



Bölüm 3: Sayı Sistemleri

Mikroişlemciler



Sayıları Temsil Etme Yöntemleri

- Sayısal bir değeri temsil etmenin birçok yolu vardır.
- İnsanlar uzun zaman önce saymak için sopaları kullandılar.
- Daha sonra sopaların resimlerini çizmeyi öğrendiler.
- Sonunda bu resimleri kağıda geçirdiler.
- Bu nedenle, sayı olarak 5 önce | | | | şeklinde temsil edildi.
- Roma İmparatorluğu'nda,
 - | | | hala üç sopayı temsil ederken,
 - V artık beş sopayı,
 - X ise on sopayı temsil etmek için kullanılmaya başlandı.



Romen Rakamları

- Antik Roma İmparatorluğu'nda kullanılan bir sayı sistemidir.
- Temel rakamlar:
 - I - 1
 - V - 5
 - X - 10
 - L - 50
 - C - 100
 - D - 500
 - M - 1000



Romen Rakamları

- Toplama ve çıkarma üzerine kuruludur.
- Sıfır ve basamak kavramları yoktur.
- MCMLXXXVI
 - M – CM – LXXX – VI
 - $1000 + 900 + 80 + 6 = 1986$
- MMVI
 - M – M – VII
 - $1000 + 1000 + 7 = 2007$



Ondalık Sistem

- Bugün çoğu insan, saymak için ondalık temsili kullanır.
- Ondalık sistemde 10 rakam bulunmaktadır: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Bu rakamlar herhangi bir değeri temsil edebilir. Örneğin: 754.
- Bir sayının değeri, her rakamın,
 - tabanın rakamın pozisyonundaki üssünün çarpımıyla,
 - toplamından oluşur.

$$7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 700 + 50 + 4 = 754$$

Diagram illustrating the positional value of digits in the decimal system:

- The digit **10** in the first term is highlighted with a red box, and a line points to a red box labeled **base**.
- The digit **0** in the third term is highlighted with a green box, and a line points to a green box labeled **digit position**.



Ondalık Sistem

- Her rakamın pozisyonu önemli.
- Örneğin, 7 sona konursa: 547
 - Başka bir değer olur.
- Herhangi bir sayının sıfırıncı kuvveti 1'dir. ($x^0 = 1$)
- Sıfır üssü sıfır 1'dir. ($0^0 = 1$)

$$5 \cdot \boxed{10}^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^{\boxed{0}} = 500 + 40 + 7 = 547$$

base

digit position



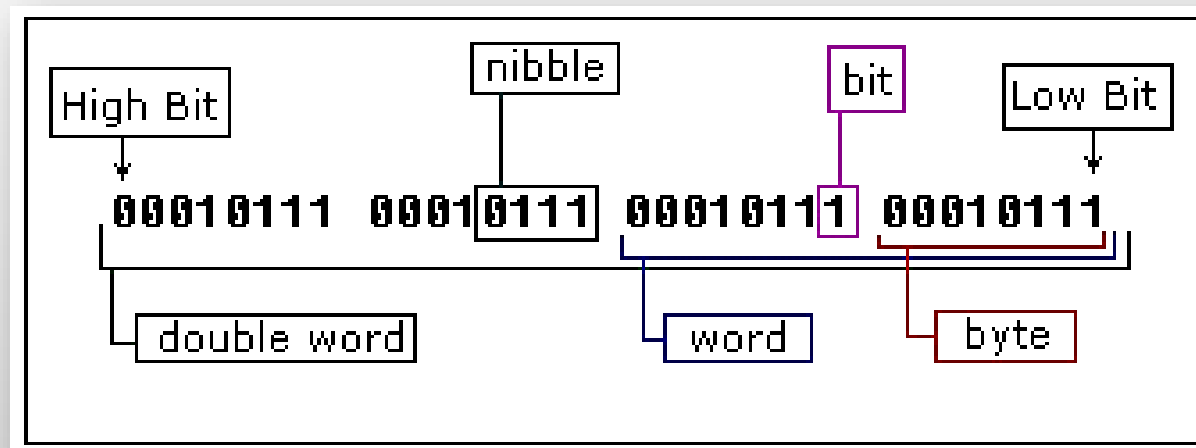
İkili Sistem

- Bilgisayarlar, insanlar kadar akıllı değiller.
- Bu nedenle elektronik bir makineyi iki durumlu yapmak kolaydır:
 - açık ve kapalı.
 - 1 ve 0.
- Bilgisayarlar ikili sistem kullanır.
- İkili sistemde 2 rakam bulunur:
 - 0, 1.
- Bu nedenle taban 2'dir.



İkili Sistem

- İkili sayıdaki her basamağa BIT denir.
- 4 bit bir NIBBLE'ı oluşturur.
- 8 bit bir BYTE'ı oluşturur.
- İki byte bir WORD'ü oluşturur.
- İki WORD bir DOUBLE WORD'u oluşturur.





İkili Sistem

- İkili sayılar genellikle "b" ile sonlandırılır.
- Bu, sayının ikili olduğunu gösterir.
- Bu şekilde, 101b'nin değerinin 5 olduğu belirlenir.
- Örnek: 10100101b'nin değeri, ondalık 165'e eşittir.

$$\begin{aligned} 10100101b &= \\ &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 128 + 0 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = 165 \\ &\quad \text{(decimal value)} \end{aligned}$$

base

digit position



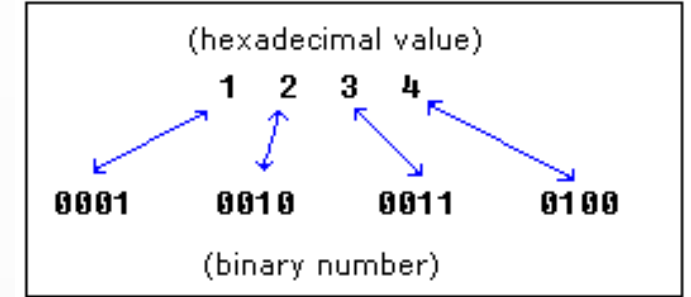
İkili Sistem

- $(1111011)_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6$
- $(1111011)_2 = 1 + 2 + 0 + 8 + 16 + 32 + 64$
- $(1111011)_2 = 123$



Onaltılı Sistem

- Onaltılı sistem, 16 farklı rakam kullanır:
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
- Onaltılı sayılar kompakt ve okunması kolaydır.



Decimal (10'luk)	Binary (2'lik)	Hexadecimal (16'lık)
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
...
14	1110	E
15	1111	F



Onaltılı Sistem

- Onaltılı sayılar genellikle "h" ile sonlandırılır.
- Bu, sayının onaltılı olduğunu gösterir.
- Bu şekilde, 5Fh'nin değerinin 95 olduğu belirlenir.
- Harfle (A..F) başlayan sayıların başına "0" (sıfır) eklenir,
 - örneğin 0E120h.
- Örnek: 1234h'nin değeri, ondalık 4660'a eşittir.

$$1 \cdot 16^3 + 2 \cdot \boxed{16}^2 + 3 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^{\boxed{0}} = 4096 + 512 + 48 + 4 = 4660$$

(decimal value)

base digit position



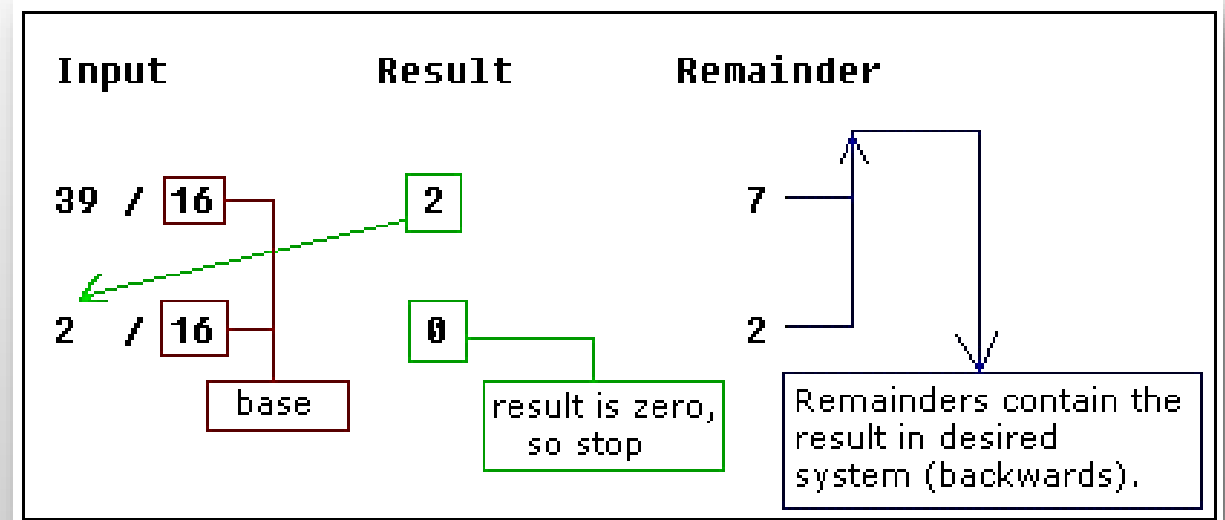
Onaltılı Sistem

- $(A12F)_{16} = 15 \times 16^0 + 2 \times 16^1 + 1 \times 16^2 + 10 \times 16^3$
- $(A12F)_{16} = 15 \times 1 + 2 \times 16 + 1 \times 256 + 10 \times 4096$
- $(A12F)_{16} = 15 + 32 + 256 + 40960$
- $(A12F)_{16} = 41263$



Onluk Sistemden Diğer Sistemlere Dönüştürme

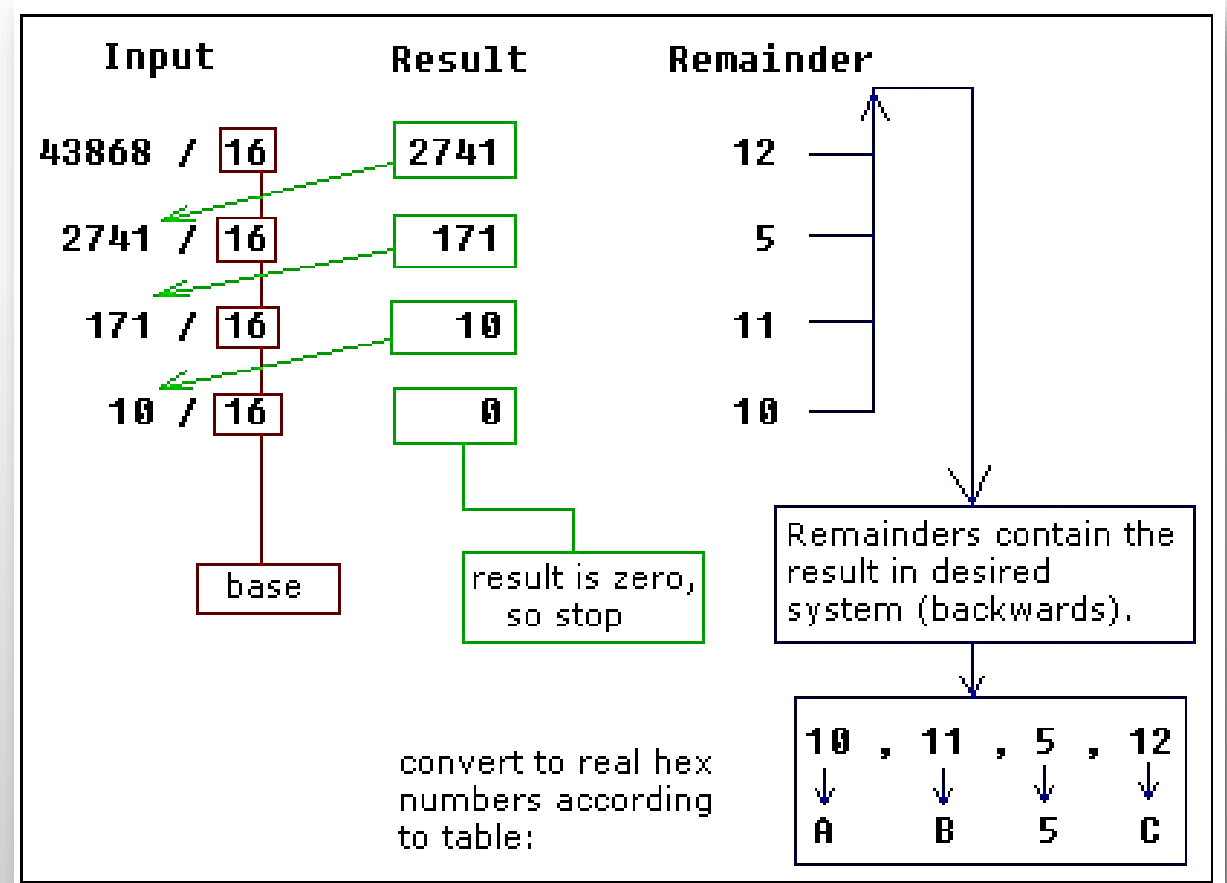
- Onluk değer istenen sistem tabanına bölünür.
- Her seferinde sonuç saklanır ve kalan alınır.
- Sonuç sıfır olana kadar bölme işlemine devam edilir.
- Örneğin; 39 (10'luk) değerini onaltılı sistem (16'lık) tabanına çevirme.
 - $39 / 16 = 2$ (kalan 7)
 - $2 / 16 = 0$ (kalan 2)
 - sonuç 27h olarak bulunur.





Onluk Sistemden Diğer Sistemlere Dönüştürme

- 43868 sayısı onaltılı sistemde (16'lık) nasıl ifade edilir?
- $43868 / 16 = 2741$ (kalan 12, C)
- $2741 / 16 = 171$ (kalan 5)
- $171 / 16 = 10$ (kalan 11, B)
- $10 / 16 = 0$ (kalan 10, A)
- Sonuç, 0AB5Ch olarak bulunur.





İşaretili Sayılar

- 0FFh gibi onaltılık bir sayı pozitif mi yoksa negatif mi?
 - Kesin bir şekilde söylemek mümkün değil.
- Hem 255 hem de -1 ondalık değerini temsil edebilir.
- 8 bit ile, 256 farklı kombinasyon oluşturulabilir (sıfır dahil).
 - ilk 128 kombinasyon (0..127) pozitif sayıları
 - sonraki 128 kombinasyon (128..256) negatif sayıları temsil edebilir.
- -5 elde etmek için 5'i kombinasyon sayısından (256) çıkarmak gerekir:
 - $256 - 5 = 251$.



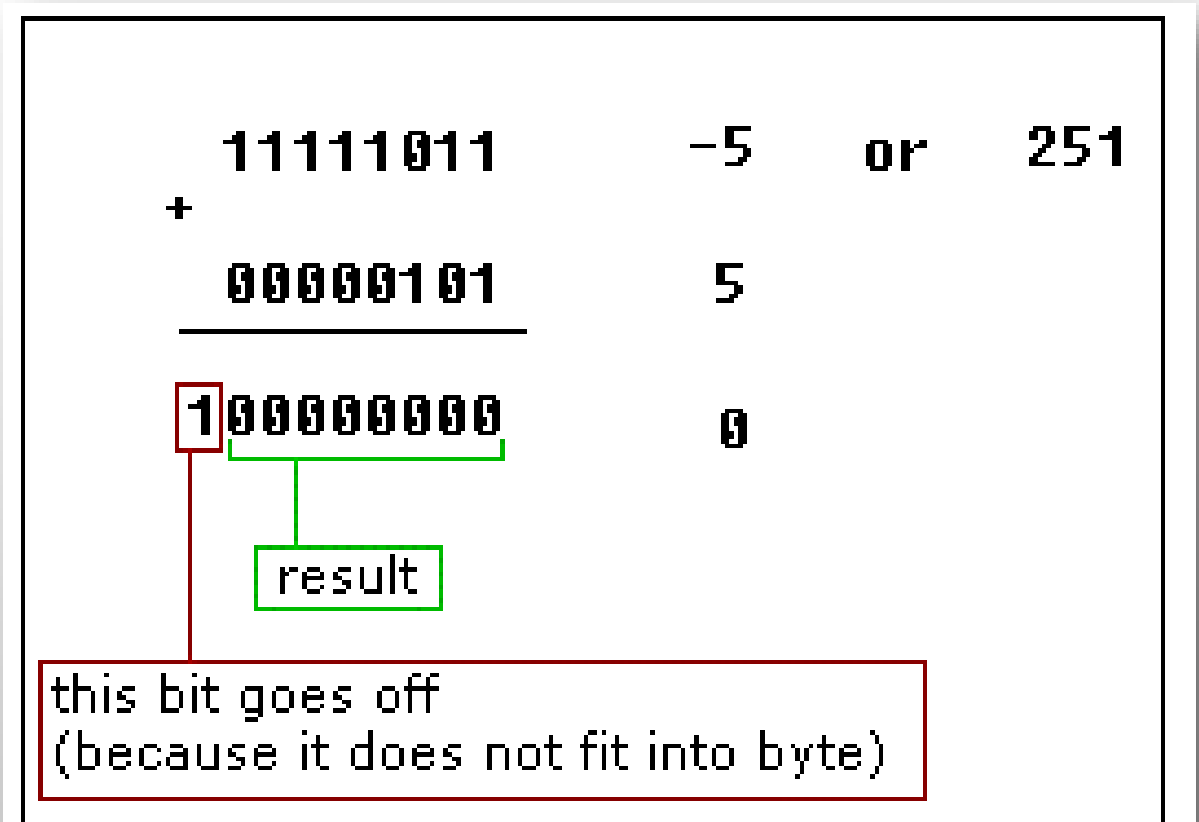
İşaretili Sayılar

İkili Sayı	Değeri	2'ye tümleyen
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0111	7	7
1000	-0	-8
1001	-1	-7
1110	-6	-2
1111	-7	-1



İşaretli Sayılar

- Bu yöntem, matematikte $-5 + 5 = 0$ kuralıyla uyumlu olması gerekir.
- 5 ve 251 baytları eklenirse, sonuç 255'i aşar ve taşma nedeniyle sıfır elde edilir.





İşaretli Sayılar

- Kombinasyonlar 128..256 kullanıldığında, yüksek bit her zaman 1'dir.
 - Bu, bir sayının işaretini belirlemek için kullanılabilir.
- 16 bit ile 65536 farklı kombinasyon oluşturulabilir.
 - ilk 32768 kombinasyon (0..32767) pozitif sayıları,
 - diğer 32768 kombinasyon (32767..65535) negatif sayıları temsil eder.



Desteklenen İşlemler

~	not (inverts all bits).
*	multiply.
/	divide.
%	modulus.
+	sum.
-	subtract (and unary -).
<<	shift left.
>>	shift right.
&	bitwise AND.
^	bitwise XOR.
	bitwise OR.



Sayısal Sistem ve İkili Sinyaller

- Sayısal sistemdeki yazılımlar, bir rakam topluluğunu temsil eder.
- Bu rakamlar, veri ve komut öbeklerini oluşturur.
- Yazılımları oluşturan veriler ve komutlar,
 - gerçek elektrik devrelerinde gerilim ve akım kullanılarak yaratılır.
- Sayısal bilgisayarlarda yüksek ve düşük olarak iki çeşit sinyal kullanılır.
- İkili sinyallerde 1 (yüksek) ve 0 (düşük) değerleri bulunur.
- İkili sinyaller, bilgisayarların temel iletişim dilidir.
- "Bit", ikili düzendeki sayıların her bir basamağını ifade eder.



1'e Tümleyen Yöntemi

- 1's Complement
- Bir sayının negatif değerini almak için kullanılır.
- Sayının bütün bitleri (1'ler ve 0'lar) tersine çevrilir.
 - 8-bitlik bir sayıyı ele alalım: 00101101.
 - Tüm bitleri tersine çevrilir (Bitwise NOT): 11010010.



2'ye Tümleyen Yöntemi

- Negatif sayıları temsil etmek için kullanılan bir yöntemdir.
- 8-bitlik bir sayıyı ele alalım: 00101101.
- Tüm bitler tersine çevrilir (Bitwise NOT): 11010010.
- 1 eklenerek negatif tümleyeni alınır: 11010011.



İkili Tabanda Toplama İşlemi

- İki sayının her bir basamağı için dört farklı durum vardır:
 - $0+0$, $0+1$, $1+0$, ve $1+1$.
- En düşük basamaktan başlanarak, iki sayının aynı basamakları toplanır.
- Toplama sonucu 0 veya 1 olabilir.
- Eğer toplama sonucu 2 ise, bu durumda bir taşıma (carry) olmuştur.
- Taşıma, bir sonraki basamağa eklenir.
 - $$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ +\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$



İkili Tabanda Çıkarma İşlemi

- Çıkartılacak sayının bütün bitleri tersine çevrilir (1'ler 0'a, 0'lar 1'e çevrilir).
- Tömleyen alınmış olan sayı üzerine 1 eklenir.
- Elde edilen tömleyen sayı ile diğer sayı toplanır.
- İlk sayı: 1011 İkinci sayı: 0110
- İkinci sayının 2'ye tömleyeni: 1001 (1'ler 0'a, 0'lar 1'e çevrildi).
- Tömleyen sayıya 1 eklenir: 1010.
 - 1011
 - + 1010
 - 10101

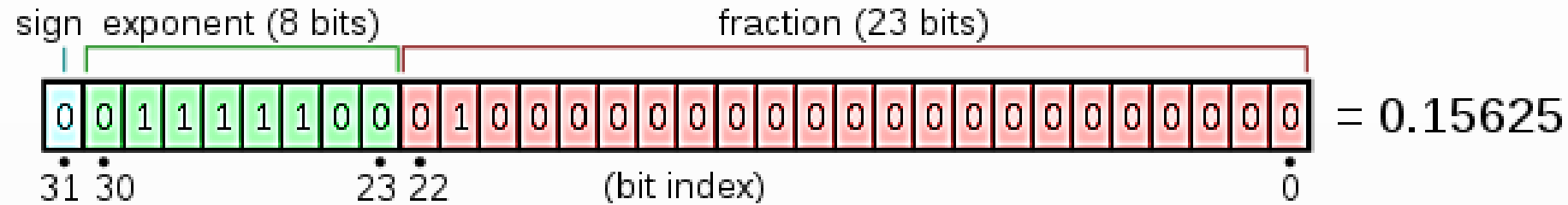


Kayan Nokta Veri Türü

- IEEE 754 standardı
- 32 bitlik sayı,
 - işaret (*sign*),
 - üs (*exponent*) ve
 - mantissa (*fraction*) olarak gruplara ayrılır.
- İlk bit, işaret bitidir. 0 işareti pozitif, 1 işareti negatif anlamına gelir.
- İkinci gruptaki bitler, üs bölümünü temsil eder.
- Mantissa bölümü, ondalık sayının kesirli kısmını ifade eder.



Kayan Nokta Veri Türü



$$\text{value} = (-1)^{\text{sign}} \times 2^{(E-127)} \times \left(1 + \sum_{i=1}^{23} b_{23-i} 2^{-i} \right)$$

- **İşaret (*Sign*) Biti:** 0 (pozitif sayıdır.)
- **Üs (*Exponent*):** 01111100 (2'nin üssü olarak düzenlenir.)
- **Mantissa (*Fraction*):** 01000000000000000000000 (kesirli kısımdır.)
- **Sonuç:** $(+1) \times (2^{-3}) \times 1.25$



SON