数值实验四

1. 解线性方程组的列主元素高斯消去法和LU分解法

实验目的：通过数值实验，从中体会解线性方程组选主元的必要性和LU分解法的优点，以及方程组系数矩阵和右端向量的微小变化对解向量的影响。

实验内容：解下列两个线性方程组

（1） $$\begin{pmatrix} 3.01 & 6.03 & 1.99 \\ 1.27 & 4.16 & -1.23 \\ 0.987 & -4.81 & 9.34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（2） $$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2.099999 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 5.900001 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

实验要求：

（1） 用你熟悉的算法语言编写程序用列主元高斯消去法和LU分解求解上述两个方程组，输出Ax=b中矩阵A及向量b, A=LU分解的L及U，detA及解向量x.

（2） 将方程组（1）中系数3.01改为3.00，0.987改为0.990，用列主元高斯消去法求解变换后的方程组，输出列主元行交换次序，解向量x及detA，并与（1）中结果比较。

（3） 将方程组（2）中的2.099999改为2.1，5.900001改为5.9，用列主元高斯消去法求解变换后的方程组，输出解向量x及detA，并与（1）中的结果比较。

（4）用MATLAB的内部函数inv求出系数矩阵的逆矩阵，再输入命令x=inv(A)*b,即可求出上述各个方程组的解，并与列主元高斯消去法和LU分解法求出的解进行比较，体会选主元的方法具有良好的数值稳定性。用MATLAB的内部函数det求出系数行列式的值，并与（1）、（2）、（3）中输出的系数行列式的值进行比较。

2. 研究解线性方程组$Ax=b$迭代法收敛速度

实验目的：认识迭代法收敛的含义以及迭代法初值和方程组系数矩阵性质对收敛速度的影响。

实验内容：用迭代法求解$Ax=b$，其中$A\in R^{20\times 20}$为五对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & & & & & \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & & & & \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}_{20\times 20}$$

实验要求：

（1）选取不同的初始向量 $X^{(0)}$ 及右端向量 b，给定迭代误差要求，用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解，观察得到的序列是否收敛？若收敛，记录迭代次数，分析计算结果并得出你的结论。

（2）用 SOR 迭代法求上述方程组的解，松弛系数 ω 取 $1<\omega<2$ 的不同值，在 $\left\|X^{(k)}-X^{(k+1)}\right\|_{\infty}\le 10^{-5}$ 时停止迭代，记录迭代次数，分析计算结果与松弛系数 ω 的关系并得出你的结论。

（3）用 MATLAB 的内部函数 inv 求出系数矩阵的逆矩阵，再输入命令 x=inv(A)*b,即可求出上述各个方程组的解，并与上述方法求出的解进行比较。

3．病态线性方程组的求解

实验目的：通过实验体会病态线性方程组的性态，了解求解病态线性方程组的方法。

实验内容：考虑方程组 $Hx=b$ 的求解，其中系数矩阵 H 为 Hilbert 阵，

$$H=(h_{i,j})_{n\times n},h_{i,j}=\frac{1}{i+j-1},i,j=1,2,\cdots,n$$

这是一个著名的病态问题。通过首先给定解（例如取各个分量均为 1）再计算出右端的办法给出确定的问题。

实验要求：

（1） 选择问题的维数为 6，分别用列主元 Gauss 消去法、Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法求解方程组，其各自的结果如何？将计算结果与问题的解比较，结论如何？

（2） 逐步增大问题的维数，仍然用上述方法来解它们，计算的结果如何？计算的结果说明了什么？分析产生结果的原因。

（3） 讨论病态方程组的解法，并求解维数为 6、10、100 的上述方程组。