LÓGICA MATEMÁTICA

WEBCONFERÊNCIA I

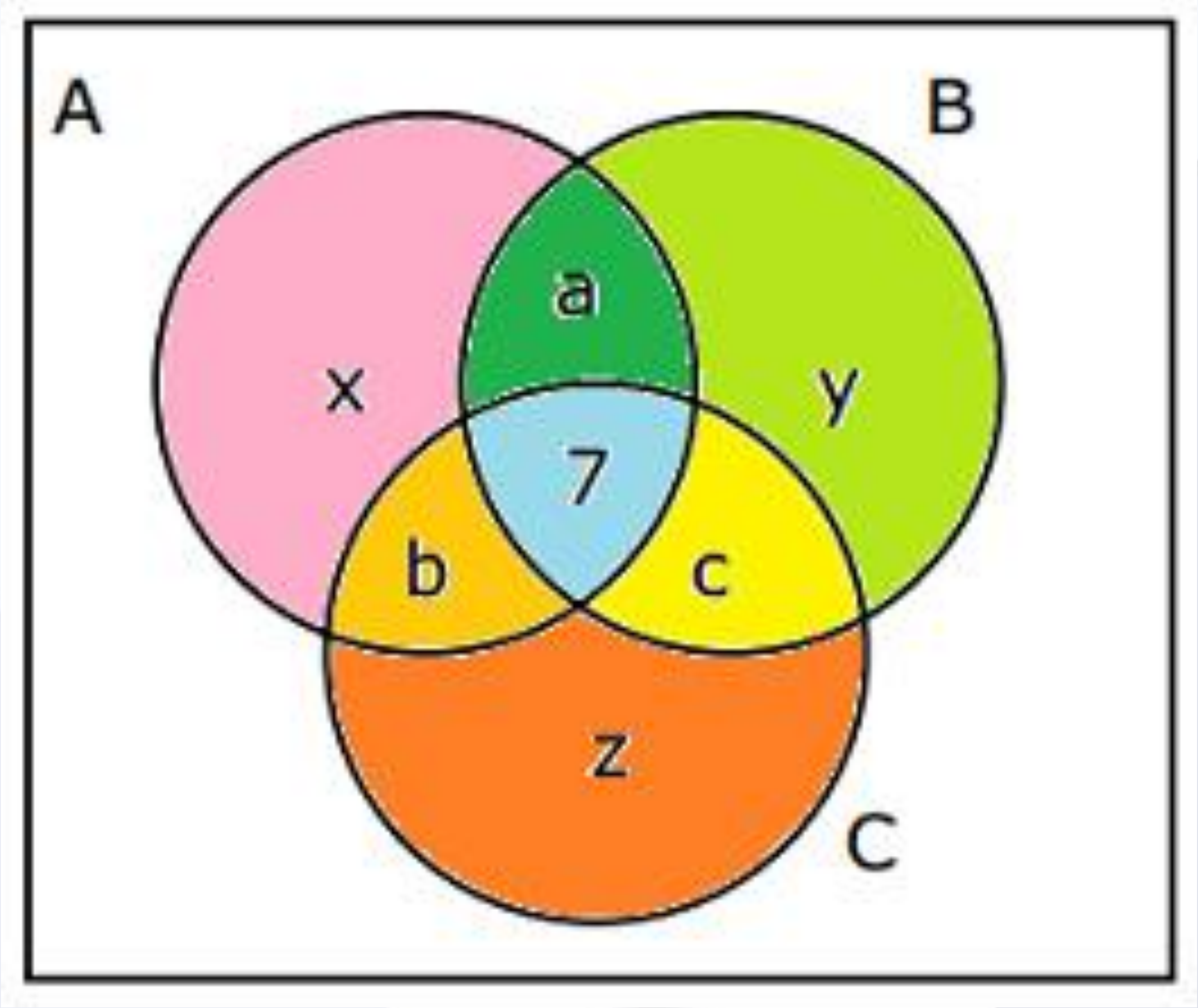
gente criando o futuro

Prof. Dr. Antonio C. M. Afonso

Álgebra de Conjuntos

- Um conjunto é formado por uma coleção de elementos. A própria definição de um conjunto não pode gerar dúvida ao ponto de decidir se um elemento pertence ou não ao conjunto considerado

- Esta representação de pertinência pode ser entendida da seguinte forma: se b é um elemento do conjunto B, logo b ∈ B (b pertence a B), caso contrário, b ∉ B (b não pertence a B)

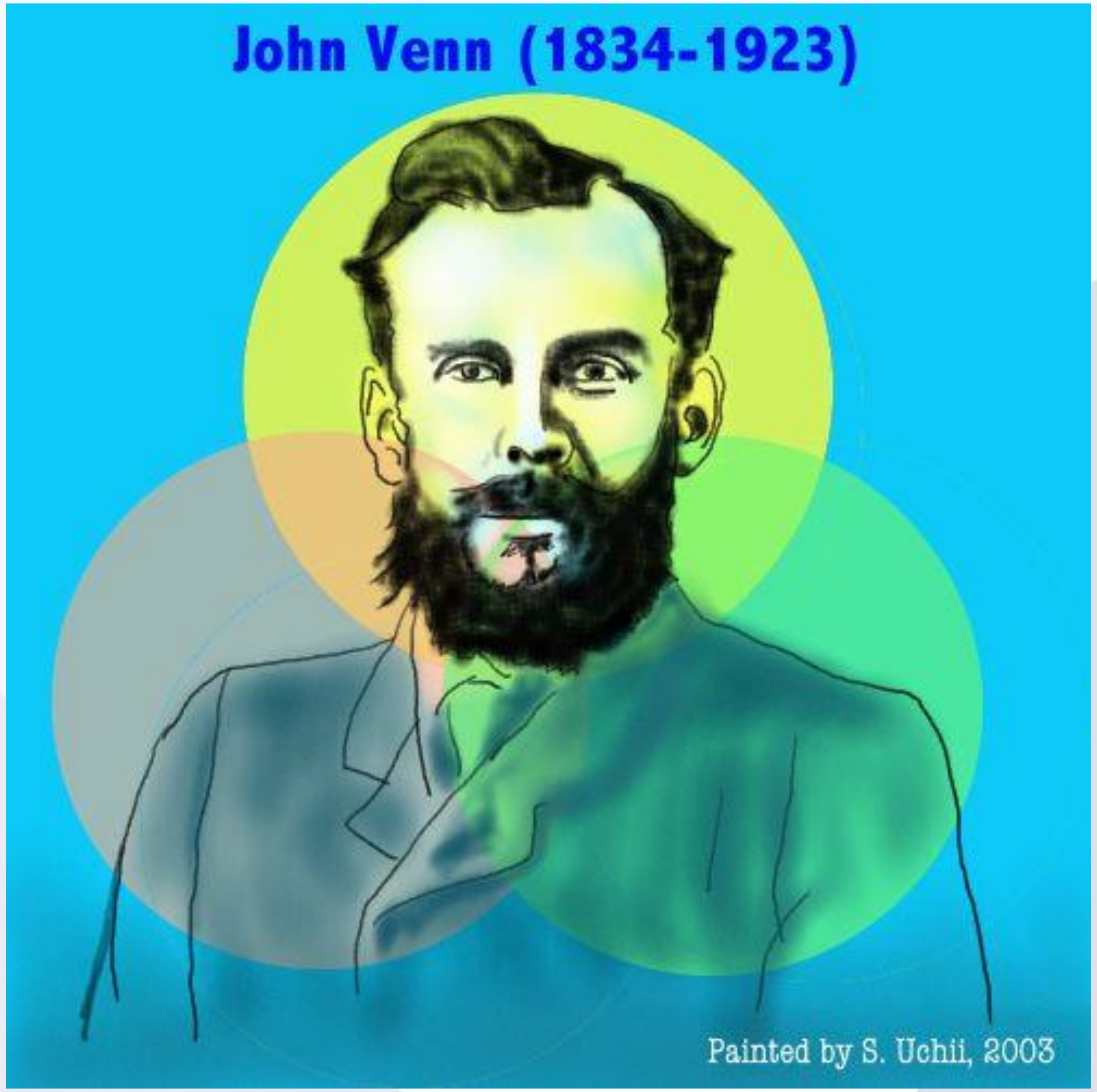


Álgebra de Conjuntos

- Partindo deste princípio, vamos tratar das operações que podem ser realizadas entre eles.

- Elas são classificadas como Não-Reversíveis: a União e a Intersecção.

- E como Reversíveis: o Complemento, o Conjunto das Partes, o Produto Cartesiano e a União Disjunta



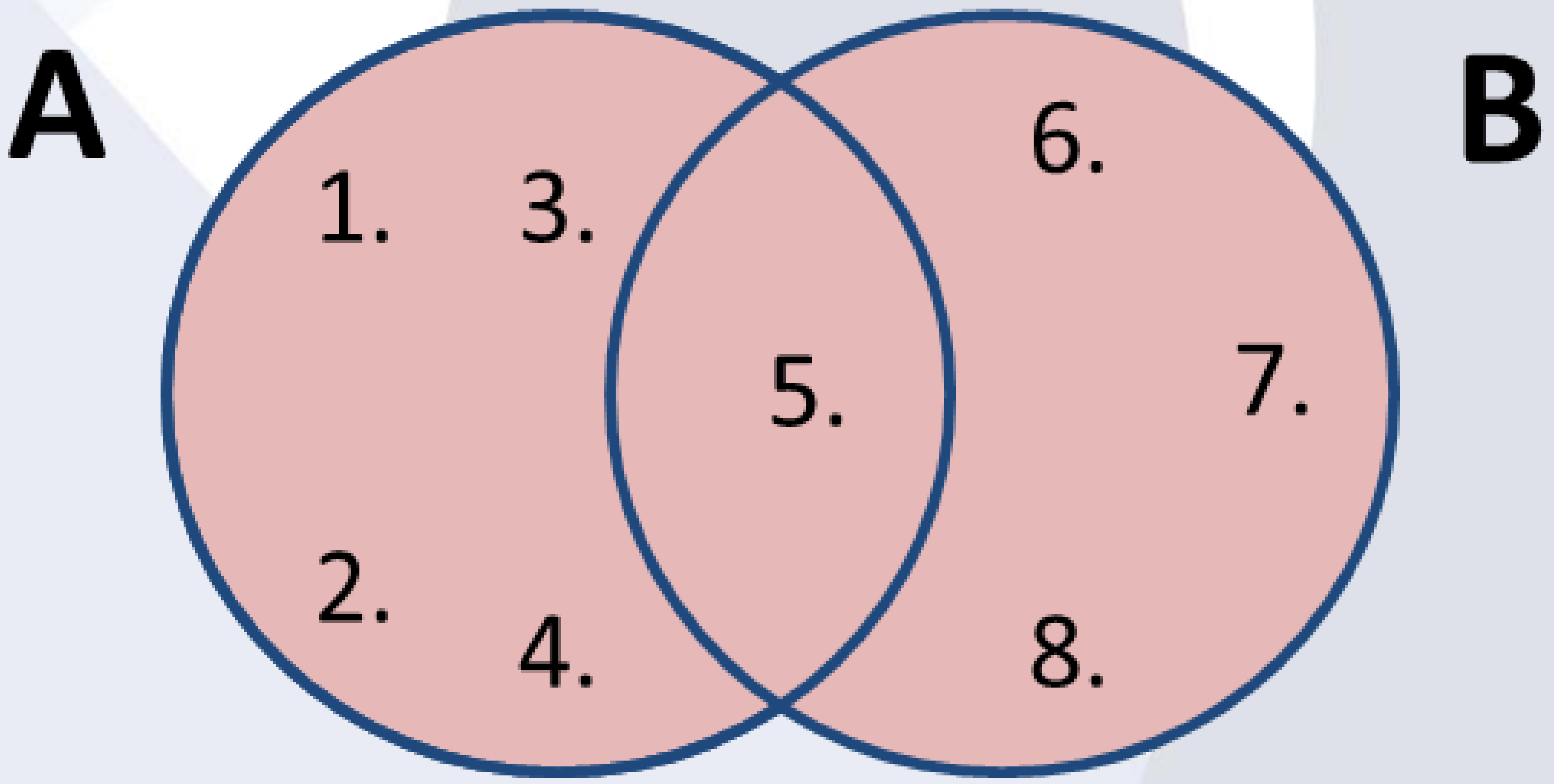
União

- Esta operação é indicada pelo símbolo U. Ela é definida assim:

$$A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

- Por exemplo, considere os seguintes conjuntos: A = { 1, 2, 3, 4, 5 } e B = { 5, 6, 7, 8 }.

AUB = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }



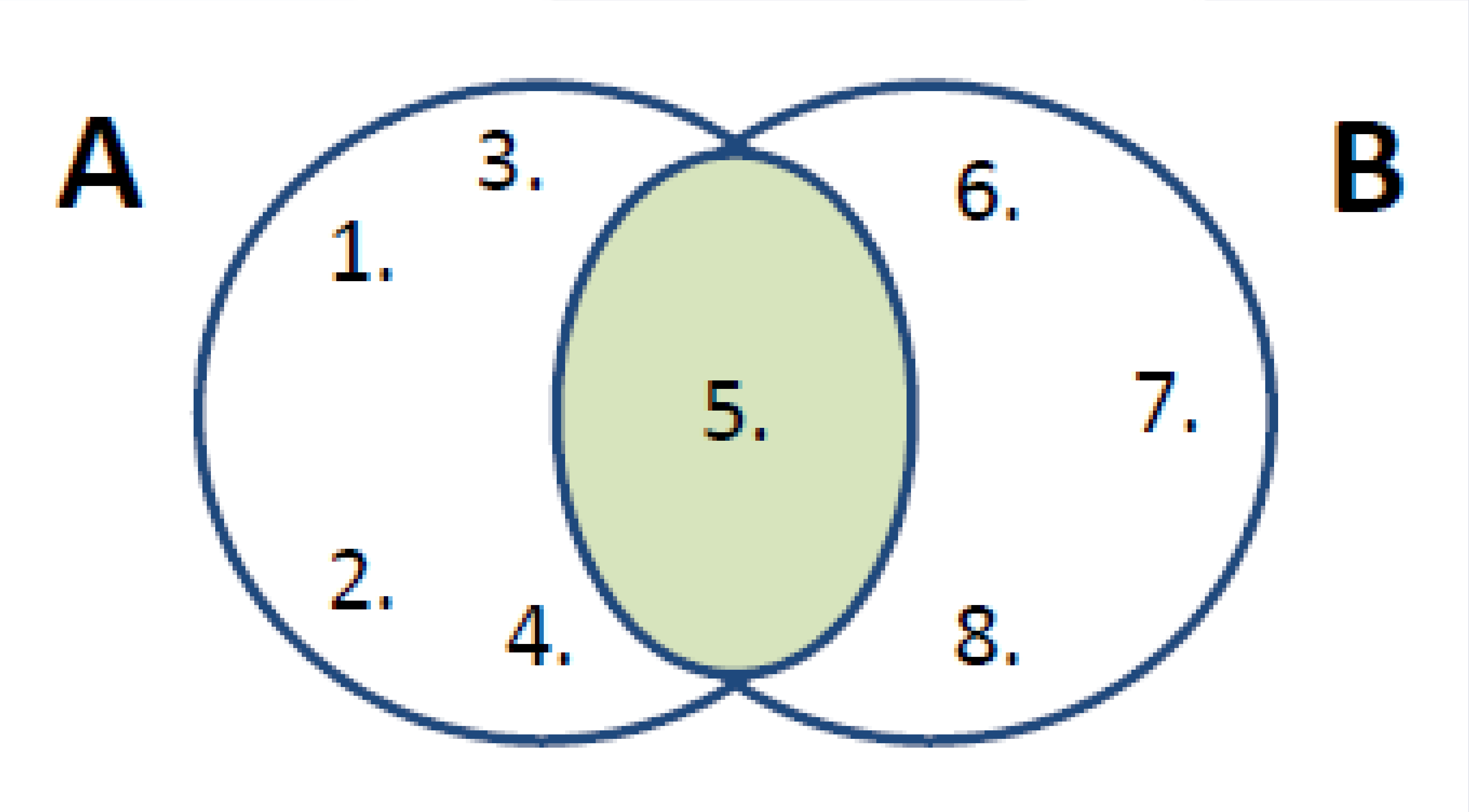
Interseção ou Intersecção

- Esta operação é indicada pelo símbolo ∩. Ela é definida assim:

$$A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B \}$$

- Considerando os conjuntos A = { 1, 2, 3, 4, 5 } e B = { 5, 6, 7, 8 }.

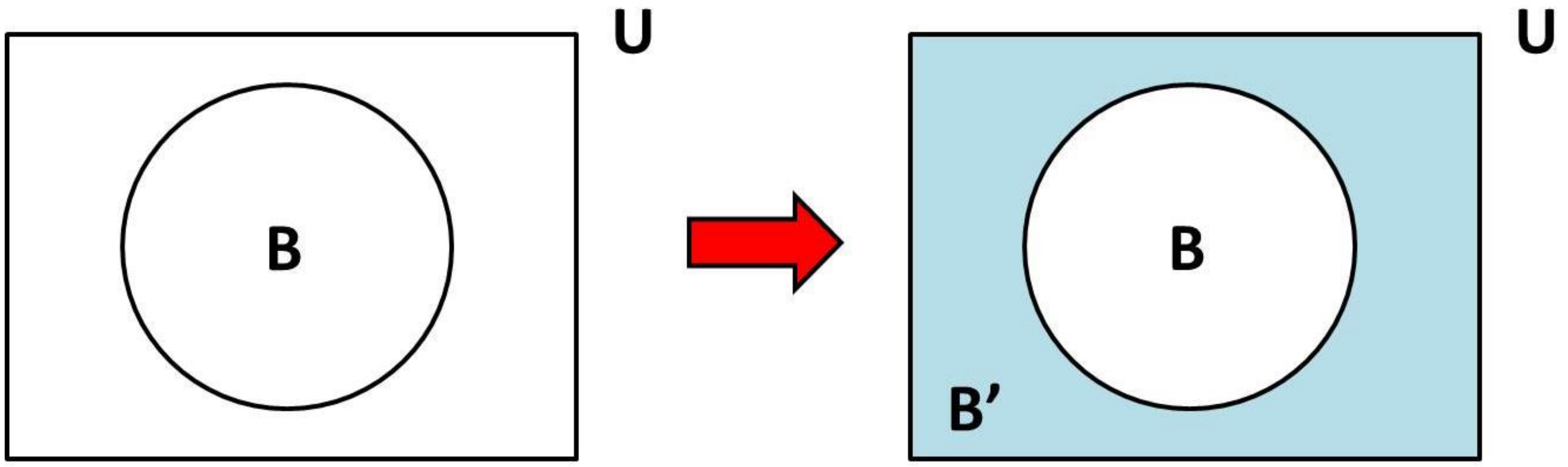
$$\mathbf{A \cap B = \{ 5 \}}$$



Complemento

- O complementar de um conjunto B, em relação ao conjunto universo U, é formado pelo conjunto que contém todos os elementos presentes no conjunto universo U e que não pertençam a B

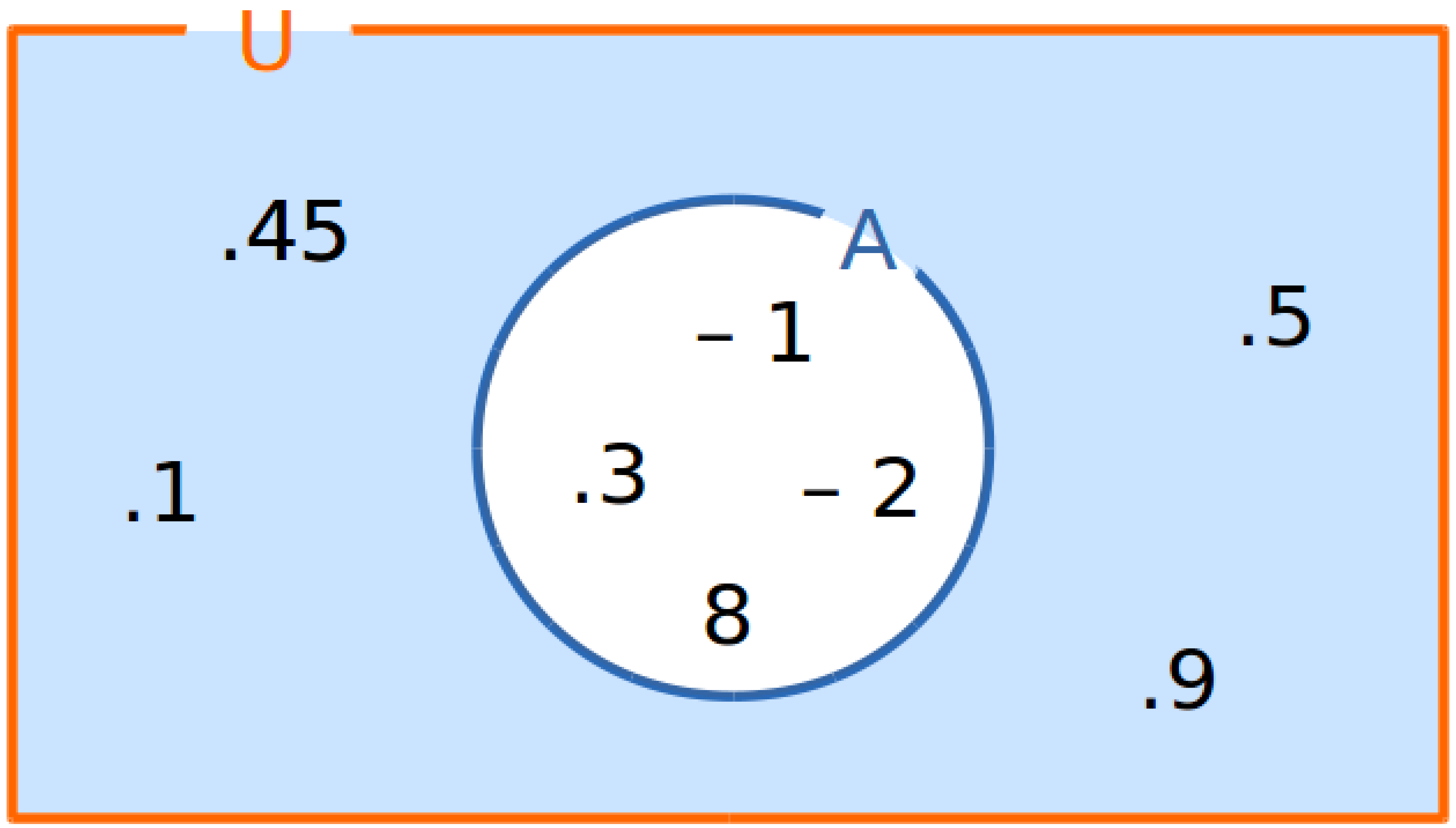
- O complementar do conjunto B é representado por B’ ou ~B



Complemento

- Para a situação ilustrada abaixo, o Complementar do conjunto A é:

A' = { 1, 5, 9, 45 }



Fonte: Autociência

Conjunto das Partes

- Este tipo de conjunto é denominado desta forma porque ele contem todos os subconjuntos de qualquer conjunto que se possa considerar

- Conjunto das Partes P(B) é definido assim:

$$P(B) = \{ X \,/\, X \subset B \}$$

- E o Conjunto das Partes P(B) vai possuir quantos elementos? Ou seja, quantos subconjuntos podem ser representados a partir do conjunto B?

Conjunto das Partes

- Se o conjunto B tem n elementos, o Conjunto das Partes P(B) terá $(2)^n$ elementos

- Considere o conjunto B = { b, c, d }. Utilizando a equação que define a quantidade de elementos de P(B) temos: $(2)^n = (2)^3 = 8$.

- Então ele fica representado assim:

P(B) = { Ø, {b}, {c}, {d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {b, c, d} }

Produto Cartesiano

- O Produto Cartesiano entre dois conjuntos quaisquer, por exemplo A e B, pode ser definido assim:

$$A \times B = \{ (a, b) \ / \ a \in A \text{ e } b \in B \}.$$

* Esta ordem é representada por uplas.

- Qual o Produto Cartesiano entre os conjuntos A = { a } e B = { 1, 2 }?

$$\mathbf{A \times B = \{ (a, 1), (a, 2) \}}$$

Produto Cartesiano

- E o Produto Cartesiano entre $B = \{ 1, 2 \}$ e $C = \{ \beta, \pi, \Omega \}$?

$$\mathbf{B \times C = \{ (1, \beta), (1, \pi), (1, \Omega), (2, \beta), (2, \pi), (2, \Omega) \}}$$

- Como ficaria o Produto Cartesiano B^2?

$$\mathbf{B^2 = B \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}}$$

União Disjunta

- É uma operação realizada entre conjuntos que permite a perfeita distinção entre elementos que possuem a mesma identificação

- **É esta característica que garante a observação da não existência de elementos em comum**

- Ao gerarmos o conjunto resultante da União Disjunta, é feita uma identificação dos elementos com relação ao seu conjunto de origem:

≺elemento, conjunto de origem≻

União Disjunta

- Imagine dois conjuntos: o da família Pinheiro = { Danilo, Adriana, Gustavo, Miguel } e o da família Nogueira = { Carlos, Patrícia, Miguel }.

- Ao operar com a União:

  Pinheiro ∪ Nogueira = { Danilo, Adriana, Gustavo, Carlos, Patrícia, **Miguel** }

- Observe que Miguel aparece uma única vez no conjunto gerado. Mas sabemos que **<u>Miguel Pinheiro não é o mesmo Miguel Nogueira</u>**

- Isto é o que justifica a operação União Disjunta.

União Disjunta

- A União Disjunta entre conjuntos quaisquer pode ser representada por:

A + B

ou por este símbolo (⊍), onde escrevemos A ⊍ B

- Levando em conta o que foi dito, para a situação descrita anteriormente teríamos para a União Disjunta:

Pinheiro + Nogueira = { ≺Danilo, Pinheiro≻, ≺Adriana, Pinheiro≻, ≺Gustavo, Pinheiro≻, **≺Miguel, Pinheiro≻**, ≺Carlos, Nogueira≻, ≺Patrícia, Nogueira≻, **≺Miguel, Nogueira≻** }

União Disjunta

- Considere agora os conjuntos A = { -2, -1, 0, 1, 2 } e B = { a, b, c, d }.

- Realizando a União Disjunta A + B temos:

A + B = { ≺-2, A≻, ≺-1, A≻, ≺0, A≻, ≺1, A≻, ≺2, A≻, ≺a, B≻, ≺b, B≻, ≺c, B≻, ≺d, B≻ }

Combinatória

- Vamos abordar uma ferramenta que é importante não só para a matemática, mas também para outras áreas do conhecimento científico: a Análise Combinatória

- **Arranjo**

- **Permutação**

- **Combinação**

Princípio Fundamental da Contagem

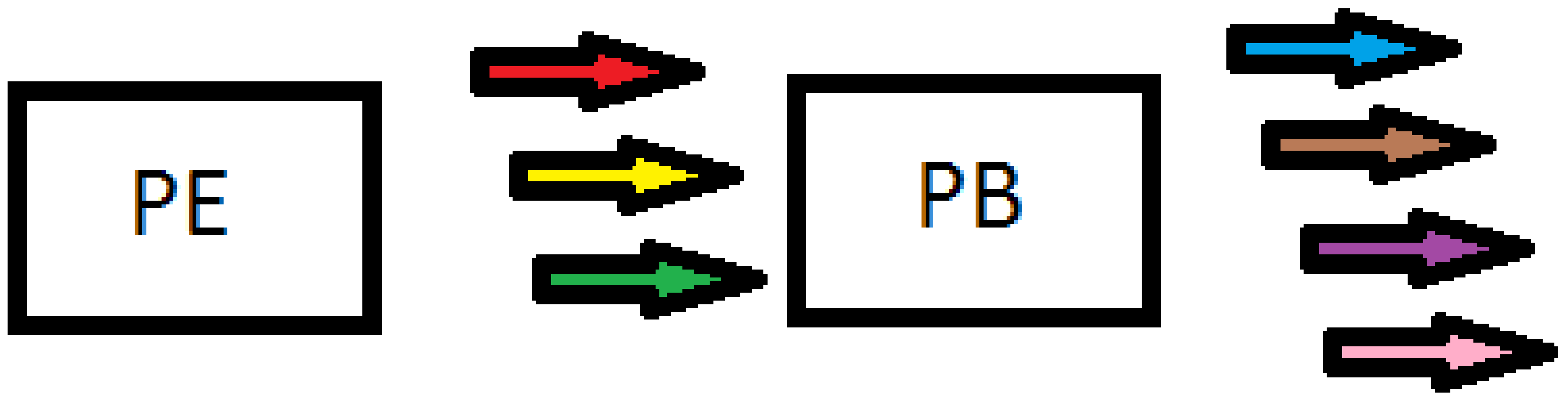
- Vamos começar entendendo o que seria o Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

- Uma vez que a análise combinatória é voltada para a resolução de problemas de contagem, entender esse princípio será fundamental para o decorrer do assunto

- **Quando precisamos resolver um determinado problema em duas etapas, com m maneiras distintas para realizar a primeira etapa, e n maneiras distintas para realizar a segunda etapa, temos como conclusão que o total de maneiras distintas para resolver o problema é dado pelo produto (m x n)**

Princípio Fundamental da Contagem

- Na figura abaixo existem 3 estradas ligando Pernambuco à Paraíba e 4 estradas ligando a Paraíba ao Rio Grande do Norte. Quantos caminhos distintos podem ser feitos de Pernambuco ao Rio Grande do Norte, passando pela Paraíba?



- De acordo com o PFC, a quantidade de caminhos distintos que podem ser feitos de PE ao RN, passando por PB, é igual a **3 x 4 = 12** caminhos distintos.

Princípio Fundamental da Contagem

- E se um problema tiver 3 ou mais etapas?

- O PFC também garante que problemas assim possam ser resolvidos de maneira semelhante. Observe a seguinte situação:

Ex.: Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5:

a) Quantos números com 3 algarismos podem ser formados?

b) Quantos números ímpares com 3 algarismos podem ser formados?

Princípio Fundamental da Contagem

- Para a primeira situação temos 3 problemas para resolver, que são os 3 algarismos

- Como não há restrições para os números que serão formados, teremos:

Para o algarismo das centenas, 5 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5).

Para o algarismo das dezenas, 5 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5)

Para o algarismo das unidades, 5 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5)

Logo, teremos 5 x 5 x 5 = 125 números possíveis

Princípio Fundamental da Contagem

- Na letra b) também temos 3 problemas para resolver, que são novamente os 3 algarismos

- No entanto, vemos uma restrição. Os números formados com os algarismos precisam ser ímpares. Logo, não podem terminar com os algarismos 2 e 4. Sendo assim, temos:

Para o algarismo das centenas, 5 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5)

Para o algarismo das dezenas, 5 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5)

Para o algarismo das unidades, 3 possibilidades (1, 3, 5)

Dessa forma, teremos 5 x 5 x 3 = 75 números possíveis

Arranjo com Repetições

- A seguir vamos ver o PFC sendo aplicado em Arranjos, que é uma forma de contagem onde a ordem é importante, visto que distingue uma solução de um problema de outras mais

- O Arranjo com repetições é definido assim:

Seja S um conjunto com n elementos. O número de k-uplas ($1 \leq k \leq n$) ordenadas de elementos de S é dado por

$$A_{n,k} = n^k$$

Arranjo com Repetições

- Por exemplo, usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, quantas senhas de 5 dígitos podem ser formadas?

Como o enunciado não coloca nenhuma restrição na criação de senhas, temos que para cada dígito haverá 8 (oito) possibilidades de algarismos

Pelo PFC teríamos 8 x 8 x 8 x 8 x 8 = 32768 senhas

Pela fórmula de arranjo com repetições temos $A_{n,k} = n^k \Rightarrow A_{8,5} = 8^5 = 32768$

Arranjo com Repetições

- Observe que n é a quantidade de elementos/soluções que temos para resolver as etapas do problema

Neste caso, $n = 8$ (oito algarismos dados na questão)

- E o k é a quantidade de etapas do problema

Como cada dígito é uma etapa, temos então $k = 5$

Arranjo sem Repetições

- Formalmente, definimos arranjo sem repetições assim:

Seja S um conjunto com n elementos. O número de k-uplas ($1 \leq k \leq n$) ordenadas de elementos de S é dado por

$$A_{n,k} = n! / (n - k)!$$

- A ideia que temos em relação a n e k não muda. O que vai mudar agora é que um elemento que foi utilizado para resolver uma etapa do problema, não poderá ser utilizado novamente

Arranjo sem Repetições

- **Ex.: Utilizando os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, quantos números de 3 algarismos podem ser formados sem possuir algarismos repetidos?**

Vamos identificar n e k na questão:

Qual o nosso problema? Formar números.

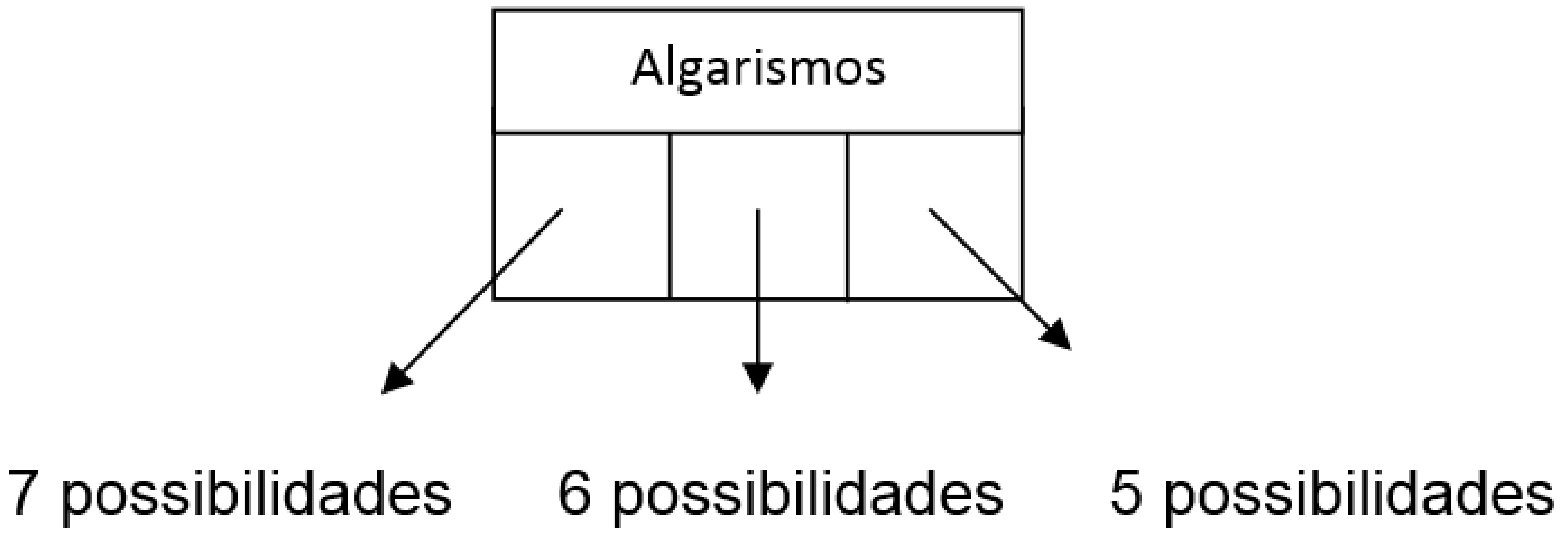
Quantas etapas (k) meu problema possui? 3 (três algarismos).

Quantos elementos (n) eu possuo para resolver o problema? 7 (sete algarismos)

Arranjo sem Repetições

$A_{n,k} = n! / (n - k)!$ ➡ $A_{7,3} = 7! / (7 - 3)! = 7! / 4! = 7 \times 6 \times 5 = 210$ números

- E se utilizarmos o PFC?



Logo, 7 x 6 x 5 = 210 números possíveis

Permutações

- Permutação é um caso particular de arranjo sem repetição, quando n = k

- Isto significa que o número de elementos é igual ao número de etapas para resolver

$$\mathbf{A_{n,k} = n!}$$

- Ex.: Quatro pessoas devem formar uma fila. Quantas filas distintas podem ser formadas?

Permutações

Qual o nosso problema? Formar uma fila.

Quantos elementos (n) temos para formar essa fila? 4 pessoas.

Quantas etapas (k) temos para resolver o problema? 4 posições na fila.

- Visto que n = k, temos uma permutação de 4!

$A_{n,k}$ = n! = 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 filas distintas podem ser formadas

Permutações com Elementos Repetidos

- Esta situação é estudada pela seguinte equação:

$$P_{n,k} = n! / k!$$

Neste caso, o (k) representa a quantidade de vezes que um elemento (n) se repete

- **Ex.: A palavra "abacate" possui quantos anagramas?**

Neste caso, n = 7 e k = 3 (quantidade de vezes que a letra "a" se repete).

$$P_{n,k} = P_{7,3} = 7! / 3! = 840 \text{ anagramas}$$

Permutações com Elementos Repetidos

- Mas e se houver mais de um elemento repetido numa palavra?

- **Ex.: Quantos anagramas teria a palavra “banana”?**

A letra “a” aparece 3 vezes e a letra “n” 2 vezes

Neste caso, para cada elemento repetido, adicionamos a quantidade de cada um no divisor da equação

P = 6! / (3! x 2!) = 60 anagramas

Combinação

- **Seja S um conjunto com n elementos. O número de subconjuntos de S com k elementos (1 ≤ k ≤ n) é dado por:**

$$\mathbf{C_{n,k} = n! \,/\, (n - k)! \times k!}$$

- Lembra a definição de arranjo sem repetição? A definição de combinação possui esta diferença sutil.

- O que significa essa diferença? Significa que diferente de Arranjo, para a Combinação não importa a ordem dos elementos utilizados para resolver um problema. Qualquer que seja a ordem, a solução é a mesma.

Combinação

- No caso de uma fila, qualquer que seja a distribuição das pessoas nela, para a Combinação trata-se de uma única fila.

- Ou então, pense no caso de números de 3 dígitos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Se tivermos os números 234 e 432, para Arranjo são diferentes, mas para a Combinação são iguais, pois a ordem não importa.

- **Ex.: Considere uma classe com 8 alunos. Deseja-se formar uma comissão de formatura com 3 alunos. Quantas comissões podem ser formadas?**

Combinação

Imagine que a comissão será formada por João, Maria e Ana.

Se dissermos que a comissão é formada por Ana, João e Maria, estaremos falando de uma comissão diferente? Não.

Pois, independente da ordem, as pessoas são as mesmas, logo a comissão também.

$$\mathbf{C_{8,3} = 8! \,/\, (8 - 3)! \times 3! = 8! \,/\, 5! \times 3! = 56}$$ **comissões possíveis**

Lógica Proposicional

- Proposição é todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo

- Na lógica trabalhamos apenas com proposições que afirmam fatos, e que possuem apenas dois valores: verdadeiro ou falso

I. A Terra é um planeta. (**V**)

II. Cristóvão Colombo descobriu o Brasil. (**F**)

III. 8 x 8 = 64. (**V**)

A partir disso, excluímos as sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas.

Lógica Proposicional

- Dois princípios regem a lógica matemática acerca das proposições.

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

PRINCÍPIO DO TERCEIRO-EXCLUÍDO

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, e nada mais além disso.

Proposições Simples e Compostas

- As proposições são classificadas como simples ou compostas

- Uma proposição é dita simples quando não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma, ou seja, quando ela transmite uma única ideia, um único pensamento.

p: Salvador é a capital da Bahia (V)

q: A região sudeste do Brasil possui 8 estados. (F)

Proposições Simples e Compostas

- Uma proposição é dita composta quando é constituída por duas ou mais proposições simples, as quais são ligadas pelos chamados conectivos

Q: Tubarões são peixes **ou** baleias são mamíferos.

R: **Se** Recife é a capital pernambucana, **então** o Brasil está na Europa.

- Por que as proposições compostas acima estão sem o valor lógico ao lado?

- A ferramenta utilizada para determinar o valor lógico de uma proposição composta é chamada de TABELA-VERDADE.

Conectivos

- São as palavras usadas para formar proposições compostas. Os conectivos usuais são:

E (Conjunção: ∧)

Ou (Disjunção: ∨)

Se...então (Condicional: →)

Se e somente se (Bicondicional: ↔)

Não (~)

Operações Lógicas - Negação (~)

- Define-se como negação de uma proposição p a proposição representada por ~p (leia-se “não p”)

- O valor lógico será verdade (V) quando p é falsa, e falso (F) quando p é verdadeira.

p: Roma é a capital da Itália. (V)

~p: Roma não é a capital da Itália. (F)

p	~p
V	F
F	V

Operações Lógicas - Conjunção (∧)

- Define-se como conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por $p \wedge q$ (leia-se “p e q”)

- O valor lógico dessa proposição composta será verdade (V) apenas quando as duas proposições simples forem verdadeiras

p: O sol é uma estrela. (V)

q: Marte é um planeta. (V)

$p \wedge q$: O sol é uma estrela e Marte é um planeta (V)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operações Lógicas - Disjunção (V)

- Define-se como disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por p v q (leia-se “p ou q”)

- O valor lógico dessa proposição composta será verdade (V) quando ao menos uma das proposições simples for verdadeira.

p: 8 – 3 = 5 (V)

q: A ponte Rio Niterói fica no Paraná. (F)

p v q: 8 – 3 = 5 ou A ponte Rio Niterói fica no Paraná (V)

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operações Lógicas - Condicional (→)

- Define-se como condicional a proposição representada por p → q (leia-se "se p então q")

- O valor lógico dessa proposição composta será falso (F) quando p for verdadeira e q falsa. Nos demais casos será verdadeira (V).

p: Abril tem 30 dias. (V)

q: 5 é um número primo (V)

p → q: Se Abril tem 30 dias, então 5 é um número primo. (V)

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operações Lógicas - Bicondicional ($\leftrightarrow$)

- Define-se como bicondicional a proposição representada por p $\leftrightarrow$ q (leia-se "p se e somente se q")

- O valor lógico dessa proposição composta será falso (F) quando as proposições simples tiverem valores diferentes.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p: Tiradentes descobriu o Brasil. (F)

q: Camões proclamou a república brasileira. (F)

p $\leftrightarrow$ q: Tiradentes descobriu o Brasil se e somente se Camões proclamou a república brasileira. (V)

ser educacional

FIT FACULDADES INTEGRADAS DO TAPAJÓS | UNAMA FACULDADE DA AMAZÔNIA

FACVLDADE MAURÍCIO DE NASSAU

UNAMA UNIVERSIDADE DA AMAZÔNIA

UNINASSAU

UNG UNIVERSIDADE

FACULDADE JOAQUIM NABUCO