

Capítulo 1

Antidiferenciación. Métodos de integración.

1.1. Antidiferenciación

Definición 1 Sea las funciones f y F definidas en un intervalo I , entonces F es una antiderivada de f sobre I ssi:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

El proceso de encontrar una antiderivada de una función se denomina antidiferenciación.

Ejemplo 1 Si $f(x) = 5x^4$, entonces $F_1(x) = x^5$, $F_2(x) = x^5 + 2$, $F_3(x) = x^5 + 107$, son antiderivadas de f en \mathbb{R} . En efecto, $F'_1(x) = F'_2(x) = F'_3(x) = 5x^4, \forall x$. Luego si C es una constante, podríamos decir de $F(x) = x^5 + C$ es siempre una antiderivada de f en \mathbb{R} .

Teorema 1 Supongamos que las siguientes condiciones son satisfechas:

- (a) F es cualquier antiderivada de f sobre I ,
- (b) C es cualquier constante,
- (c) $G(x) = F(x) + C$, donde $x \in I$.

Entonces G es una antiderivada de f sobre I .

Teorema 2 Si F y G son antiderivadas de f sobre un intervalo I entonces existe un número C tal que:

$$G(x) = F(x) + C, \forall x \in I.$$

Teorema 3 Si $H'(x) = 0 \forall x \in I$, entonces H es constante en I .

Ahora usaremos el simbolismo $\int f(x)dx$ para denotar una antiderivada arbitraria de f sobre un intervalo.

Definición 2 Sea C una constante y f definida sobre I . Entonces:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \forall x \in I$$

ssi

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Teorema 4

(a) Si k es cualquier número, entonces $\int k dx = kx + C$.

(b) Si k es cualquier número y $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$, entonces $\int kx^r dx = \frac{kx^{r+1}}{r+1} + C$.

Ejemplo 2

$$\int 3x^2 dx = 3 \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C.$$

$$\int 6x^{-3} dx = 6 \frac{x^{-2}}{-2} + C = -3x^{-2} + C = \frac{-3}{x^2} + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{\sqrt{2}} x^{1/2} + C = \sqrt{2x} + C.$$

Teorema 5 Si k cualquier número y F es una antiderivada de f sobre un intervalo I , entonces

$$\int kf(x) dx = kF(x) + C, \forall x \in I.$$

En conclusión podemos expresar

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Teorema 6 Si F_1, F_2, \dots, F_n son antiderivadas de f_1, f_2, \dots, f_n sobre un intervalo I , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \int [f_1 + f_2 + \dots + f_n] dx &= F_1 + F_2 + \dots + F_n(x) + C, \forall x \in I \\ &= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 3

1 Encontrar $\int (x^3 - 4x^2 + 10) dx =$

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 4x^2 + 10) dx &= \int x^3 dx + \int -4x^2 dx + \int 10 dx \\ &= \frac{x^4}{4} + C_1 + \frac{-4x^3}{3} + C_2 + 10x + C_3 \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 10x + C, \end{aligned}$$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3$.

2 Encontrar $\int \frac{(x^2+4)^2}{x^{1/2}} =$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2+4)^2}{x^{1/2}} dx &= \int \frac{x^4+8x^2+16}{x^{1/2}} dx = \\ \int (x^{7/2} + 8x^{3/2} + 16x^{-1/2}) dx &= \frac{2}{9} x^{9/2} + 8 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} + 16 \cdot 2x^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{9} x^{9/2} + \frac{16}{5} x^{5/2} + 32x^{1/2} + C. \end{aligned}$$

Teorema 7 (Regla de la cadena para la Antidiferenciación)

Si g es una función diferenciable sobre un intervalo I , y f tiene una antiderivada F sobre I que contiene todos los números $g(x)$ cuando $x \in I$, entonces:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C, \forall x \in I.$$

Demostración 1 Por hipótesis, $F'(s) = f(s)$, si $s \in J$. Entonces por la regla de la cadena $D_x(F \circ g) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ si $x \in I$.

Nota: El teorema anterior nos permite obtener $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ haciendo la sustitución $u = g(x)$ y $du = g'(x) dx$.

Así podemos escribir

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u) \cdot du = F(u) + C.$$

Teorema 8 (Fórmula general para la antidiferenciación de potencias)

Si g es una función diferenciable en I , k cualquier número, $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$. Entonces $\forall x \in I$.

$$\int k(g(x))^r g'(x) dx = k \frac{(g(x))^{r+1}}{r+1} + C.$$

Ejemplo 4 Encontrar $\int \sqrt[3]{x^2+1} \cdot 2x dx$

$$x^2 + 1 = g(x), g'(x) = 2x, \int (g(x))^3 \cdot g'(x) dx = \frac{(g(x))^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C.$$

Ejemplo 5 Encontrar $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} dx$ $u = x^3 + 8, du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{1}{3} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du = \frac{2}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3} u^{1/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+8} + C.$$

Ejemplo 6 $\int (5x-4)^{10} dx =$

$$u = 5x - 4, du = 5dx$$

$$\int (5x-4)^{10} dx = \int u^{10} \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int u^{10} du = \frac{1}{5} \frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{55} (5x-4)^{11} + C.$$

Ejemplo 7 Encontrar $\int \frac{12x-9}{(2x^2-3x+5)^6} dx$

$$u = 2x^2 - 3x + 5 \quad \begin{aligned} du &= (4x-3)dx / \cdot 3 \\ 3du &= (12x-9)dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{12x-9}{(2x^2-3x+5)^6} dx = \int \frac{3du}{u^6} = \int 3u^{-6} du = \frac{3u^{-5}}{-5} + C$$

$$= -\frac{3}{5(2x^2-3x+5)^5} + C.$$

1.1.1. Fórmulas Básicas de Integración

$$1. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$2. \int dx = x + C$$

$$4. \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

5. $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

13. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

14. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

15. $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$

8. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

16. $\int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

17. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C$

11. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

18. $\int \csc x \cot x dx = -\cot x + C$

12. $\int x^n du = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Ejercicios Propuestos

I. Calcular las integrales:

1. $\int x^5 dx$

5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$

2. $\int (x + \sqrt{x}) dx$

6. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$

7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

II. Integración por sustitución:

1. $\int e^{5x} dx$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2(7x)}$

11. $\int \cot(5x - 7) dx$

2. $\int \cos(5x) dx$

7. $\int \frac{dx}{3x - 7}$

12. $\int \frac{dy}{\cot(3y)}$

3. $\int \sin(ax) dx$

8. $\int \frac{dx}{1 - x}$

13. $\int \cot\left(\frac{x}{3}\right) dx$

4. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

9. $\int \frac{dx}{5 - 2x}$

14. $\int \tan(\phi) \sec^2(\phi) d\phi$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x)}$

10. $\int \tan(2x) dx$

15. $\int (\cot(e^x))e^x dx$

16. $\int \left(\tan(4s) - \cot\left(\frac{s}{4}\right) \right) ds$
17. $\int \sin^2 x \cos x \, dx$
18. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$
19. $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$
20. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$
21. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$
22. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$
23. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$
24. $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} \, dx$
25. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}}$
26. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} \, dx$
27. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}$
28. $\int \frac{\sin(2x) \, dx}{(1 + \cos(2x))^2}$
29. $\int \frac{\sin(2x) \, dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$
30. $\int \frac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x} \, dx$
31. $\int \frac{\cos(2x) \, dx}{(2 + 3 \sin(2x))^3}$
32. $\int \frac{\sin(3x) \, dx}{\sqrt[3]{\cos^4(3x)}}$
33. $\int \frac{\ln^2 x \, dx}{x}$
34. $\int \frac{\arcsin(x) \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
35. $\int \frac{\arctan(x) \, dx}{1+x^2}$
36. $\int \frac{\arccos^2(x) \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
37. $\int \frac{\operatorname{arccot}(x) \, dx}{1+x^2}$
38. $\int \frac{x \, dx}{x^2 + 1}$
39. $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} \, dx$
40. $\int \frac{\cos x \, dx}{2 \sin x + 3}$
41. $\int \frac{dx}{x \ln x}$
42. $\int 2x(x^2 + 1)^4 \, dx$
43. $\int \tan^4 x \, dx$
44. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan x}$
45. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \tan x + 1)}$
46. $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} \, dx$
47. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$
48. $\int \frac{\cos(2x)}{2 + 3 \sin(2x)} \, dx$
49. $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$
50. $\int \cos(a + bx) \, dx$
51. $\int e^{2x} \, dx$
52. $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$
53. $\int e^{\frac{x}{a}} \, dx$
54. $\int 3^x e^x \, dx$
55. $\int e^{-3x} \, dx$
56. $\int (e^{5x} + a^{5x}) \, dx$
57. $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) \, dx$
58. $\int e^{\frac{x}{2}} \, dx$
59. $\int e^{x^2} x \, dx$
60. $\int (e^{2x})^2 \, dx$
61. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} \, dx$
62. $\int \frac{e^x \, dx}{3 + 4e^x}$
63. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{2 + e^{2x}}$
64. $\int \frac{dx}{1 + 2x^2}$
65. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$
66. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$
67. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
68. $\int \frac{dx}{4+x^2}$

69. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$

75. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$

81. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

70. $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$

76. $\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

71. $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$

77. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

83. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

72. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

78. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

84. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x} \sin(2x) dx$

73. $\int \frac{x dx}{x^4+a^4}$

79. $\int \frac{x - \arctan x}{1+x^2} dx$

74. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

80. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

85. $\int \frac{\sin(2x) dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

1.2. Aplicaciones de la Antidiferenciación

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1.1)$$

es un ejemplo de una ecuación diferencial de primer orden. Recordemos que $\frac{dy}{dx}$ representa la derivada

de y con respecto a x , una función F es una solución de (1.1) sobre un intervalo I ssi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

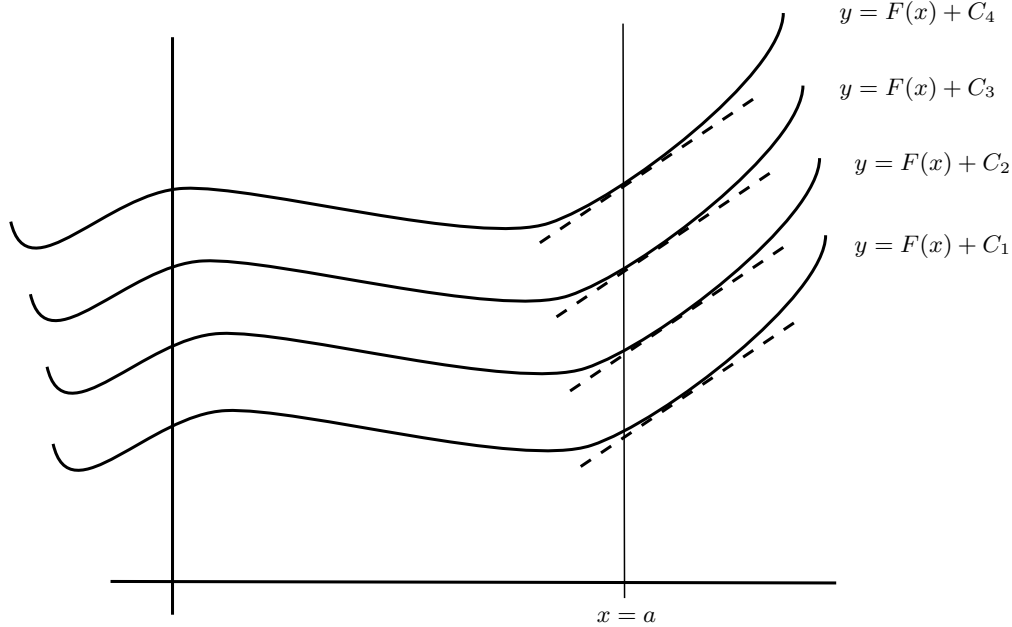
Supongamos que F es una solución de (1.1) sobre I y si C constante, entonces

$$y = F(x) + C, \quad (1.2)$$

también es solución.

Así en orden a obtener todas las soluciones de (1.1) sobre I , nosotros obtenemos la antiderivada general de f sobre I .

La ecuación (1.2) corresponde a una familia de curvas, cada una corresponde a valores diferentes de C .



La condición $y = y_0$ y $x = x_0$ se llama condición inicial.

Ejemplo 8 Si la pendiente de una curva está dada por $\frac{dy}{dx} = -3x^{-1/2}$ y la curva pasa por $(4, -1)$. Obtener la ecuación de la curva.

Solución:

Al integrar la ecuación $\frac{dy}{dx} = -3x^{-1/2}$ obtenemos que $y = \frac{-3x^{1/2}}{1/2} + C = -6x^{1/2} + C$. Como la curva pasa por el punto $(4, -1)$ evaluamos $y(4) = -1$. O sea, $-1 = -6(4)^{1/2} + C$ que implica que $C = 11$. En consecuencia, la curva buscada está dada por $y = -6\sqrt{x} + 11$. ■

También resolveremos ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x),$$

antiderivando dos veces. Con cada antidiferenciación son introducidas nuevas constantes.

Ejemplo 9 En todo punto sobre un gráfico, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4$, y el gráfico pasa a través de los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 4)$, encontrar la ecuación del gráfico.

Solución:

Al integrar dos veces consecutivas sobre $\frac{d^2y}{dx^2} = -4$, obtenemos en primer lugar $\frac{dy}{dx} = -4x + C_1$ y luego $y = \frac{-4x^2}{2} + C_1x + C_2$. O sea, $y = -2x^2 + C_1x + C_2$. Como la curva pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 4)$, esto implica, respectivamente, que $y(1) = 2$ y $y(-1) = 4$. Al evaluar obtenemos $C_1 + C_2 = 4$ y $-C_1 + C_2 = 6$, respectivamente.

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos que $C_1 = -1$ y $C_2 = 5$. En consecuencia, la curva buscada es $y = -2x^2 - x + 5$. ■

Si una partícula se mueve verticalmente cerca de la superficie de la tierra, esta está sujeta a una aceleración hacia abajo debido a la influencia de la gravedad g , donde $g \approx 32 \text{ ft/seg}^2$. Si la gravedad es la única fuerza ejercida sobre la partícula, la aceleración de la partícula está dada por:

$$a \equiv -g,$$

el signo está elegido por el sentido del movimiento y en la dirección en la que g actúa.

Ejemplo 10 Una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicialmente de 48ft/seg desde una altura de 64ft sobre el suelo.

(i) ¿Cuándo la bola llega a su máxima altura?

(ii) ¿A qué velocidad la bola toca el suelo?

Solución: Los datos obtenidos del problema son $v(t=0) = 48$ y $s(t=0) = 64$.

De acuerdo a la ley enunciada, sabemos que $a = -32$ que es equivalente a $\frac{dv}{dt} = -32$. Integrando respecto a t esta última ecuación se tiene que $v(t) = -32t + C_1$. Ahora, como $v(0) = 48$, se tiene que $C_1 = 48$. Por lo tanto $v(t) = -32t + 48$.

Por otro lado, como $\frac{ds}{dt} = v(t) = -32t + 48$, integrando tenemos que $s(t) = \frac{-32t^2}{2} + 48t + C_2$. Ahora usando el dato que $s(0) = 64$, se tiene que $C_2 = 64$. Por lo tanto, $s(t) = -16t^2 + 48t + 64$.

Para dar respuesta a (i), debemos hacer $v(t) = 0$, entonces $-32t + 48 = 0$. Por lo tanto, en $t = \frac{3}{2}$ seg. llega a su altura máxima. Luego para (ii), basta hacer $s(t) = 0$, entonces $-16t^2 + 48t + 64 = 0$, o bien $(t-4)(t+1) = 0$. De aquí, descartamos $t = -1$, y nos quedamos con $t = 4$. En consecuencia, transcurrido 4 seg. la bola alcanza el suelo con una velocidad $v(4) = -32 \cdot 4 + 48 = -80$ ft/seg. ■

Ejercicios Propuestos

1. Encontrar f .

a) $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

e) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, $f(1) = 1$

b) $f''(x) = \cos x$

f) $f'(t) = 3t^{-2}$, $f(1) = 0$

c) $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

g) $f''(x) = 3e^x + 5 \sin x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$

d) $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3$, $f(1) = 6$

h) $f'''(x) = \sin x$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$

2. La gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y la pendiente de su tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encontrar $f(2)$.

3. Hallar una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la gráfica de f .

4. Una partícula se mueve de acuerdo con las ecuaciones dadas. Encuentre su posición.

a) $v(t) = 1,5\sqrt{t}$, $s(0) = 0$

c) $a(t) = 10 + 3t - 3t^2$, $s(0) = 0$, $s(2) = 10$

b) $a(t) = \cos t + \sin t$, $s(0) = 0$, $v(0) = 5$

5. Se deja caer una piedra desde el mirador de una torre, a 450 m. sobre el piso.

a) Determine la distancia de la piedra al piso en el momento t .

b) Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al suelo?

c) Con qué velocidad llega al suelo?

d) Si se lanza la piedra hacia abajo con una velocidad de 5 m/s, cuánto tarda en llegar al suelo?

6. Se arroja hacia arriba una pelota, con velocidad de 48 *pies/seg* desde el borde de un acantilado a 432 *pies* sobre el fondo. Calcule su altura sobre el fondo a los t segundos después. Cuándo alcanza su altura máxima?, cuándo llega al fondo?.
7. Desde el borde del acantilado del ejercicio anterior se arrojan dos pelotas hacia arriba. La primera se avienta a una velocidad de 48 *pies/seg*, y la segunda se arroja un segundo después, a una velocidad de 24 *pies/seg*. Se encuentran alguna vez las pelotas?.
8. Las gotas de lluvia crecen al caer y su área superficial crece por consiguiente, aumenta la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial, hacia abajo, de 10 *m/s* y su aceleración, también hacia abajo, es

$$a = \begin{cases} 9 - 0,9t & \text{si } 0 \leq t \leq 10, \\ 0 & \text{si } t > 10. \end{cases}$$

Si la gota se encuentra inicialmente a 500 *m* sobre el piso, cuánto tarda en caer?.

9. Un automóvil viaja a 50 *mi/h* cuando se le aplican los frenos a fondo, produciendo una desaceleración constante de 40 *pies/seg*². Qué distancia recorre hasta detenerse?.
10. Qué aceleración constante se necesita para aumentar la velocidad de un automóvil de 30 *mi/h* a 50 *mi/h* en cinco segundos?.
11. Un automóvil frena con desaceleración constante de 40 *pies/seg*² y produce derrapones que miden 160 *pies* hasta detenerse. A qué velocidad corría el vehículo al aplicar los frenos?.
12. Se deja caer una piedra desde un acantilado y llega al fondo a una velocidad de 120 *pies/seg*. Cuál es la altura del acantilado?.

1.3. Métodos de Integración

1.3.1. Integración por partes:

Es conocido que

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x), \quad \forall x \in I.$$

Ahora, integrando respecto a x obtenemos

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx.$$

En consecuencia,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Haciendo, los siguientes cambios de variables

$$\begin{aligned} u &= f(x) & dv &= g'(x)dx \\ du &= f'(x)dx & v &= g(x) \end{aligned}$$

Obtenemos la conocida fórmula de integración por partes

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Ejemplo 11 $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{array}$$

Ejemplo 12 $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^{3x} dx \\ du = 2x dx & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{3x} dx \\ du = dx & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right] \\ &= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2x}{9} e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2x}{9} e^{3x} + \frac{2}{27} \int e^{3x} dx + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 13 $\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$

$$\begin{array}{ll} u = \sec x & dv = \sec^2 x dx \\ du = \tan x \sec x dx & v = \tan x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \sec x dx \\ 2 \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C \\ \therefore \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C. \end{aligned}$$

1.3.2. Potencias de seno y coseno

Ahora veremos cómo se calculan integrales de expresiones que contienen potencias de funciones trigonométricas.

i) Integración de potencias impares de seno o coseno:

$$\begin{aligned} \int \sen^{2n+1}(x) dx &= \int \sen^{2n}(x) \sen(x) dx, \quad n \in \mathbb{N} \\ &= \int (\sen^2(x))^n \sen(x) dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x))^n \sen(x) dx. \end{aligned}$$

Finalmente se desarrolla $(1 - \cos^2(x))^n$ y después se integra término a término. Las integrales resultantes son inmediatas usando sustitución simple.

Ejemplo 14 Calcule $\int \sen^5(x) dx =$

De lo anterior, sigue que

$$\begin{aligned}
 \int \sen^5(x) \, dx &= \int \sen^4(x) \sen(x) \, dx, \\
 &= \int (\sen^2(x))^2 \sen(x) \, dx, \\
 &= \int (1 - \cos^2(x))^2 \sen(x) \, dx \\
 &= \int \sen(x) \, dx - 2 \int \cos^2(x) \sen(x) \, dx + \int \cos^4(x) \sen(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

Como al hacer la sustitución $u = \cos(x)$, se obtiene que $du = -\sen(x) \, dx$, sustituyendo tenemos que

$$\int \sen^5(x) \, dx = -\cos(x) + \frac{2}{3} \cos^3(x) - \frac{1}{5} \cos^5(x) + C.$$

ii) Integración de potencias pares de seno o coseno:

En este caso se pasa al ángulo doble, consiguiendo así reducir el exponente a la mitad. Si el exponente resultante en algunas integrales es par se vuelve a pasar al ángulo doble y si es impar se aplica i). Para esto se requieren las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sen^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Así, entonces:

$$\int \cos^{2n}(x) \, dx = \int (\cos^2(x))^n \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^n \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\int \sen^{2n}(x) \, dx = \int (\sen^2(x))^n \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^n \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 15 Calcule $\int \cos^6(x) \, dx =$

Como el exponente es par pasaremos al ángulo doble:

$$\cos^6(x) = (\cos^2(x))^3 = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^3.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int \cos^6(x) \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^3 \, dx, \\
 &= \frac{1}{8} \left[\int dx + 3 \int \cos(2x) \, dx + 3 \int \cos^2(2x) \, dx + \int \cos^3(2x) \, dx \right], \\
 &= \frac{1}{8} \left[x + \frac{3}{2} \sen(2x) + 3 \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} \, dx + \int \cos^2(2x) \cos(2x) \, dx \right], \\
 &= \frac{1}{8} \left[x + \frac{3}{2} \sen(2x) + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8} \sen(4x) + \int \cos(2x) \, dx - \int \sen^2(2x) \cos(2x) \, dx \right], \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \sen(2x) + \frac{3}{8} \sen(4x) + \frac{1}{2} \sen(2x) - \frac{1}{6} \sen^3(2x) \right] + C, \\
 &= \frac{5}{16}x + \frac{1}{4} \sen(2x) + \frac{3}{64} \sen(4x) - \frac{1}{48} \sen^3(2x) + C.
 \end{aligned}$$

iii) Integración de potencias de seno por coseno:

Nos referimos a integrales de la forma:

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Este caso se reduce a alguno de los anteriores, ya que:

Si m o n es impar aplicamos *i*).

Si m y n son ambos pares aplicamos *ii*).

Ejemplo 16 Calcule $\int \sin^5 x \cos^4 x dx =$

Aquí, aplicamos el primer caso. A decir,

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^4 x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx \\ &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cos^4 x \sin x dx \\ &= \int \cos^4 x \sin x dx - 2 \int \cos^6 x \sin x dx + \int \cos^8 x \sin x dx \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x.$$

1.3.3. Sustituciones Trigonométricas

Este método se utiliza para resolver integrales con radicales en su integrando de la forma:

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2}, \quad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

La idea es realizar un cambio de variables, sustitución, de modo que se elimine los radicales. Esto se consigue utilizando las identidades de pitágoras.

Las sustituciones de acuerdo al integrando están dadas en la siguiente tabla

Expresión del Integrando	Sustitución Trigonométrica
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \sin(\theta)$ o $u = a \cos(\theta)$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a \tan(\theta)$ o $u = a \cot(\theta)$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \sec(\theta)$ o $u = a \csc(\theta)$

Ejemplo 17 Calcule $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx =$

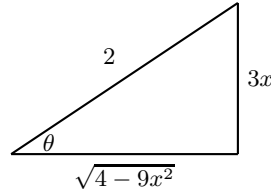
Nótese que de acuerdo a la tabla anterior podemos hacer la siguiente sustitución

$$3x = 2 \sin(\theta), \quad \text{de donde,} \quad dx = \frac{2}{3} \cos(\theta) d\theta$$

Ahora sustituyendo tenemos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx = \int \frac{(\frac{2}{3} \sin(\theta))^3}{\sqrt{4 - (2 \sin(\theta))^2}} \frac{2}{3} \cos(\theta) d\theta = \frac{8}{81} \int \sin^3(\theta) d\theta = \frac{8}{81} \left(\frac{1}{3} \cos^3(\theta) - \cos(\theta) \right) + C.$$

De la sustitución, tenemos que $\sin(\theta) = \frac{3x}{2}$, y así podemos construir el triángulo



y a partir de él, podemos calcular $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}$.

Finalmente

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-9x^2}} dx = \frac{8}{81} \left(\frac{1}{3} \cos^3(\theta) - \cos(\theta) \right) + C = \frac{1}{243} (\sqrt{4-9x^2})^3 - \frac{4}{81} \sqrt{4-9x^2} + C.$$

Ejemplo 18 Calcule $\int \sqrt{2+x^2} dx =$

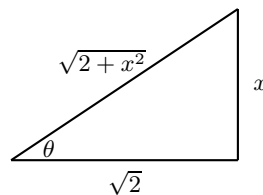
De acuerdo a la tabla anterior podemos hacer la siguiente sustitución

$$x = \sqrt{2} \tan(\theta), \quad \text{de donde,} \quad dx = \sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{2+x^2} = \sqrt{2} \sec(\theta).$$

Sustituyendo en la integral original obtenemos

$$\int \sqrt{2+x^2} dx = \int (\sqrt{2} \sec(\theta)) (\sqrt{2} \sec^2(\theta)) d\theta = 2 \int \sec^3(\theta) d\theta = 2(\sec(\theta) \tan(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|) + C$$

Del cambio de variable $x = \sqrt{2} \tan(\theta)$, obtenemos que $\tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{2}}$, y podemos construir el triángulo



y a partir de él calcular $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}}$ y $\tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{2}}$, que al sustituir en la integral se obtiene

$$\int \sqrt{2+x^2} dx = 2(\sec(\theta) \tan(\theta) + \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta))) + C = x\sqrt{2+x^2} + 2 \ln \left(\frac{x + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

Ejemplo 19 Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} =$

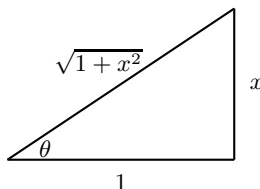
De acuerdo a la tabla anterior podemos hacer la siguiente sustitución

$$x = \tan(\theta), \quad \text{de donde,} \quad dx = \sec^2(\theta) d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{(1+x^2)^3} = (\sqrt{1+x^2})^3 = \sec^3(\theta).$$

Sustituyendo en la integral original obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{\sec^3 \theta} = \int \cos(\theta) d\theta = \sin(\theta) + C.$$

Del cambio de variable $x = \tan(\theta)$, podemos construir el triángulo



a partir del cual calculamos $\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, que al sustituir en la integral se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \sin(\theta) + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

1.3.4. Completación de Cuadrados.

Ilustramos a continuación como el conocer primitivas de $\frac{1}{1+x^2}$ y de $\frac{1}{1-x^2}$ nos permite de manera elemental, mas precisamente por completación de cuadrados, obtener

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

en el caso $a \neq 0$ ya que el caso $a = 0$ es inmediato.

Recordemos que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C.$$

Además

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C.$$

(Demuestre la última igualdad. Indicación $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$.)

Observación:

Si bien $\operatorname{arctanh}(x)$ y $\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ son primitivas de $\frac{1}{1-x^2}$, y por lo tanto difieren en una constante en su intervalo de definición común, observamos que en tanto $\operatorname{arctanh}(x)$ está definida para $x \in (-1, 1)$, $\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ está definida para todo $x \neq 0$. Evaluando las constantes se tiene

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \text{ para todo } x \in (-1, 1).$$

Veremos ahora un par de ejemplos.

Ejemplo 20 Calcular $\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$.

Solución: Completando cuadrados tenemos

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right).$$

Así haciendo la substitución $\frac{1}{4}u = (x + \frac{3}{4})$, y por lo tanto $\frac{1}{4}du = dx$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} dx = 2 \int \frac{1}{u^2 - 1} du = -2\text{Arctanh}(u) + C.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} = -2\text{Arctanh}\left(\frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) + C.$$

También Ud. podría haber elegido la primitiva en términos de logaritmo.

Ejemplo 21 Calcular $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2}$.

Solución: Completando cuadrados tenemos

$$2x^2 + 3x + 2 = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right).$$

Así haciendo la substitución $\frac{\sqrt{7}}{4}u = (x + \frac{3}{4})$, y por lo tanto $\frac{\sqrt{7}}{4}du = dx$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan}(u) + C.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{\sqrt{7}}{8} \text{Arctanh}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) + C.$$

Observación: Observamos que el hecho de obtener Arctan o Arctanh en la primitiva depende del discriminante de la cuadrática $ax^2 + bx + c$.

Ejercicio: Calcular $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Ejemplo 22 Podemos calcular también integrales del tipo

$$\int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Por ejemplo calcular $\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx$.

Solución: Para producir la derivada del denominador sumamos y restamos $\frac{3}{4}$ en el numerador. Entonces

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \int \frac{x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{2x^2+3x+2} dx.$$

Así

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+3}{2x^2+3x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2+3x+2} dx.$$

De este modo usando el ejercicio anterior para la segunda primitiva y una substitución elemental para la primera primitiva obtenemos

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \frac{1}{4} \ln(|2x^2+3x+2|) + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{7}}{8} \text{Arctanh}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) + C.$$

La idea de completar cuadrados puede ser usada en otros casos como se ilustra en el ejercicio siguiente. **Ejercicio:** Recuerde que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

$$\text{y que } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh}(x) + C.$$

Calcular:

$$\text{a) } \int \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x+2}} dx.$$

$$\text{b) } \int \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+x-2}} dx.$$

1.3.5. Fracciones Parciales.

Consulte un texto para una explicación mas detallada de este tópico. Aquí sólo explicaremos la idea y daremos un ejemplo.

El algoritmo de la división de polinomios nos garantiza que cualquier cuociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$ siempre puede escribirse en la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $m(x)$ y $r(x)$ son polinomios y grado de $r <$ grado de q .

Como $\int m(x)dx$ es trivialmente obtenible tenemos que para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ basta calcular $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$.

El Teorema Fundamental del Algebra nos garantiza que el polinomio $q(x)$ siempre puede descomponerse en la forma

$$q(x) = q_1^{k_1}(x) \cdots q_n^{k_n}(x)$$

donde $k_j \in \mathbb{N}$ y los q_j son polinomios de grado a lo más dos.

Obtener esta descomposición, que corresponde al problema de encontrar las raíces reales y complejas del polinomio, en la práctica es un problema difícil pero supongamos que lo hemos conseguido.

La técnica de descomposición en Fracciones Parciales garantiza que la fracción $\frac{r(x)}{q(x)}$ puede expresarse como suma de fracciones elementales de los dos siguientes tipos

$$\text{I. } \frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{II. } \frac{Ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Como, de las técnicas anteriores, somos capaces de encontrar primitivas para ambos casos I. y II. estamos en condiciones de encontrar una primitiva para cualquier cuociente de polinomios siempre que seamos capaces de descomponer el denominador.

A continuación veremos un ejemplo. Para mas detalles de esta técnica consulte un texto.

Ejemplo 23 Calcular $\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx$.

Solución: Buscamos, por el método de coeficientes indeterminados, A , B y C tales que

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2x + 5)}.$$

Sumando las dos fracciones del lado derecho obtenemos

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x+2)}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)}.$$

Igualando coeficientes en los numeradores se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ 2A + 2B + C &= 6 \\ 5A + 2C &= 2. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos $A = 2$, $B = 3$ y $C = -4$. De este modo

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{2}{(x+2)} + \frac{3x - 4}{(x^2 + 2x + 5)}$$

y por lo tanto

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)} dx = \int \frac{2}{(x+2)} dx + \int \frac{3x - 4}{(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

Como, por los métodos precedentes, podemos calcular $\int \frac{2}{(x+2)} dx$ y $\int \frac{3x-4}{(x^2+2x+5)} dx$ hemos resuelto el problema.

Ejercicio: Calcular

a)

$$\int \frac{3x + 8}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx.$$

b)

$$\int \frac{3x + 7}{x^4 - 16} dx.$$

c)

$$\int \frac{2x^4 + 9x^2 + x - 4}{x^3 + 4x} dx.$$

La substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$.

Comenzamos con un ejemplo.

Ejemplo 24 Calcule $\int \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} d\theta$.

Solución: Hacemos la substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$. Entonces usando las fórmulas trigonométricas tenemos

$$\cos(\theta) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin(\theta) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

y

$$d\theta = \frac{2}{1 + x^2} dx.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} d\theta = \int \frac{2(1 - x^2 - 2x)}{(1 - x^2 + 2x)(x^2 + 1)} dx.$$

Esta última integral puede ser evaluada por el método de fracciones parciales lo que termina el ejemplo.

Observación: La substitución $x = \tan(\frac{\theta}{2})$ siempre transforma cuocientes de polinomios en $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ en cuocientes de polinomios en x . Estos últimos pueden ser integrados por fracciones parciales.

Ejercicio: Calcular

$$a) \int \frac{1}{\sin(\theta) + \cos(\theta)} d\theta \quad b) \int \frac{\sin(\theta) + \cos(\theta)}{1 + \sin(\theta) + \cos^2(\theta)} d\theta$$

Ejercicios Propuestos

I. Integración por partes:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\int x e^x dx$ | 8. $\int x^n \ln x dx$ | 15. $\int x \cos^2 x dx$ |
| 2. $\int x \ln x dx$ | 9. $\int x \arctan x dx$ | 16. $\int \frac{x \arctan(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| 3. $\int x \operatorname{sen} x dx$ | 10. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x dx$ | 17. $\int \frac{x \arctan(x)}{(x^2+1)^2} dx$ |
| 4. $\int \ln x dx$ | 11. $\int \ln(x^2+1) dx$ | 18. $\int x \arctan(\sqrt{x^2-1}) dx$ |
| 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$ | 12. $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$ | 19. $\int \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ |
| 6. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x dx$ | 13. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ | 20. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ |
| 7. $\int \ln(1-x) dx$ | 14. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\sqrt{\frac{x}{x+1}}) dx$ | 21. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ |

II. Calcular las integrales usando sustituciones trigonométricas:

- | | | |
|---|---------------------------------------|---|
| 1. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx$ | 3. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ | 5. $\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^3}$ |
| 2. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ | 4. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx$ | |

III. Calcular las integrales de funciones racionales:

1. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$
2. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$
3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$
4. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$
5. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$
6. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$
7. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$
8. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$
9. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$
10. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$
11. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$
12. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
13. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$
14. $\int \frac{4dx}{x^4+1}$
15. $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$
16. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$
17. $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$
18. $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2(x^2-x)}$

IV. Calcular las integrales de funciones trigonométricas:

1. $\int \sin^3 x dx$
2. $\int \sin^5 x dx$
3. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$
4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$
5. $\int \cos^2 x dx$
6. $\int \sin^4 x dx$
7. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$
8. $\int \tan^3 x dx$
9. $\int \cot^5 x dx$
10. $\int \cot^3 x dx$
11. $\int \tan^4 x \sec^4 x dx$
12. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
13. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
14. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$
15. $\int \sin x \sin(3x) dx$
16. $\int \cos(4x) \cos(7x) dx$
17. $\int \cos(2x) \sin(4x) dx$
18. $\int \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cos\left(\frac{3}{4}x\right) dx$
19. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$
20. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$
21. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$
22. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$
23. $\int \frac{\sin(2x)dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$
24. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$

V. Calcular las integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$:

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$
2. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$
3. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$
4. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$
5. $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$
6. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$

7. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11}$

9. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$

11. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx$

8. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$

10. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx$

12. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx$

VI. Calcular las integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$

9. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$

10. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$

3. $\int \frac{ds}{\sqrt{2as+s^2}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$

11. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$

8. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

12. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx$