q (行 p, q) 不是相邻的时的情形.

我们交换 A 的列 $p, p{+}1$ 与行 $p, p{+}1$, 得反称阵 C_1. 则 $\mathrm{pf}\,(C_1)=-\,\mathrm{pf}\,(A)=(-1)^1\,\mathrm{pf}\,(A)$. 我们交换 C_1 的列 $p+1$, $p+2$ 与行 $p+1$, $p+2$, 得反称阵 C_2. 则 $\mathrm{pf}\,(C_2)=-\,\mathrm{pf}\,(C_1)=(-1)^2\,\mathrm{pf}\,(A)$. ⋯⋯ 我们交换 C_{q-p-1} 的列 $q-1$, q 与行 $q-1$, q, 得反称阵 C_{q-p}. 则 $\mathrm{pf}\,(C_{q-p})=-\,\mathrm{pf}\,(C_{q-p-1})=(-1)^{q-p}\,\mathrm{pf}\,(A)$.

记 $G_0=C_{q-p}$. 则 $\mathrm{pf}\,(G_0)=(-1)^{q-p}\,\mathrm{pf}\,(A)$. 我们交换 G_0 的列 $q-2$, $q-1$ 与行 $q-2$, $q-1$, 得反称阵 G_1. 则 $\mathrm{pf}\,(G_1)=-\,\mathrm{pf}\,(G_0)=(-1)^{q-p+1}\,\mathrm{pf}\,(A)$. 我们交换 G_1 的列 $q-3$, $q-2$ 与行 $q-3$, $q-2$, 得反称阵 G_2. 则 $\mathrm{pf}\,(G_2)=$

$-\operatorname{pf}(G_1)=(-1)^{q-p+2}\operatorname{pf}(A)$. …… 我们交换 G_{q-p-2} 的列 $p,p+1$ 与行 $p,p+1$, 得反称阵 G_{q-p-1}. 则 $\operatorname{pf}(G_{q-p-1})=-\operatorname{pf}(G_{q-p-2})=(-1)^{q-p+(q-p-1)}\operatorname{pf}(A)$. 不难看出, $C=G_{q-p-1}$. 所以, $\operatorname{pf}(C)=(-1)^{2(q-p)-1}\operatorname{pf}(A)=-\operatorname{pf}(A)$.

所以, $P(n)$ 是正确的. 则 $Q(n)$ 是正确的. 由数学归纳法原理, 待证命题成立. 证毕.

利用此事, 我们可写出 pfaffian 的定义的变体.

定理 C.109 设 A 是 n 级反称阵 ($n>2$). 设 i 是不超过 n 的正整数. 则

$$\operatorname{pf}(A)=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(-1)^{i-1+j+\rho(i,j)}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j)).$$

证 设 $i=1$. 则 $i-1+j+\rho(i,j)=j$, 若 $j>1$. 所以, 这是对的.

设 $i>1$. 交换 A 的列 $i-1,i$ 与行 $i-1,i$, 得反称阵 C_1. 则 $\operatorname{pf}(C_1)=-\operatorname{pf}(A)=(-1)^1\operatorname{pf}(A)$. 交换 C_1 的列 $i-2,i-1$ 与行 $i-2,i-1$, 得反称阵 C_2. 则 $\operatorname{pf}(C_2)=-\operatorname{pf}(C_1)=(-1)^2\operatorname{pf}(A)$. …… 交换 C_{i-2} 的列 $1,2$ 与行 $1,2$, 得反称阵 C_{i-1}. 则 $\operatorname{pf}(C_{i-1})=-\operatorname{pf}(C_{i-2})=(-1)^{i-1}\operatorname{pf}(A)$. 记 $C=C_{i-1}$. 则 $\operatorname{pf}(A)=(-1)^{i-1}\operatorname{pf}(C)$. 我们有如下发现.

(1) $A(i|i)=C(1|1)$.

(2) 当 $j<i$ 时, $[A]_{i,j}=[C]_{1,j+1}$; 当 $j>i$ 时, $[A]_{i,j}=[C]_{1,j}$. 于是, 当 $2\leqslant j\leqslant i$ 时, $[C]_{1,j}=[A]_{i,j-1}$; 当 $j>i$ 时, $[C]_{1,j}=[A]_{i,j}$.

(3) 当 $j<i$ 时, $A(i,j|i,j)=C(1,j+1|1,j+1)$; 当 $j>i$ 时, $A(i,j|i,j)=C(1,j|1,j)$. 于是, 当 $2\leqslant j\leqslant i$ 时, $C(1,j|1,j)=A(i,j-1|i,j-1)$; 当 $j>i$ 时, $C(1,j|1,j)=A(i,j|i,j)$.

则

$$\begin{aligned}
&\operatorname{pf}(C)\\
=\ &\sum_{j=2}^{n}(-1)^j[C]_{1,j}\operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
=\ &\sum_{2\leqslant j\leqslant i}(-1)^j[C]_{1,j}\operatorname{pf}(C(1,j|1,j))+\sum_{i<j\leqslant n}(-1)^j[C]_{1,j}\operatorname{pf}(C(1,j|1,j))\\
=\ &\sum_{2\leqslant j\leqslant i}(-1)^j[A]_{i,j-1}\operatorname{pf}(A(i,j-1|i,j-1))+\sum_{i<j\leqslant n}(-1)^j[A]_{1,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\leqslant j<i}(-1)^{j+1}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j)) + \sum_{i<j\leqslant n}(-1)^{j}[A]_{1,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j))\\
&= \quad \sum_{1\leqslant j<i}(-1)^{j+\rho(i,j)}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j))\\
&\quad + \sum_{i<j\leqslant n}(-1)^{j+\rho(i,j)}[A]_{1,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j))\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(-1)^{j+\rho(i,j)}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j)).
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\operatorname{pf}(A) &= (-1)^{i-1}\operatorname{pf}(C)\\
&= (-1)^{i-1}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(-1)^{j+\rho(i,j)}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j))\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(-1)^{i-1}(-1)^{j+\rho(i,j)}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j))\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(-1)^{i-1+j+\rho(i,j)}[A]_{i,j}\operatorname{pf}(A(i,j|i,j)).
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 C.110 设 A 是 n 级反称阵. 设 p, q 是不超过 n 的正整数, 且 $p\neq q$. 设 A 的列 p, q 相等 (于是, 显然, A 的行 p, q 也相等). 则 $\operatorname{pf}(A)=0$.

证 我们先说明:

设 A 是 n 级反称阵. 设 p, q 是不超过 n 的正整数, 且 $p\neq q$. 设 A 的列 p, q 相等 (于是, 显然, A 的行 p, q 也相等). 再设 u, v 是不超过 n 的正整数, 且 $u\neq v$. 设交换 A 的列 u, v, 不改变其他的列, 得阵 B. 设交换 B 的行 u, v, 不改变其他的行, 得反称阵 C. 则 C 仍有二列相等 (当然, 也有二行相等).

首先, 我们可具体地写下 C 的元:

$$[C]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{i,j}, & i\neq u, i\neq v, j\neq u, j\neq v;\\ [A]_{v,j}, & i=u, j\neq u, j\neq v;\\ [A]_{u,j}, & i=v, j\neq u, j\neq v;\\ [A]_{i,v}, & j=u, i\neq u, i\neq v;\\ [A]_{i,u}, & j=v, i\neq u, i\neq v;\\ [A]_{v,v}, & i=j=u;\\ [A]_{u,u}, & i=j=v;\\ [A]_{v,u}, & i=u, j=v;\\ [A]_{u,v}, & i=v, j=u.\end{cases}$$

然后, 我们可分类讨论. 无妨设 $p<q$, 且 $u<v$. 则:

若 $p\neq u, p\neq v$, 且 $q\neq u, q\neq v$, 则我们可验证, C 的列 p, q 相等;
若 $p=u$, 且 $q=v$, 则我们可验证, C 的列 p, q 相等;
若 $p=u, q\neq v$, 则我们可验证, C 的列 q, v 相等;
若 $p=v$, 则我们可验证, C 的列 u, q 相等;
若 $q=u$, 则我们可验证, C 的列 p, v 相等;
若 $q=v$, 且 $p\neq u$, 则我们可验证, C 的列 u, p 相等.

好的. 现在, 我们证原命题.
无妨设 $p<q$.
先设 $p=1, q=2$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{pf}(A)= {} & [A]_{1,2}\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\ & +\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}\det\begin{bmatrix}[A]_{1,j} & [A]_{1,k}\\ [A]_{2,j} & [A]_{2,k}\end{bmatrix}\operatorname{pf}(A(1,2,j,k|1,2,j,k)).\end{aligned}$$

因为 A 的列 1, 2 相等, 故 A 的行 1, 2 也相等 (注意, A 是反称阵), 且 $[A]_{1,2}=$

$[A]_{1,1}=0$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{pf}(A)= &\quad 0\operatorname{pf}(A(1,2|1,2))\\ &+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{j+k}\,0\operatorname{pf}(A(1,2,j,k|1,2,j,k))\\ =&\ 0.\end{aligned}$$

设 $p=1$, 但 $q>2$. 交换 A 的列 $2, q$, 不改变其他的列, 得阵 B_1. 交换 B_1 的行 $2, q$, 不改变其他的行, 得反称阵 C_1. 则 C_1 的列 $1, 2$ 相等, 故 $\operatorname{pf}(C_1)=0$. 另一方面, $\operatorname{pf}(C_1)=-\operatorname{pf}(A)$, 故 $\operatorname{pf}(A)=0$.

设 $p=2$. 交换 A 的列 $1, q$, 不改变其他的列, 得阵 B_2. 交换 B_2 的行 $1, q$, 不改变其他的行, 得反称阵 C_2. 则 C_2 的列 $1, 2$ 相等, 故 $\operatorname{pf}(C_2)=0$. 另一方面, $\operatorname{pf}(C_2)=-\operatorname{pf}(A)$, 故 $\operatorname{pf}(A)=0$.

最后, 设 $2<p$. 交换 A 的列 $2, p$, 不改变其他的列, 得阵 B_3. 交换 B_3 的行 $2, p$, 不改变其他的行, 得反称阵 C_3. 则 C_3 的列 $2, q$ 相等, 故 $\operatorname{pf}(C_3)=0$ (我们已证此情形). 另一方面, $\operatorname{pf}(C_3)=-\operatorname{pf}(A)$, 故 $\operatorname{pf}(A)=0$. 证毕.

有了这些有较长的论证的性质, 我们可以证明倍加与反称阵的 pfaffian 的关系. 这是重要的.

定理 C.111 设 A 是 n 级反称阵. 加 A 的列 p 的 s 倍于列 q ($p\neq q$), 不改变其他的列, 得 n 级阵 B. 加 B 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 C. 则 $\operatorname{pf}(C)=\operatorname{pf}(A)$.

证 不难写出 C 的元:

$$[C]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{q,j}+s[A]_{p,j}, & i=q, \text{ 且 } j\neq q;\\ [A]_{i,q}+s[A]_{i,p}, & j=q, \text{ 且 } i\neq q;\\ [A]_{i,j}, & \text{其他}.\end{cases}$$

作 n 级阵 G 如下:

$$[G]_{i,j}=\begin{cases}[A]_{p,j}, & i=q, \text{ 且 } j\neq q;\\ [A]_{i,p}, & j=q, \text{ 且 } i\neq q;\\ [A]_{i,j}, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 G 是反称阵, G 的列 p, q 相等, 且:

(1) $[A]_{i,j} = [G]_{i,j} = [C]_{i,j}$, 对任何不等于 q, 且不超过 n 的正整数 i, j;

(2) $[C]_{i,j} = 1[A]_{i,j} + s[G]_{i,j}$, 若 $i = q$ 或 $j = q$.

所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{pf}\,(C) = 1\,\mathrm{pf}\,(A) + s\,\mathrm{pf}\,(G)&\\ = \ \mathrm{pf}\,(A) + s\,0&\\ = \ \mathrm{pf}\,(A).&\end{aligned}$$

证毕.

现在, 我们可以证明, 反称阵的行列式与 pfaffian 有如下关系.

定理 C.112　设 A 是 n 级反称阵. 则 $\det(A) = (\mathrm{pf}\,(A))^2$.

证　设 n 是奇数. 则 $\det(A) = 0$, 且 $\mathrm{pf}\,(A) = 0$.

再设 $n = 2m$ 是偶数. 则利用若干次列的倍加, 与对应的行的倍加 (“先列后行, 交替地作”), 我们可变 A 为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_m & 0 \end{bmatrix}.$$

则 $\det(B) = \det(A)$, 且 $\mathrm{pf}\,(B) = \mathrm{pf}\,(A)$. 最后, 注意到 $\det(B) = (\mathrm{pf}\,(B))^2$, 故 $\det(A) = (\mathrm{pf}\,(A))^2$. 证毕.

我以一个应用结束本节.

设 S 是 “整”, 或 “有理”, 或 “实”, 或 “复” 中的一个. 我们约定, 当 S 是 “整” 时, S-数是 “整数”; 当 S 是 “有理” 时, S-数是 “有理数”; 当 S 是 “实” 时, S-数是 “实数”; 当 S 是 “复” 时, S-数是 “复数”. 于是, 二个 S-数的和、差、积还是 S-数.

若一个阵的元全是 S-数, 我们说, 此阵是一个 S-阵.

现在, 我们设 A 是一个 S-反称阵 (A 是反称阵, 且 A 是 S-阵). 因为 pfaffian 的定义是由一些数的和、差、积作成的, 且不含除法, 故 $\mathrm{pf}\,(A)$ 是一个 S-数. 则 $\det\,(A)$ 是一个 S-数的平方. 具体地 (且较有趣地), 若 A 是一个整反称阵, 则 $\det\,(A)$ 是一个整数的平方 (完全平方数); 若 A 是一个实反称阵, 则 $\det\,(A)$ 是一个实数的平方 (非负实数).

C.35　阵的积与倍加 (续)

本节, 我们进一步地讨论阵的积与 (列的) 倍加的关系.

回想起, 我们有如下结论.

定理 C.36　设 A 是一个 $m \times n$ 阵. 利用若干次 (列的) 倍加, 我们可变 A 为一个 $m \times n$ 阵 B, 使当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$.

那么, 特别地, 取 A 为方阵, 有

定理 C.113　设 A 是 n 级阵. 利用若干次列的倍加, 我们可变 A 为 n 级阵 B, 使当 $i < j$ 时, $[B]_{i,j} = 0$.

形象地, 对任何 n 级阵

$$A = \begin{bmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n-1} & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n-1} & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [A]_{n-1,1} & [A]_{n-1,2} & \cdots & [A]_{n-1,n-1} & [A]_{n-1,n} \\ [A]_{n,1} & [A]_{n,2} & \cdots & [A]_{n,n-1} & [A]_{n,n} \end{bmatrix},$$

我们总可作列的倍加, 变 A 为

$$B = \begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [B]_{2,1} & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [B]_{n-1,1} & [B]_{n-1,2} & \cdots & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ [B]_{n,1} & [B]_{n,2} & \cdots & [B]_{n,n-1} & [B]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

因为 A, B 是方阵, 故我们可说 A, B 的行列式. 现在, 我说, 若 $\det(A) \neq 0$, 则我们可用列的倍加, 进一步地变 B 为

$$D = \begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n,n} \end{bmatrix};$$

具体地, D 是一个 n 级阵, 且

$$[D]_{i,j} = \begin{cases} [B]_{i,i}, & i = j; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们知道, 倍加不改变行列式. 于是, $\det(B) = \det(A) \neq 0$. 另一方面, $\det(B) = [B]_{1,1}[B]_{2,2}\cdots[B]_{n,n}$, 故 $[B]_{1,1}, [B]_{2,2}, \cdots, [B]_{n,n}$ 都不是零. 那么, 我们加 B 的列 n 的 $-[B]_{n,n-1}/[B]_{n,n}$ 倍于列 $n-1$, 列 n 的 $-[B]_{n,n-2}/[B]_{n,n}$ 倍于列 $n-2$, ⋯ ⋯, 列 n 的 $-[B]_{n,1}/[B]_{n,n}$ 倍于列 1, 得

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ [B]_{2,1} & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [B]_{n-2,1} & [B]_{n-2,2} & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ [B]_{n-1,1} & [B]_{n-1,2} & \cdots & [B]_{n-1,n-2} & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & [B]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

我们再加列 $n-1$ 的 $-[B]_{n-1,n-3}/[B]_{n-1,n-1}$ 倍于列 $n-2$, 列 $n-1$ 的 $-[B]_{n-1,n-3}/[B]_{n-1,n-1}$ 倍于列 $n-3$, ⋯ ⋯, 列 $n-1$ 的 $-[B]_{n-1,1}/[B]_{n-1,n-1}$ 倍于列 1, 得

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ [B]_{2,1} & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [B]_{n-2,1} & [B]_{n-2,2} & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & [B]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

⋯ ⋯ 最后, 我们得

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

综上, 我们有

定理 C.114　设 A 是 n 级阵, 且 $\det(A) \neq 0$. 利用若干次列的倍加, 我们可变 A 为 n 级阵 D, 使当 $i \neq j$ 时, $[D]_{i,j} = 0$.

进一步地, 我说, 我们还可变 D 为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

具体地, $\boldsymbol{M}$ 是一个 n 级阵, 且

$$[\boldsymbol{M}]_{i,j} = \begin{cases} \det(A), & i = j = 1; \\ 1, & i = j > 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设 D 形如

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & [B]_{n,n} \end{bmatrix},$$

其中 $[B]_{1,1}, [B]_{2,2}, \cdots, [B]_{n,n}$ 都不是零.

加列 n 的 $(1 - [B]_{n,n})/[B]_{n,n}$ 倍于列 $n-1$, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - [B]_{n,n} & [B]_{n,n} \end{bmatrix}.$$

加列 $n-1$ 于列 n, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n-1,n-1} & [B]_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-[B]_{n,n} & 1 \end{bmatrix}.$$

加列 n 的 $[B]_{n,n}-1$ 倍于列 $n-1$, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n-1,n-1}[B]_{n,n} & [B]_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

加列 $n-1$ 的 $-1/[B]_{n,n}$ 倍于列 n, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [B]_{n-1,n-1}[B]_{n,n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

为方便, 记 $d_2 = [B]_{n-1,n-1}[B]_{n,n}$. 加列 $n-1$ 的 $(1-d_2)/d_2$ 倍于列 $n-2$, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-d_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

加列 $n-2$ 于列 $n-1$, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2} & [B]_{n-2,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

加列 $n-1$ 的 d_2-1 倍于列 $n-2$, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2}d_2 & [B]_{n-2,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

加列 $n-2$ 的 $-1/d_2$ 倍于列 $n-1$, 有

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [B]_{n-2,n-2}[B]_{n-1,n-1}[B]_{n,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\cdots\cdots$ 最后, 我们得

$$\begin{bmatrix} [B]_{1,1}[B]_{2,2}\cdots[B]_{n,n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

再注意到 $\det(A) = [B]_{1,1}[B]_{2,2}\cdots[B]_{n,n}$.

综上, 我们有

定理 C.115 设 A 是 n 级阵, 且 $\det(A) \neq 0$. 利用若干次列的倍加, 我们可变 A 为 n 级阵 M, 使

$$[M]_{i,j} = \begin{cases} \det(A), & i = j = 1; \\ 1, & i = j > 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们知道, 我们可用阵的积表示倍加. 于是

定理 C.116 设 A 是 n 级阵, 且 $\det(A) \neq 0$. 则存在若干个形如 $E(n; p, q; s)$ (s 是一个数; p, q 是不超过 n 的正整数, $p \neq q$) 的阵 E_1, E_2, $\cdots$, E_w, 使

$$[AE_1E_2 \cdots E_w]_{i,j} = \begin{cases} \det(A), & i = j = 1; \\ 1, & i = j > 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

回想起, $E(n; p, q; s)$ (s 是一个数; p, q 是不超过 n 的正整数, $p \neq q$) 是适合如下条件的 n 级阵:

$$[E(n; p, q; s)]_{i,j} = \begin{cases} s, & i = p, \text{且 } j = q; \\ [I_n], & \text{其他}. \end{cases}$$

C.36　Pfaffian 的性质 (续)

前面, 我们得到了 pfaffian 的不少性质. 以下三条是重要的:

定理 C.107　设 A, C 是二个 n 级反称阵. 设 q 是不超过 n 的正整数. 设 s 是数. 设 $[A]_{i,j} = [C]_{i,j}$, 对任何不等于 q, 且不超过 n 的正整数 i, j; 设 $[C]_{i,j} = s[A]_{i,j}$, 若 $i = q$ 或 $j = q$. 则 $\operatorname{pf}(C) = s\operatorname{pf}(A)$.

定理 C.111　设 A 是 n 级反称阵. 加 A 的列 p 的 s 倍于列 q ($p \neq q$), 不改变其他的列, 得 n 级阵 B. 加 B 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 C. 则 $\operatorname{pf}(C) = \operatorname{pf}(A)$.

定理 C.112　设 A 是 n 级反称阵. 则 $\det(A) = (\operatorname{pf}(A))^2$.

本节, 我们证明 pfaffian 的一个新的重要的性质. 为此, 我们先改写第 2 条性质.

定理 C.117　设 A 是 n 级反称阵. 设 s 是数. 设 p, q 是不超过 n 的正整数, 且 $p \neq q$. 则

$$\operatorname{pf}((E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} A E(n; p, q; s)) = \operatorname{pf}(A) \det(E(n; p, q; s)).$$

证　加 A 的列 p 的 s 倍于列 q, 不改变其他的列, 得 n 级阵 B. 加 B 的行 p 的 s 倍于行 q, 不改变其他的行, 得 n 级阵 C. 则 $\operatorname{pf}(C) = \operatorname{pf}(A)$.

注意到 $C = (E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} A E(n; p, q; s)$, 故

$$\operatorname{pf}((E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} A E(n; p, q; s)) = \operatorname{pf}(A).$$

再注意到 $\det(E(n; p, q; s)) = 1$, 故

$$\operatorname{pf}((E(n; p, q; s))^{\mathrm{T}} A E(n; p, q; s)) = \operatorname{pf}(A) \det(E(n; p, q; s)).$$

证毕.

好的. 现在, 我们可以证明本节的主要结论了.

定理 C.118　设 A 是 n 级反称阵. 设 P 是 n 级阵. 则

$$\operatorname{pf}(P^{\mathrm{T}} A P) = \operatorname{pf}(A) \det(P).$$

证 若 $\det(P)=0$, 则 $\det(P^{\mathrm{T}}AP)=\det(P^{\mathrm{T}}A)\det(P)=0$. 则 $P^{\mathrm{T}}AP$ 的 pfaffian 为 0. 所以, 若 $\det(P)=0$, 则命题是对的.

若 $\det(P)\neq 0$, 则存在若干个形如 $E(n;p,q;s)$ (s 是一个数; p, q 是不超过 n 的正整数, $p\neq q$) 的阵 $E_1, E_2, \cdots, E_w$, 使 $M=PE_1E_2\cdots E_w$ 适合

$$[M]_{i,j}=\begin{cases}\det(P), & i=j=1;\\ 1, & i=j>1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}(P^{\mathrm{T}}AP) &= \mathrm{pf}(P^{\mathrm{T}}AP)\,1\\
&= \mathrm{pf}(P^{\mathrm{T}}AP)\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{w-1})\det(E_w)\\
&= \mathrm{pf}(E_1^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{w-1})\det(E_w)\\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= \mathrm{pf}(E_{w-1}^{\mathrm{T}}\cdots(E_2^{\mathrm{T}}(E_1^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)E_1)E_2)\cdots E_{w-1})\det(E_w)\\
&= \mathrm{pf}(E_w^{\mathrm{T}}(E_{w-1}^{\mathrm{T}}\cdots(E_2^{\mathrm{T}}(E_1^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)E_1)E_2)\cdots E_{w-1})E_w)\\
&= \mathrm{pf}((E_w^{\mathrm{T}}E_{w-1}^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}})A(PE_1E_2\cdots E_{w-1}E_w))\\
&= \mathrm{pf}((PE_1E_2\cdots E_{w-1}E_w)^{\mathrm{T}}A(PE_1E_2\cdots E_{w-1}E_w))\\
&= \mathrm{pf}(M^{\mathrm{T}}AM).
\end{aligned}$$

我们计算 $M^{\mathrm{T}}AM$:

$$\begin{aligned}
[M^{\mathrm{T}}AM]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}[M^{\mathrm{T}}]_{i,k}[AM]_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}[M]_{k,i}[AM]_{k,j}\\
&= [M]_{i,i}[AM]_{i,j}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}[M]_{k,i}[AM]_{k,j}\\
&= [M]_{i,i}[AM]_{i,j}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}0\,[AM]_{k,j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [M]_{i,i}[AM]_{i,j} \\
&= [M]_{i,i}\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[M]_{\ell,j} \\
&= [M]_{i,i}\left([A]_{i,j}[M]_{j,j} + \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq j}}[A]_{i,\ell}[M]_{\ell,j}\right) \\
&= [M]_{i,i}\left([A]_{i,j}[M]_{j,j} + \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ \ell\neq j}}[A]_{i,\ell}\,0\right) \\
&= [M]_{i,i}[A]_{i,j}[M]_{j,j}.
\end{aligned}
$$

当 $i \neq 1, j \neq 1$ 时,

$$[M]_{i,i}[A]_{i,j}[M]_{j,j} = 1\,[A]_{i,j}\,1 = [A]_{i,j};$$

当 $i = 1, j \neq 1$ 时,

$$[M]_{i,i}[A]_{i,j}[M]_{j,j} = \det(P)\,[A]_{i,j}\,1 = \det(P)\,[A]_{i,j};$$

当 $i \neq 1, j = 1$ 时,

$$[M]_{i,i}[A]_{i,j}[M]_{j,j} = 1\,[A]_{i,j}\det(P) = \det(P)\,[A]_{i,j};$$

当 $i = 1, j = 1$ 时,

$$[M]_{i,i}[A]_{i,j}[M]_{j,j} = \det(P)\,0\det(P) = 0 = \det(P)\,[A]_{i,j}.$$

则

$$\mathrm{pf}\,(P^{\mathrm{T}}AP) = \mathrm{pf}\,(M^{\mathrm{T}}AM) = \det(P)\,\mathrm{pf}\,(A) = \mathrm{pf}\,(A)\det(P).$$ 证毕.

C.37 辛阵的行列式为 1

现在, 我们可以证明, 辛阵的行列式为 1.

回想起, 说一个 $2m$ 级阵 A 是辛阵, 若 $A^{\mathrm{T}}K_mA = K_m$, 其中 K_m 是形如

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}$$

的 $2m$ 级反称阵.

不难算出, $\det(K_m) = 1$. 则 $\operatorname{pf}(K_m)\operatorname{pf}(K_m) = \det(K_m) = 1$. 由 $\operatorname{pf}(K_m) = \operatorname{pf}(A^{\mathrm{T}}K_mA) = \operatorname{pf}(K_m)\det(A)$, 知 $\operatorname{pf}(K_m)\operatorname{pf}(K_m) = \operatorname{pf}(K_m)\operatorname{pf}(K_m)\det(A)$, 即 $1 = 1\det(A) = \det(A)$.

当然, 还有不少别的证明辛阵的行列式为 1 的方法, 但我就不在这儿说它们了.

C.38　杂例

例 C.119　设 A 是 n 级阵. 设 n 级阵 D 适合

$$[D]_{i,j}=\begin{cases}d_i, & i=j;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}&\det(A+D)\\ =&\quad\det(D)\\ &+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix}j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det(D(j_1,\cdots,j_k|j_1,\cdots,j_k))\\ &+\det(A).\end{aligned}$$

设 A 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_n^{(1)}$. 设 D 的列 $1, 2, \cdots, n$ 分别是 $b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \cdots, b_n^{(0)}$. 则 $A+D$ 的列 j 是

$$b_j^{(1)}+b_j^{(0)}=b_j^{(0)}+b_j^{(1)}=\sum_{c_j=0}^{1}b_j^{(c_j)}.$$

则, 由多线性,

$$\begin{aligned}&\det(A+D)\\ =&\det\left[\sum_{c_1=0}^{1}b_1^{(c_1)},\sum_{c_2=0}^{1}b_2^{(c_2)},\cdots,\sum_{c_n=0}^{1}b_n^{(c_n)}\right]\\ =&\sum_{c_1=0}^{1}\det\left[b_1^{(c_1)},\sum_{c_2=0}^{1}b_2^{(c_2)},\cdots,\sum_{c_n=0}^{1}b_n^{(c_n)}\right]\\ =&\sum_{c_1=0}^{1}\sum_{c_2=0}^{1}\det\left[b_1^{(c_1)},b_2^{(c_2)},\cdots,\sum_{c_n=0}^{1}b_n^{(c_n)}\right]\\ =&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{c_1=0}^{1}\sum_{c_2=0}^{1}\cdots\sum_{c_n=0}^{1} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}] \\
&= \sum_{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}].
\end{aligned}
$$

由加法的结合律与交换律, 我们可按任何方式, 任何次序求这些

$$
\det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}]
$$

的和. 特别地, 我们可按 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ 分这些数为若干组, 求出一组的元的和 (即一组的 “组和”), 再求这些组的 “组和” 的和. 因为 $0 \leqslant c_j \leqslant 1$, 故 $0 \leqslant c_1+c_2+\cdots+c_n \leqslant n$. 于是, 我们可分这些数为 $n+1$ 组: 适合 $c_1+c_2+\cdots+c_n = 0$ 的项在一组; 适合 $c_1+c_2+\cdots+c_n = 1$ 的项在一组; $\cdots$ $\cdots$; 适合 $c_1+c_2+\cdots+c_n = n$ 的项在一组. 不难看出, 每一项一定在某一组里, 且每一项不能在二个不同的组里. 则

$$
\begin{aligned}
&\det\,(A + D) \\
&= \sum_{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=k}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}] \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=0}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=k}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}] \\
&\quad + \sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=n}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}].
\end{aligned}
$$

不难看出, $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0$ 时, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. 则

$$
\sum_{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}] = \det\,[b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \cdots, b_n^{(0)}] = \det\,(D).
$$

不难看出, $c_1+c_2+\cdots+c_n=n$ 时, $c_1=c_2=\cdots=c_n=1$. 则

$$\sum_{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1}\det[b_1^{(c_1)},b_2^{(c_2)},\cdots,b_n^{(c_n)}]=\det[b_1^{(1)},b_2^{(1)},\cdots,b_n^{(1)}]=\det(A).$$

设正整数 $k<n$. 由 $c_1+c_2+\cdots+c_n=k$, 知在 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 中, 有 k 个 1 与 $n-k$ 个 0. 设 $c_{j_1}=c_{j_2}=\cdots=c_{j_k}=1$ (其中 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$), 且 $c_{j_{k+1}}=\cdots=c_{j_n}=0$ (其中 $1\leqslant j_{k+1}<\cdots<j_n\leqslant n$). 记 n 级阵

$$B_{c_1,\cdots,c_n}=[b_1^{(c_1)},b_2^{(c_2)},\cdots,b_n^{(c_n)}].$$

注意到, 当 $\ell>k$, 且 $i\neq j_\ell$ 时, $[B_{c_1,\cdots,c_n}]_{i,j_\ell}=0$, 且 $[B_{c_1,\cdots,c_n}]_{j_\ell,j_\ell}=d_{j_\ell}$, 按列 j_{k+1} 展开 $\det(B_{c_1,\cdots,c_n})$, 有

$$\begin{aligned}\det(B_{c_1,\cdots,c_n})&=(-1)^{j_{k+1}+j_{k+1}}[B_{c_1,\cdots,c_n}]_{j_\ell,j_\ell}\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1}|j_{k+1}))\\&=d_{j_{k+1}}\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1}|j_{k+1})).\end{aligned}$$

按列 $j_{k+2}-1$ 展开 $\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1}|j_{k+1}))$, 有

$$\begin{aligned}&\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1}|j_{k+1}))\\=&(-1)^{j_{k+2}-1+j_{k+2}-1}[B_{c_1,\cdots,c_n}]_{j_\ell,j_\ell}\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1},j_{k+2}|j_{k+1},j_{k+2}))\\=&d_{j_{k+2}}\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1},j_{k+2}|j_{k+1},j_{k+2})).\end{aligned}$$

故

$$\det(B_{c_1,\cdots,c_n})=d_{j_{k+1}}d_{j_{k+2}}\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1},j_{k+2}|j_{k+1},j_{k+2})).$$

$\cdots\cdots$ 最后, 我们算出

$$\begin{aligned}&\det(B_{c_1,\cdots,c_n})\\=&d_{j_{k+1}}d_{j_{k+2}}\cdots d_{j_n}\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1},\cdots,j_n|j_{k+1},\cdots,j_n))\\=&\det(B_{c_1,\cdots,c_n}(j_{k+1},\cdots,j_n|j_{k+1},\cdots,j_n))\,d_{j_{k+1}}d_{j_{k+2}}\cdots d_{j_n}\\=&\det\left(A\begin{pmatrix}j_1,\cdots,j_k\\j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det(D(j_1,\cdots,j_k|j_1,\cdots,j_k)).\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=k}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}]\\
=\ &\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} \det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det\,(D(j_1,\cdots,j_k|j_1,\cdots,j_k)).
\end{aligned}
$$

综上,

$$
\begin{aligned}
&\det\,(A+D)\\
=\ &\sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=0}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}]\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=k}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}]\\
&+\sum_{\substack{0\leqslant c_1,c_2,\cdots,c_n\leqslant 1\\ c_1+c_2+\cdots+c_n=n}} \det\,[b_1^{(c_1)}, b_2^{(c_2)}, \cdots, b_n^{(c_n)}]\\
=\ &\det\,(D)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} \det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det\,(D(j_1,\cdots,j_k|j_1,\cdots,j_k))\\
&+\det\,(A).
\end{aligned}
$$

例 C.120 设 A 是 n 级阵. 设 x 是数. 则

$$
\det\,(xI_n+A)=x^n+\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right).
$$

注意到

$$
[xI_n]_{i,j}=\begin{cases} x, & i=j;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

故, 由上个例,

$$
\begin{aligned}
&\det(xI_n+A)\\
= &\quad \det(xI_n)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det\left((xI_n)(j_1,\cdots,j_k|j_1,\cdots,j_k)\right)\\
&+\det(A)\\
= &\quad x^n+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)x^{n-k}\\
&+\det(A)\\
= &\quad x^n+\sum_{k=1}^{n-1}x^{n-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
&+x^{n-n}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_n\\ j_1,\cdots,j_n\end{pmatrix}\right)\\
=&\ x^n+\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

例 C.121 设正整数 m, n 适合 $m\geqslant n$. 设 A, B 分别是 $m\times n$ 与 $n\times m$ 阵. 设正整数 $k\leqslant n$. 由 Binet–Cauchy 公式的推广,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left((AB)\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
=&\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)\det\left(B\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
=&\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det\left(B\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)\\
=&\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left(B\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\det\left(A\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)\\
=&\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det\left((BA)\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

例 C.122 设正整数 m, n 适合 $m \geqslant n$. 设 A, B 分别是 $m\times n$ 与 $n\times m$ 阵. 设 x 是数. 则

$$\begin{aligned}
&\det(xI_m+AB)\\
&= x^m+\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left((AB)\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
&= \quad x^m+\sum_{k=1}^{n}x^{m-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left((AB)\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
&\quad +\sum_{k=n+1}^{m}x^{m-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left((AB)\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
&= \quad x^m+\sum_{k=1}^{n}x^{m-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left((AB)\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
&\quad +\sum_{k=n+1}^{m}x^{m-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}0\\
&= x^m+\sum_{k=1}^{n}x^{m-k}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\det\left((AB)\begin{pmatrix} j_1,\cdots,j_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right)\\
&= x^{m-n}x^n+\sum_{k=1}^{n}x^{m-n}x^{n-k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det\left((BA)\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)\\
&= x^{m-n}x^n+x^{m-n}\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det\left((BA)\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)\\
&= x^{m-n}\left(x^n+\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det\left((BA)\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)\right)\\
&= x^{m-n}\det(xI_n+BA).
\end{aligned}$$

特别地, 代 x 以数 1, 有

$$\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA).$$

例 C.123 设 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_m, b_m$ 是 $2m$ 个数. 作 m 级阵 C 如下:

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} 1 + a_i b_i, & i = j; \\ a_i b_j, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们计算 $\det(C)$.

设 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_m]^{\mathrm{T}}$, $B = [b_1, b_2, \cdots, b_m]$. 则

$$[AB]_{i,j} = [A]_{i,1}[B]_{1,j} = a_i b_j.$$

由此, 不难看出, $C = I_m + AB$. 故

$$\begin{aligned} \det(C) = &\ \det(I_m + AB) \\ = &\ \det(I_1 + BA) \\ =&\ [I_1 + BA]_{1,1} \\ =&\ [I_1]_{1,1} + [BA]_{1,1} \\ =&\ 1 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_m a_m. \end{aligned}$$

我们当然也可用别的方法. 作 $m+1$ 级阵 G 如下:

$$[G]_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j = m+1; \\ -a_i, & i < j = m+1; \\ 0, & m+1 = i > j; \\ [C]_{i,j}, & \text{其他}. \end{cases}$$

形象地,

$$G = \begin{bmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{m-1} & a_1 b_m & -a_1 \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{m-1} & a_2 b_m & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} b_1 & a_{m-1} b_2 & \cdots & 1 + a_{m-1} b_{m-1} & a_{m-1} b_m & -a_{m-1} \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_{m-1} & 1 + a_m b_m & -a_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

一方面, 按行 $m+1$ 展开, 有

$$\det(G) = (-1)^{m+1+m+1} 1 \det(G(1|1)) = \det(C).$$

另一方面, 我们加列 $m+1$ 的 b_1 倍于列 1, 加列 $m+1$ 的 b_2 倍于列 2, ⋯ ⋯, 加列 $m+1$ 的 b_m 倍于列 m, 得 $m+1$ 级阵

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 1 \end{bmatrix}.$$

则 $\det(H) = \det(G)$. 故 $\det(C) = \det(H)$.

我们加列 1 的 a_1 倍于列 $m+1$, 加列 1 的 a_2 倍于列 $m+1$, ⋯ ⋯, 加列 1 的 a_m 倍于列 $m+1$, 得 $m+1$ 级阵

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 1 + b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_ma_m \end{bmatrix}.$$

则 $\det(J) = \det(H)$. 故

$$\det(C) = \det(J) = 1 + b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_ma_m.$$

例 C.124 设 n, m 是非负整数, 且 $m+n \geqslant 1$. 设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k} = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

为方便, 我们约定: 若 $k<0$ 或 $k>n$, 则 $a_k=0$; 若 $k<0$ 或 $k>m$, 则 $b_k=0$. 作 $m+n$ 级阵 R 如下:

$$[R]_{i,j}=\begin{cases}a_{i-j}, & j\leqslant m;\\ b_{i-(j-m)}, & j>m.\end{cases}$$

形象地, 比如, 若 $n=2$, $m=5$, 则

$$R=\begin{bmatrix}a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & b_0 & b_{-1}\\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & b_1 & b_0\\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & b_2 & b_1\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & b_3 & b_2\\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & b_4 & b_3\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & b_5 & b_4\\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & b_6 & b_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0\\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0\\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_2 & b_1\\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & b_3 & b_2\\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & b_4 & b_3\\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & b_5 & b_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & b_5\end{bmatrix}.$$

(1) 设 e 是 $m+n$ 级单位阵的列 $m+n$. 我们说, 存在 $(m+n)\times 1$ 阵 p 使 $Rp=\det(R)\,e$.

取 p 为 R 的古伴 $\operatorname{adj}(R)$ 的列 $m+n$. 则

$$\begin{aligned}[Rp]_{i,1}&=\sum_{\ell=1}^{m+n}[R]_{i,\ell}[p]_{\ell,1}\\ &=\sum_{\ell=1}^{m+n}[R]_{i,\ell}[\operatorname{adj}(R)]_{\ell,m+n}\\ &=[R\operatorname{adj}(R)]_{i,m+n}\\ &=[\det(R)\,I_{m+n}]_{i,m+n}\\ &=\det(R)\,[I_{m+n}]_{i,m+n}\\ &=\det(R)\,[e]_{i,1}\\ &=[\det(R)\,e]_{i,1}.\end{aligned}$$

(顺便一提, 若 $\det(R)\neq 0$, 显然有 $p\neq 0$; 若 $\det(R)=0$, 由第一章, 节 *23* 的知识, 存在非零的 $(m+n)\times 1$ 阵 q 使 $Rq=0=\det(R)\,e$.)

(2) 作 $1\times(m+n)$ 阵 $X=[x^{m+n-1},x^{m+n-2},\cdots,1]$; 具体地, $[X]_{1,j}=x^{m+n-j}$. 则 XR 是 $1\times(m+n)$ 阵, 且

$$[XR]_{1,j}=\sum_{\ell=1}^{m+n}[X]_{1,\ell}[R]_{\ell,j}=\sum_{1\leqslant\ell\leqslant m+n}[R]_{\ell,j}x^{m+n-\ell}.$$

若 $j\leqslant m$, 则 $[R]_{\ell,j}=a_{\ell-j}$, 且

$$\begin{aligned}
[XR]_{1,j}&=\sum_{1\leqslant\ell\leqslant m+n}a_{\ell-j}x^{m+n-\ell}\\
&=\sum_{1-j\leqslant\ell-j\leqslant m+n-j}a_{\ell-j}x^{n-(\ell-j)+(m-j)}\\
&=\sum_{1-j\leqslant h\leqslant n+(m-j)}a_hx^{n-h}\,x^{m-j}\\
&=\sum_{0\leqslant h\leqslant n}a_hx^{n-h}\,x^{m-j}+\sum_{\substack{1-j\leqslant h<0\\ \text{或 } n<h\leqslant n+(m-j)}}a_hx^{n-h}\,x^{m-j}\\
&=\left(\sum_{0\leqslant h\leqslant n}a_hx^{n-h}\right)x^{m-j}+\sum_{\substack{1-j\leqslant h<0\\ \text{或 } n<h\leqslant n+(m-j)}}0\,x^{n-h}\,x^{m-j}\\
&=f(x)\,x^{m-j}.
\end{aligned}$$

若 $j>m$, 则 $[R]_{\ell,j}=b_{\ell-(j-m)}$. 为方便, 记 $k=j-m$. 则

$$\begin{aligned}
[XR]_{1,j}&=\sum_{1\leqslant\ell\leqslant m+n}b_{\ell-k}x^{m+n-\ell}\\
&=\sum_{1-k\leqslant\ell-k\leqslant m+n-k}b_{\ell-k}x^{m-(\ell-k)+(n-k)}\\
&=\sum_{1-k\leqslant h\leqslant m+(n-k)}b_hx^{m-h}\,x^{n-k}\\
&=\sum_{0\leqslant h\leqslant m}b_hx^{m-h}\,x^{n-k}+\sum_{\substack{1-k\leqslant h<0\\ \text{或 } m<h\leqslant m+(n-k)}}b_hx^{m-h}\,x^{n-k}\\
&=\left(\sum_{0\leqslant h\leqslant m}b_hx^{m-h}\right)x^{n-(j-m)}+\sum_{\substack{1-k\leqslant h<0\\ \text{或 } m<h\leqslant m+(n-k)}}0\,x^{m-h}\,x^{n-k}\\
&=g(x)\,x^{n-(j-m)}.
\end{aligned}$$

(3) 既然 XR 是 $1\times(m+n)$ 阵, 则 $(XR)p$ 是 1 级阵. 记 $r=[(XR)p]_{1,1}$. 则

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{j=1}^{m+n}[XR]_{1,j}[p]_{j,1}\\
&= \sum_{j=1}^{m}[XR]_{1,j}[p]_{j,1}+\sum_{j=m+1}^{m+n}[XR]_{1,j}[p]_{j,1}\\
&= \sum_{j=1}^{m} f(x)\,x^{m-j}\,[p]_{j,1}+\sum_{j=m+1}^{m+n} g(x)\,x^{n-(j-m)}\,[p]_{j,1}\\
&= f(x)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}\,[p]_{j,1}+g(x)\sum_{j=m+1}^{m+n} x^{n-(j-m)}\,[p]_{j,1}\\
&= f(x)\sum_{k=0}^{m-1}[p]_{k+1,1}x^{m-1-k}+g(x)\sum_{k=0}^{n-1}[p]_{m+1+k,1}x^{n-1-k}.
\end{aligned}$$

记

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}[p]_{k+1,1}x^{m-1-k}=[p]_{1,1}x^{m-1}+[p]_{2,1}x^{m-2}+\cdots+[p]_{m,1},$$

$$v(x)=\sum_{k=0}^{n-1}[p]_{m+1+k,1}x^{n-1-k}=[p]_{m+1,1}x^{n-1}+[p]_{m+2,1}x^{n-2}+\cdots+[p]_{m+n,1}.$$

则 $f(x)\,u(x)+g(x)\,v(x)=r$. 另一方面,

$$\begin{aligned}
r &= [(XR)p]_{1,1}=[X(Rp)]_{1,1}\\
&= [X(\det(R)\,e)]_{1,1}\\
&= \sum_{j=1}^{m+n}[X]_{1,j}[\det(R)\,e]_{j,1}\\
&= [X]_{1,m+n}[\det(R)\,e]_{m+n,1}\\
&= 1\det(R)=\det(R).
\end{aligned}$$

故 $f(x)\,u(x)+g(x)\,v(x)=\det(R)$.

(4) 设数 c 适合 $f(c)=0=g(c)$. 由 (3) 知, 必 $0=f(c)\,u(c)+g(c)\,v(c)=\det(R)$ (我们代 x 以数 c). 这有时是有用的.

例 C.125 解方程组

$$\begin{cases} 11x^2 - 2xy - 44y^2 - x + 26y - 32 = 0, \\ 4x^2 - 18xy + 49y^2 - 4x + 9y - 118 = 0. \end{cases} \tag{C.10}$$

我们可用上例的结果解方程组 (C.10). 为此, 我们记

$$\begin{aligned} f_y(x) &= 11x^2 + (-2y-1)x + (-44y^2 + 26y - 32), \\ g_y(x) &= 4x^2 + (-18y-4)x + (49y^2 + 9y - 118). \end{aligned}$$

设 $x = a$, $y = b$ 是方程组 (C.10) 的一个解. 则

$$\begin{aligned} 0 &= 11a^2 - 2ab - 44b^2 - a + 26b - 32 \\ &= 11a^2 + (-2b-1)a + (-44b^2 + 26b - 32), \\ 0 &= 4a^2 - 18ab + 49b^2 - 4a + 9b - 118 \\ &= 4a^2 + (-18b-4)a + (49b^2 + 9b - 118), \end{aligned}$$

即 $f_b(a) = 0 = g_b(a)$. 故

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 4 & 0 \\ -2b-1 & 11 & -18b-4 & 4 \\ -44b^2+26b-32 & -2b-1 & 49b^2+9b-118 & -18b-4 \\ 0 & -44b^2+26b-32 & 0 & 49b^2+9b-118 \end{bmatrix}$$

的行列式是 0. 另一方面, 可以算出, 此阵的行列式是 $342\,125\,(b^2-1)\,(b^2-4)$. 于是, 若 $x = a$, $y = b$ 是方程组 (C.10) 的一个解, 则 $b = 1$ 或 $b = -1$ 或 $b = 2$ 或 $b = -2$. 则 (代 b 以 1)

$$\begin{cases} 11a^2 - 2a - 44 - a + 26 - 32 = 0, \\ 4a^2 - 18a + 49 - 4a + 9 - 118 = 0; \end{cases} \tag{C.11}$$

或 (代 b 以 -1)

$$\begin{cases} 11a^2 + 2a - 44 - a - 26 - 32 = 0, \\ 4a^2 + 18a + 49 - 4a - 9 - 118 = 0; \end{cases} \tag{C.12}$$

或 (代 b 以 2)

$$\begin{cases}11a^2-4a-176-a+52-32=0,\\ 4a^2-36a+196-4a+18-118=0;\end{cases} \tag{C.13}$$

或 (代 b 以 -2)

$$\begin{cases}11a^2+4a-176-a-52-32=0,\\ 4a^2+36a+196-4a-18-118=0.\end{cases} \tag{C.14}$$

方程组 (C.11) 的解是 $a=-2$; 方程组 (C.12) 的解是 $a=3$; 方程组 (C.13) 的解是 $a=4$; 方程组 (C.14) 的解是 $a=-5$. 于是, 若 $x=a$, $y=b$ 是方程组 (C.10) 的一个解, 必:

$$\begin{aligned} & a=-2, \quad b=1;\\ \text{或}\quad & a=3, \quad b=-1;\\ \text{或}\quad & a=4, \quad b=2;\\ \text{或}\quad & a=-5, \quad b=-2.\end{aligned}$$

最后, 我们验证这些是否是方程组 (C.10) 的解. 可以验证, 它们都是解. 于是, 方程组 (C.10) 的解是:

$$\begin{aligned} & x=-2, \quad y=1;\\ \text{或}\quad & x=3, \quad y=-1;\\ \text{或}\quad & x=4, \quad y=2;\\ \text{或}\quad & x=-5, \quad y=-2.\end{aligned}$$

C.39　总结

用归纳定义定义行列式的教材似乎要比用组合定义定义行列式的教材少. 具体地, 为数学学生准备的教材 (即 “高等代数”) 较少用归纳定义, 而为非数学学生准备的教材 (即 “线性代数”) 倒是有不少用归纳定义的, 但仍不算 “多”.

按多列 (行) 展开行列式是教学的一个难点. 毕竟, 我们较少用它算行列式. 我认为, 这是一个更理论的 (而不是应用的) 定理. 我想, 我要么不讲它, 要么通俗地讲它 (不要求熟悉). 所以, 我加了一个具体的例, 并希望此例可助学生理解按多列展开行列式. 证明的方法还是数学归纳法. 我用到了按 (任何) 一列展开行列式的公式. 所以, 理论地, 这个论证可被任何一本教材用 (毕竟, 一般地, 讲按多列展开行列式前, 都会讲按一列展开行列式). 不过, 我没看到这样的教材 (包括一本用归纳定义定义行列式, 但用完全展开的公式证明此事的高等代数教材).

我似乎讲完了我想讲的. 希望我的书可助您真地入门. 再见.

参考文献

[1] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 田代军, 周泽华, 杨奇. 仿 Kronecker 符号及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(19): 161-167. DOI: http://dx.chinadoi.cn/10.3969/j.issn.1000-0984.2007.19.027.

[3] 项武义. 基础代数学[M]. 北京: 人民教育出版社, 2004.

[4] 谢启鸿, 姚慕生, 吴泉水. 高等代数学[M]. 4 版. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

[5] 许以超. 线性代数与矩阵论[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[6] BEEZER R A. A first course in linear algebra[M/OL]. Version 3.50. Gig Harbor, Washington, USA: Congruent Press, 2015 [2023-06-28]. http://linear.pugetsound.edu/.

[7] SERRE D. Matrices: Theory and applications[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2010. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7683-3.

记号表

我在此写下本书用到的一些记号与其位置. 这里, 记号的 "位置" 是我首次正式地定义这个记号的位置. 1.x 表示第一章的节 x; K.y 表示附录 K 的节 y, 其中 K 是一个大写拉丁字母.

记号	的位置是
$\rho(i,j)$	1.1
$\tau(c_1,c_2,\cdots,c_n)$	1.4
$\operatorname{sgn}(x)$	1.4
$s(c_1,c_2,\cdots,c_n)$	1.4
阵 A	1.5
$[A]_{i,j}$	1.5
A^{T}	1.5
$A(i_1,\cdots,i_s\|j_1,\cdots,j_t)$	1.5
$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_s \\ j_1,j_2,\cdots,j_t \end{pmatrix}$	1.5
阵 0	1.5
$\det(A)$	1.6
$[c_1,c_2,\cdots,c_n]$	1.10
$\delta(i,j)$	1.12
I_n	1.12
I	1.12
$\operatorname{adj}(A)$	1.19
$A\{i,B\}$	1.21

(续)

记号	的位置是
$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$	1.31
$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$	A.1
Δ	A.2
求和号 $\sum$	B.1
求积号 $\prod$	B.2
$\in$	B.4
$S \times T$ (集)	B.4
$E(n; p, q; s)$	C.31
pf (A)	C.33

词表

我在此写下本书用到的一些词与其位置. 这里, 词的 “位置” 是我首次正式地定义 (或提到) 这个词的位置. 1.x 表示第一章的节 x; K.y 表示附录 K 的节 y, 其中 K 是一个大写拉丁字母.

词	的位置是
0 级阵	1.7
1 元 2 次方程	A.1
1 元 3 次方程	A.1
1 元 4 次方程	A.4
2 元 $\leqslant 2$ 次式	A.2
δ-记号	1.12
(i, j)-元	1.5
n 级阵	1.5
n 元 $\leqslant 1$ 次式	1.20
n 元 $\leqslant 1$ 次方程	1.20
p 级子阵	1.23
ρ-记号	1.1
Binet–Cauchy 公式	1.18
Cramer 公式	1.21
pfaffian	C.33
按多列展开	1.8
按一列展开	1.7
包含	B.4
保乘的	C.14

(续)

词	的位置是
倍加	C.13
单位阵	1.12
对换	C.4
对角线法则	1.6
多线性	1.13
二元运算	B.4
反称性	1.13
反称阵	C.29
方程组	1.20
方阵	1.5
非零解	1.20
分配律	B.4
符号	1.4
古伴	1.19
规范性	1.13
行列式	1.6
集	B.4
迹	C.1
交错性	1.13
交换律	B.4
结合律	B.4
解	1.20
空集	B.4
空约束	B.1
零解	1.20
零阵	1.5
逆序	1.4
逆序数	1.4
排列	1.2

(续)

词	的位置是
判别式	A.2
平凡的因子	B.3
求和号	B.1
求积号	B.2
缺项定位	1.1
属于	B.4
数学归纳法	B.3
素数	B.3
完全展开	1.9
位置	1.1
线性方程	1.20
相反阵	1.5
相邻对换	C.4
消去律	C.22
辛阵	C.28
因子	B.3
有序对	B.4
元	B.4
约束	B.1
阵	1.5
阵的积	1.17
阵的数乘	1.5
整数集	B.4
转置	1.5
子阵	1.5

Enkonduko al Determinantoj