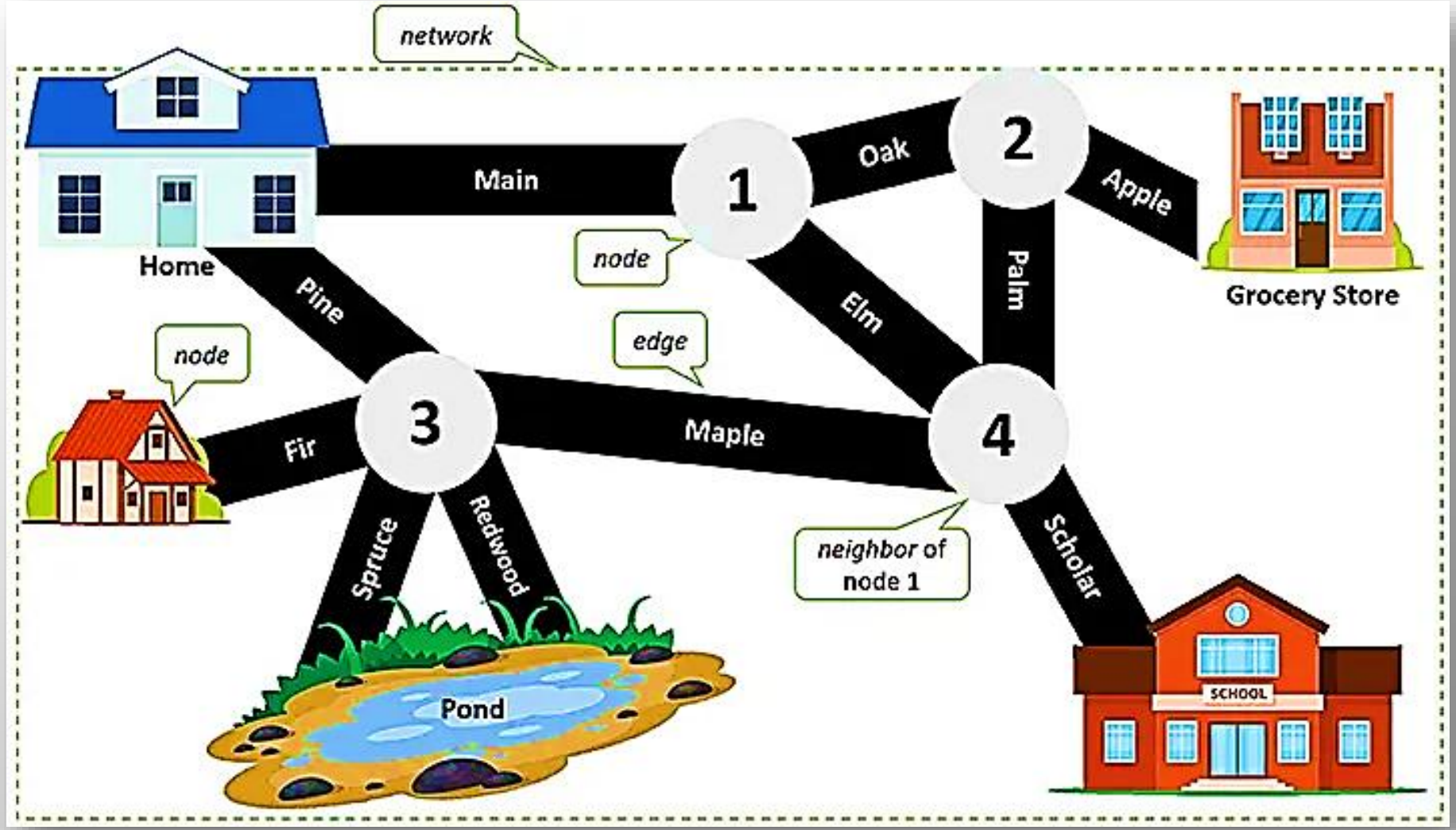
Bölüm 4: Çizge Algoritmaları

Algoritmalar

Çizge



En Kısa Yol Algoritmaları (Shortest Path)

- Başlangıç düğümünden hedef düğüme giden en kısa yolu bulur.
- *Dijkstra*:
  - Başlangıç düğümünden diğer tüm düğümlere olan en kısa yolları bulur.
  - Kenar ağırlıkları pozitif değer olmalıdır.!
- *Bellman-Ford*:
  - Negatif ağırlıklı kenar içeren çizgelerde kullanılabilir.
  - Dijkstra algoritmasından yavaştır.!
- Floyd-Warshall:
  - Tüm çiftler arasındaki en kısa yolları bulur.
  - Negatif ağırlıklı çizgelerde kullanılabilir.

En Kısa Yol Algoritmaları (Shortest Path)

- *A* Arama*:
  - Sezgisel (*heuristic*) bilgiler kullanılarak aramayı hızlandırır.
  - Hedef düğüme olan tahmini mesafeyi hesaba katar.
- BFS:
  - Ağırlıksız çizgeler üzerinde çalışır.

Dijkstra

- Kaynak düğümden diğer tüm düğümlere olan en kısa yolu bulur.
- 1956 yılında *Edsger W. Dijkstra* tarafından geliştirilmiştir.
- Pozitif ağırlıklı kenarlardan oluşan çizgelerde çalışır.

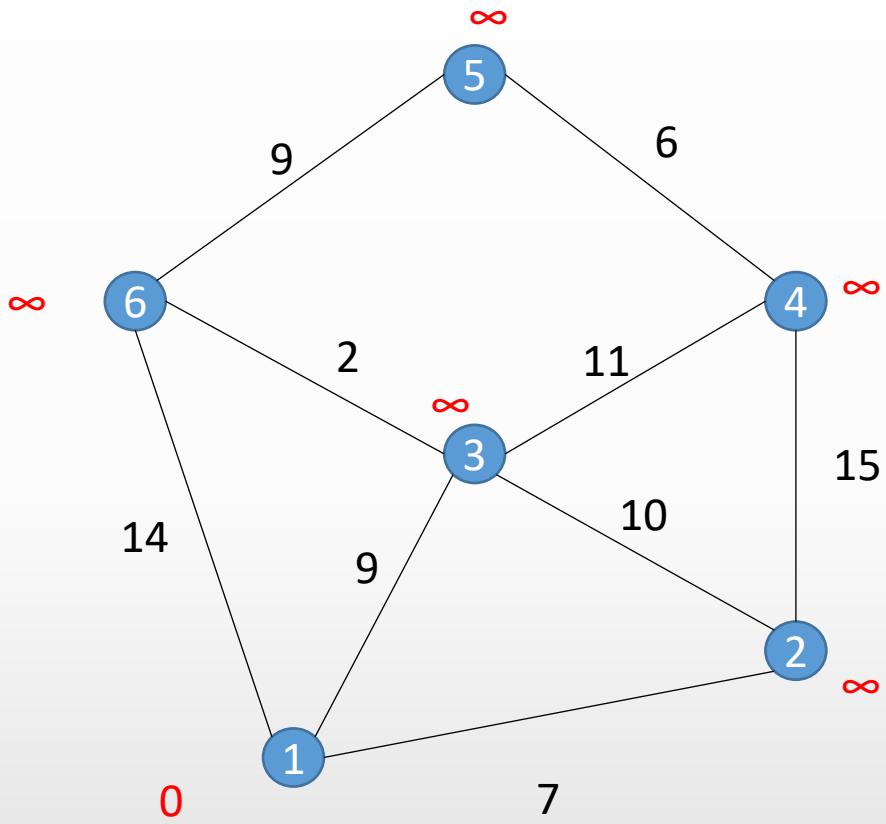
Algoritma Adımları

- Adım 1: Başlangıç düğümü seçilir ve uzaklık değeri *0* atanır.
  - Diğer düğümlerin uzaklık değerine ∞ atanır.
- Adım 2: Başlangıç düğümünden başlayarak, henüz işlenmemiş komşu düğümlere olan uzaklıklar hesaplanır.
- Adım 3: Daha kısa bir yol varsa, düğümün uzaklığı güncellenir.
- Adım 4: İşlenen düğümler işaretlenir ve bir sonraki düğüm seçilir.
- Adım 5: Tüm düğümler işlenene kadar Adım 2'den 4'e kadar tekrarlanır.

Algoritma Karmaşıklığı

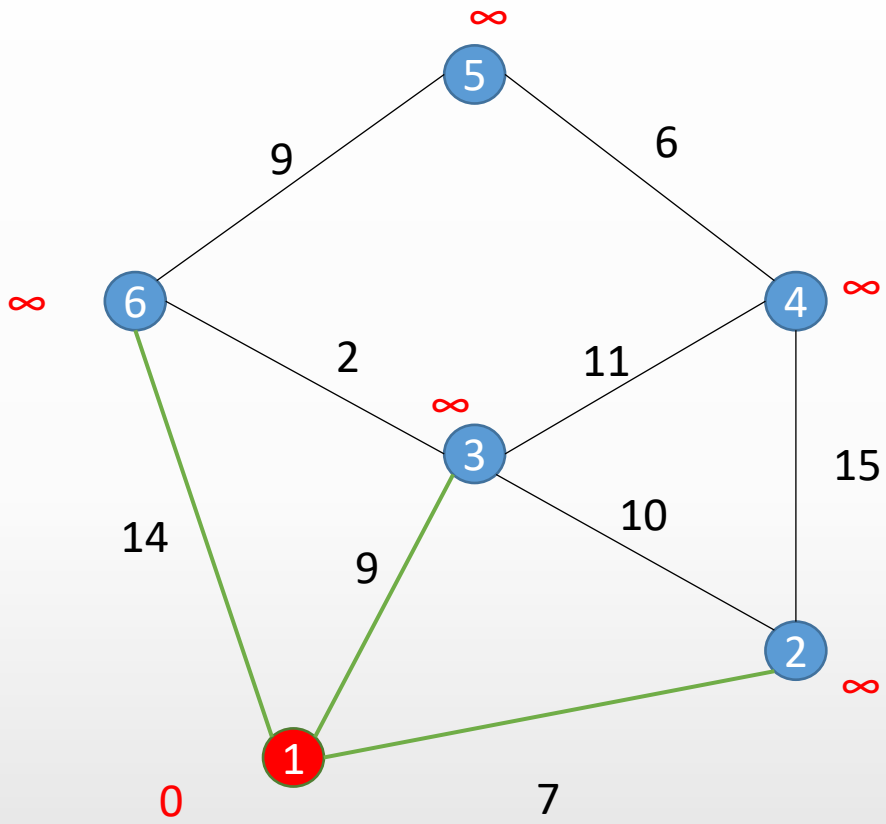
- En kısa mesafeli düğümü seçmek için;
  - Dizi temsili kullanılırsa;
    - $O(V^2)$ karmaşıklığına sahiptir.
  - Öncelik kuyruğu (*Priority Queue*) kullanılırsa;
    - $O((V + E)logV)$ karmaşıklığına sahiptir.

Dijkstra



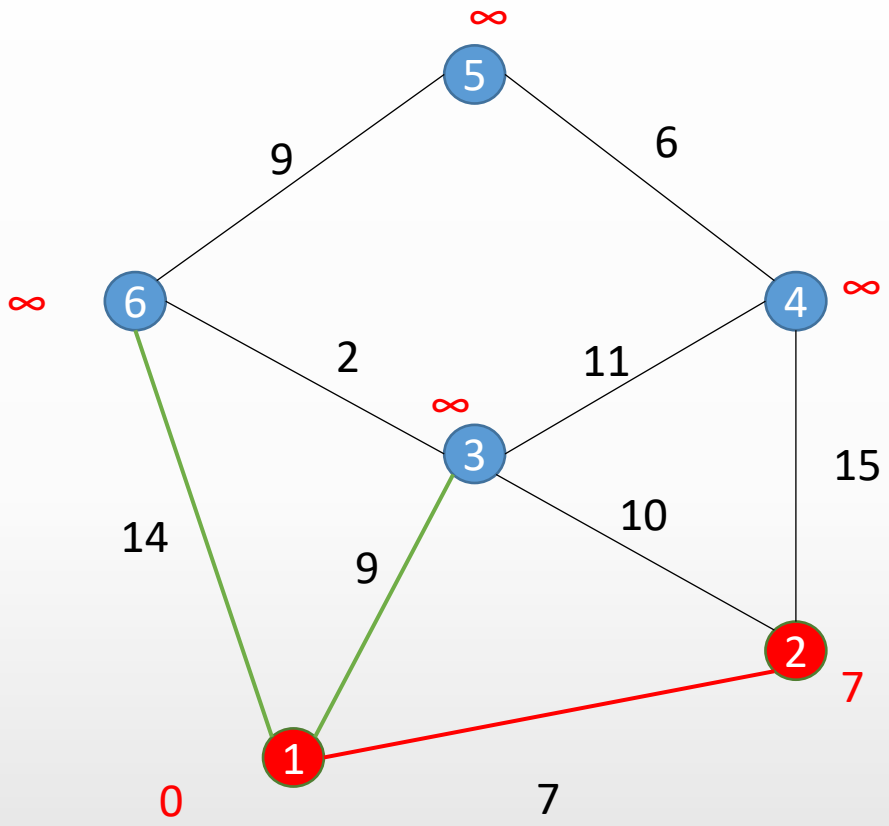
	1
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞

Dijkstra



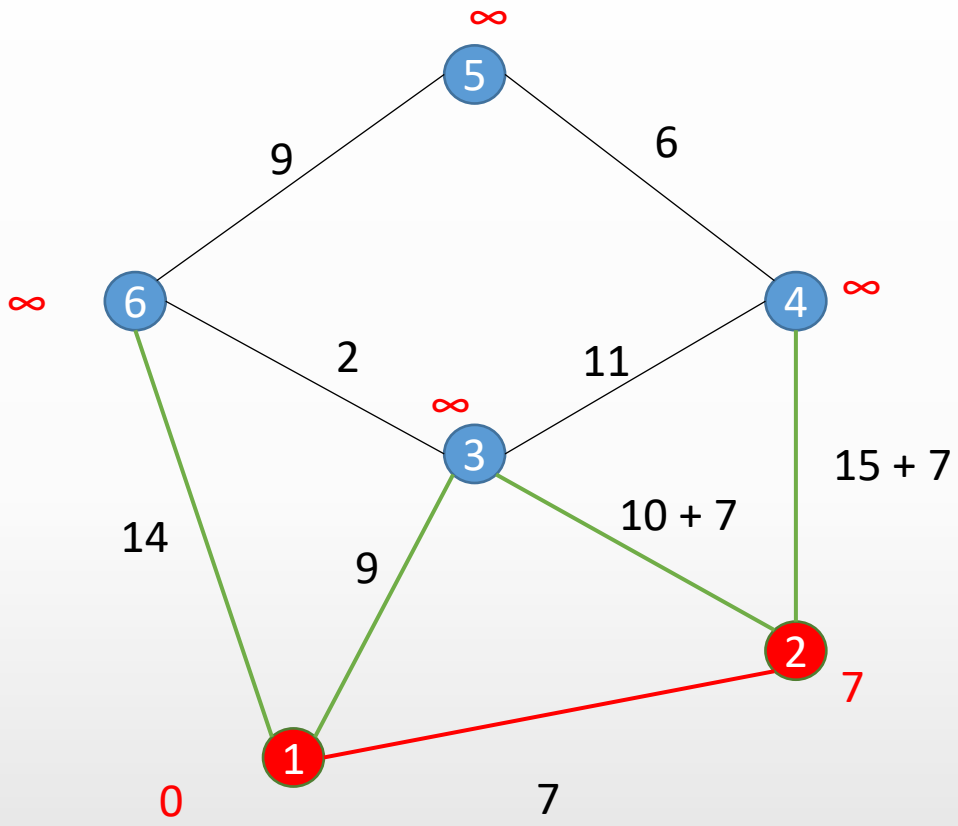
	1
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞

Dijkstra



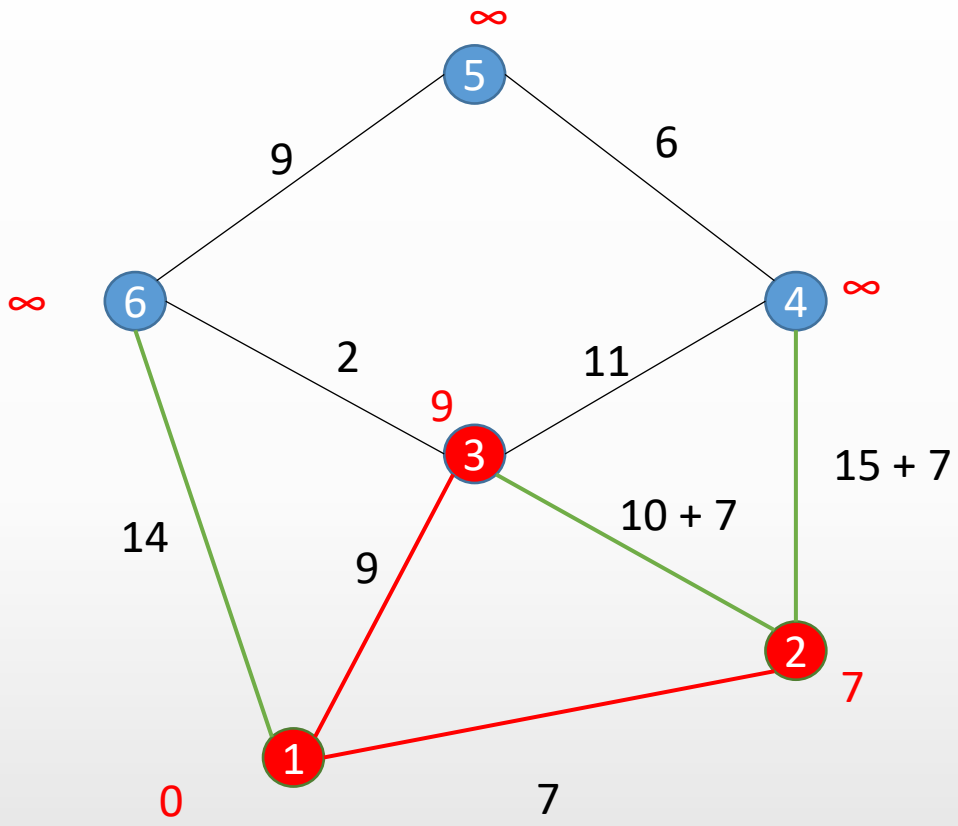
	1
1	0
2	7
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞

Dijkstra



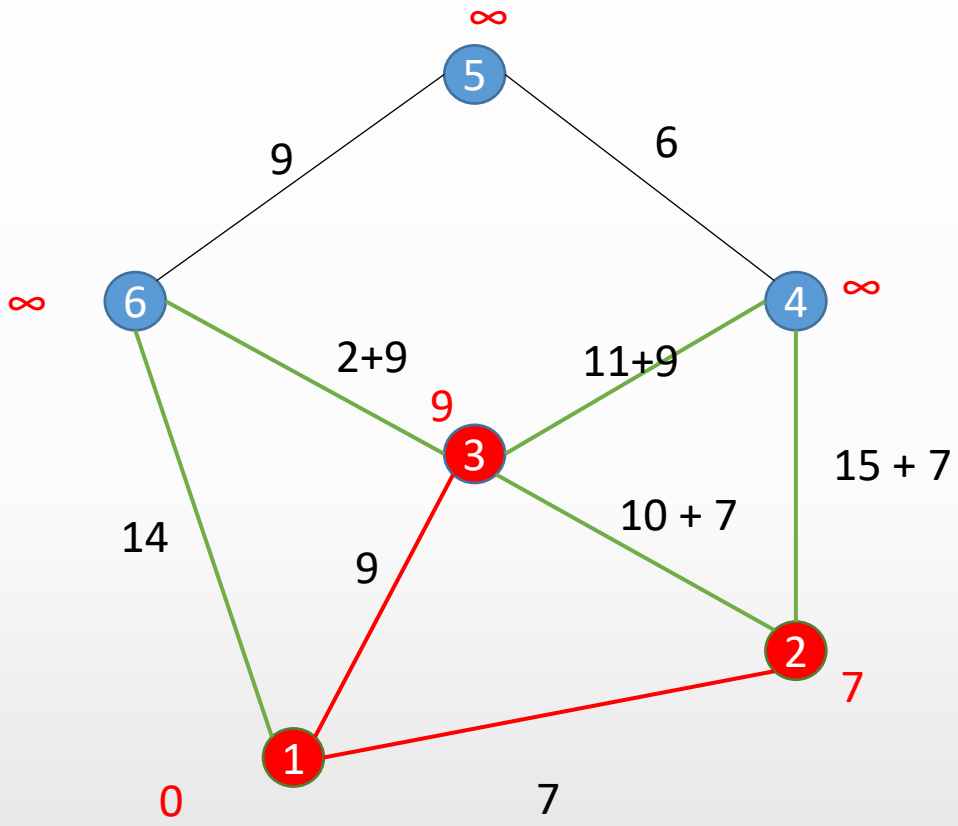
	1
1	0
2	7
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞

Dijkstra



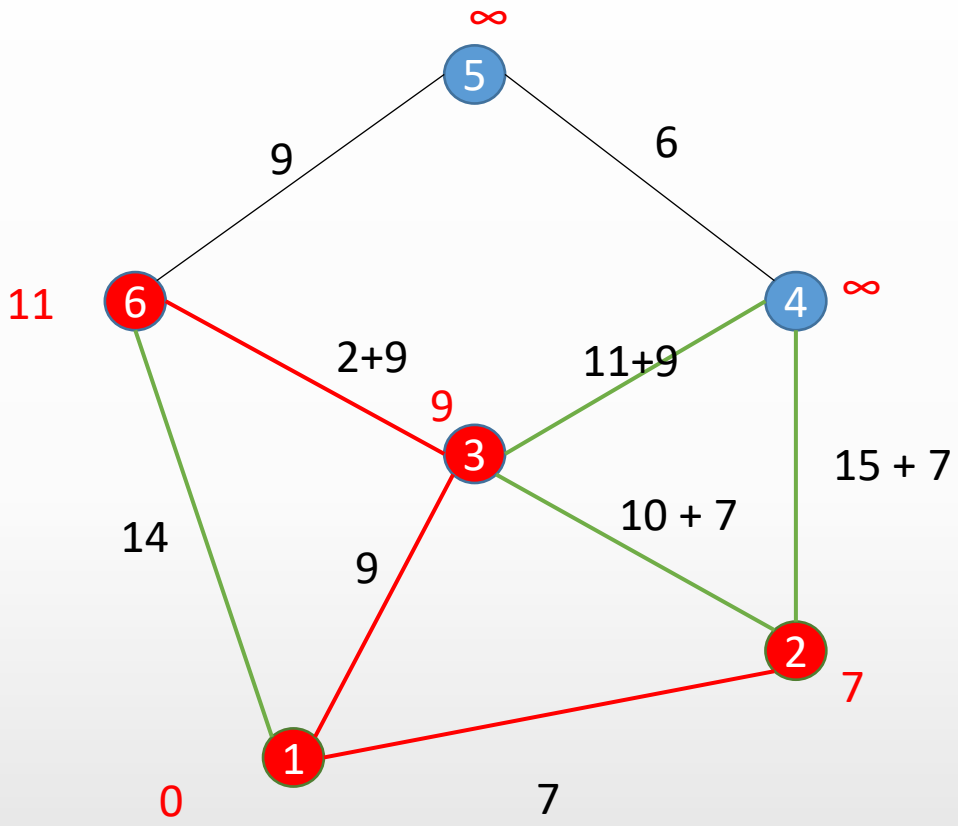
	1
1	0
2	7
3	9
4	∞
5	∞
6	∞

Dijkstra



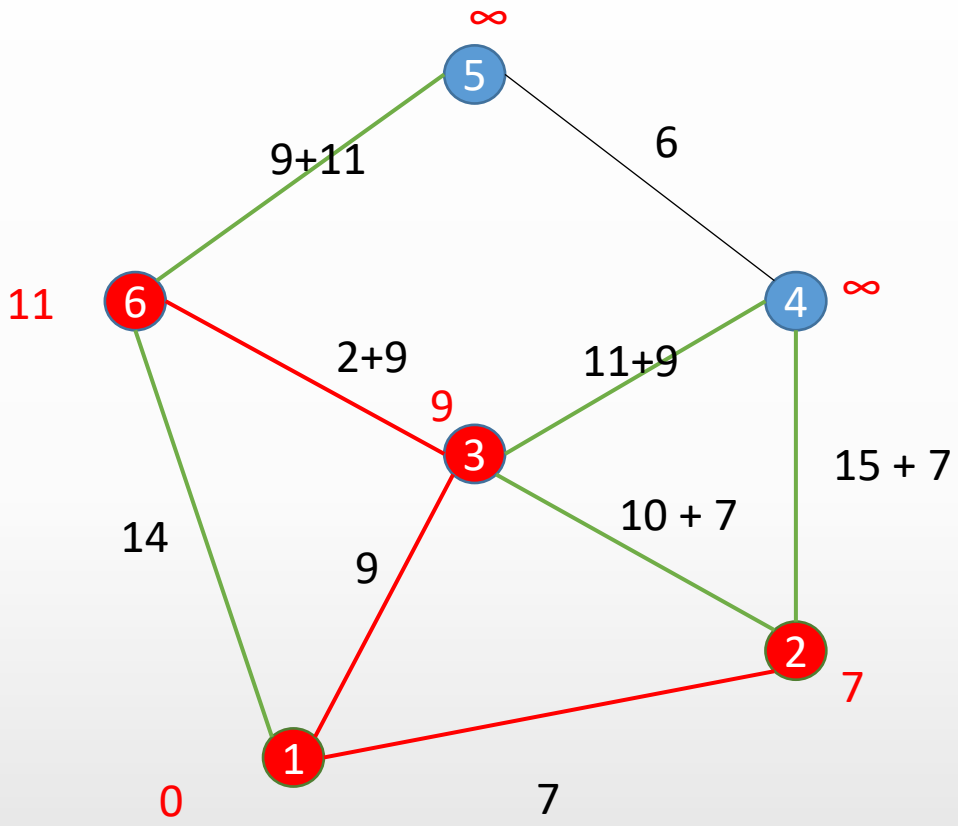
	1
1	0
2	7
3	9
4	∞
5	∞
6	∞

Dijkstra



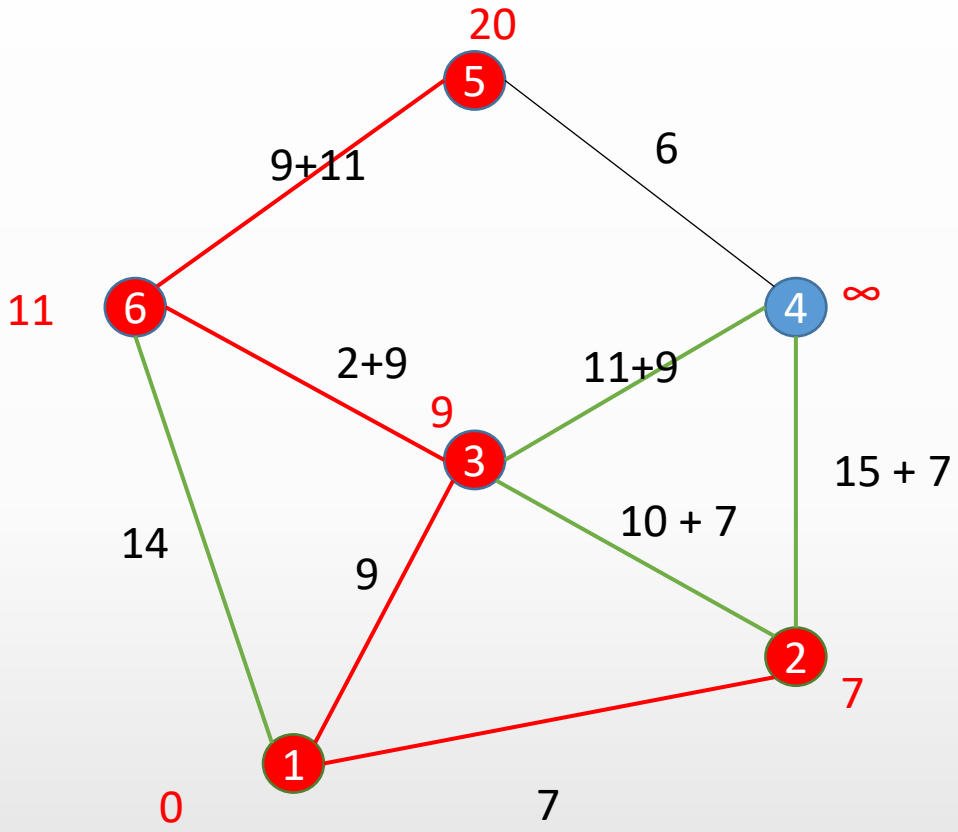
	1
1	0
2	7
3	9
4	∞
5	∞
6	11

Dijkstra



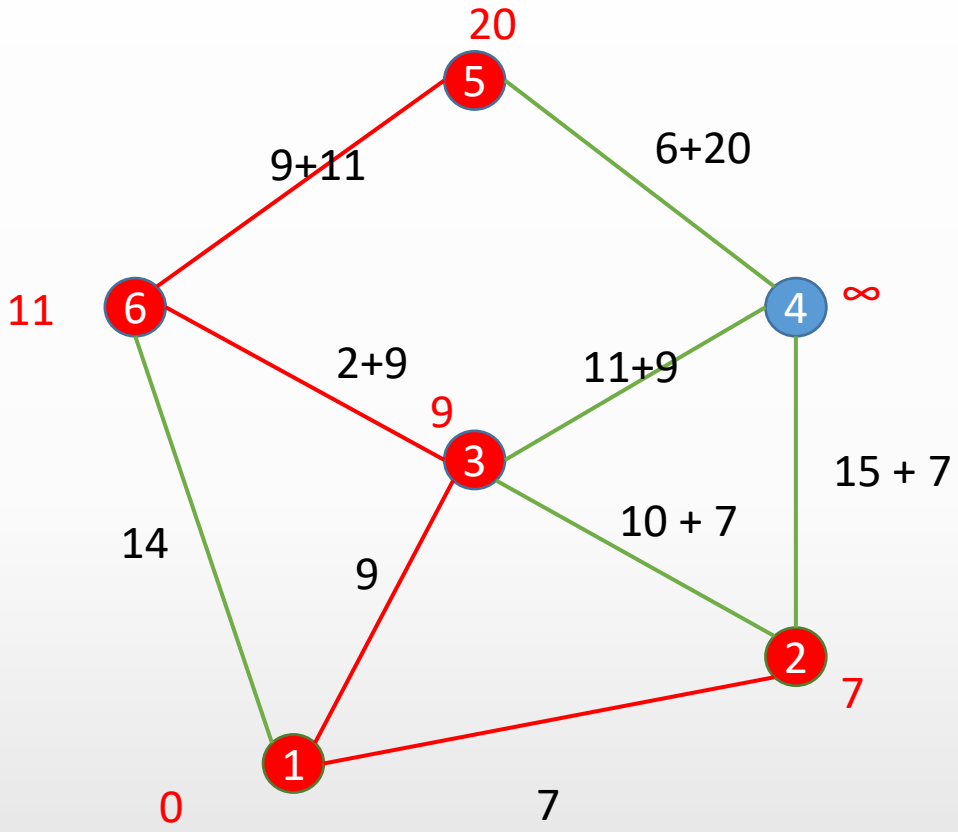
	1
1	0
2	7
3	9
4	∞
5	∞
6	11

Dijkstra



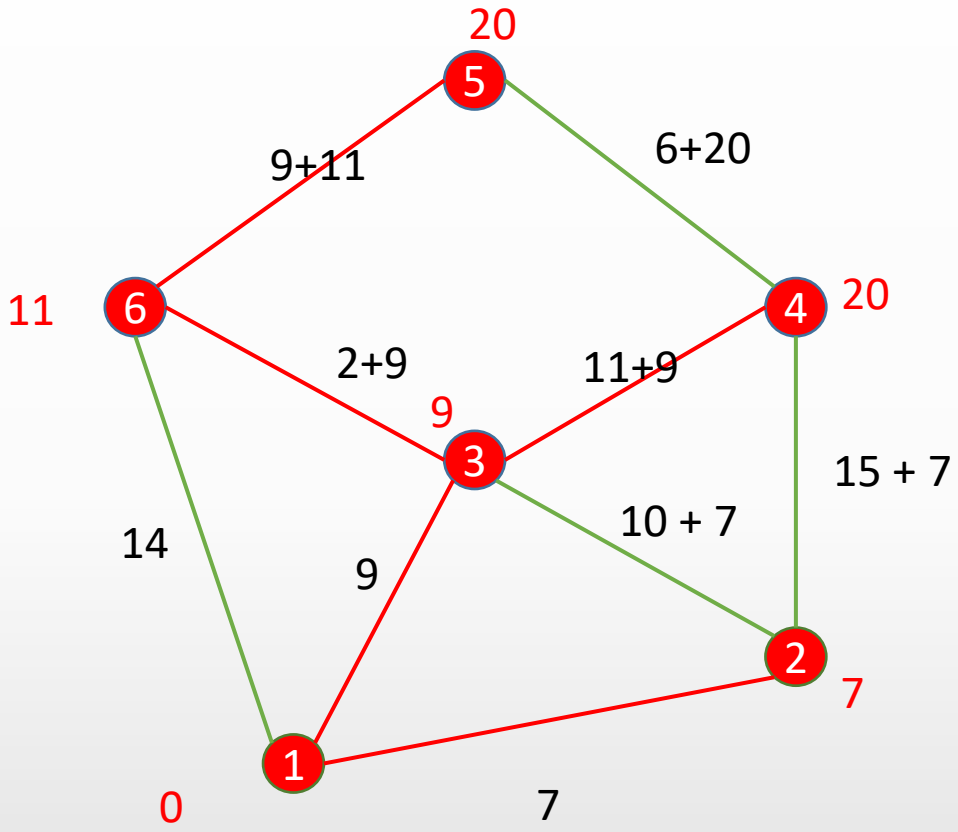
	1
1	0
2	7
3	9
4	∞
5	20
6	11

Dijkstra



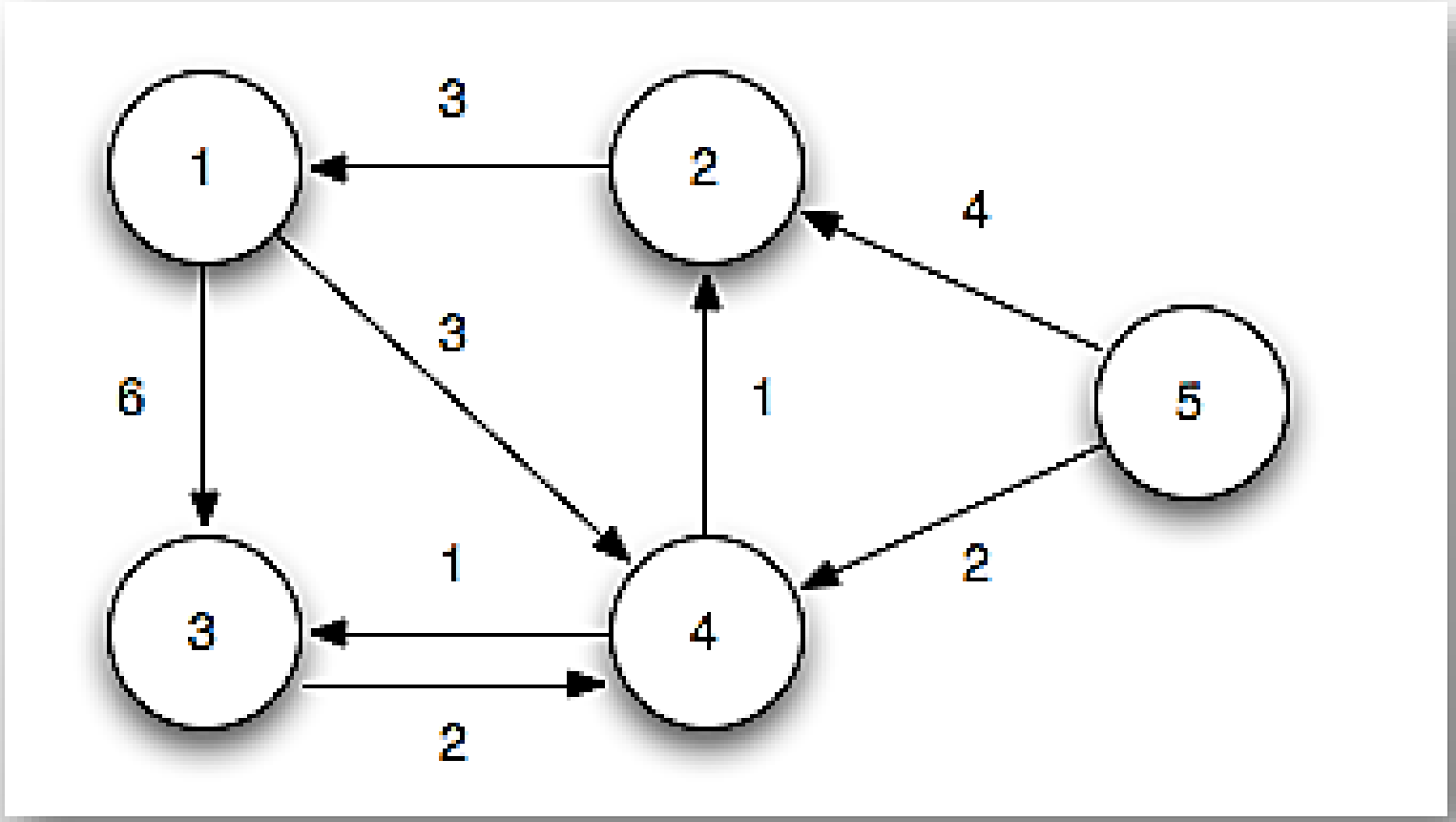
	1
1	0
2	7
3	9
4	∞
5	20
6	11

Dijkstra



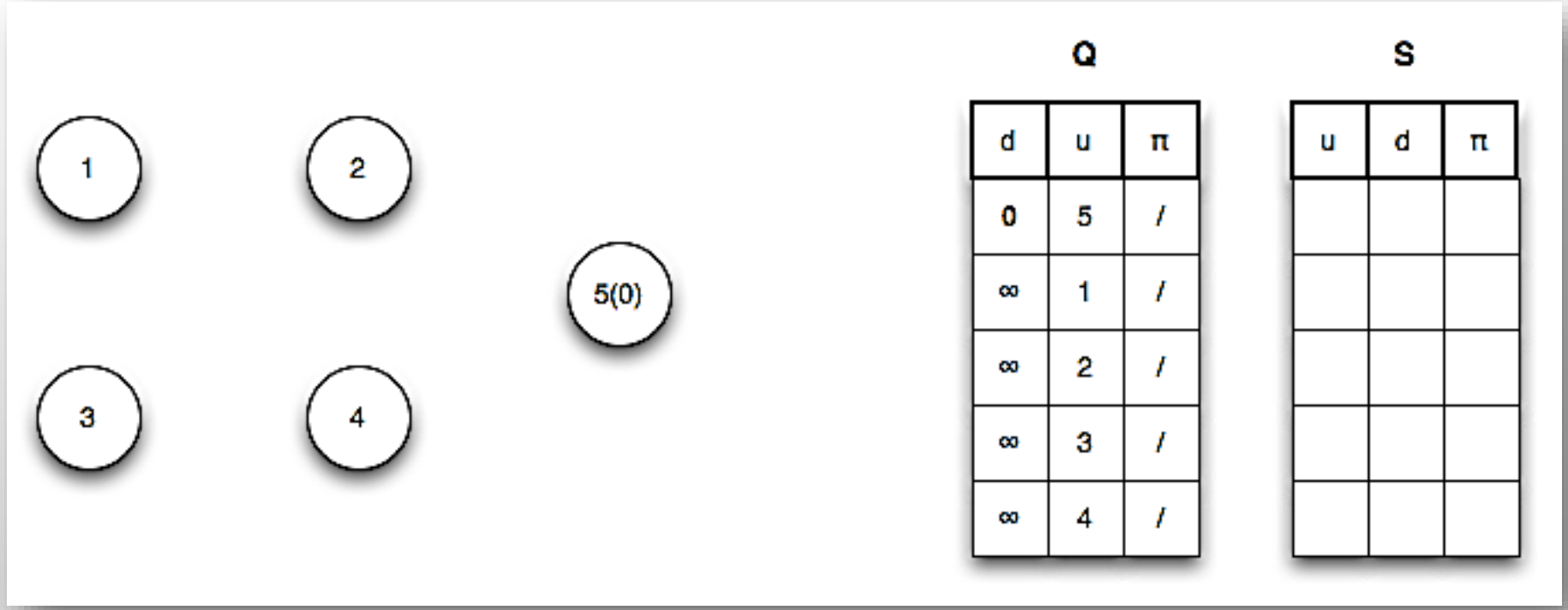
	1
1	0
2	7
3	9
4	20
5	20
6	11

Örnek



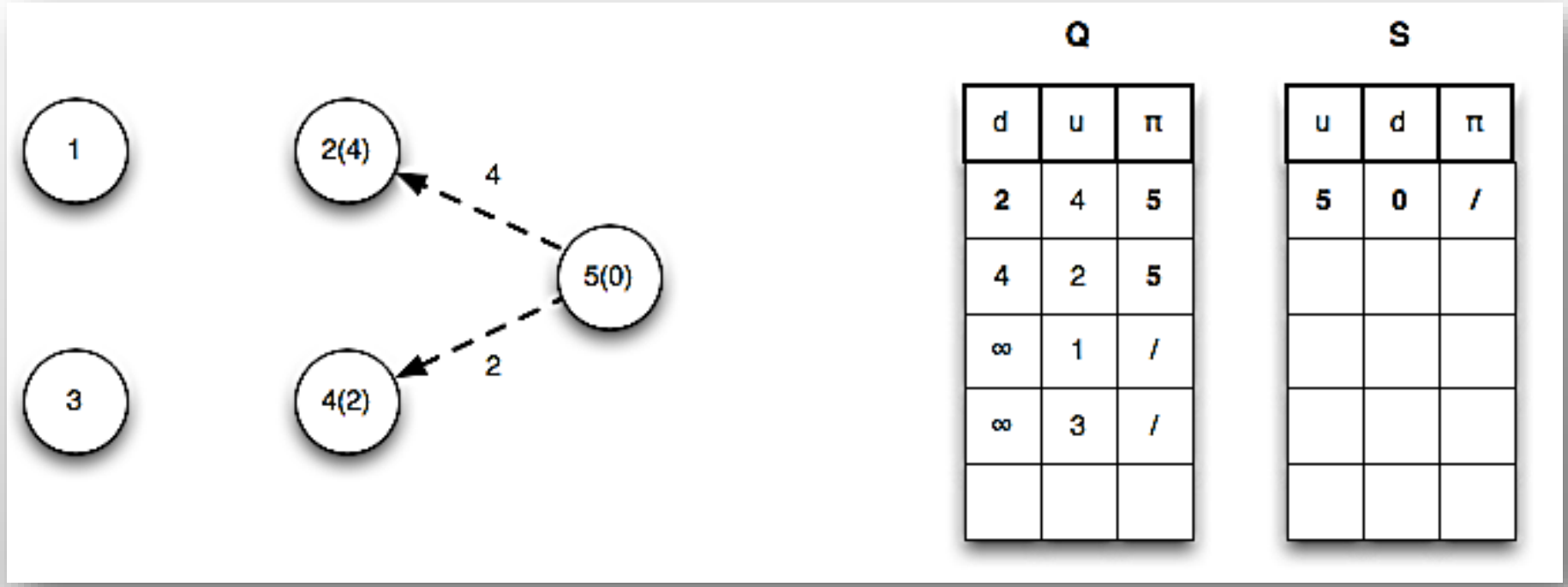
İlklendirme Aşaması

- Kaynak düğüm 5'in uzaklık değerine 0, diğerlerine ∞ atanır. S = Ø olarak başlatılır.



Iteration 1

- Düğüm 5 kuyruktan alınır, 0 uzaklık ile S kümesine konur. (u5,u2) ve (u5,u4) kenarları incelenerek kısa yollar hesaplanır. (*relax*)



Q

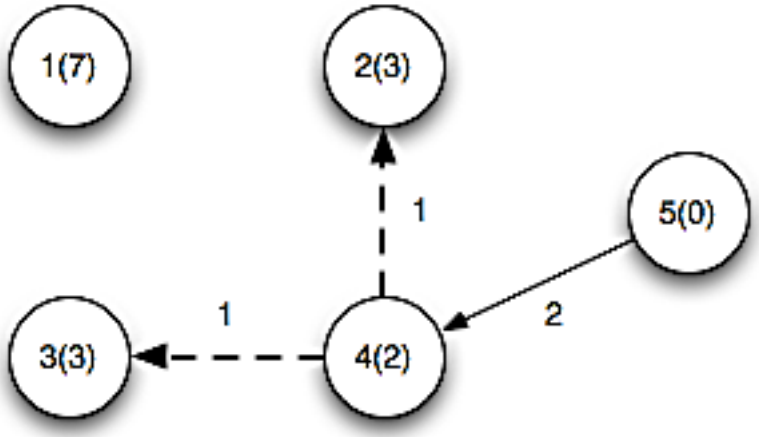
d	u	π
2	4	**5**
4	2	**5**
∞	1	/
∞	3	/

S

u	d	π
5	**0**	/

Iteration 2

- Düğüm 4 kuyruktan alınır, ve 2 uzaklık ile S kümesine konur. (u4,u2) ve (u4,u3) kenarları incelenerek kısa yollar hesaplanır. (*relax*) (u4,u2) kenarı daha kısa bir yol bulur.



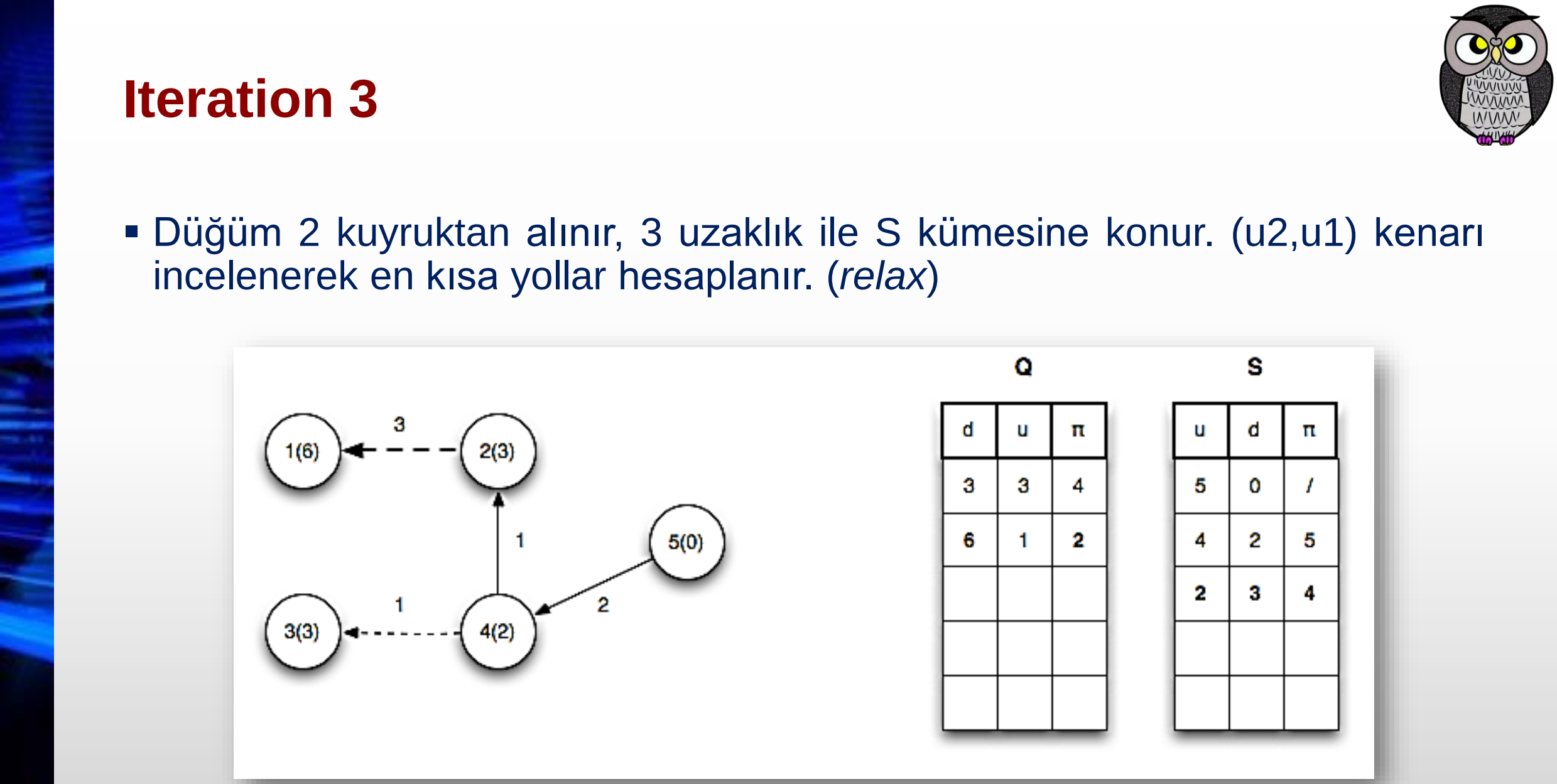
Q

d	u	π
3	2	4
3	3	4
∞	1	/

S

u	d	π
5	0	/
4	2	5

Iteration 3



- Düğüm 2 kuyruktan alınır, 3 uzaklık ile S kümesine konur. (u2,u1) kenarı incelenerek en kısa yollar hesaplanır. (*relax*)

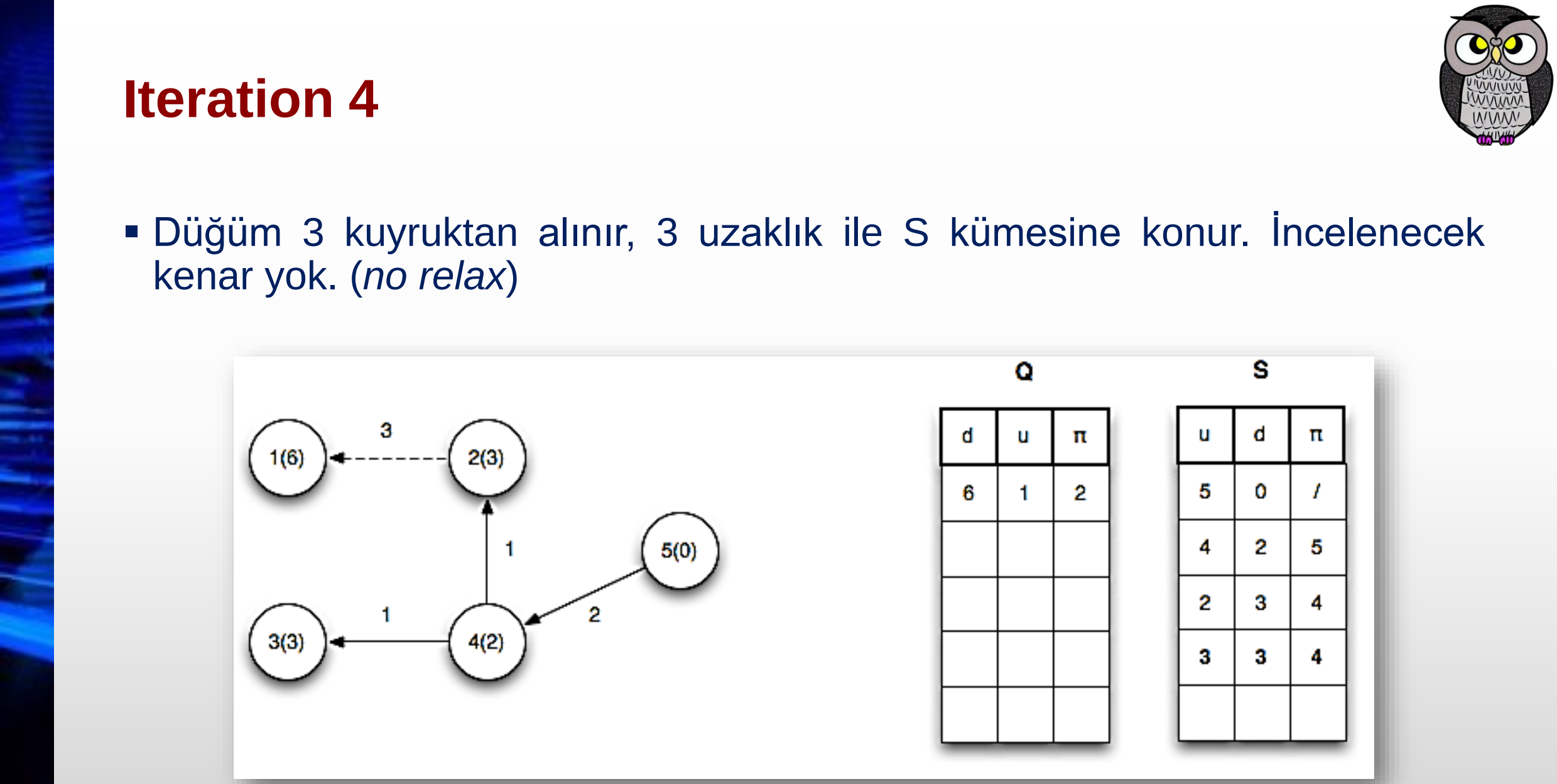
Q

d	u	π
3	3	4
6	1	2

S

u	d	π
5	0	/
4	2	5
2	3	4

Iteration 4



- Düğüm 3 kuyruktan alınır, 3 uzaklık ile S kümesine konur. İncelenecek kenar yok. (*no relax*)

Q

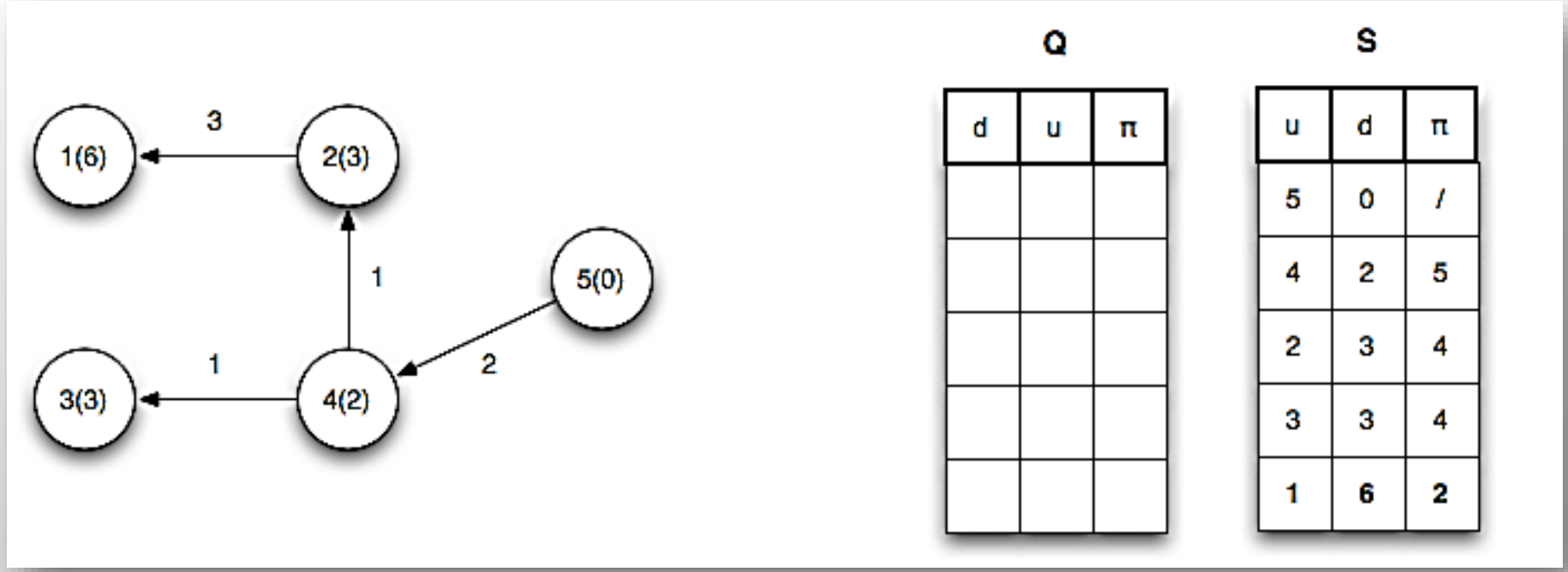
d	u	π
6	1	2

S

u	d	π
5	0	/
4	2	5
2	3	4
3	3	4

Iteration 5

- Düğüm 1 kuyruktan alınır, 6 uzaklık ile S kümesine konur. İncelenecek kenar yok. (*no relax*)



Q

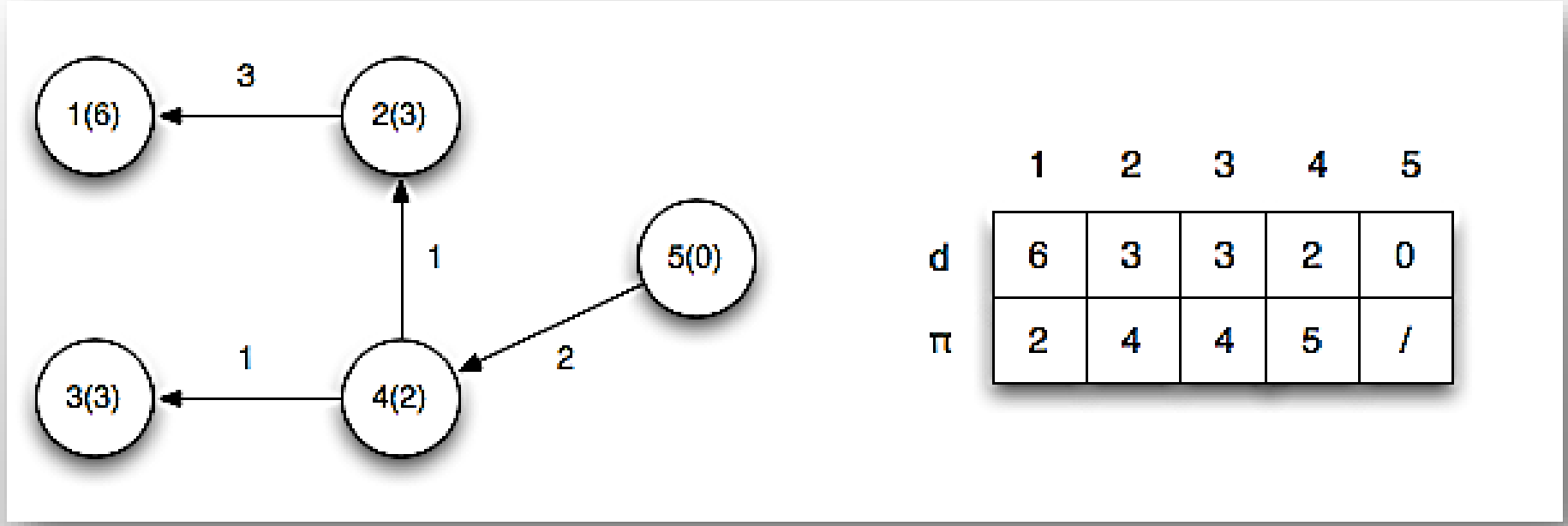
d	u	π

S

u	d	π
5	0	/
4	2	5
2	3	4
3	3	4
1	6	2

Son Durum

- Düğüm 5'ten diğer düğümlere olan en kısa yollar



	1	2	3	4	5
d	6	3	3	2	0
π	2	4	4	5	/

Sözde Kod

```
DIJKSTRA (G, kaynak):
        mesafeler = [ ]
        ziyaretEdildi = [ ]
        öncelikKuyruğu = { }

        her bir v için V içinde:
                mesafeler[v] = sonsuz
                ziyaretEdildi[v] = 0
        mesafeler[kaynak] = 0
        öncelikKuyruğu.ekle(kaynak, 0)
```

Sözde kod (2)

```
döngü öncelikKuyruğu boş değil iken:
        u = öncelikKuyruğu.çıkar()
        eğer ziyaretEdildi[u] == 0:
                ziyaretEdildi[u] = 1
                her bir (u, v) için G[u] içinde:
                        eğer mesafeler[u] + ağırlık(u, v) < mesafeler[v]:
                                mesafeler[v] = mesafeler[u] + ağırlık(u, v)
                                öncelikKuyruğu.ekle(v, mesafeler[v])

döndür mesafeler
```

Bellman Ford

- Kaynak düğümden diğer tüm düğümlere olan en kısa yolu bulur.
- 1958 yılında *Richard Bellman* ve *Lester Ford Jr.* tarafından geliştirilmiştir.
- Negatif ağırlıklı kenarları işleyebilir.
- Negatif ağırlıklı döngüleri bulabilir.

Algoritma İlkeleri

- Her düğüm için en kısa yol tahminlerini tutan bir dizi kullanır.
- Başlangıçta tüm düğümlerin en kısa yol tahminlerine ∞ atar.
- Çizge üzerindeki tüm kenarlar teker teker incelenir ve
  - her bir düğüm için en kısa yol tahminleri güncellenir.

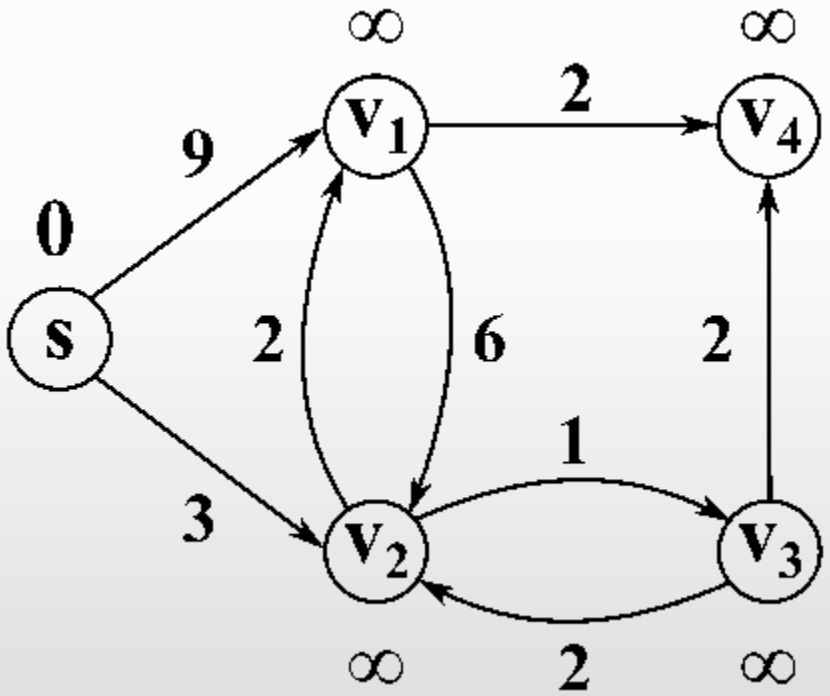
Algoritma Adımları

- Adım 1: Başlangıç düğümü seçilir ve bu düğüme uzaklık *0* atanır.
  - Diğer düğümlere ∞ uzaklık atanır.
- Adım 2: Kenarlar tek tek incelenir, düğümler arası uzaklıklar güncellenir.
  - Negatif döngü kontrolü için tüm kenarlar bir kez daha incelenir.
- Adım 3: Bir düğümün uzaklığı güncellenirse, komşularının uzaklıkları da güncellenir.
- Adım 4: Eğer negatif döngü varsa, algoritma döngüyü tespit eder.

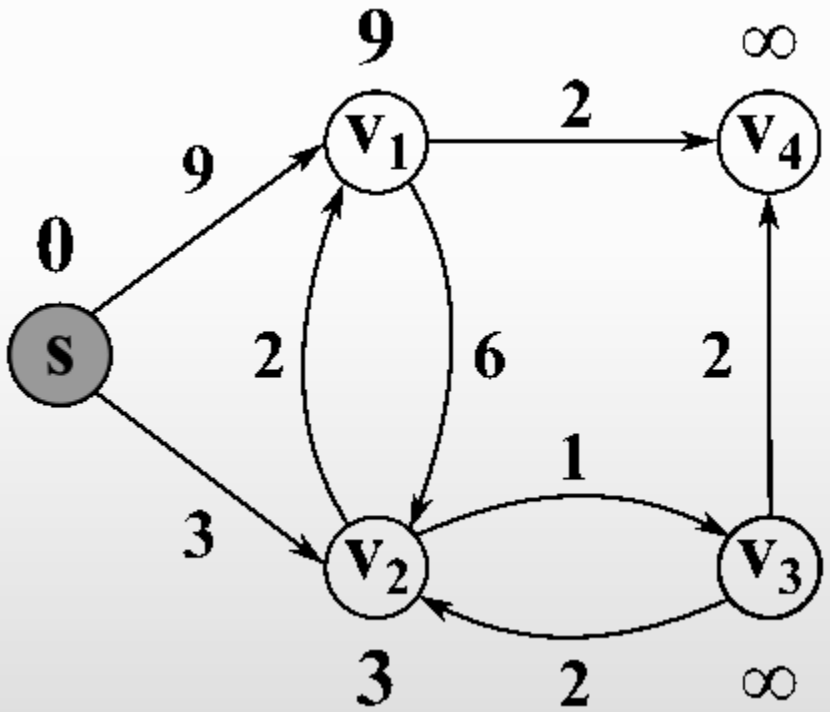
Karmaşıklık Analizi

- Çizge üzerindeki tüm kenarları *V-1* kez inceler.
- O(V*E) karmaşıklığına sahiptir.

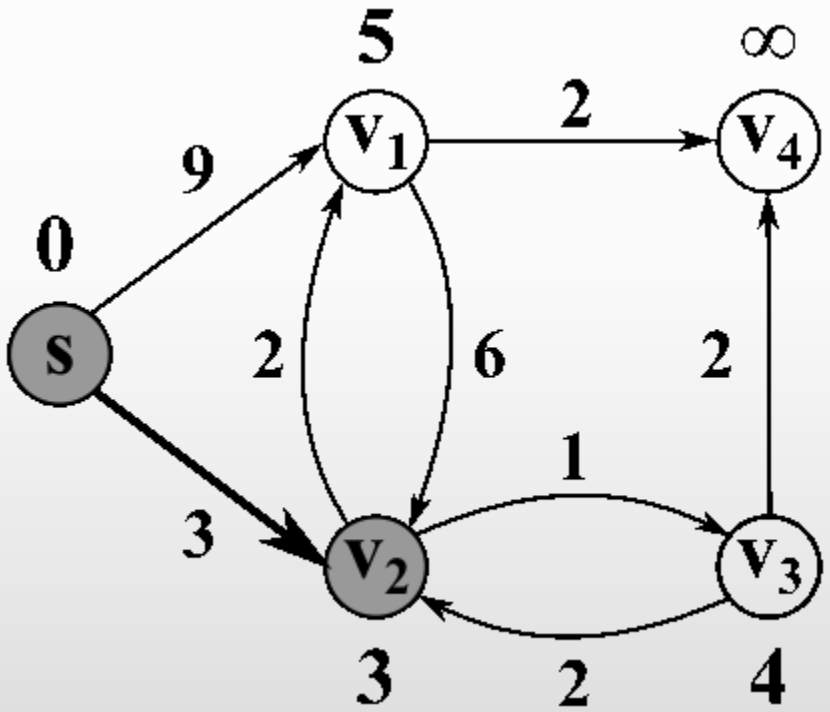
Bellman Ford



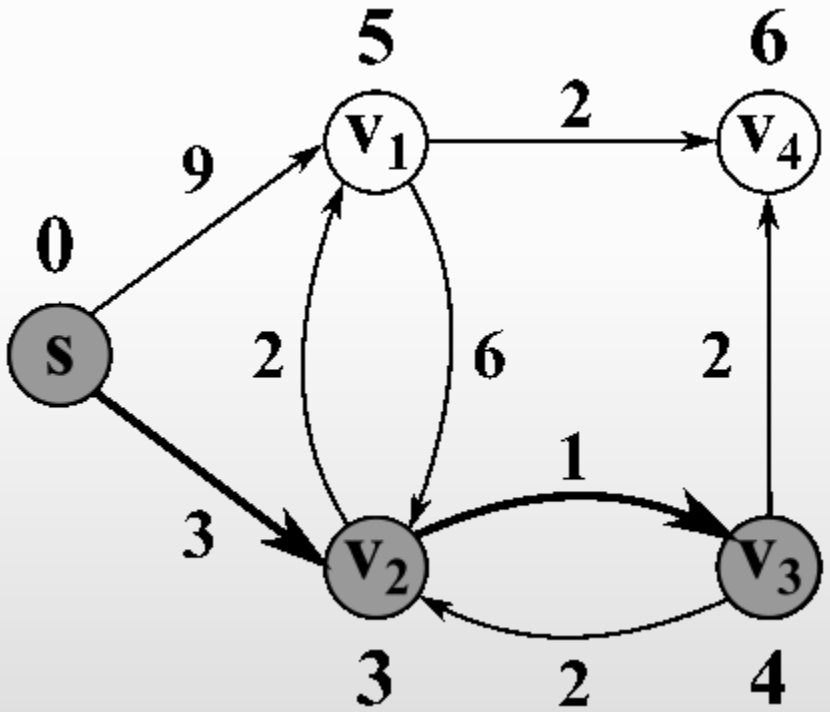
Bellman Ford



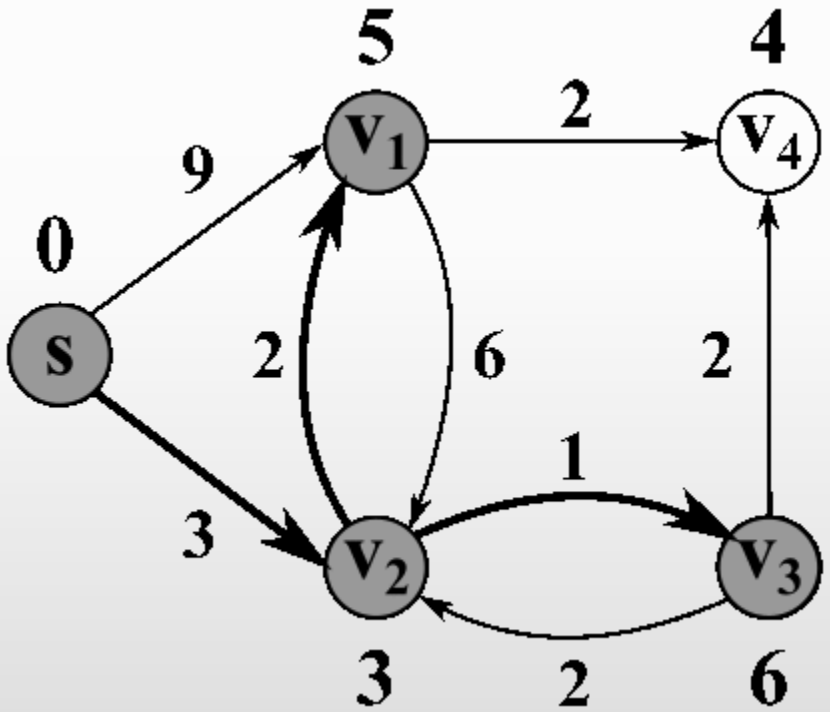
Bellman Ford



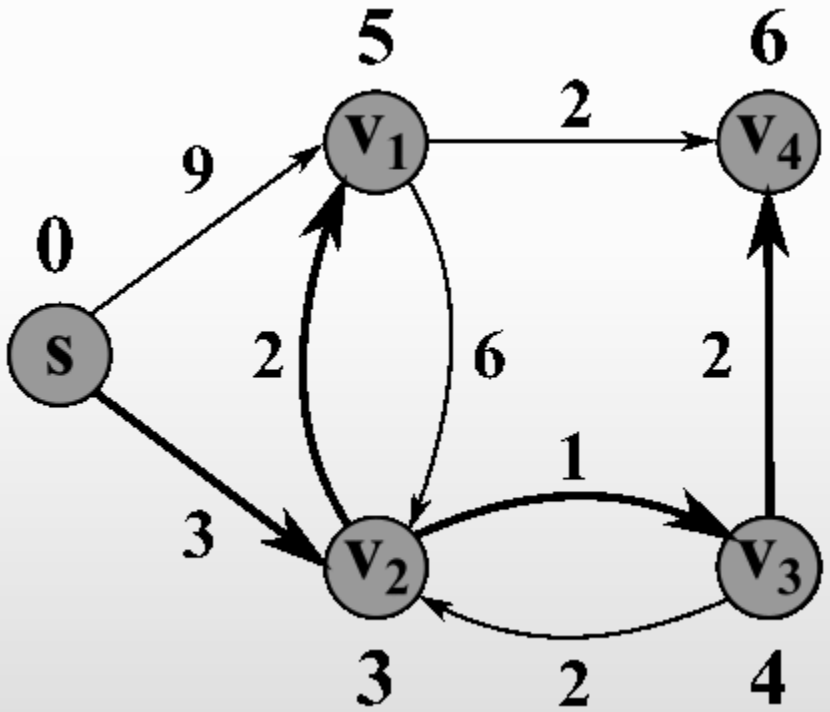
Bellman Ford



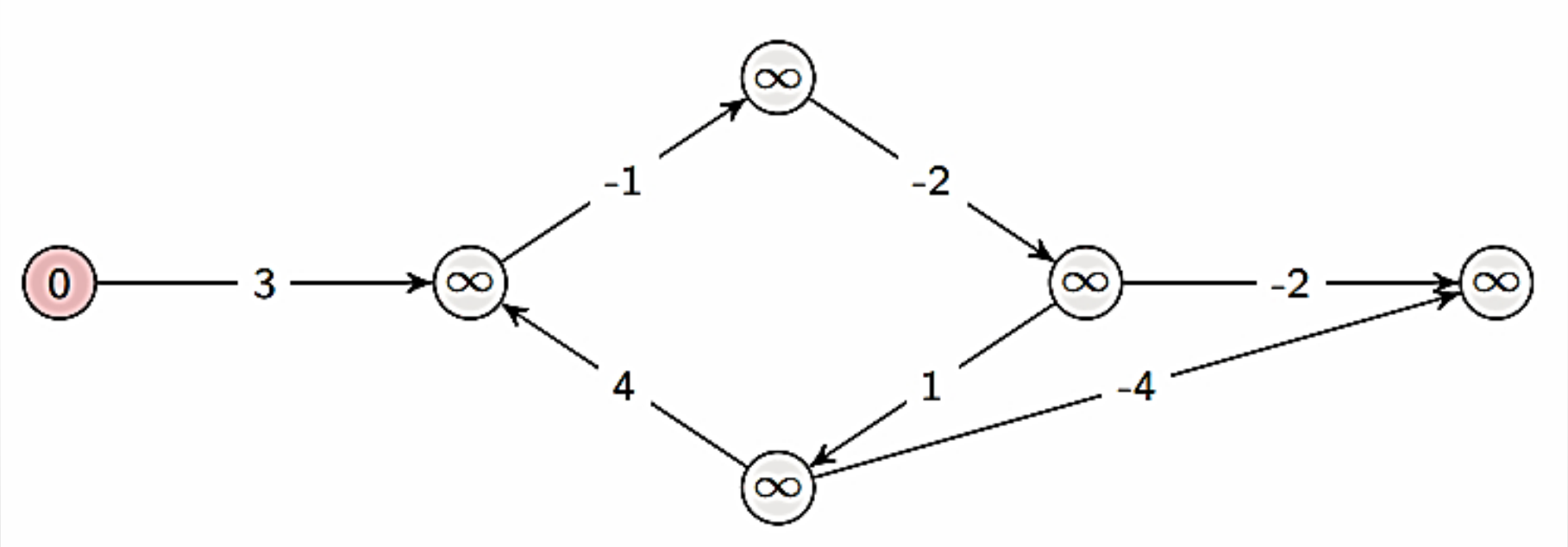
Bellman Ford



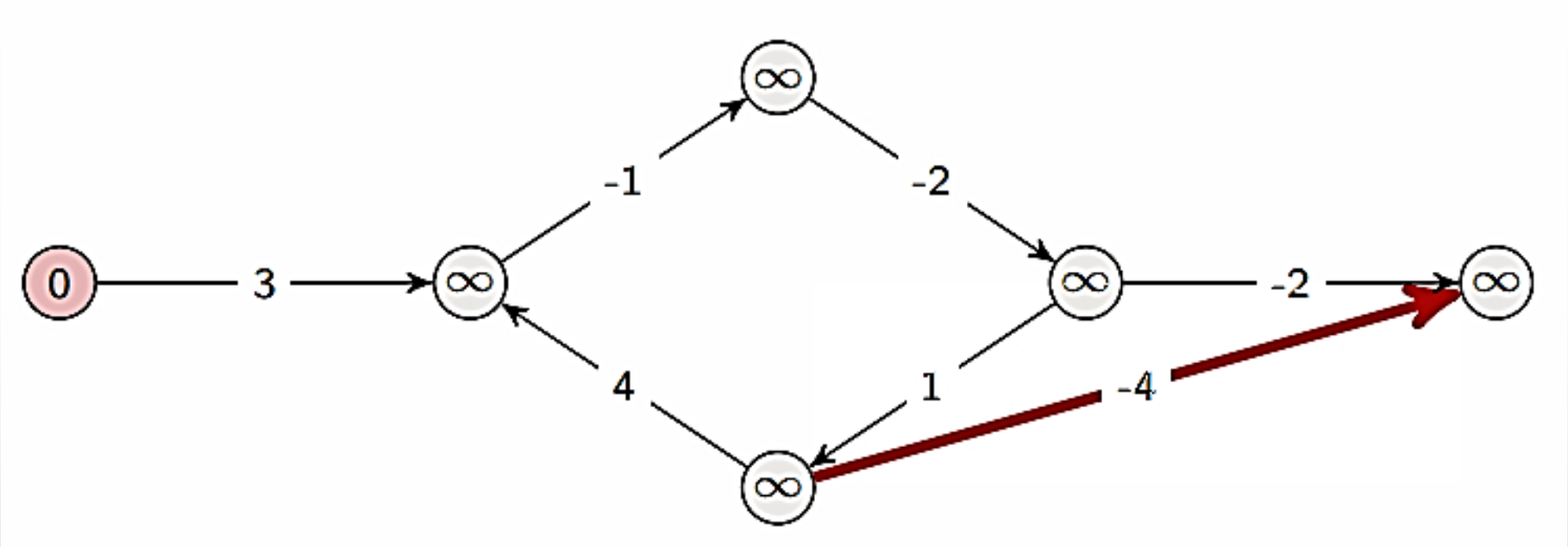
Bellman Ford



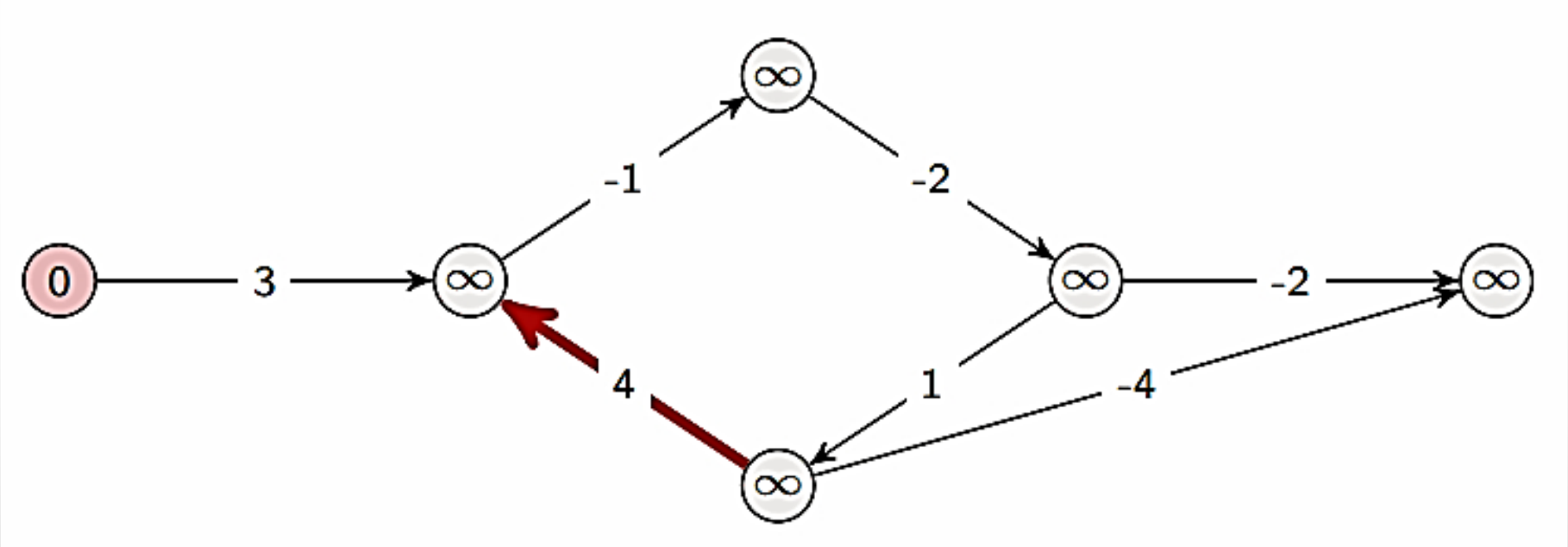
Bellman Ford



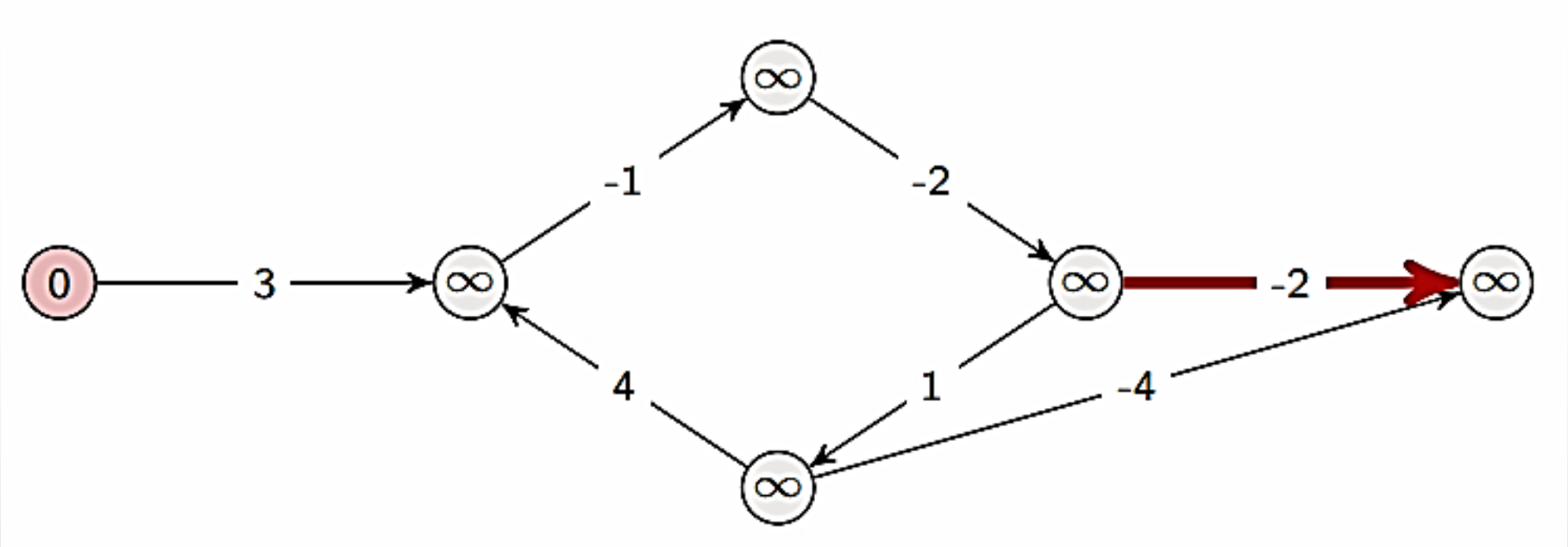
Bellman Ford



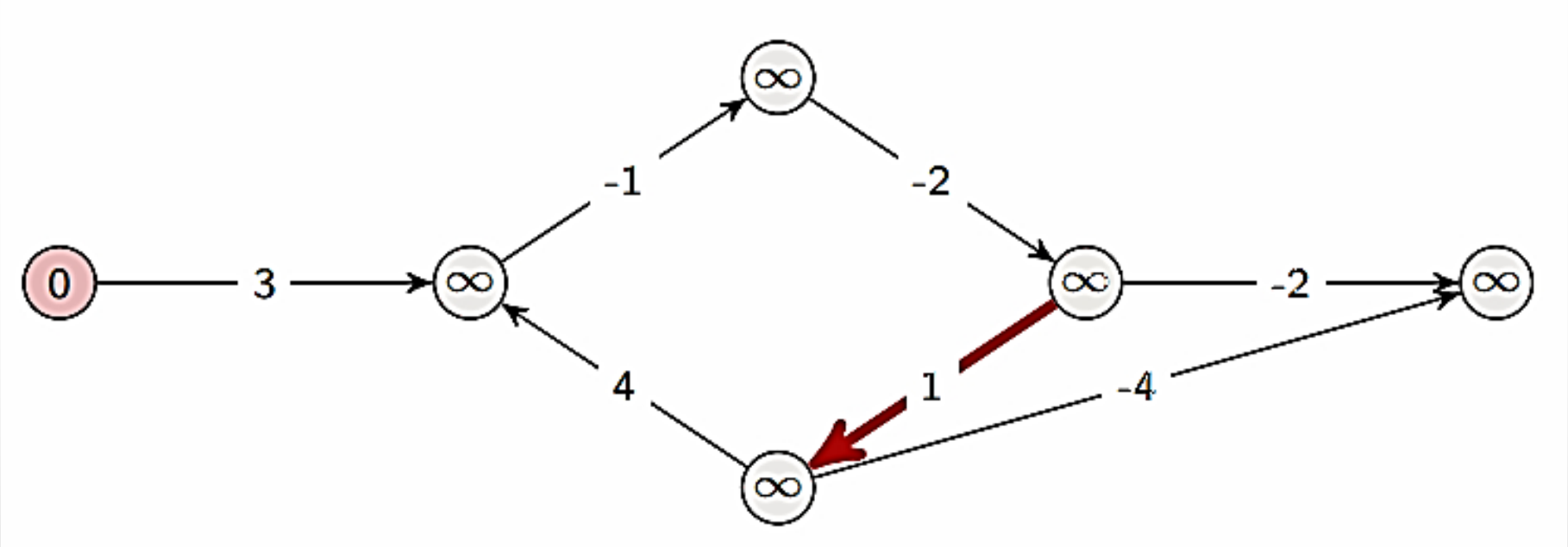
Bellman Ford



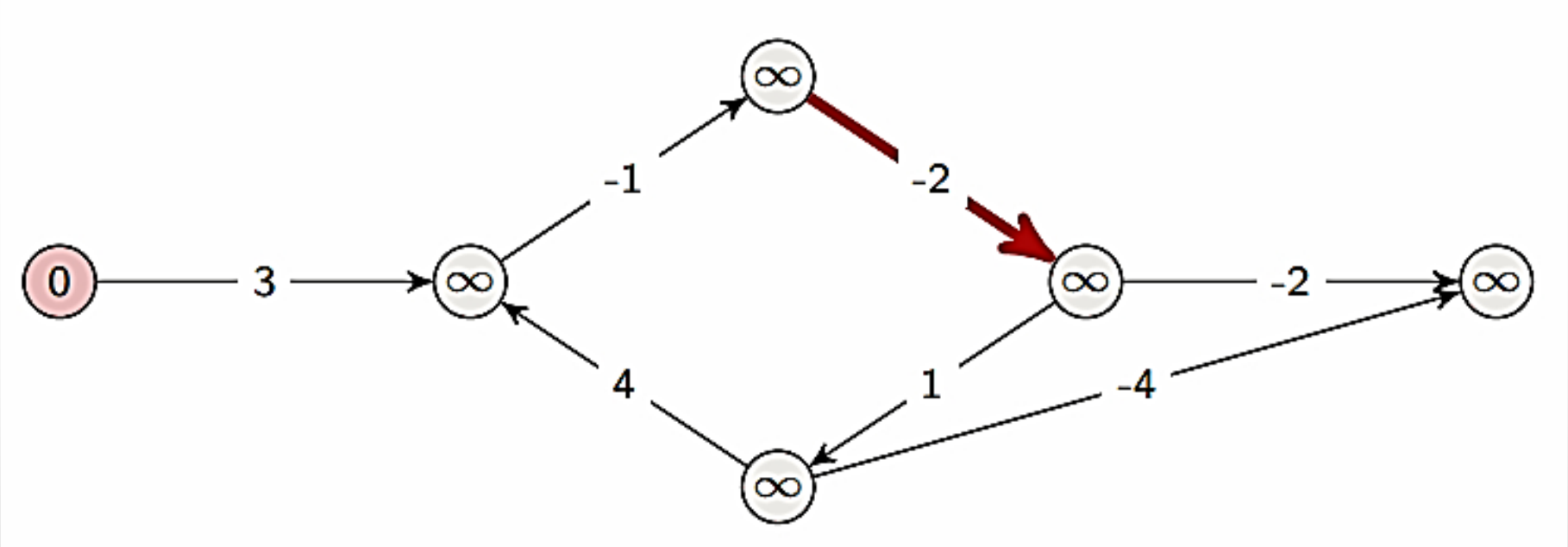
Bellman Ford



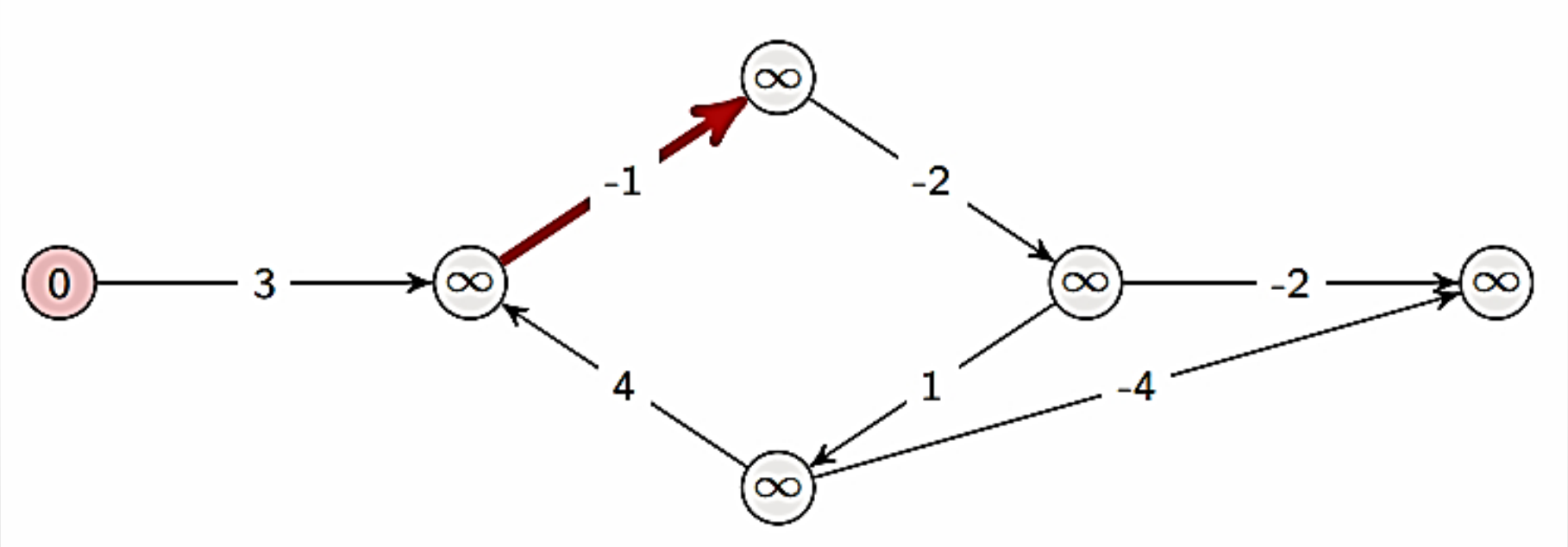
Bellman Ford



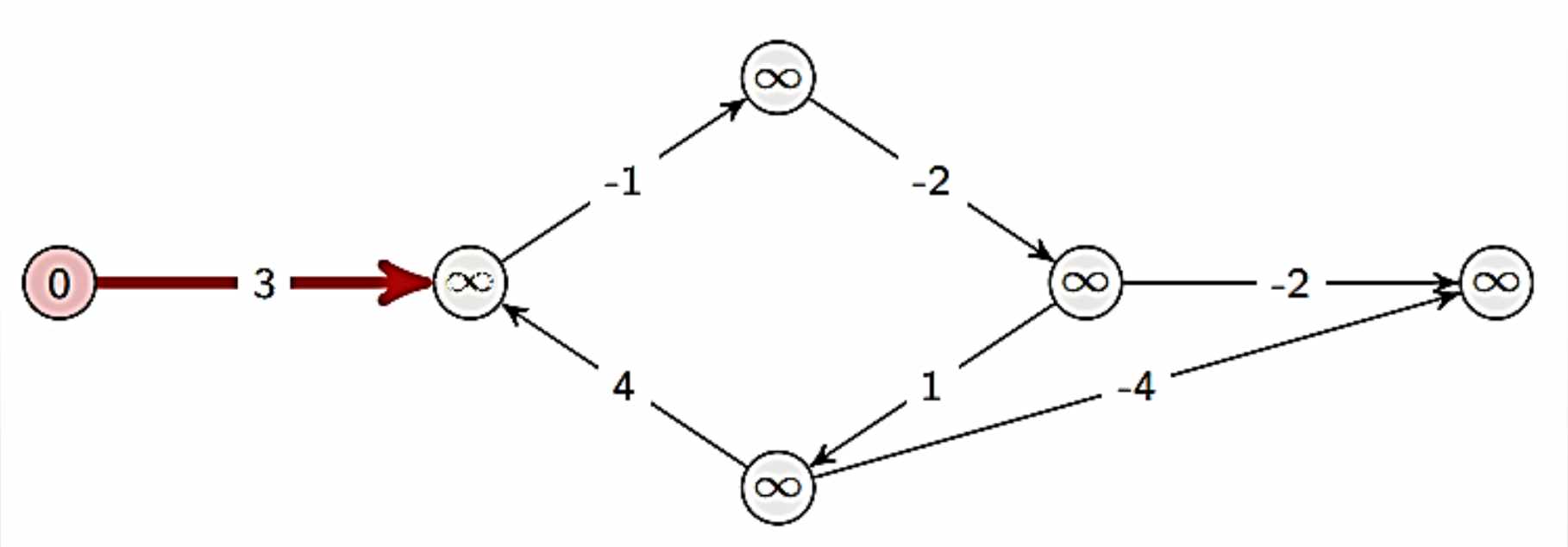
Bellman Ford



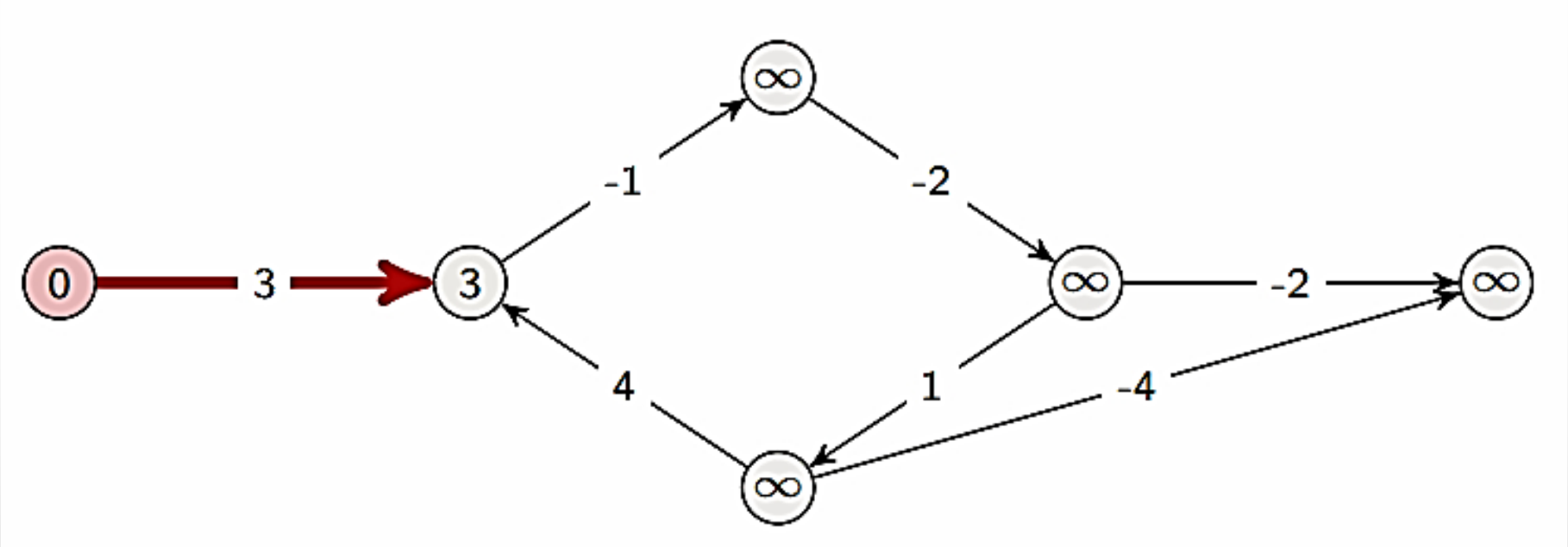
Bellman Ford



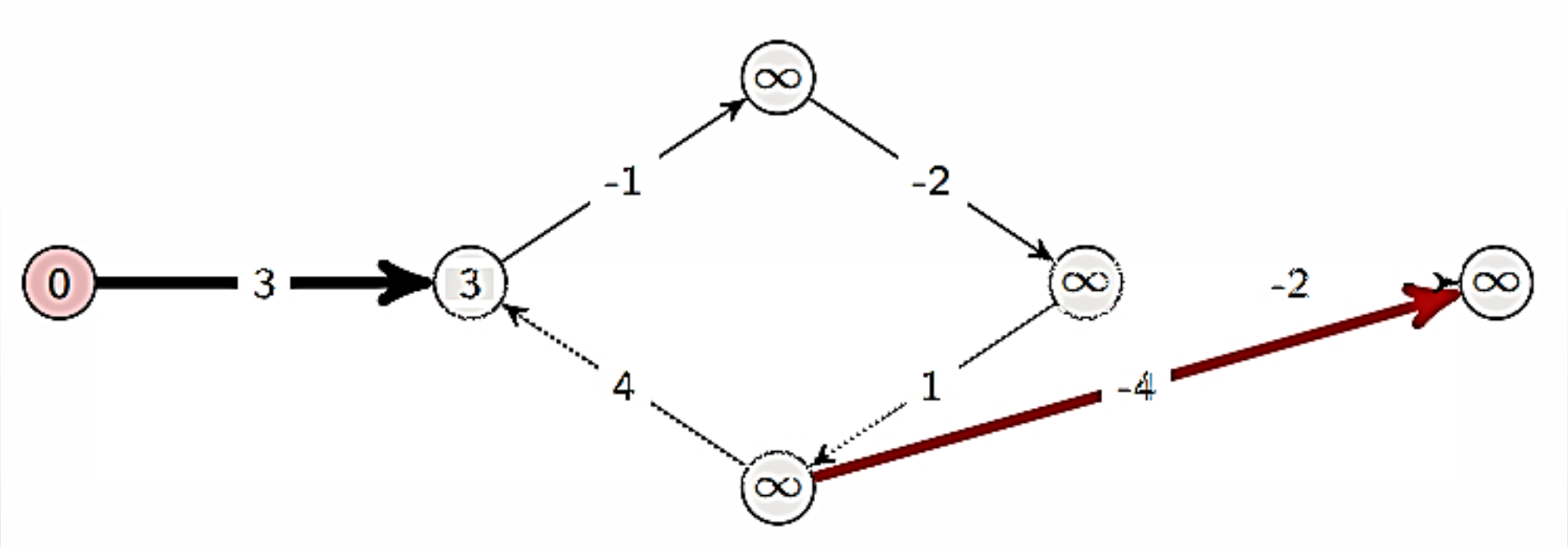
Bellman Ford



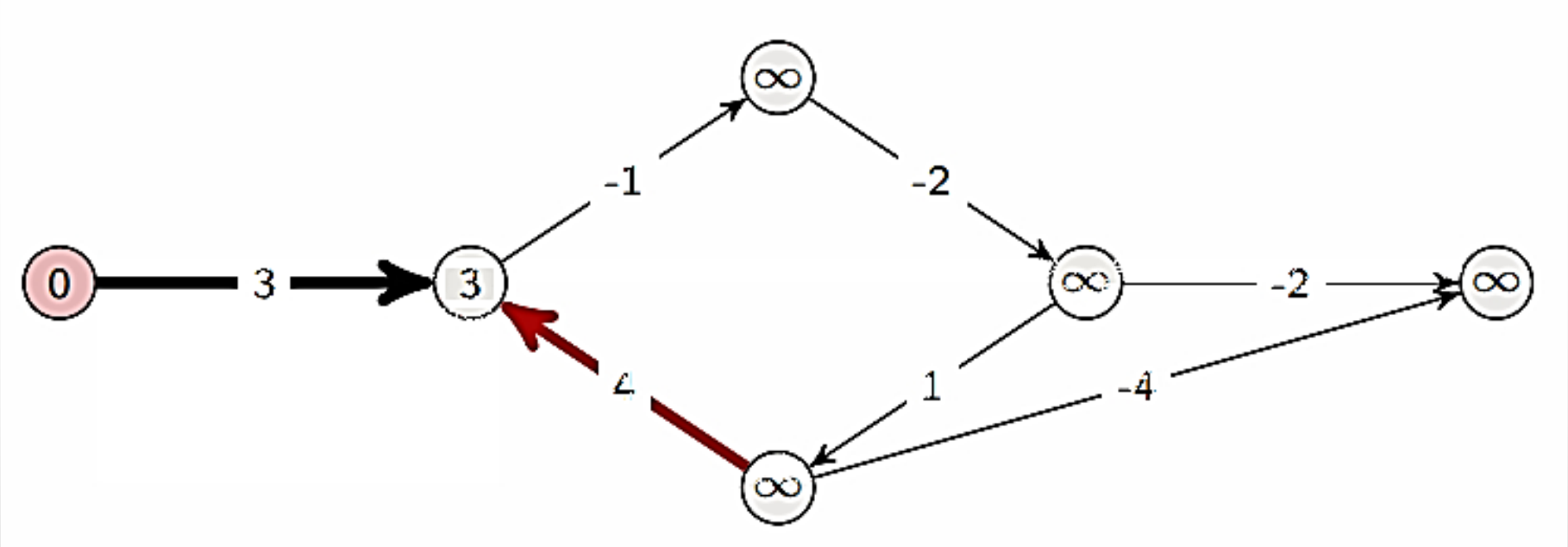
Bellman Ford



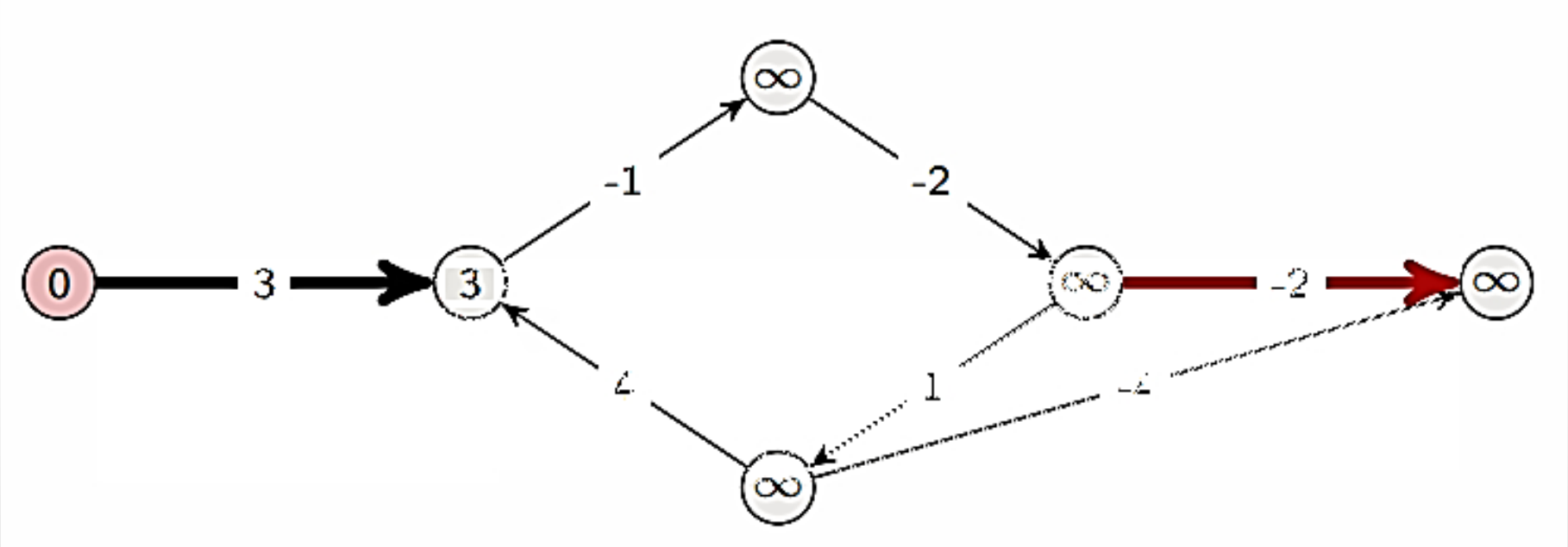
Bellman Ford



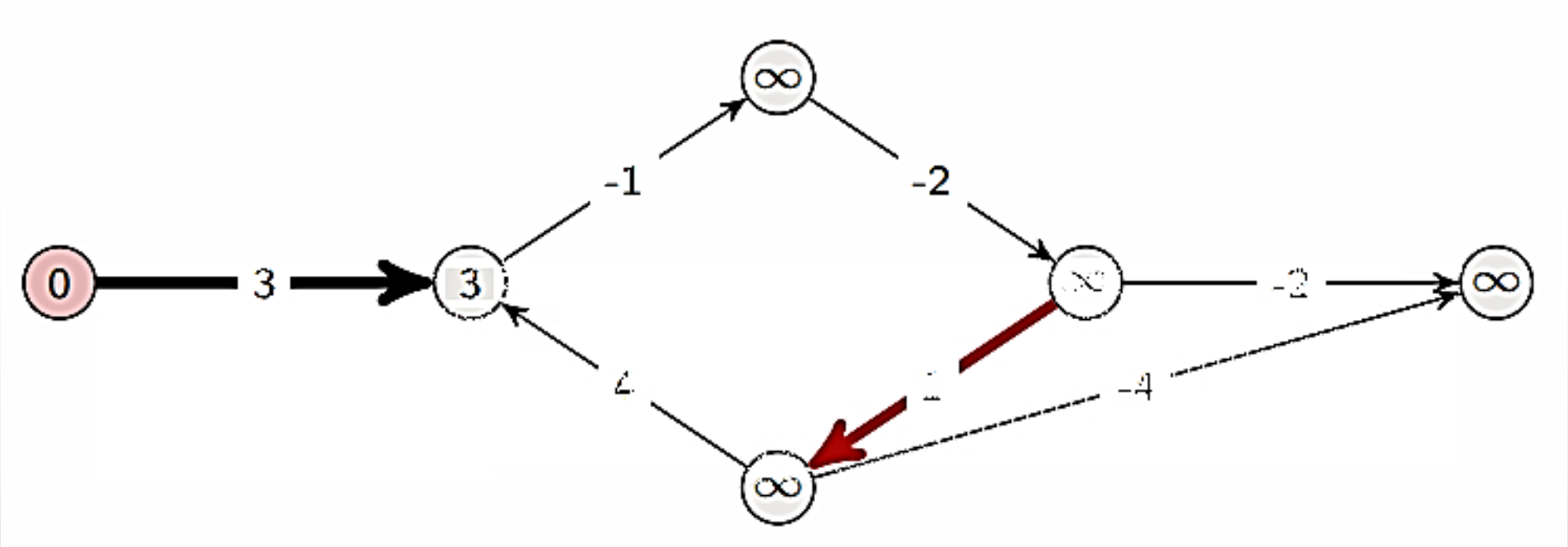
Bellman Ford



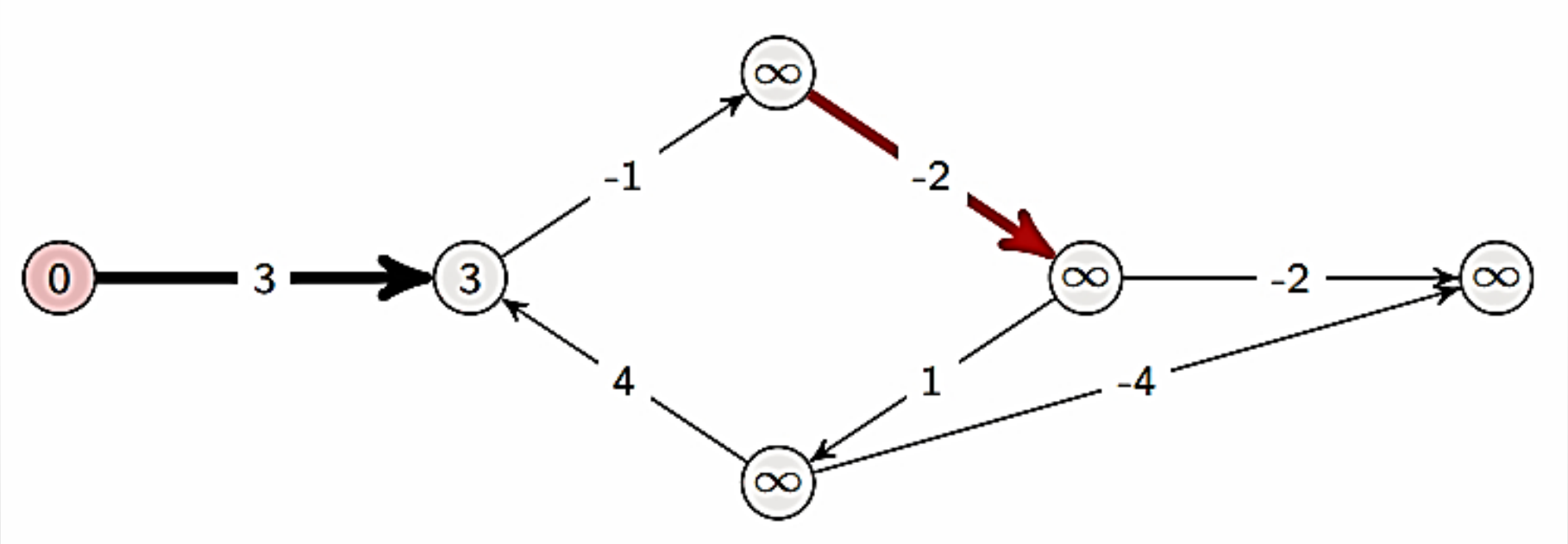
Bellman Ford



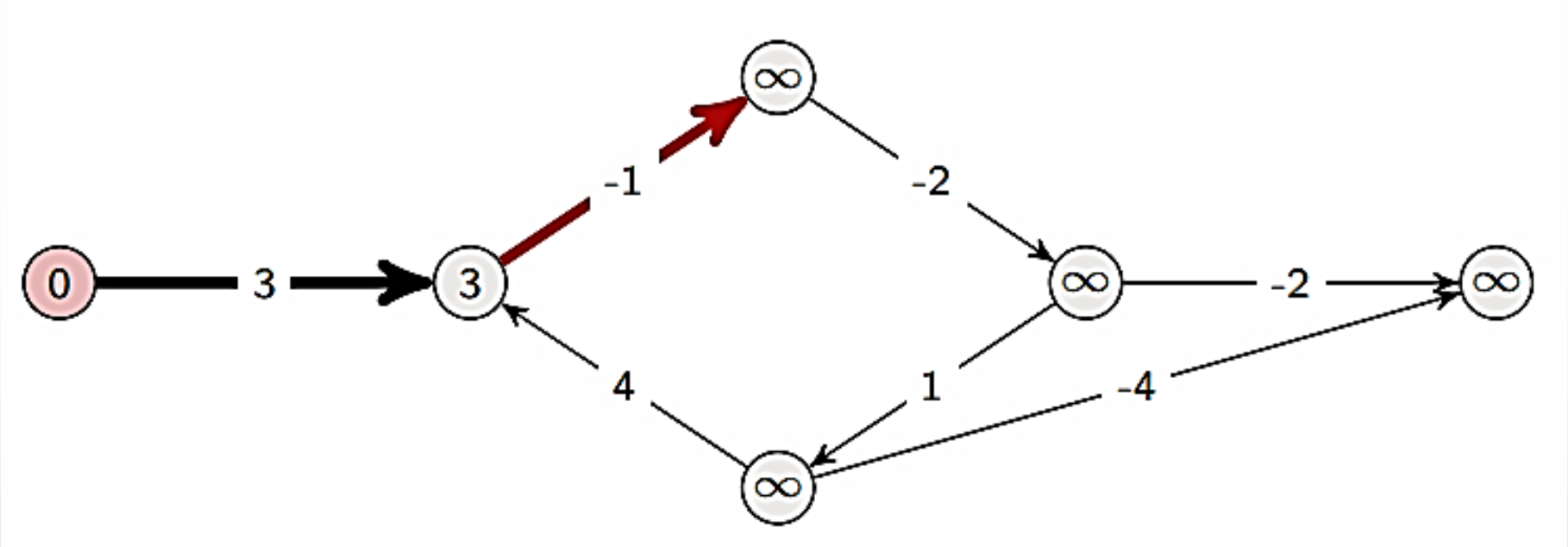
Bellman Ford



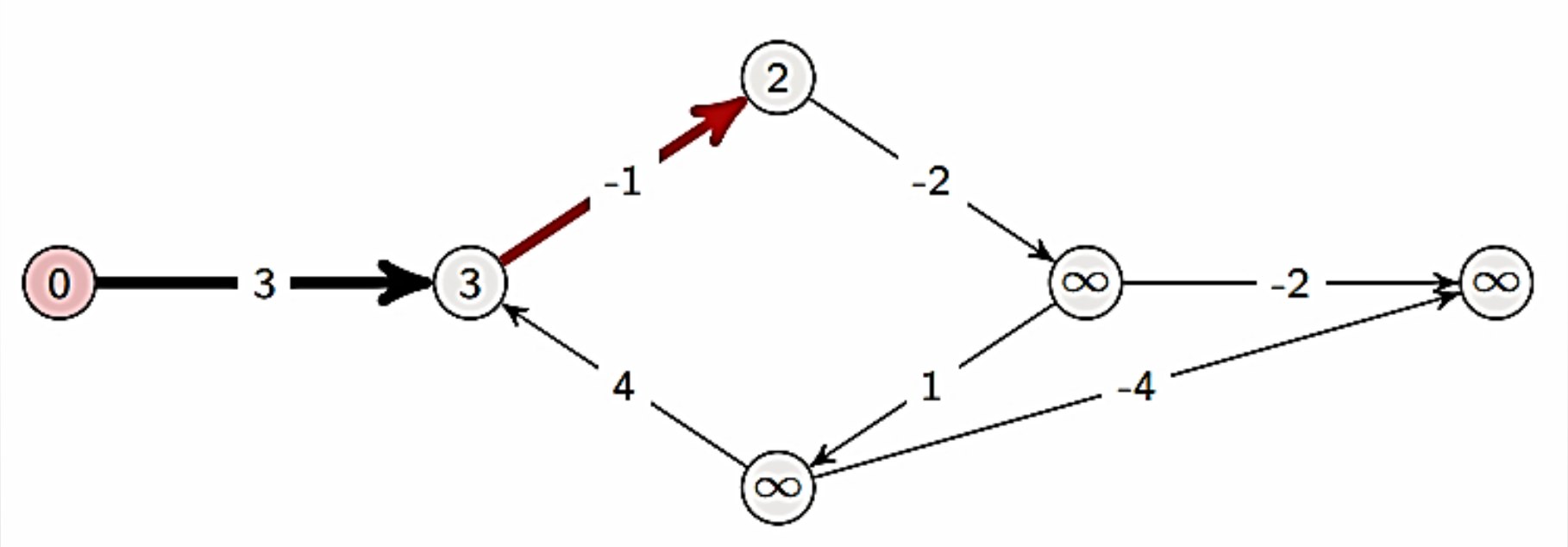
Bellman Ford



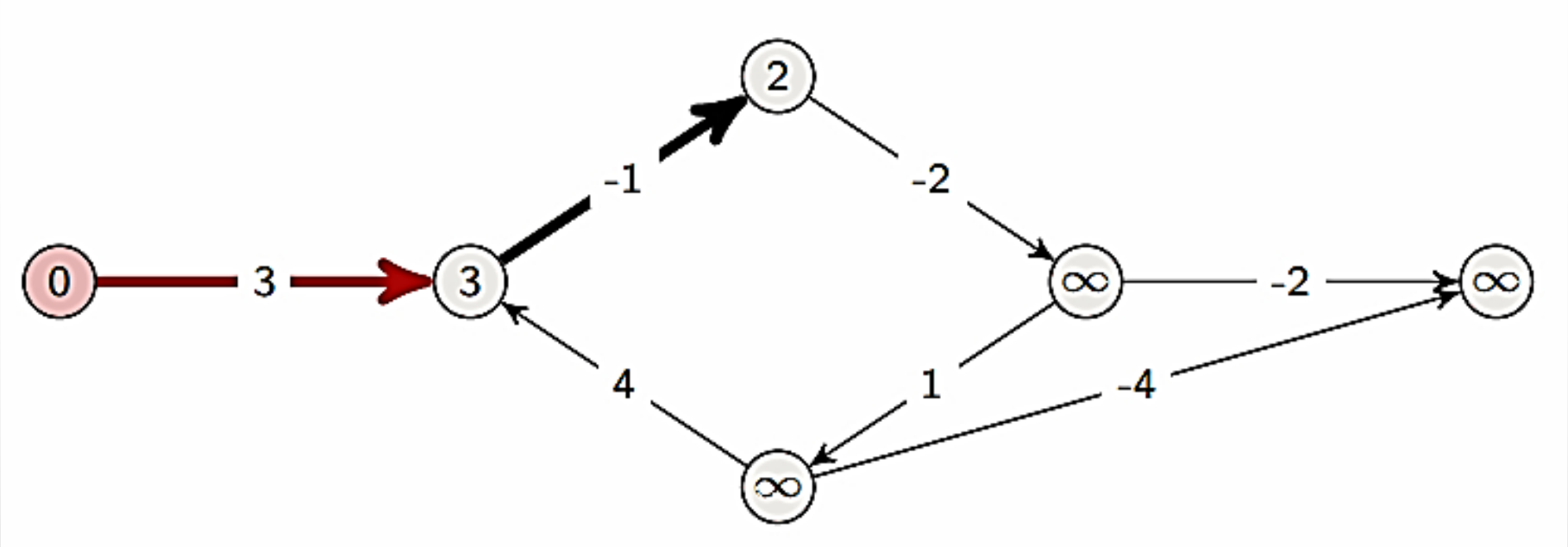
Bellman Ford



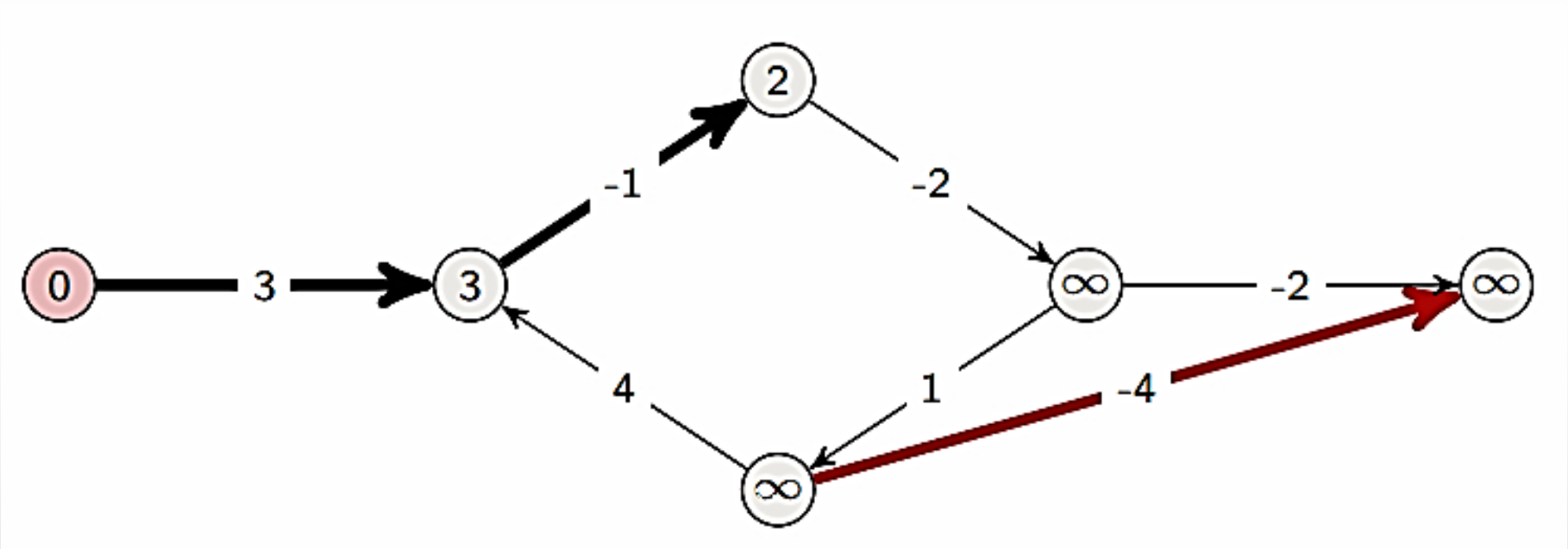
Bellman Ford



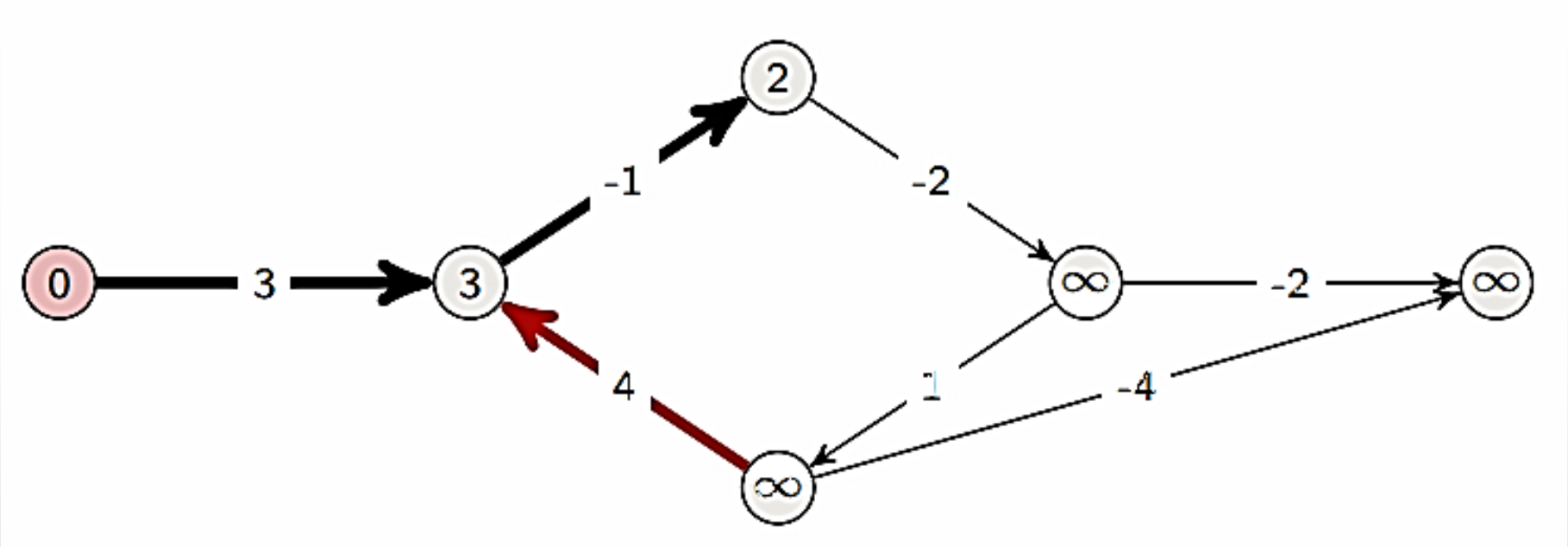
Bellman Ford



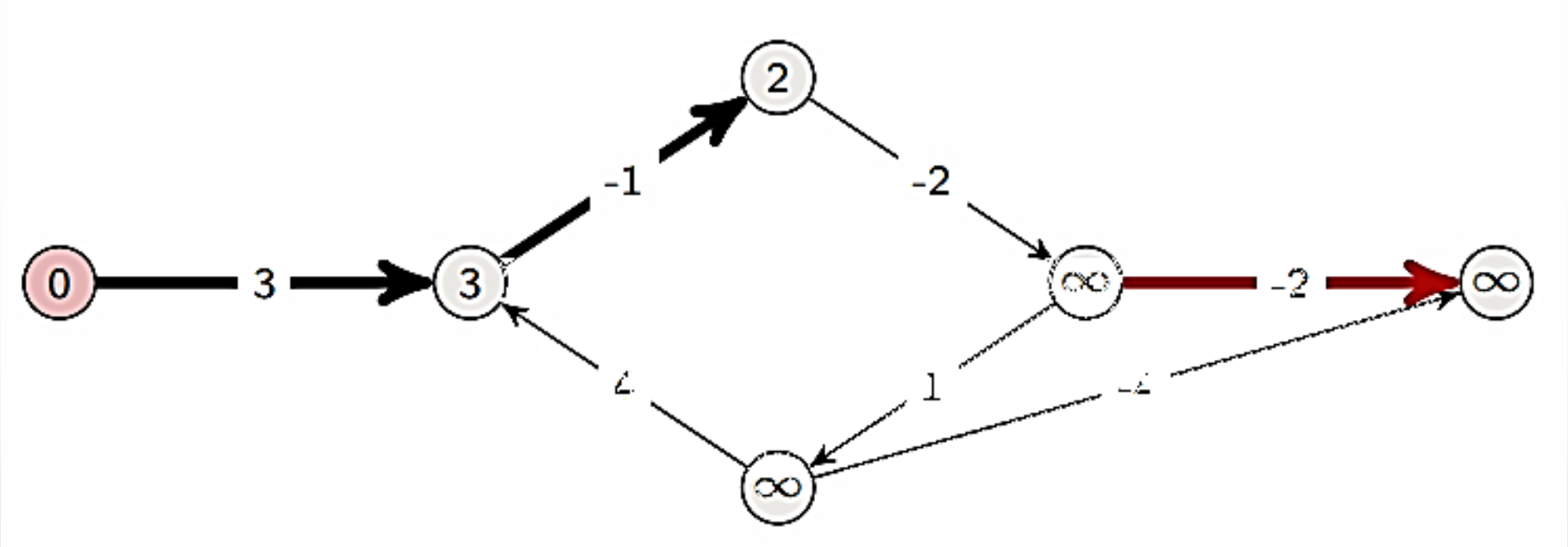
Bellman Ford



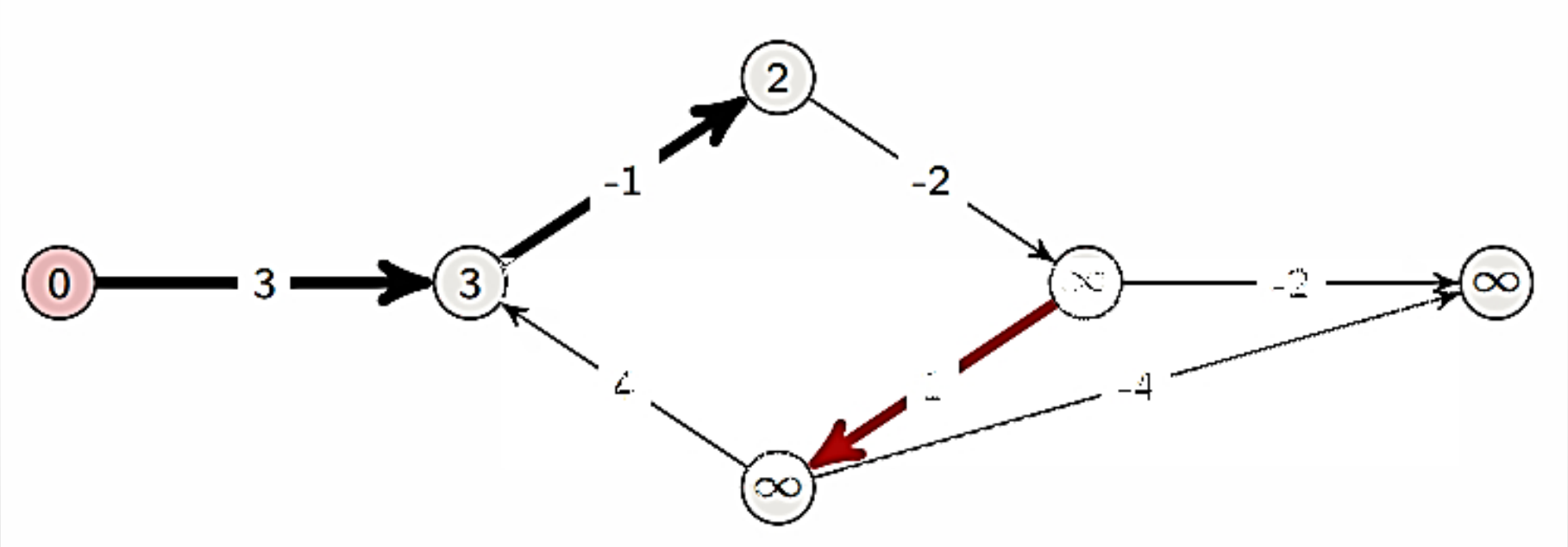
Bellman Ford



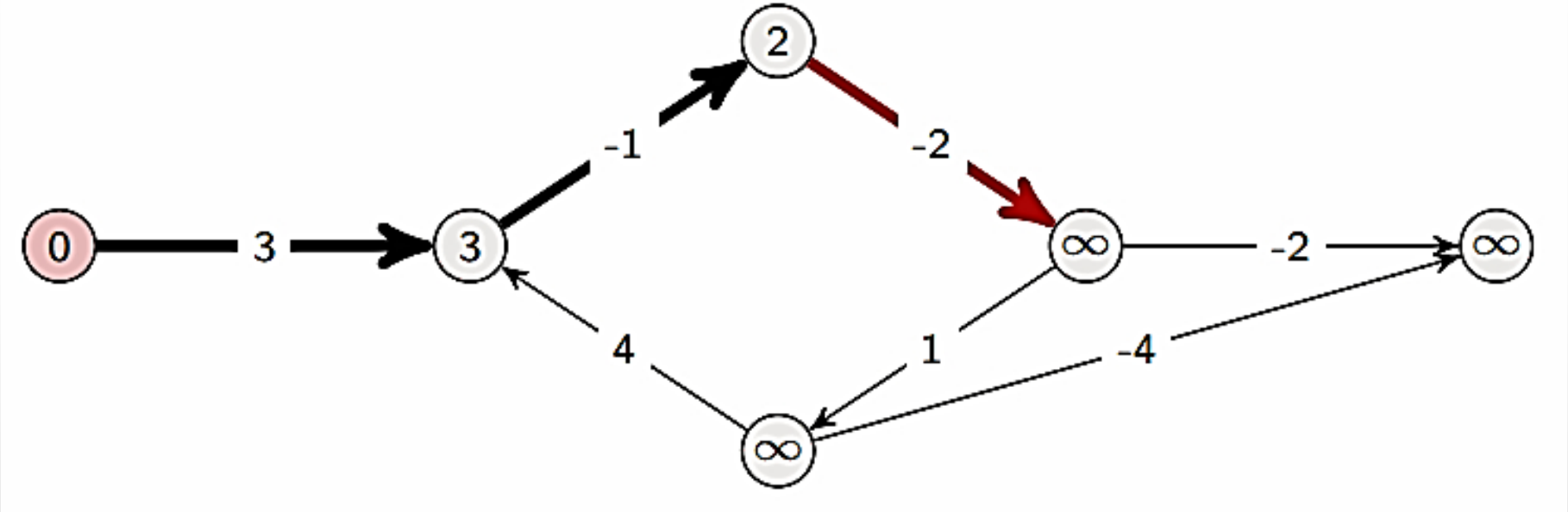
Bellman Ford



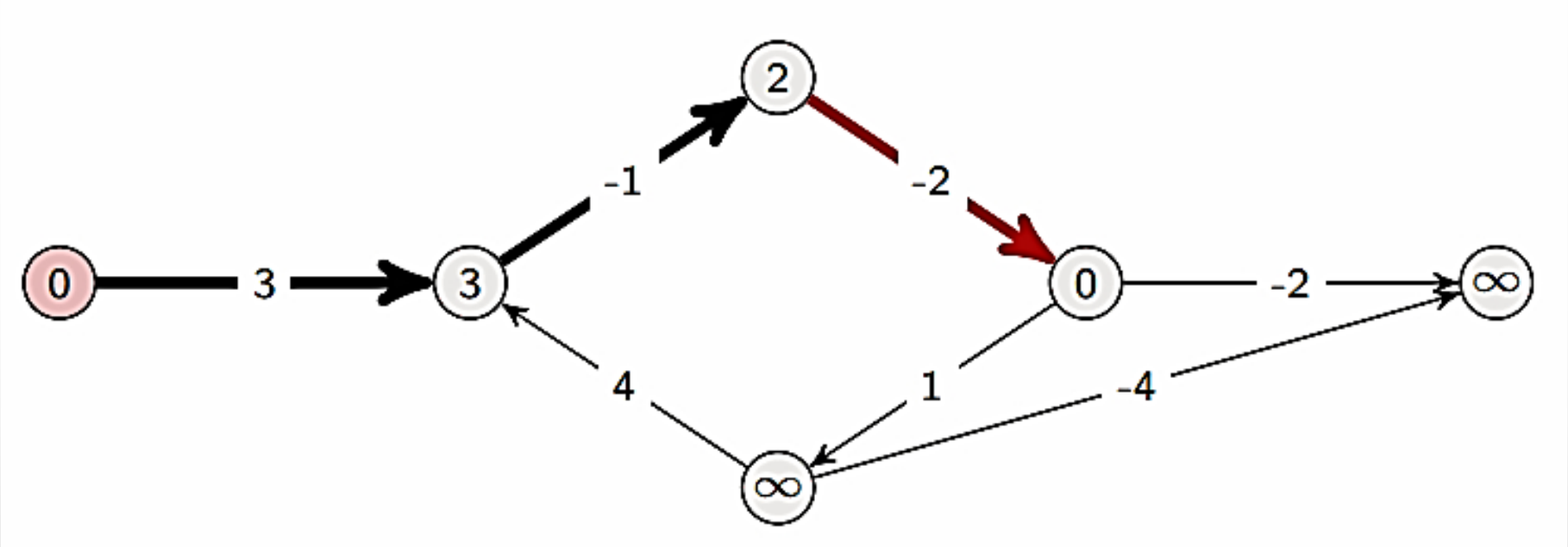
Bellman Ford



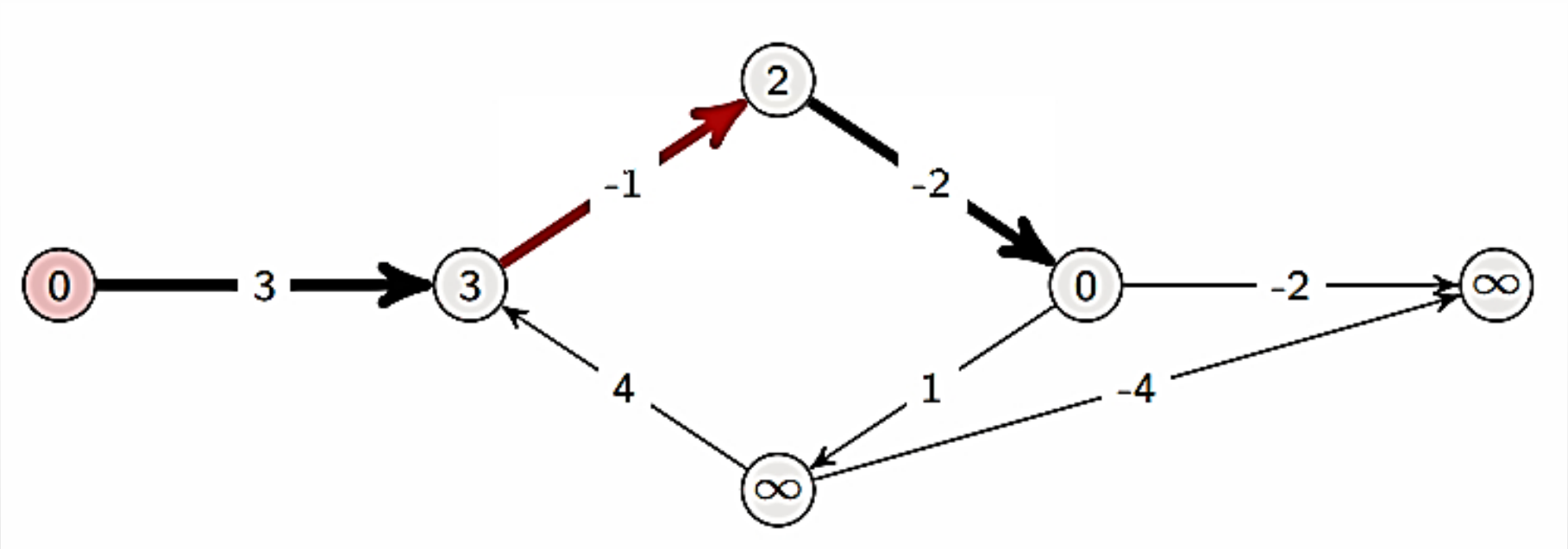
Bellman Ford



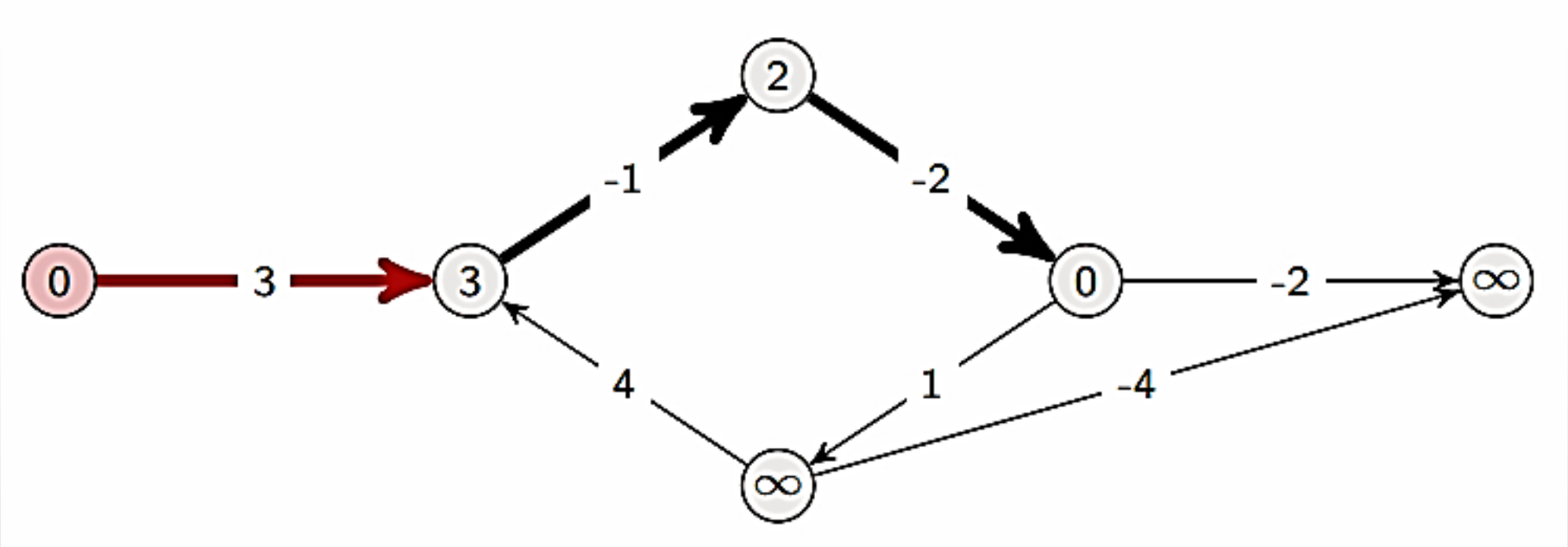
Bellman Ford



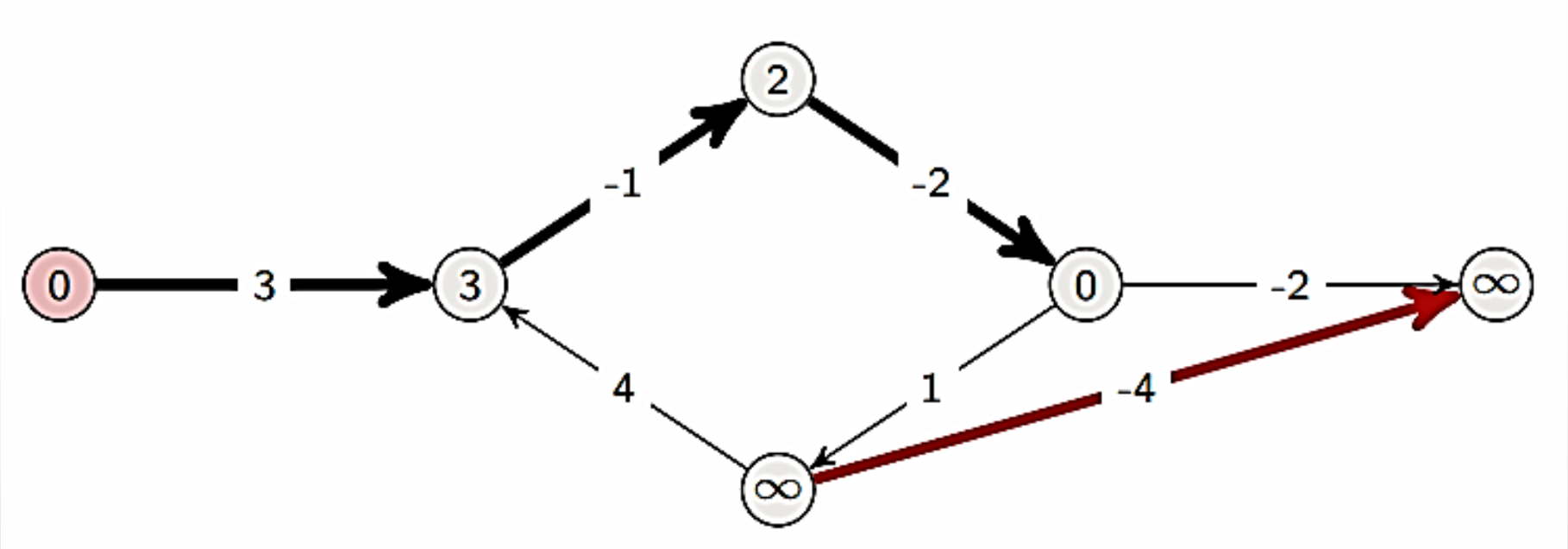
Bellman Ford



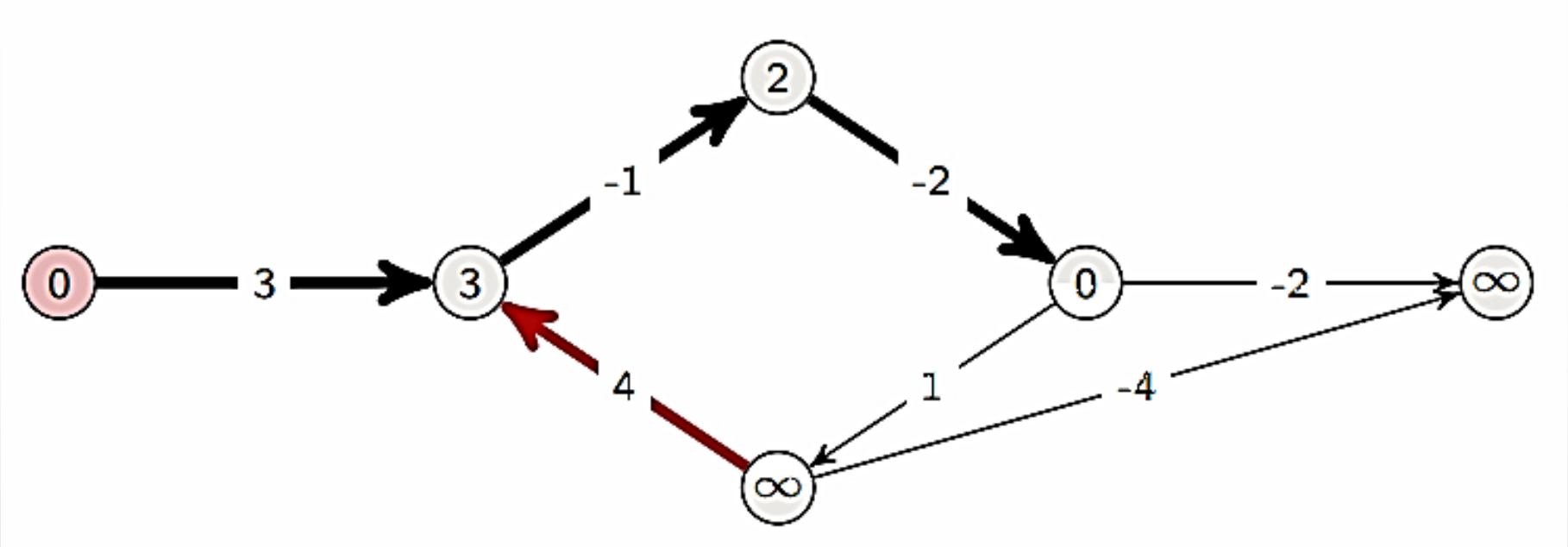
Bellman Ford



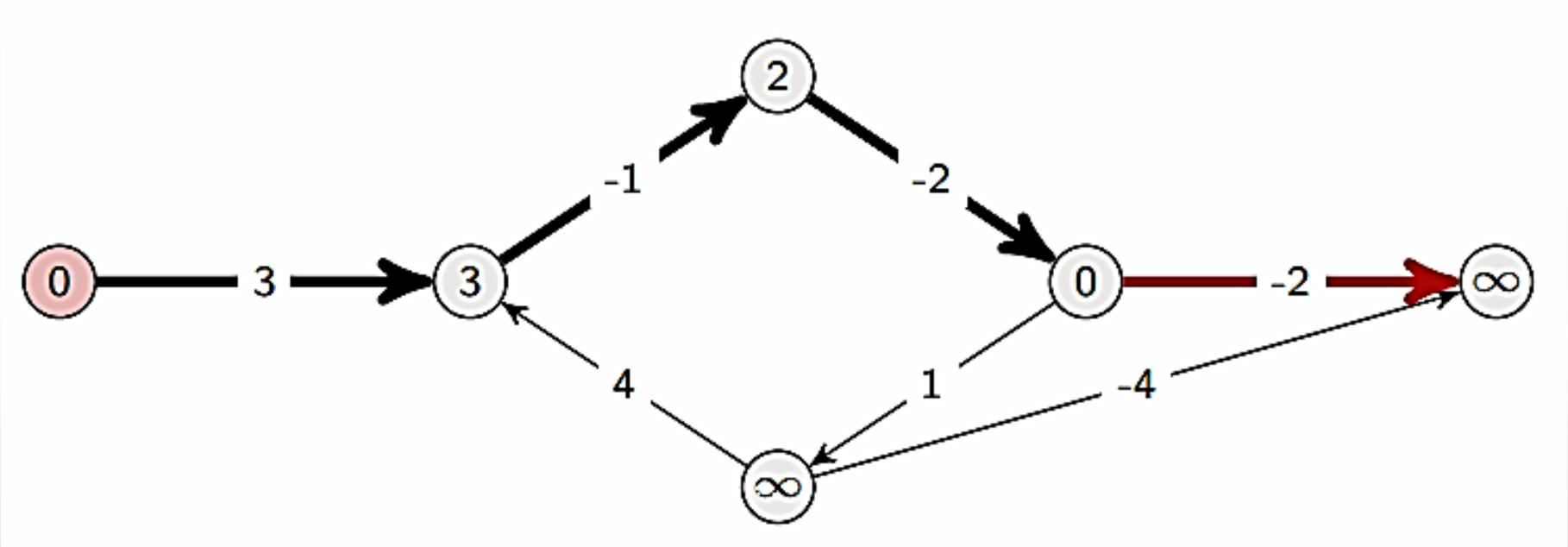
Bellman Ford



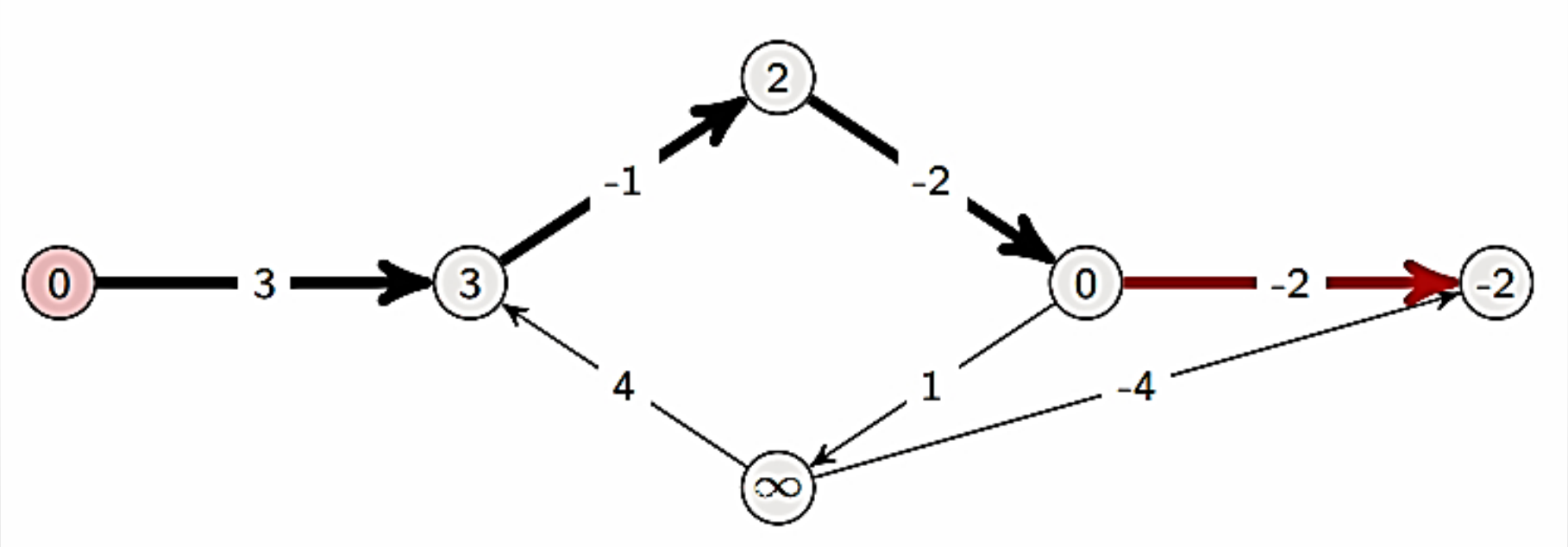
Bellman Ford



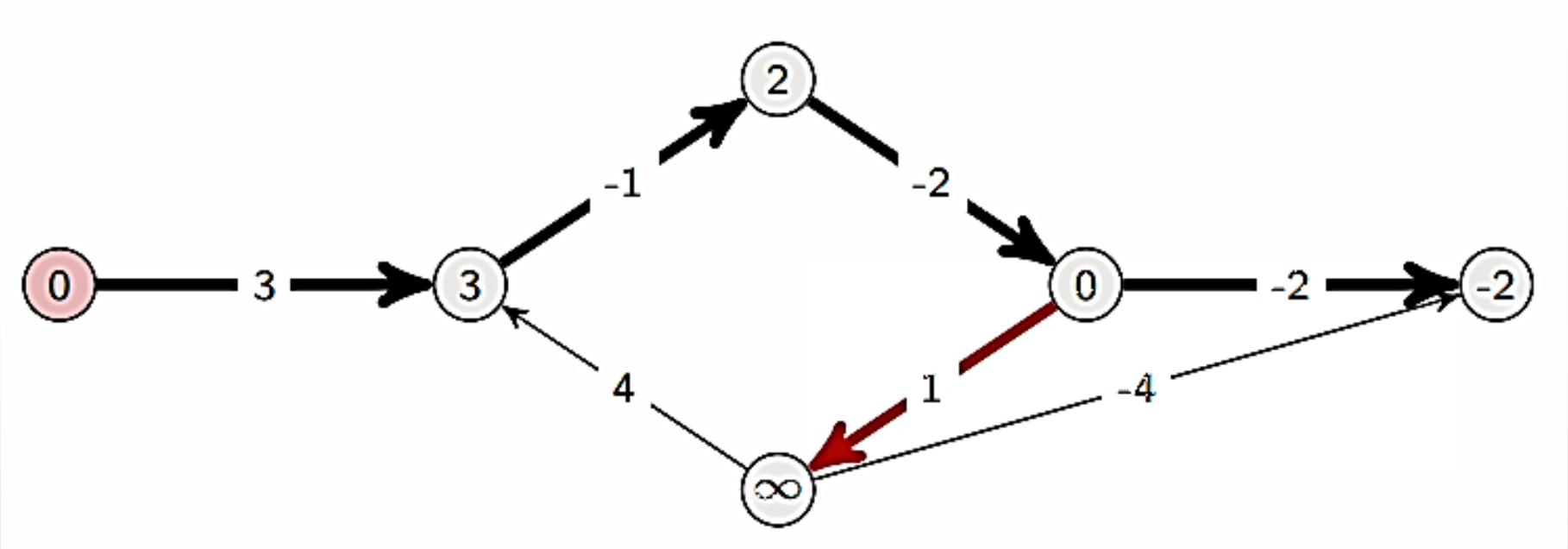
Bellman Ford



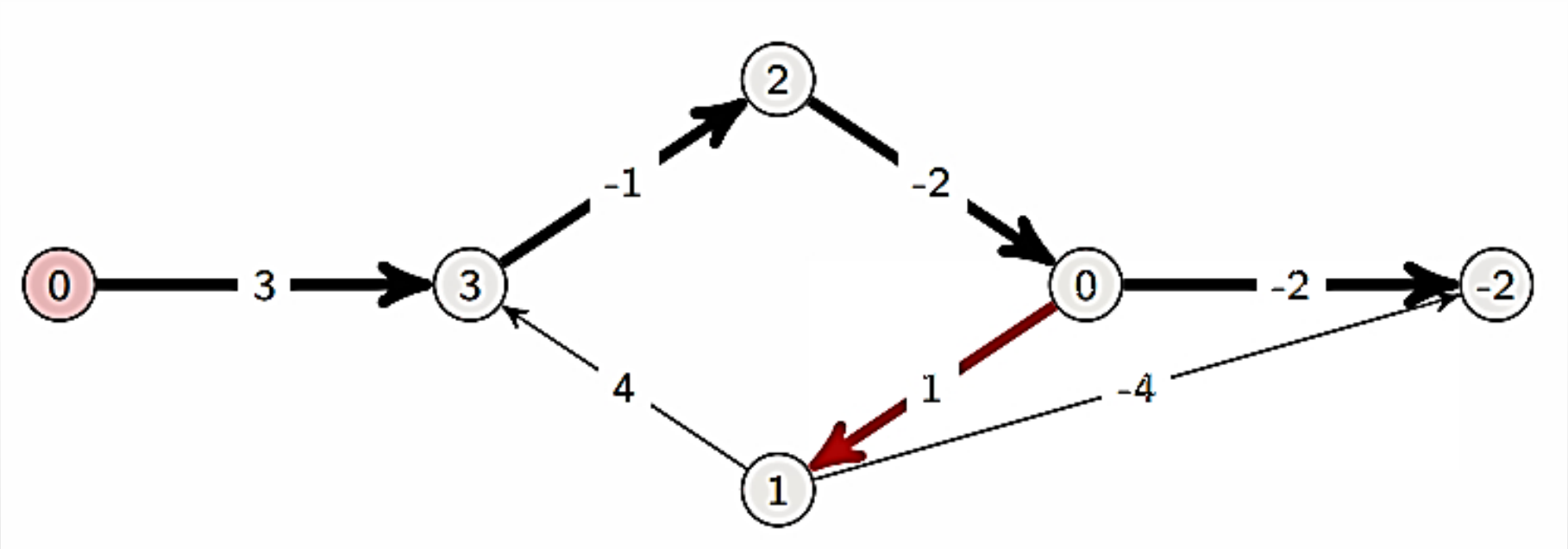
Bellman Ford



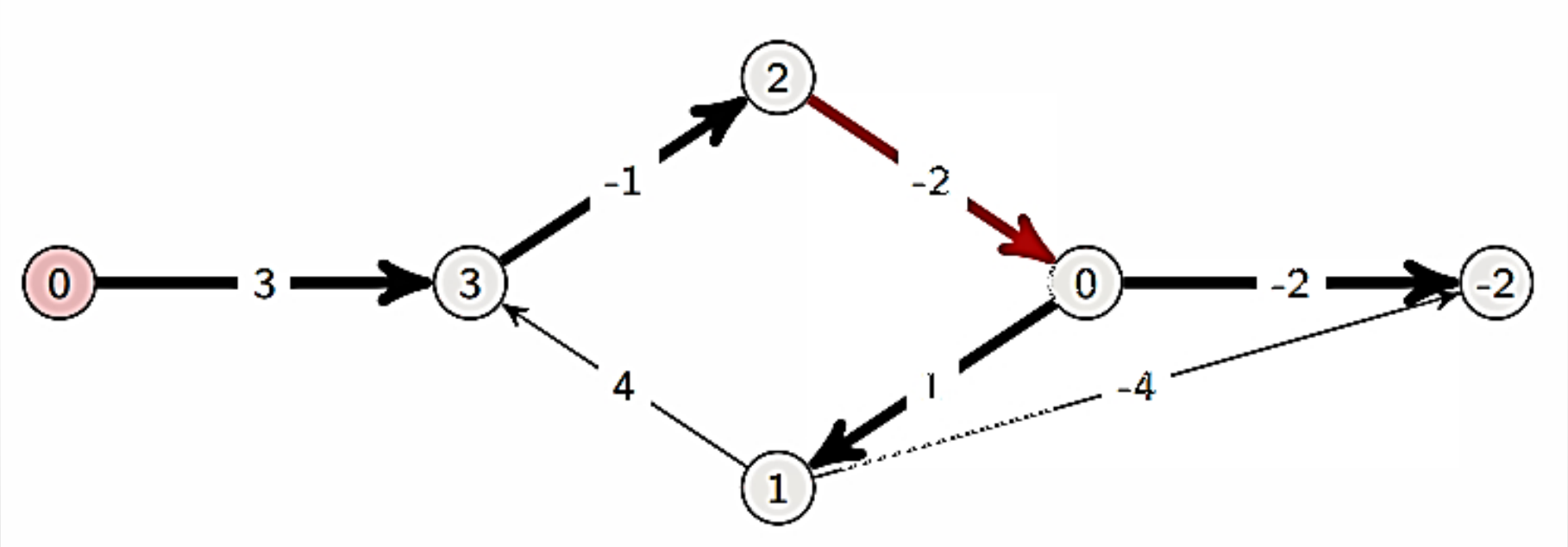
Bellman Ford



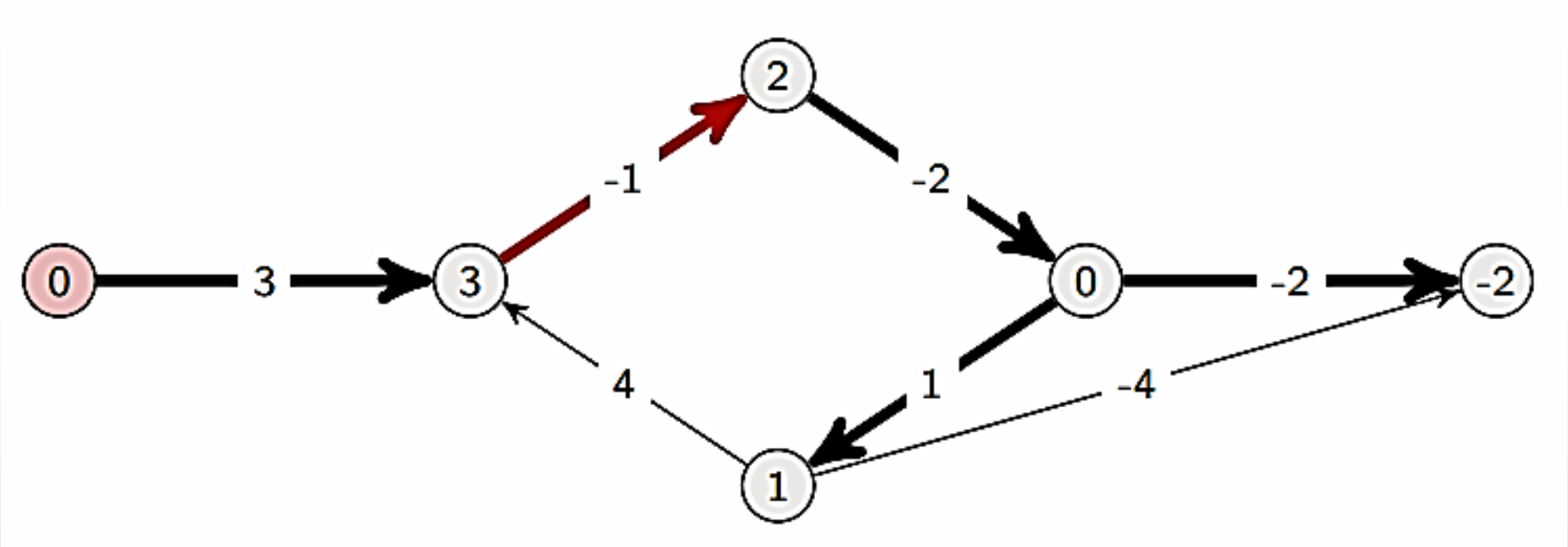
Bellman Ford



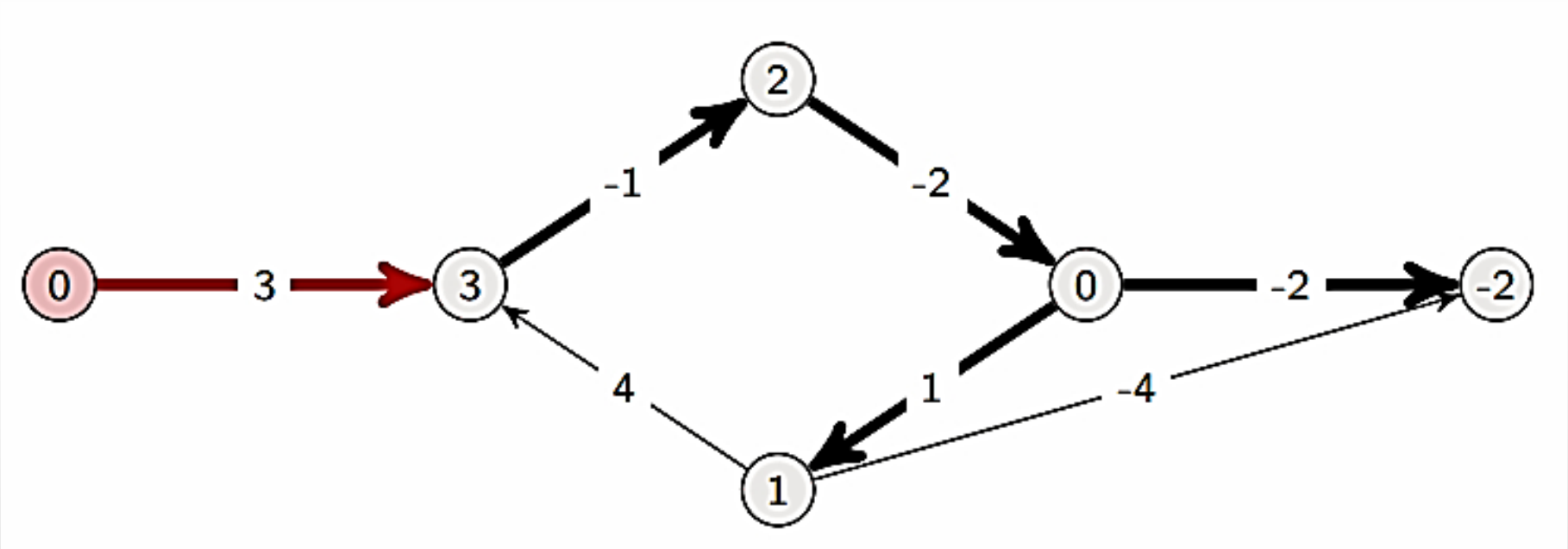
Bellman Ford



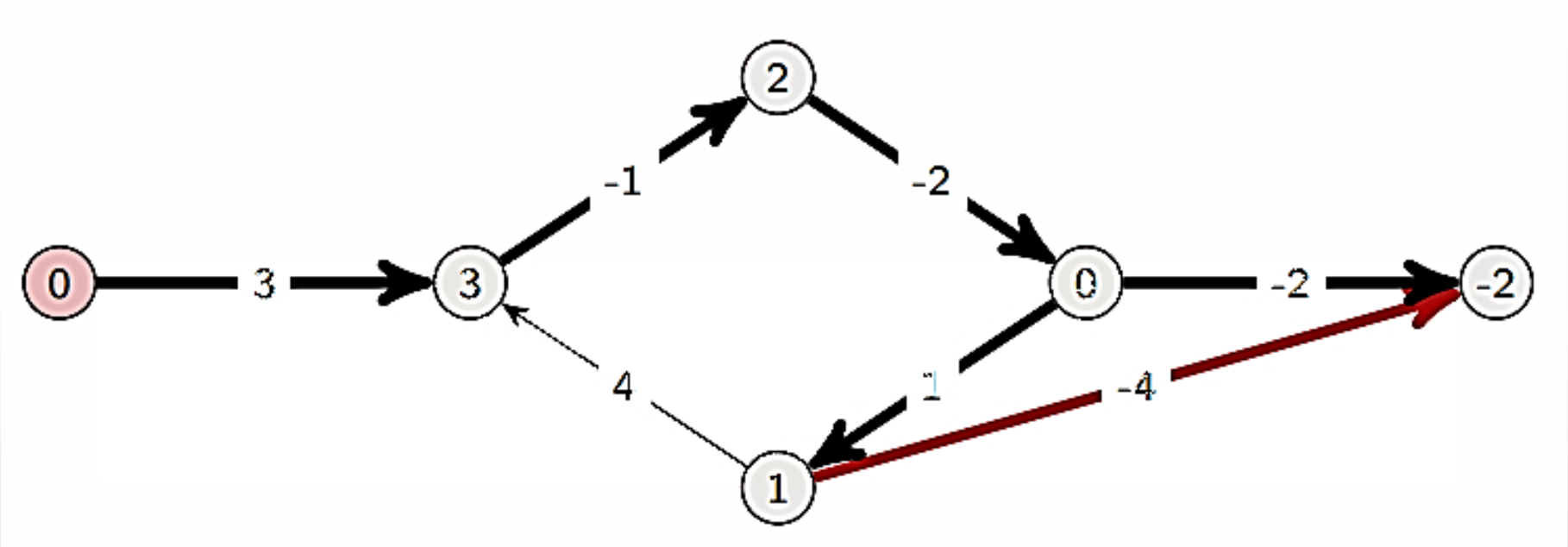
Bellman Ford



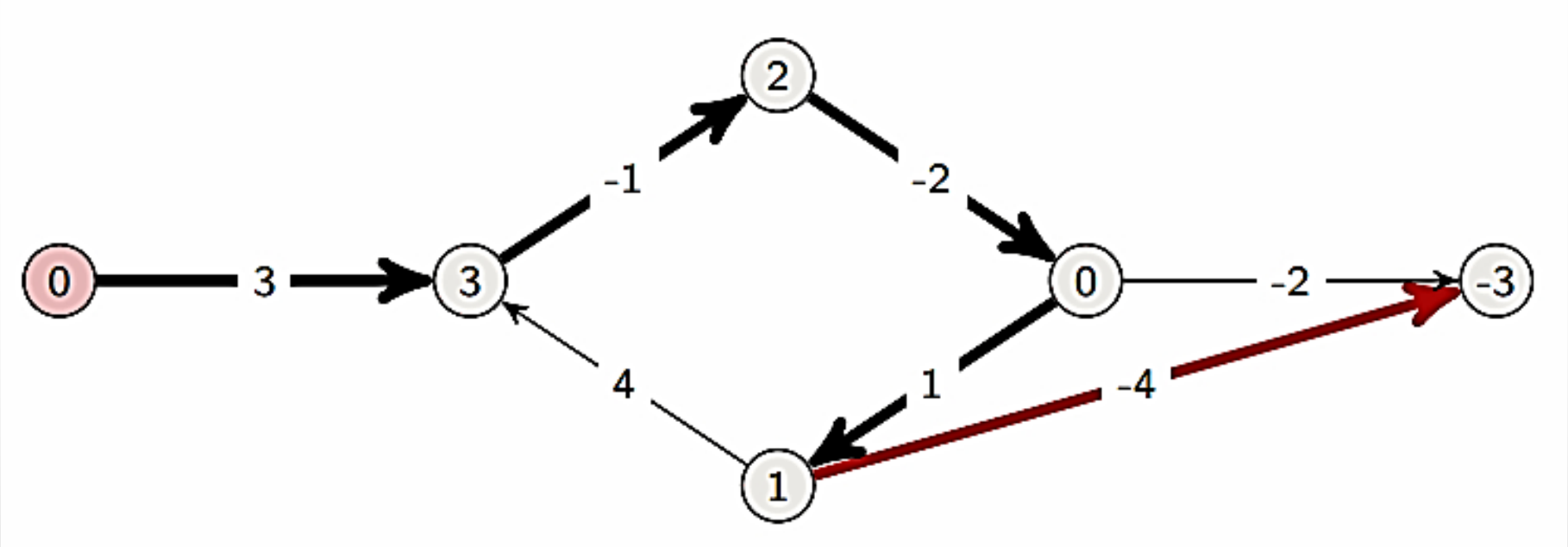
Bellman Ford



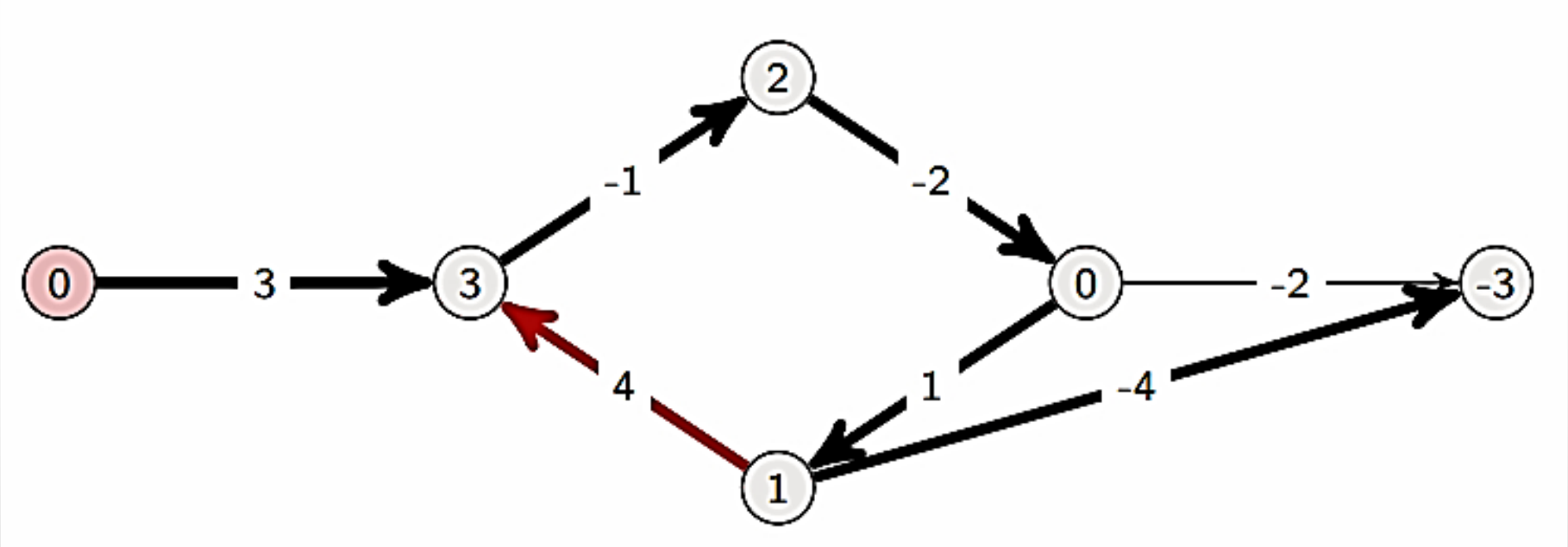
Bellman Ford



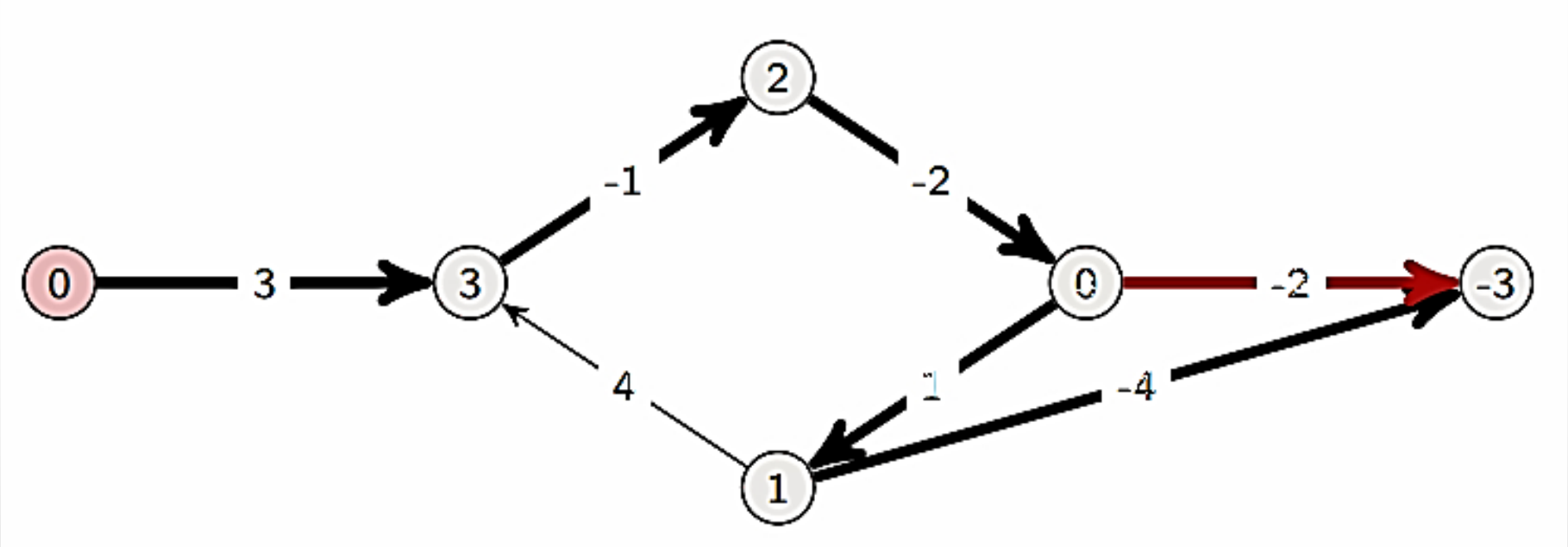
Bellman Ford



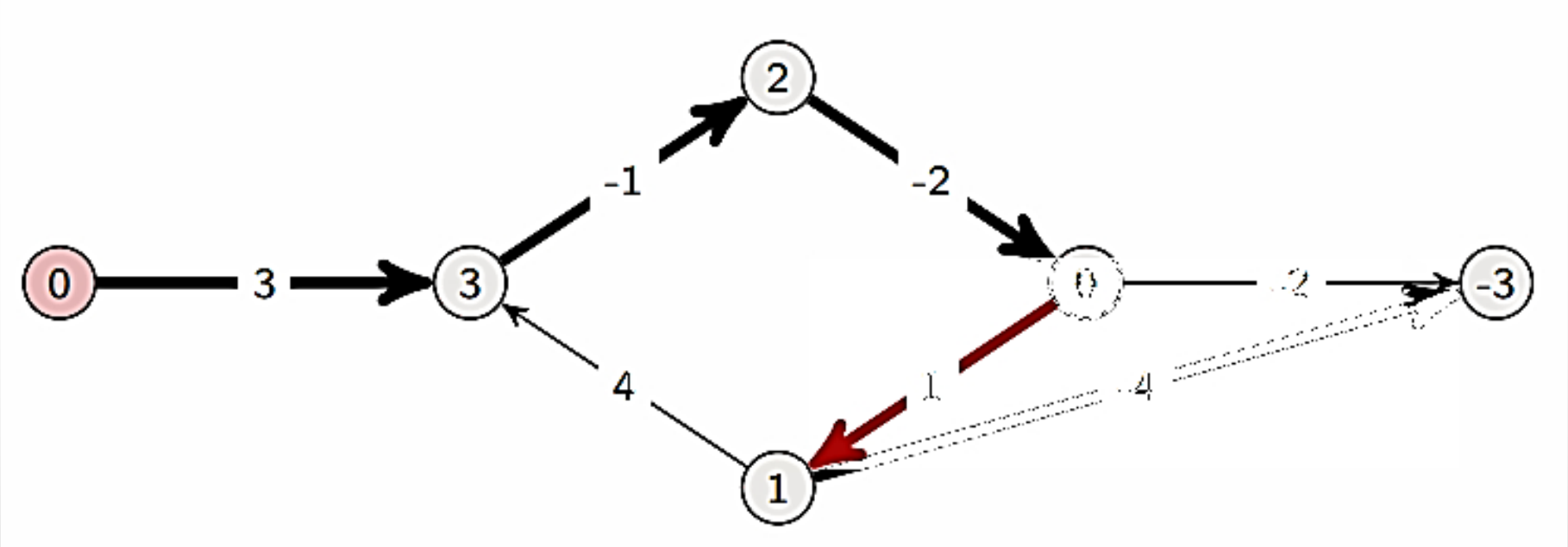
Bellman Ford



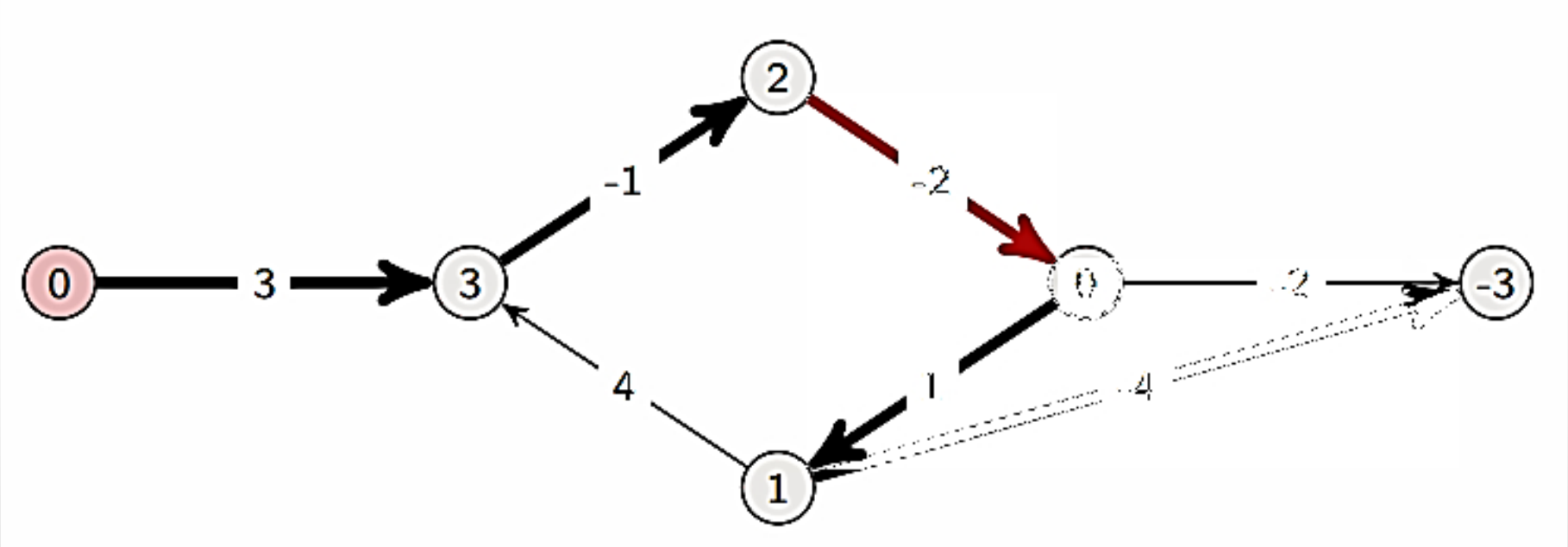
Bellman Ford



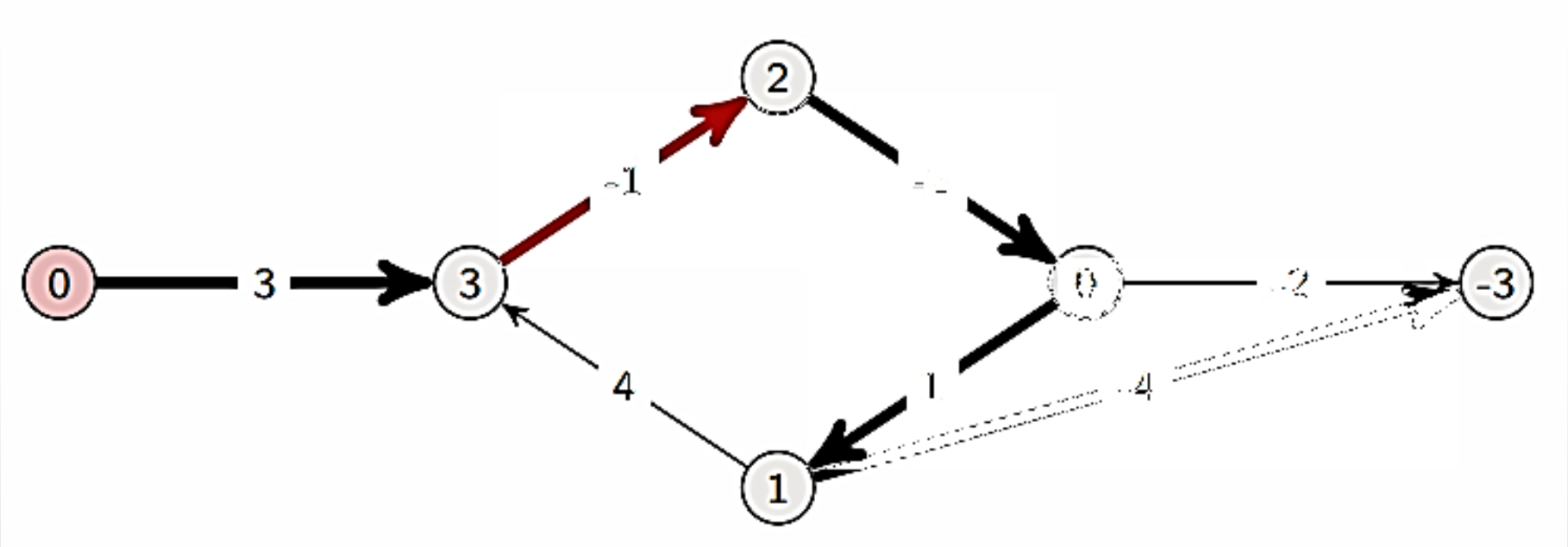
Bellman Ford



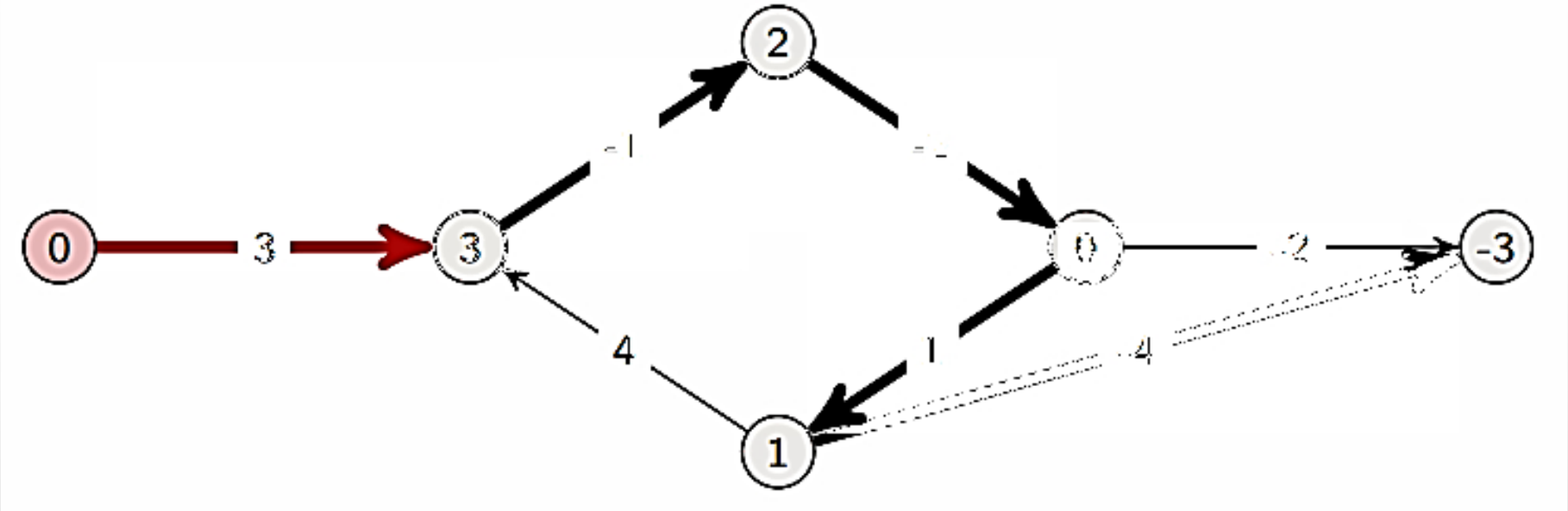
Bellman Ford



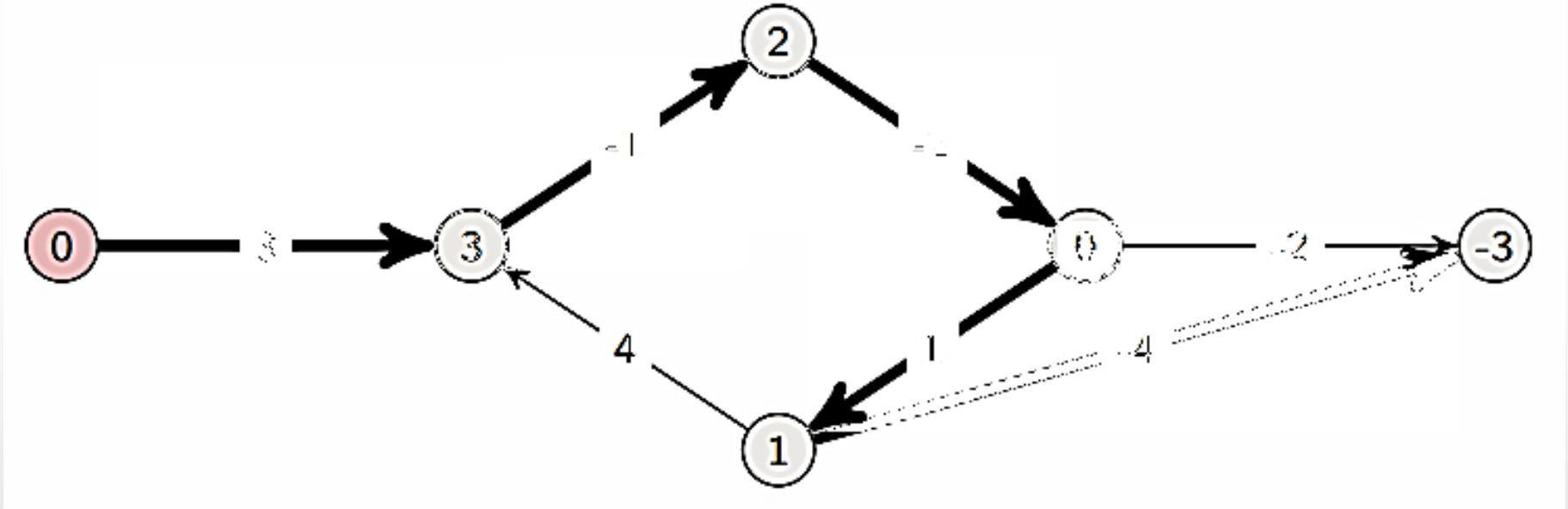
Bellman Ford



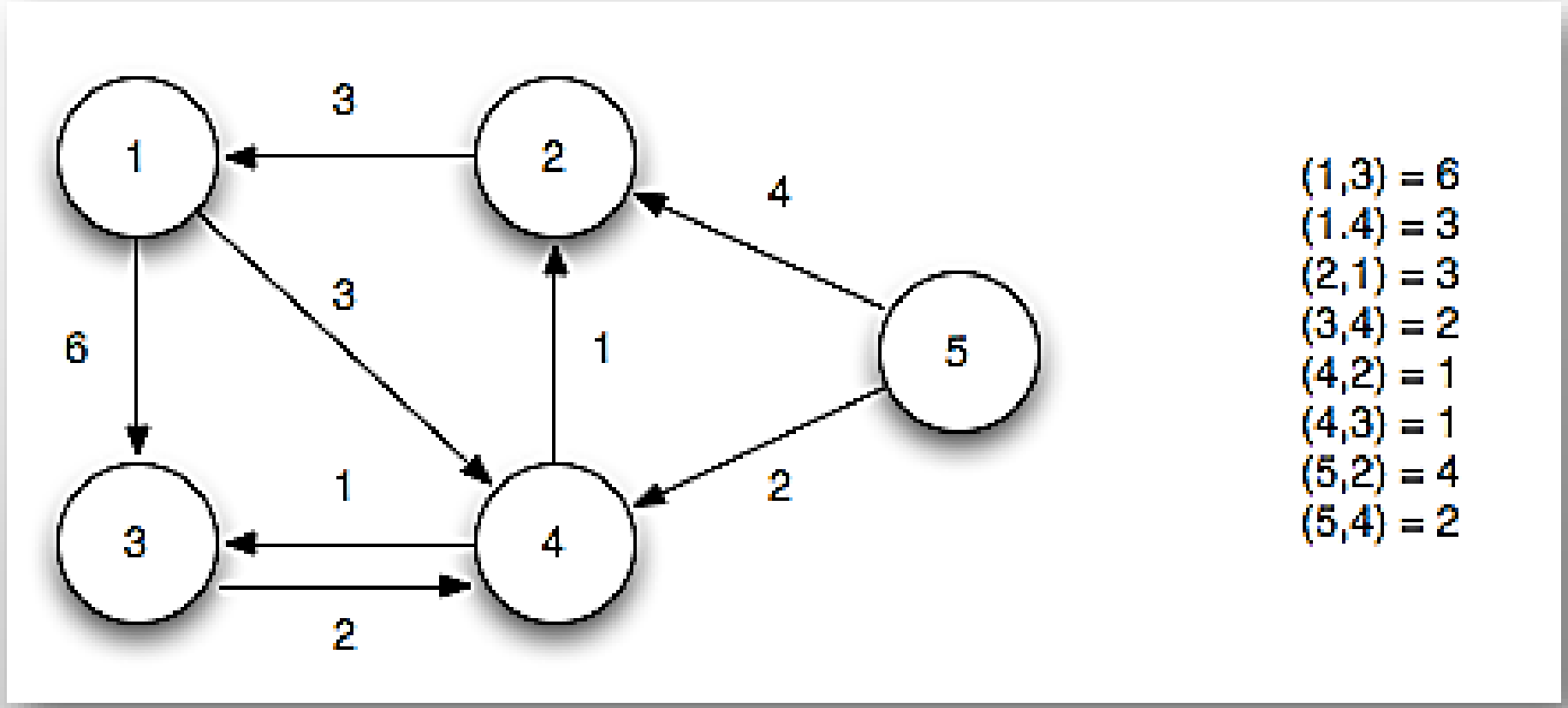
Bellman Ford



Bellman Ford

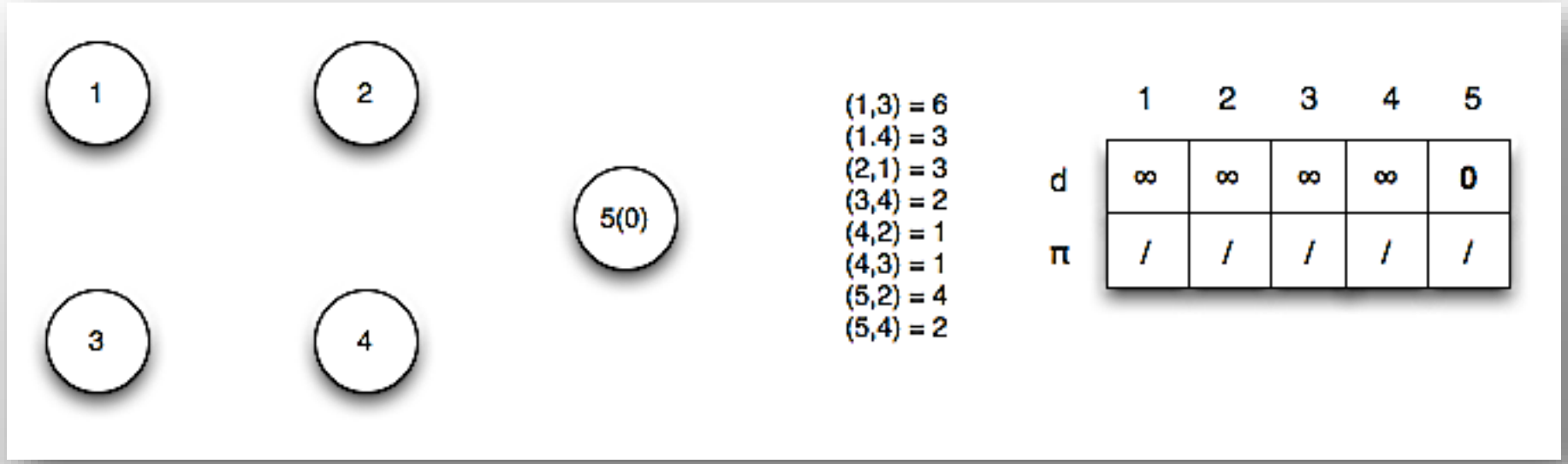


Örnek



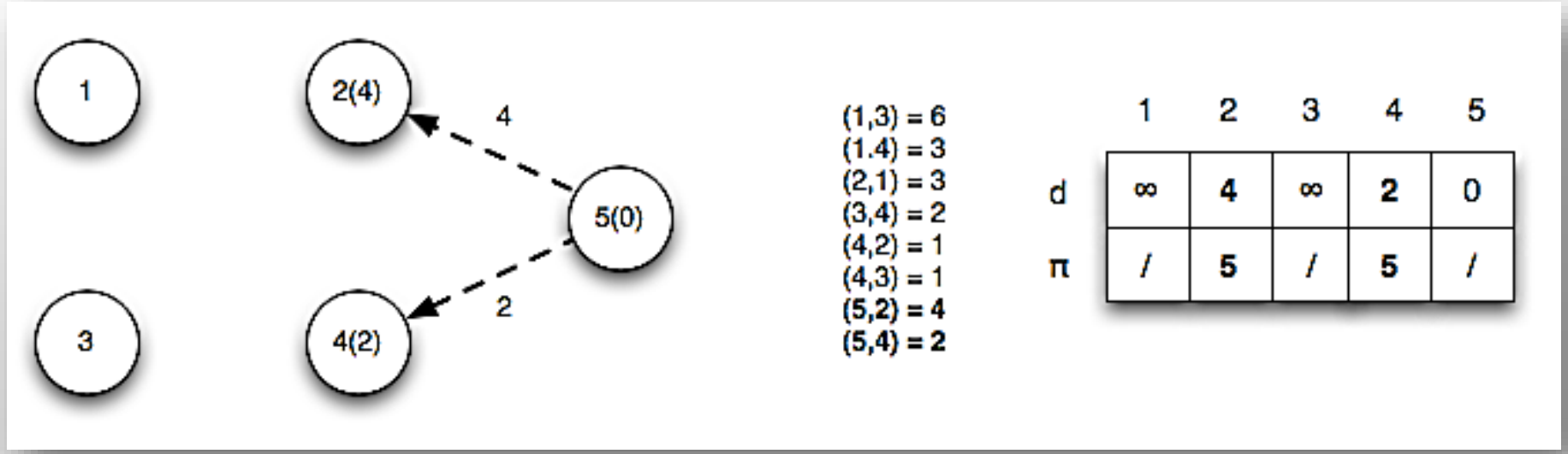
İlklendirme Aşaması

- Kaynak düğüm 5'in uzaklık değerine 0, diğerlerine ∞ atanır.



Iteration 1

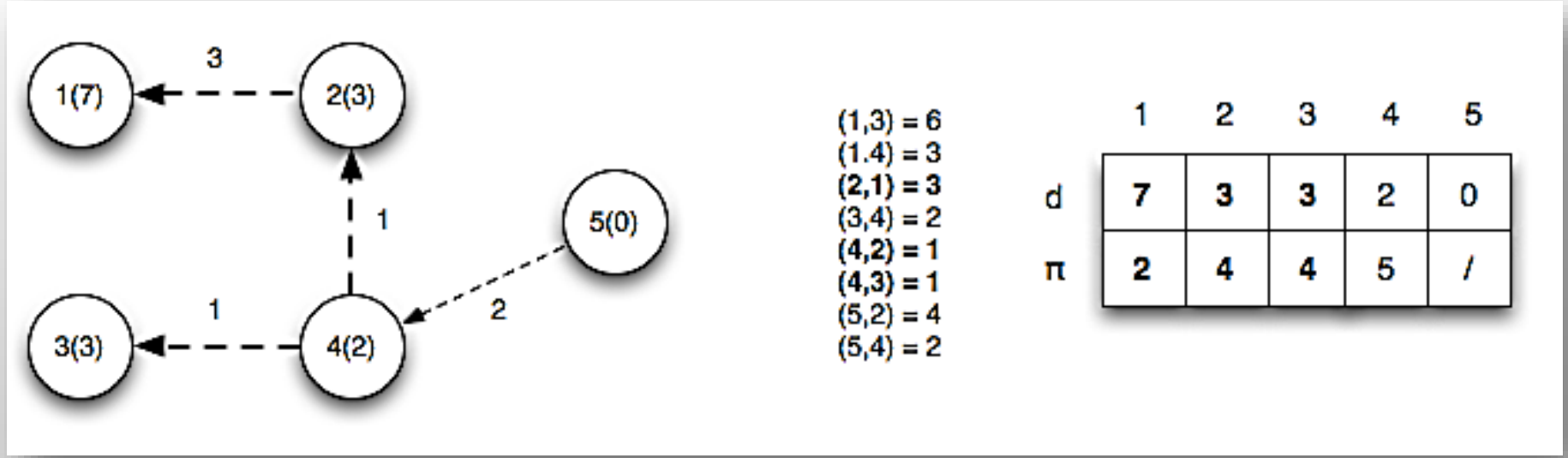
- (u5,u2) ve (u5,u4) kenarları incelenir. (*relax*) en kısa yollar sırasıyla 2 ve 4 olarak güncellenir.



	1	2	3	4	5
d	∞	4	∞	2	0
π	/	5	/	5	/

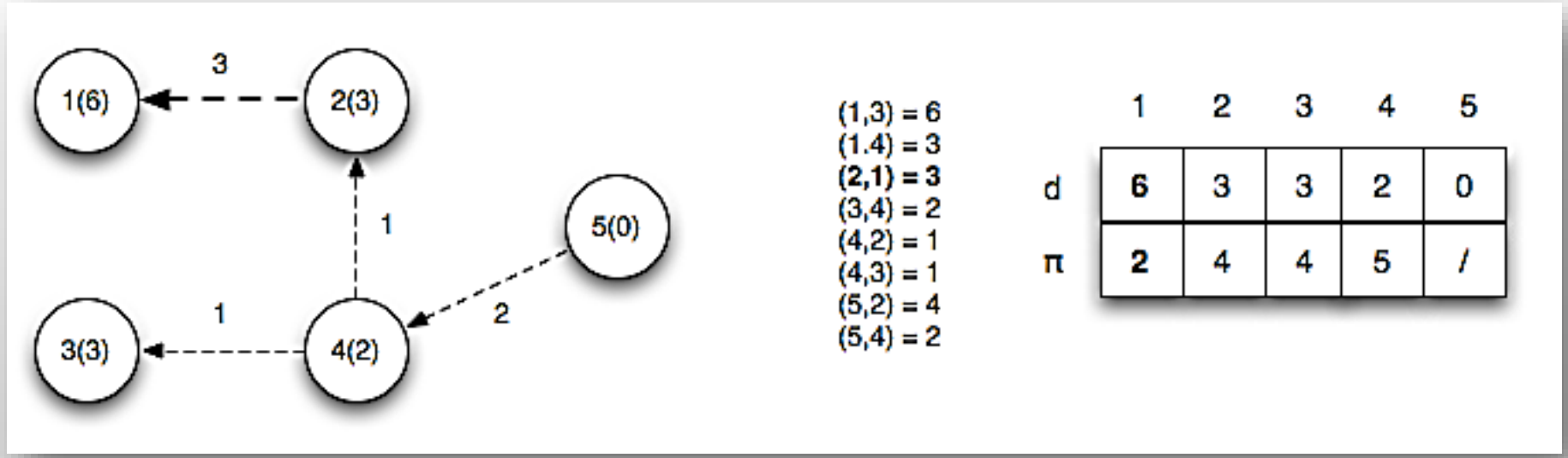
Iteration 2

- (u2,u1), (u4,u2) ve (u4,u3) kenarları incelenir. (*relax*) en kısa yollar sırasıyla 1, 2, 4 olarak güncellenir. (u4,u2) kenarı daha kısa bir yol bulur.



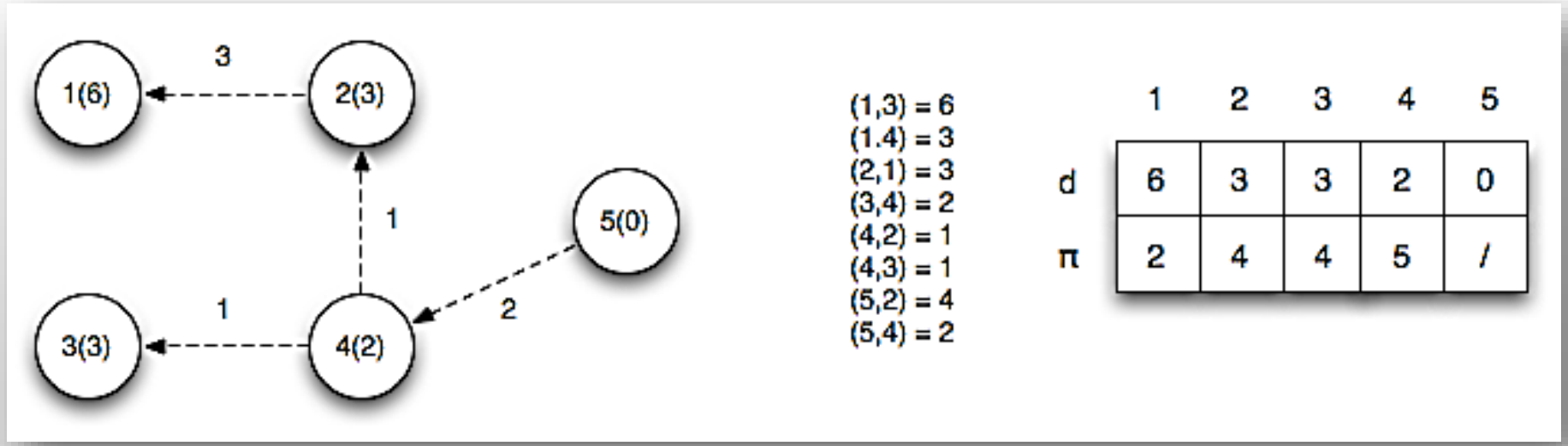
Iteration 3

- (u2,u1) kenarı (bir önceki adımda düğüm 2'ye daha kısa bir yol bulunduğu için) incelenir. (*relax*)



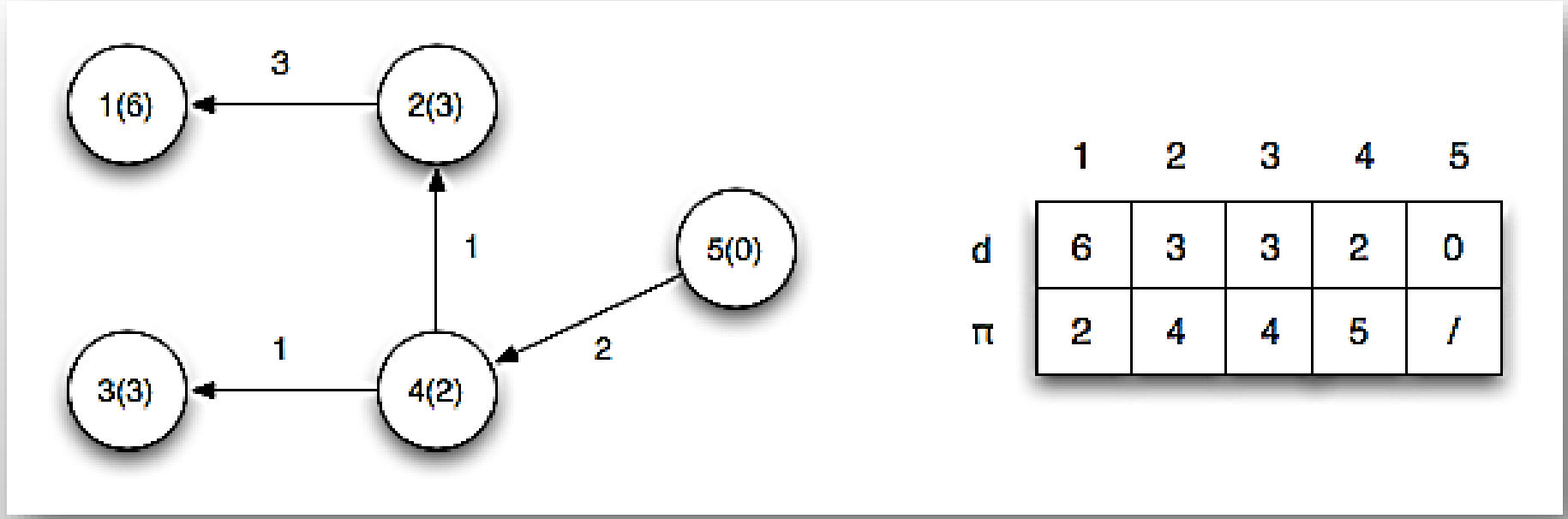
Iteration 4

- Daha kısa bir yol bulunamadı. (*No edges relax*)



Son Durum

- Düğüm 5'ten diğer düğümlere olan en kısa yollar



	1	2	3	4	5
d	6	3	3	2	0
π	2	4	4	5	/

Negatif Döngü Konrolü

- Her kenar için son bir defa inceleme (*relaxation*) yapılır.
- Eğer kısa yol bulunursa negatif döngü vardır.

$$v3.d > u1.d + w(1,3) \Rightarrow 4 \not> 6 + 6 = 12 \quad \checkmark$$
$$v4.d > u1.d + w(1,4) \Rightarrow 2 \not> 6 + 3 = 9 \quad \checkmark$$
$$v1.d > u2.d + w(2,1) \Rightarrow 6 \not> 3 + 3 = 6 \quad \checkmark$$
$$v4.d > u3.d + w(3,4) \Rightarrow 2 \not> 3 + 2 = 5 \quad \checkmark$$
$$v2.d > u4.d + w(4,2) \Rightarrow 3 \not> 2 + 1 = 3 \quad \checkmark$$
$$v3.d > u4.d + w(4,3) \Rightarrow 3 \not> 2 + 1 = 3 \quad \checkmark$$
$$v2.d > u5.d + w(5,2) \Rightarrow 3 \not> 0 + 4 = 4 \quad \checkmark$$
$$v4.d > u5.d + w(5,4) \Rightarrow 2 \not> 0 + 2 = 2 \quad \checkmark$$

Sözde Kod

```
BELLMAN_FORD (G, kaynak):
        mesafeler = [ ]
        her bir v için V içinde:
                mesafeler[v] = sonsuz
        mesafeler[kaynak] = 0
```

Sözde Kod (2)

```
döngü i = 1 den |V| - 1:
        her bir (u, v, ağırlık) için E içinde:
                eğer mesafeler[u] + ağırlık < mesafeler[v]:
                        mesafeler[v] = mesafeler[u] + ağırlık

her bir (u, v, ağırlık) için E içinde:
        eğer mesafeler[u] + ağırlık < mesafeler[v]:
                hata "Negatif ağırlıklı döngü var"

döndür mesafeler
```

Floyd Warshall

- Tüm düğüm çiftleri arasındaki en kısa yolları bulur.
- 1959'da *Robert Floyd* tarafından bulunmuştur.
- 1962'de *Stephen Warshall* tarafından geliştirilmiştir.
- Negatif ağırlıklı kenarlar ve döngülerle başa çıkabilir.

Algoritma İlkeleri

- Dinamik programlama yöntemini kullanır.
- Bir matris kullanarak tüm düğümler arasındaki en kısa mesafeleri bulur.
- *Bellman-Ford* ve *Dijkstra* tek kaynaktan düğümlere en kısa yolları bulur.
- *Floyd Warshall*, tüm çiftler arasındaki en kısa yolları hesaplar.

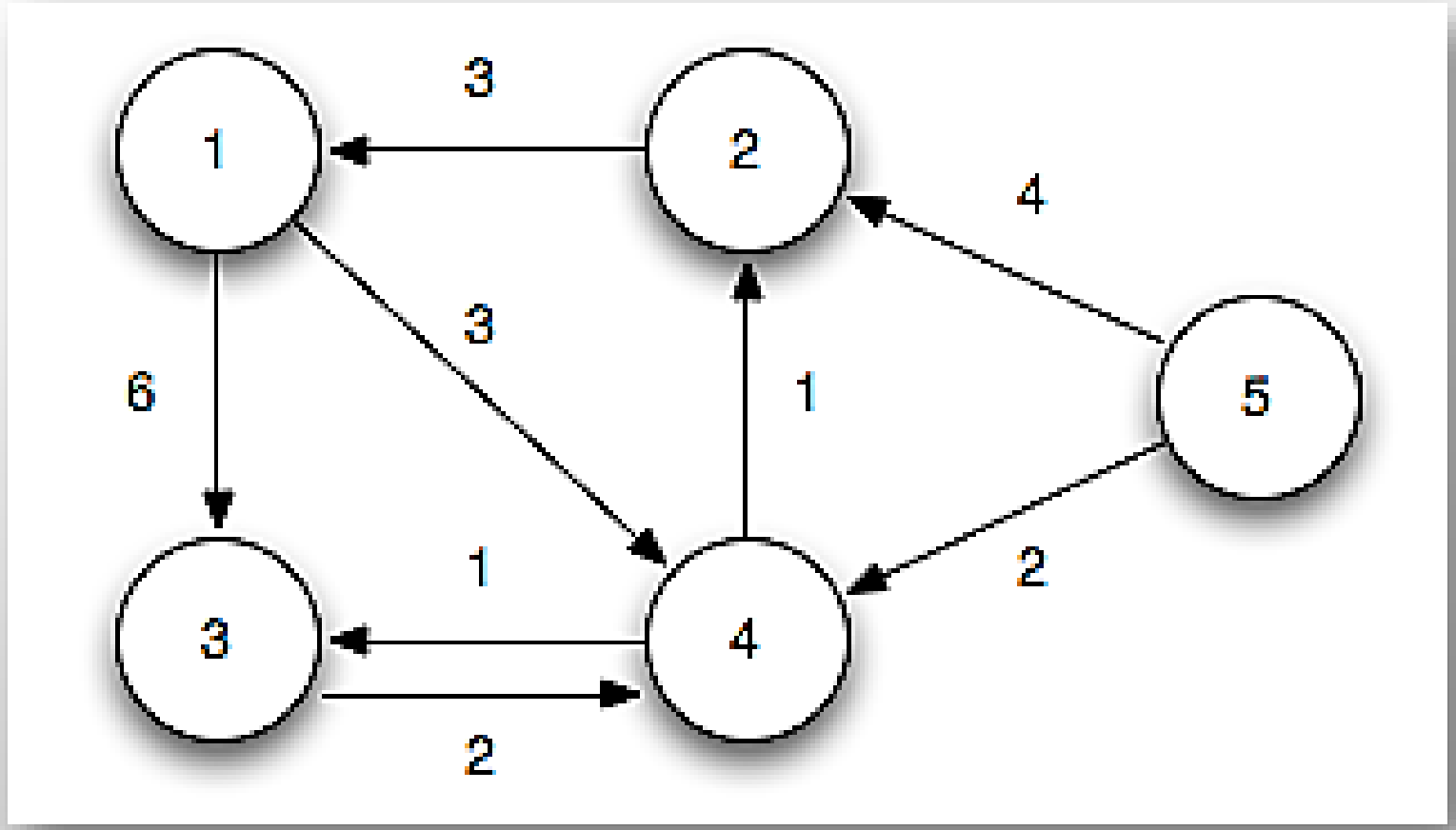
Algoritma Adımları

- Adım 1: Her bir düğüm çifti arasındaki ağırlıklar, doğrudan kenarlarla belirtilir. Eğer iki düğüm arasında doğrudan bir kenar yoksa, uzaklık sonsuz kabul edilir.
- Adım 2: Her bir düğüm çifti için, tüm ara düğümler sırayla incelenir.
- Adım 3: Ara düğümler üzerinden geçerek, yeni yolun uzunluğu hesaplanır ve mevcut en kısa yol uzunluğu ile karşılaştırılır.
- Adım 4: Yeni bulunan kısa yollar, matrise kaydedilir.

Karmaşıklık Analizi

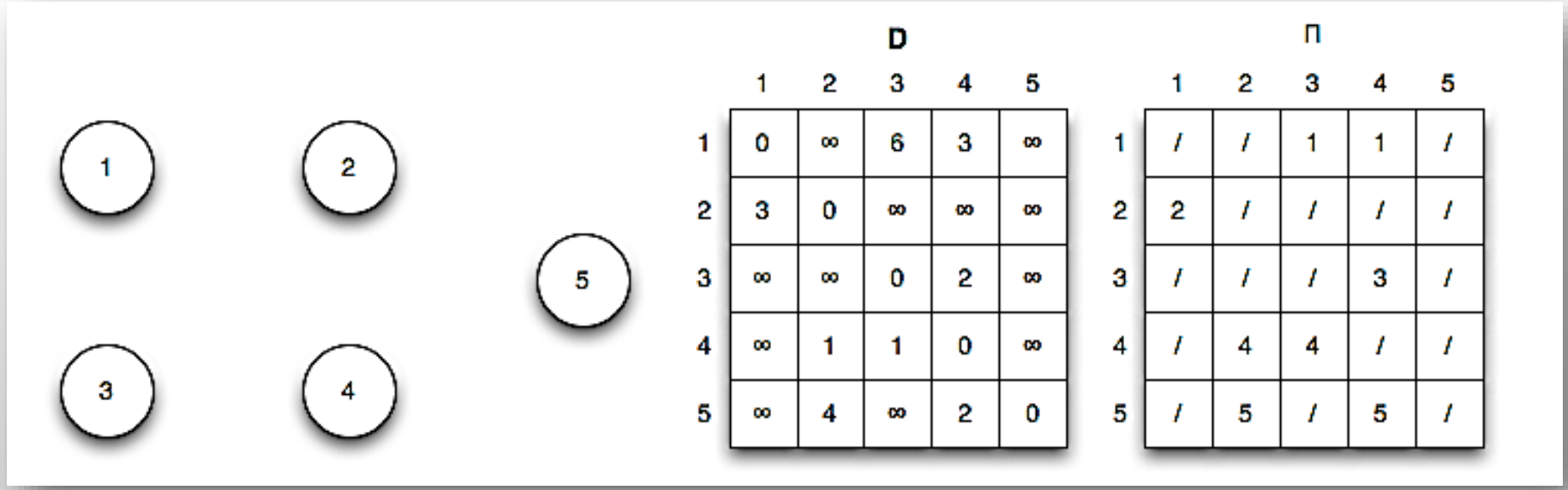
- Floyd-Warshall Algoritması'nın karmaşıklığı $O(V^3)$ şeklindedir.
- V düğüm sayısını temsil eder.
- 3 adet iç içe for döngüsü kullanılır.
  - ilk döngü tüm ara düğümleri gezer
  - ikinci döngü tüm kaynak düğümleri gezer.
  - son döngü tüm hedef düğümleri gezer.

Örnek



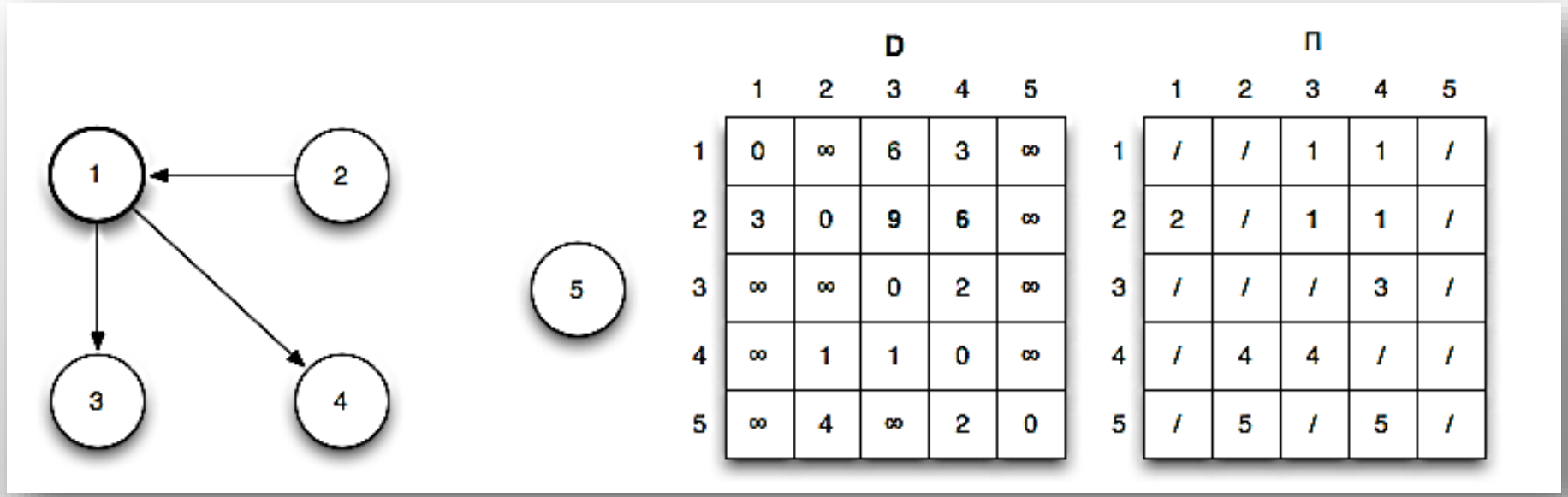
İlklendirme Aşaması

- (k = 0)
- kenar ağırlıklarına göre D matrisi doldurulur.



Iteration 1

- (k = 1)
- Düğüm 1 üzerinden 2 ⇝ 3 ve 2 ⇝ 4 kısa yolları bulundu.



D

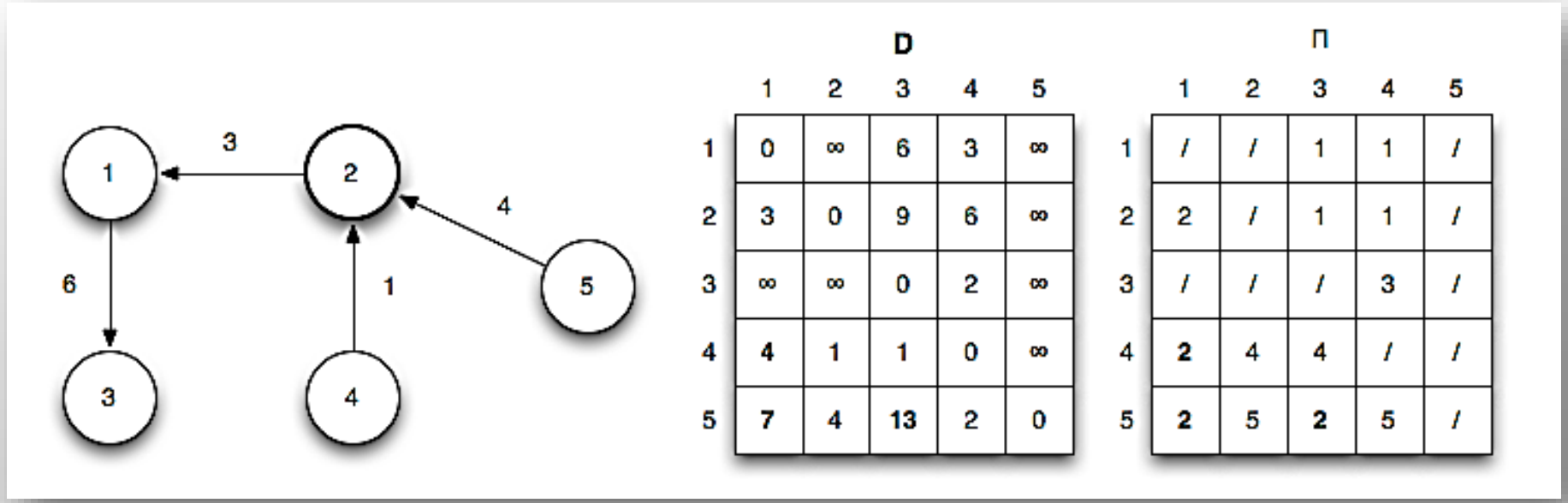
	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	9	6	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	∞	1	1	0	∞
5	∞	4	∞	2	0

Π

	1	2	3	4	5
1	/	/	1	1	/
2	2	/	1	1	/
3	/	/	/	3	/
4	/	4	4	/	/
5	/	5	/	5	/

Iteration 2

- (k = 2)
- Düğüm 2 üzerinden 4 ⇝ 1, 5 ⇝ 1, ve 5 ⇝ 3 kısa yolları bulundu.



D

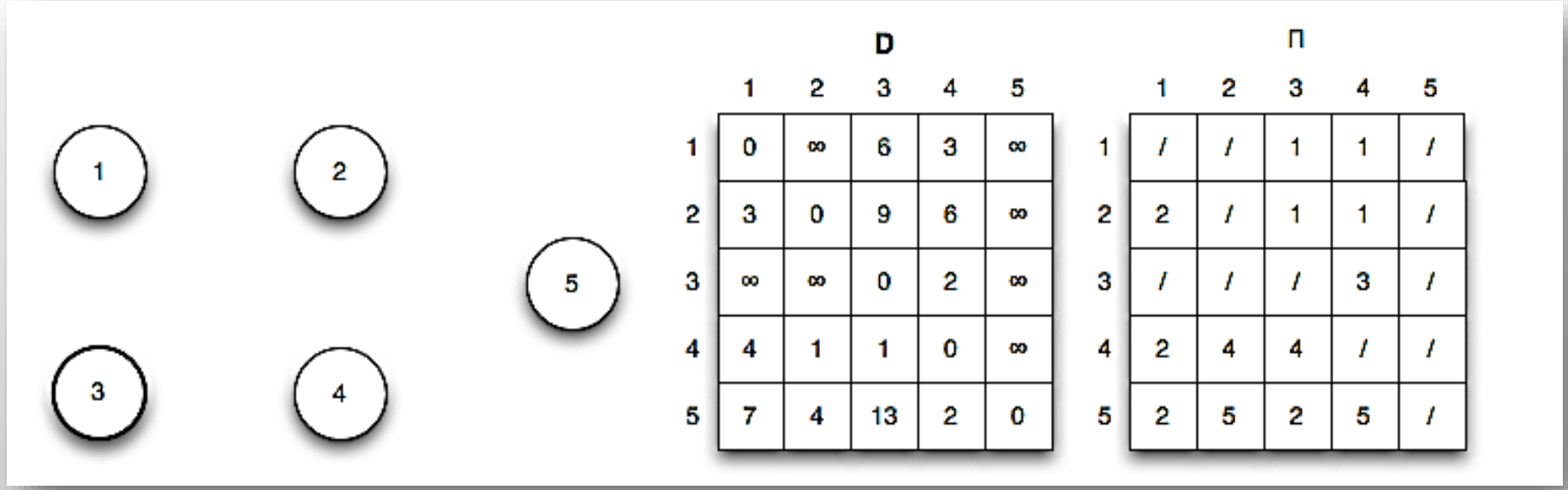
	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	9	6	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	7	4	13	2	0

Π

	1	2	3	4	5
1	/	/	1	1	/
2	2	/	1	1	/
3	/	/	/	3	/
4	2	4	4	/	/
5	2	5	2	5	/

Iteration 3

- (k = 3)
- Düğüm 3 üzerinden kısa yol bulunamadı.



D

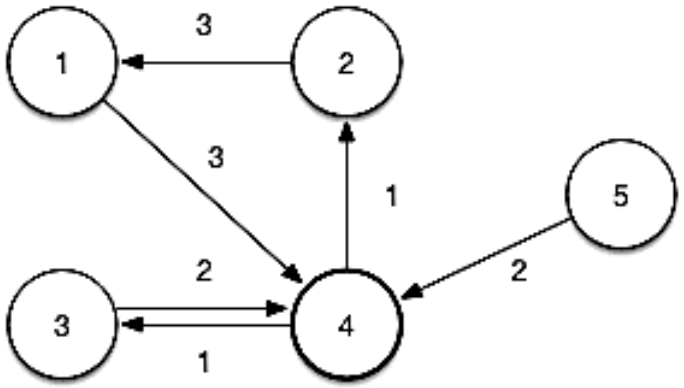
	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	9	6	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	7	4	13	2	0

Π

	1	2	3	4	5
1	/	/	1	1	/
2	2	/	1	1	/
3	/	/	/	3	/
4	2	4	4	/	/
5	2	5	2	5	/

Iteration 4

- (k = 4)
- Düğüm 4 üzerinden 1 ⇝ 2, 1 ⇝ 3, 2 ⇝ 3, 3 ⇝ 1, 3 ⇝ 2, 5 ⇝ 1, 5 ⇝ 2, 5 ⇝ 3, ve 5 ⇝ 4 kısa yolları bulundu.



D

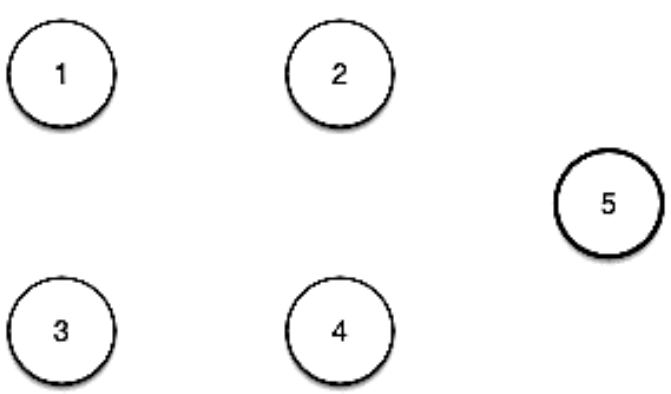
	1	2	3	4	5
1	0	4	4	3	∞
2	3	0	7	6	∞
3	6	3	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	6	3	3	2	0

Π

	1	2	3	4	5
1	/	4	4	1	/
2	2	/	4	1	/
3	2	4	/	3	/
4	2	4	4	/	/
5	2	4	4	5	/

Iteration 5

- (k = 5)
- Düğüm 5 üzerinden kısa yol bulunamadı.



D

	1	2	3	4	5
1	0	4	4	3	∞
2	3	0	7	6	∞
3	6	3	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	6	3	3	2	0

Π

	1	2	3	4	5
1	/	4	4	1	/
2	2	/	4	1	/
3	2	4	/	3	/
4	2	4	4	/	/
5	2	4	4	5	/

Son Durum

D

	1	2	3	4	5
1	0	4	4	3	∞
2	3	0	7	6	∞
3	6	3	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	6	3	3	2	0

Π

	1	2	3	4	5
1	/	4	4	1	/
2	2	/	4	1	/
3	2	4	/	3	/
4	2	4	4	/	/
5	2	4	4	5	/

Sözde Kod

```
FLOYD_WARSHALL(G):
        mesafeler = [ ][ ]
        her bir u için V içinde:
                her bir v için V içinde:
                        eğer u == v:
                                mesafeler[u][v] = 0
                        yoksa eğer (u, v) E içinde:
                                mesafeler[u][v] = ağırlık(u, v)
                        yoksa:
                                mesafeler[u][v] = sonsuz
```

Sözde Kod (2)

```
her bir k için V içinde:
        her bir i için V içinde:
                her bir j için V içinde:
                        eğer mesafeler[i][k] + mesafeler[k][j] < mesafeler[i][j]:
                                mesafeler[i][j] = mesafeler[i][k] + mesafeler[k][j]

her bir i için V içinde:
        eğer mesafeler[i][i] < 0:
                hata "Negatif ağırlıklı döngü var"

döndür mesafeler
```

A* (A Star) Algoritması

- İki nokta arasındaki en kısa yolu bulan arama algoritmasıdır.
- 1968'de *Peter Hart, Nils Nilsson, Bertram Raphael* tarafından geliştirildi.
- Genişlik öncelikli arama (*Breadth-First Search*) ile en iyi ilk arama (*Best-First Search*) algoritmalarının kombinasyonunu kullanır.
- Düzgün çalışması için doğru bir tahmin fonksiyonu gereklidir.
- Düğümlerin sayısı arttıkça karmaşıklığı artar.

Algoritma İlkeleri

- Her bir düğüm için tahmin (*heuristic*) değeri kullanır.
- Bu değer, düğümün hedefe olan tahmini mesafesini belirtir.
- Her adımda, komşu düğümler arasından, hedefle arasında gerçek ve tahmini maliyet toplamı küçük olan seçilir.
- Algoritma hedefe doğru hareket ederken, aynı zamanda en az maliyetli yolu seçmeye çalışır.

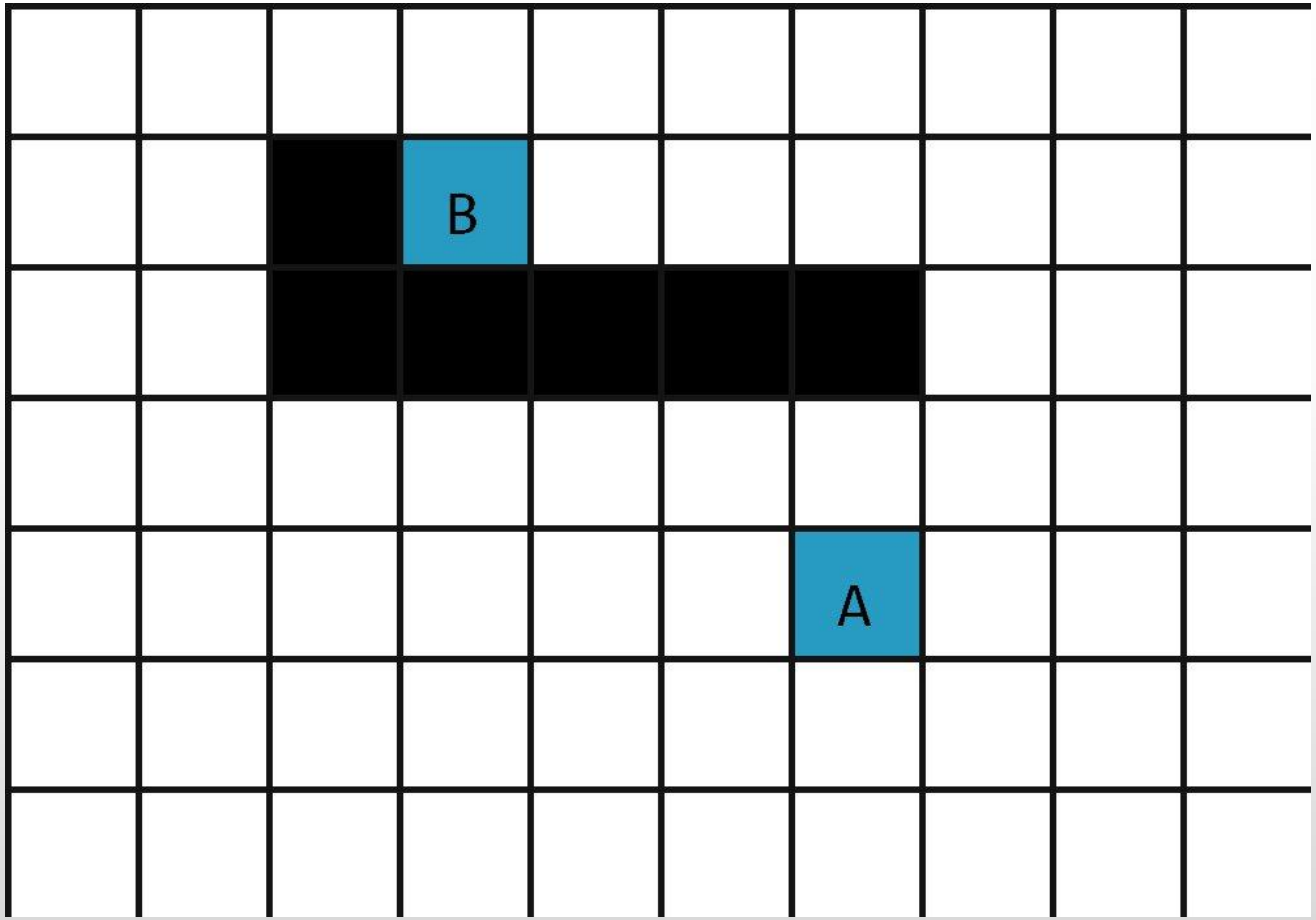
Algoritma Adımları

- Adım 1: Başlangıç düğümü seçilir ve bu düğüme uzaklık 0 atanır.
  - Diğer düğümlere sonsuz uzaklık atanır.
- Adım 2: Mevcut düğümün komşuları incelenir ve her birinin tahmini maliyeti hesaplanır.
- Adım 3: Komşu düğümler arasından, gerçek maliyet ve tahmini maliyetin toplamı en küçük olan düğüm seçilir.
- Adım 4: Seçilen düğüm, o ana kadar bulunan en uygun yolun bir parçası olarak kaydedilir.

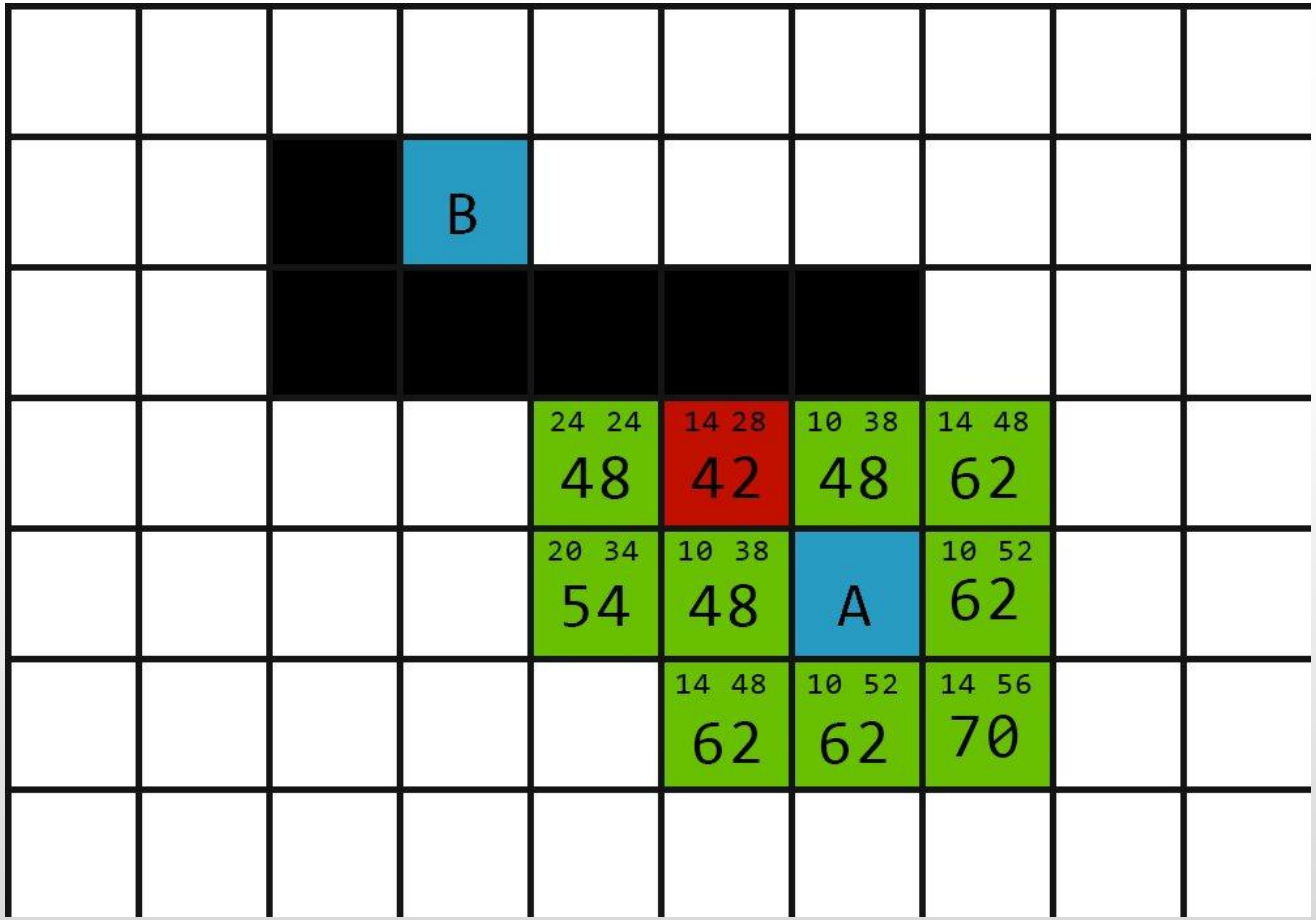
Algoritma Karmaşıklığı

- Eğer tahmin fonksiyonu gerçek maliyeti tam olarak tahmin ediyorsa,
  - karmaşıklık $O(b^d)$ şeklinde ifade edilir.
  - b çizgenin dallanma faktörünü,
  - d ise hedef düğüme olan maksimum derinliği temsil eder.

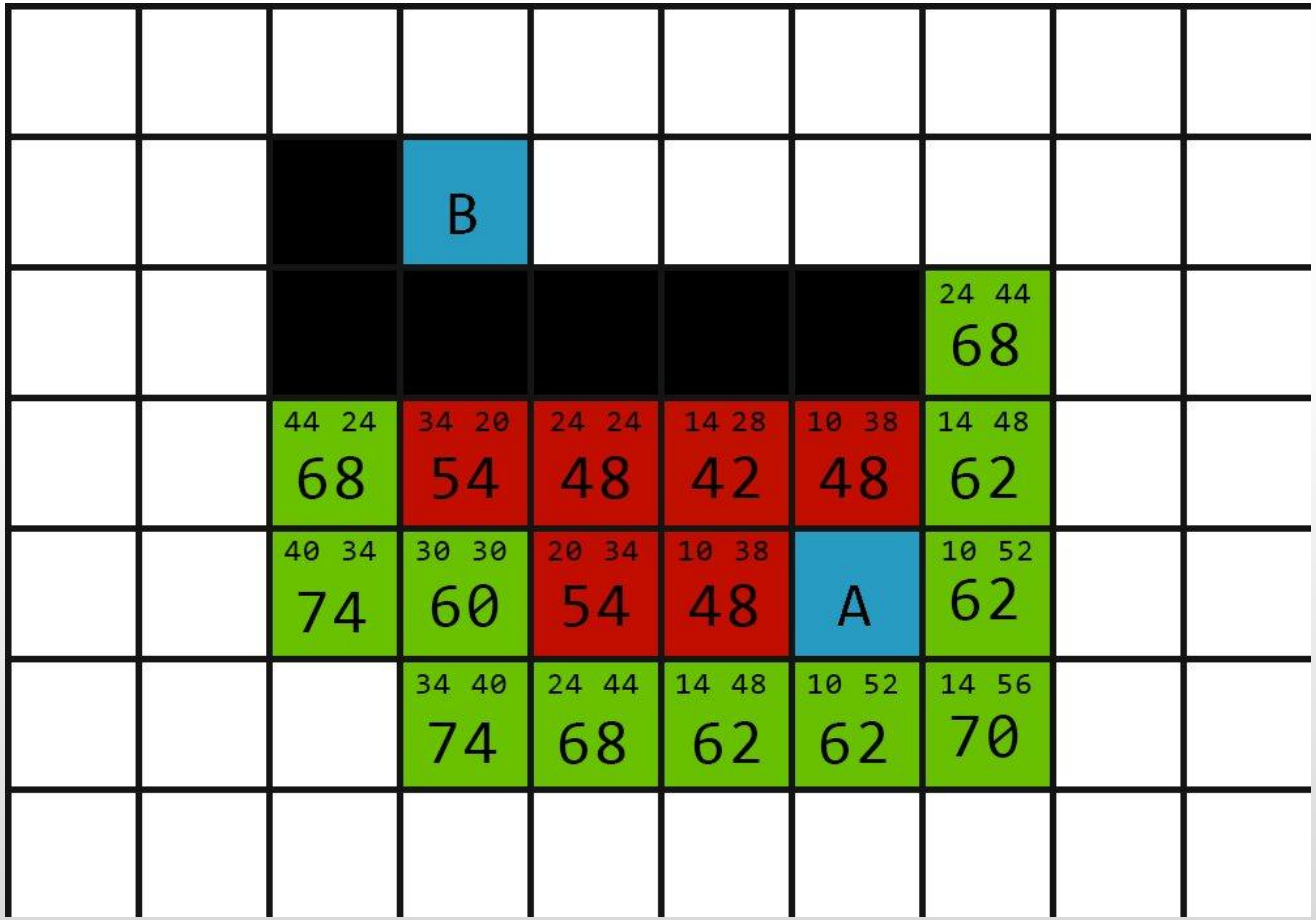
A Star



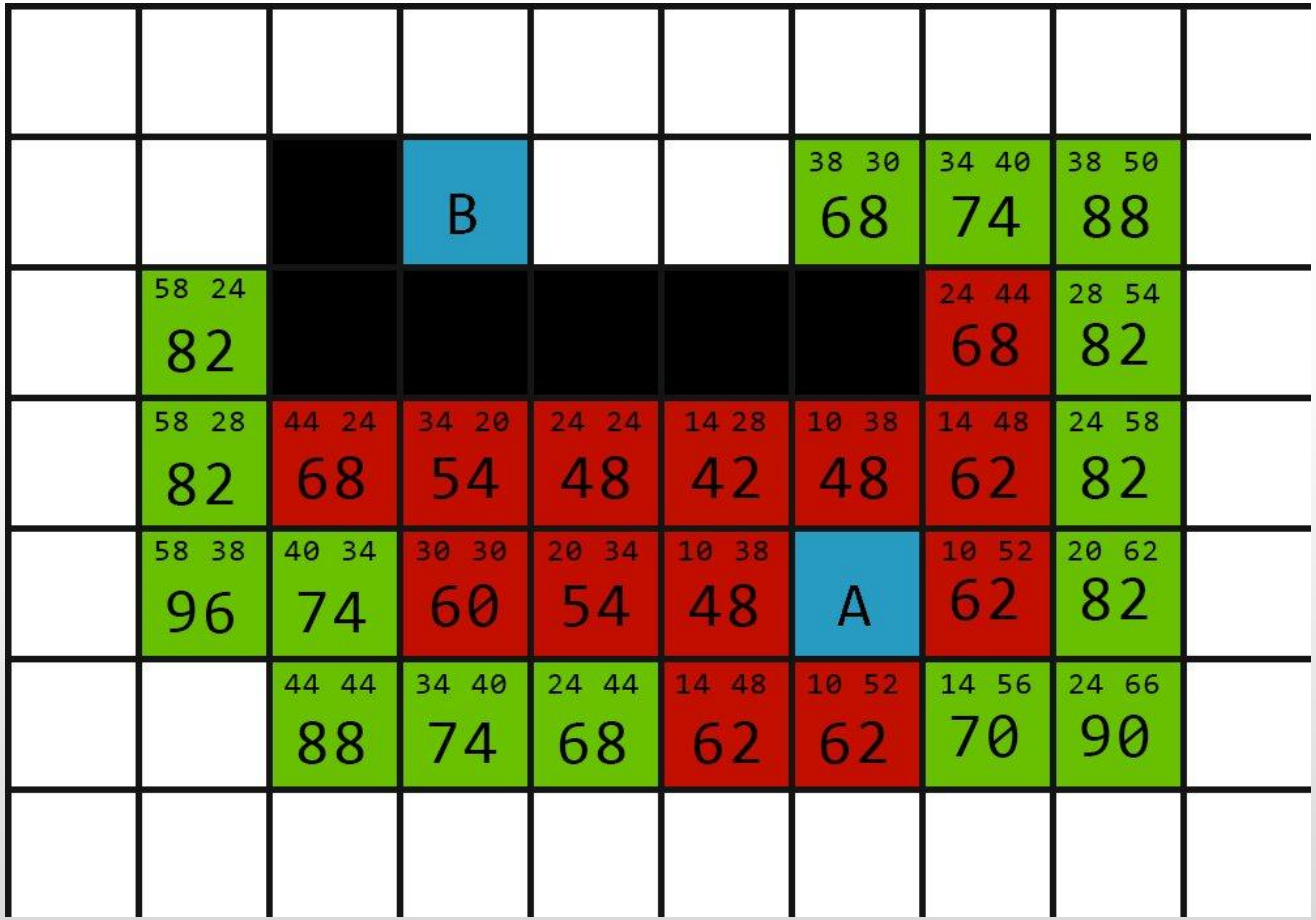
A Star



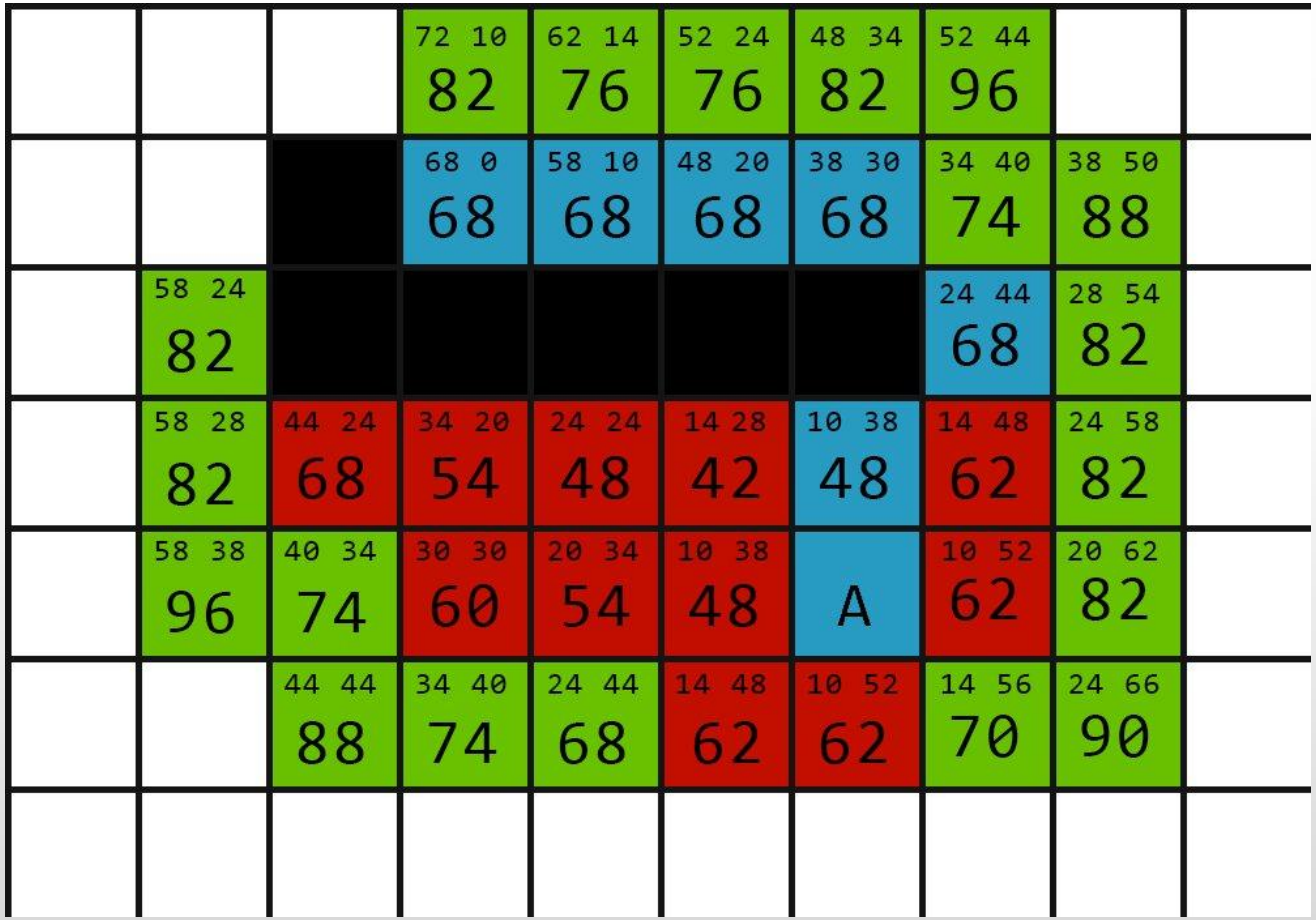
A Star



A Star



A Star



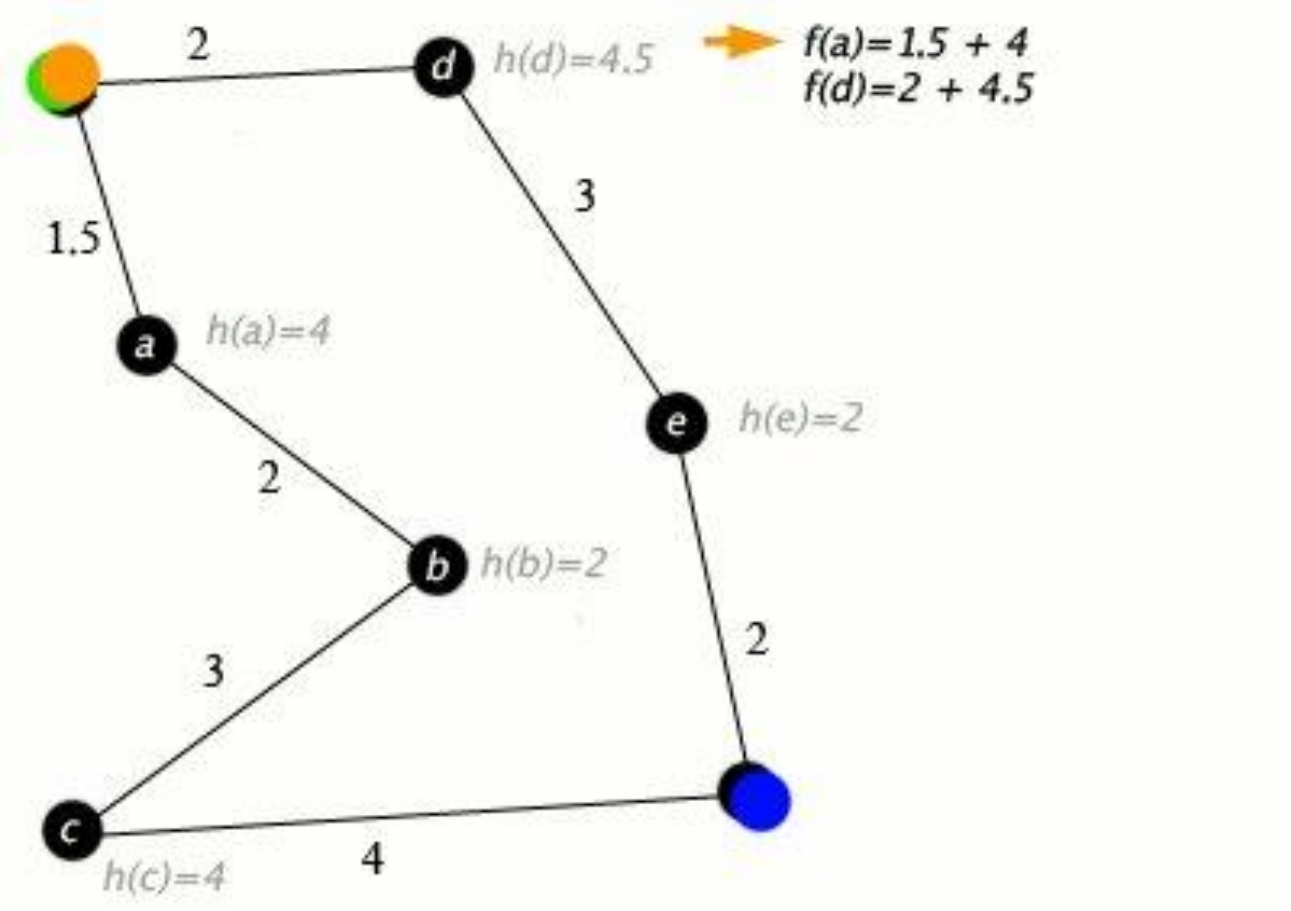
A* Arama Nasıl Çalışır?

- Her düğümün başlangıç düğümünden ulaşım maliyetini ("g-maliyet") ve mevcut düğümden hedef düğüme tahmini ulaşım maliyetini ("h-maliyet" veya sezgisel) dikkate alır.
- Sezgisel tahminlere göre hedefe yakın görünen düğümleri önceliklendirir.

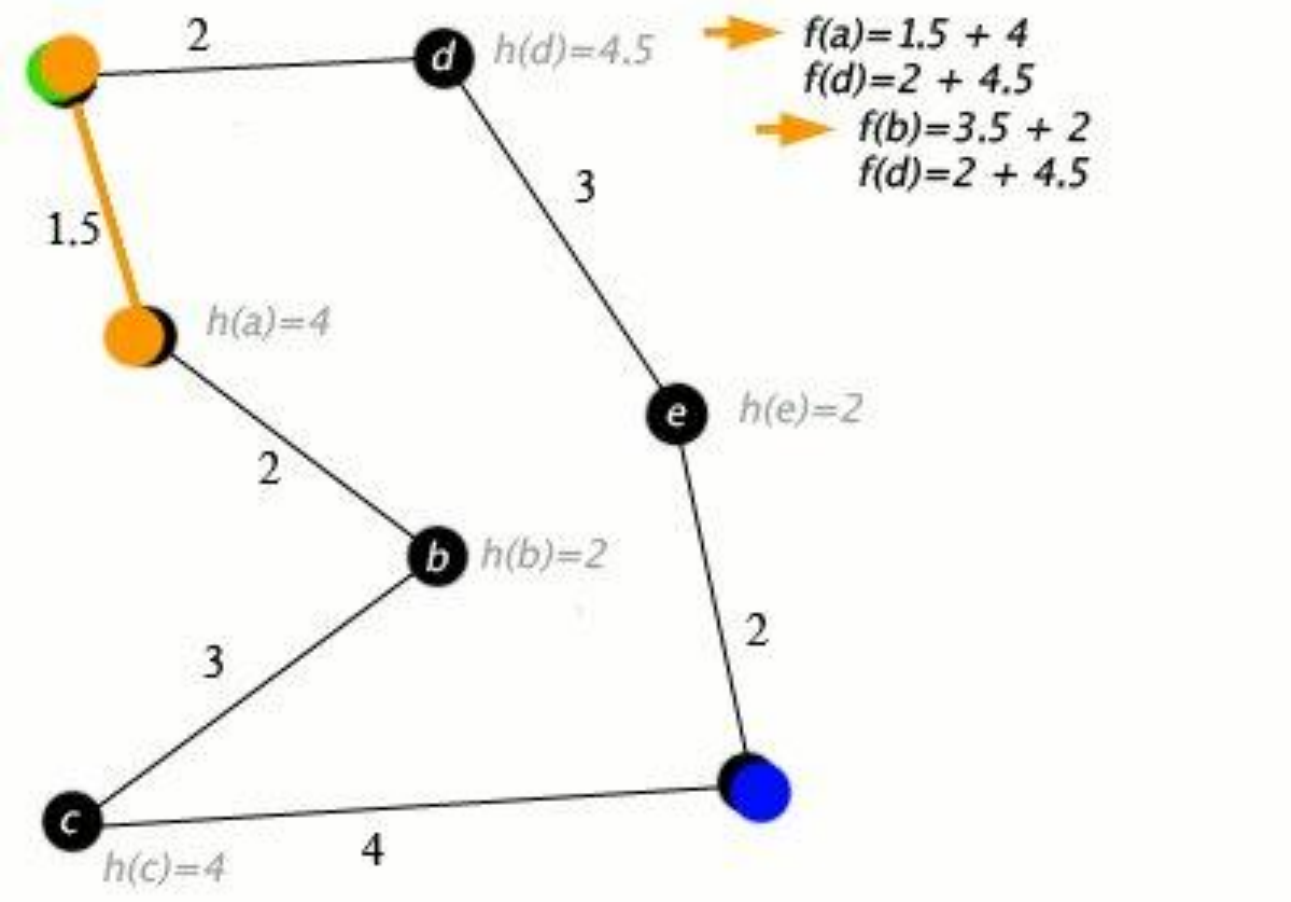
A* Arama

- Başlangıç düğümünü seç ve açık düğüm listesine ekle.
- Listeden en düşük f() + g() maliyetine sahip düğümü seç ve genişlet.
- Genişletilen düğüm,
  - hedef düğüm ise, çözüm bulundu.
  - değilse, hala genişletilecek düğümler var.
- Her bir sonraki düğüm için g ve f maliyetlerini güncelle, listeye ekle.
- Tekrar 2. adıma dön.

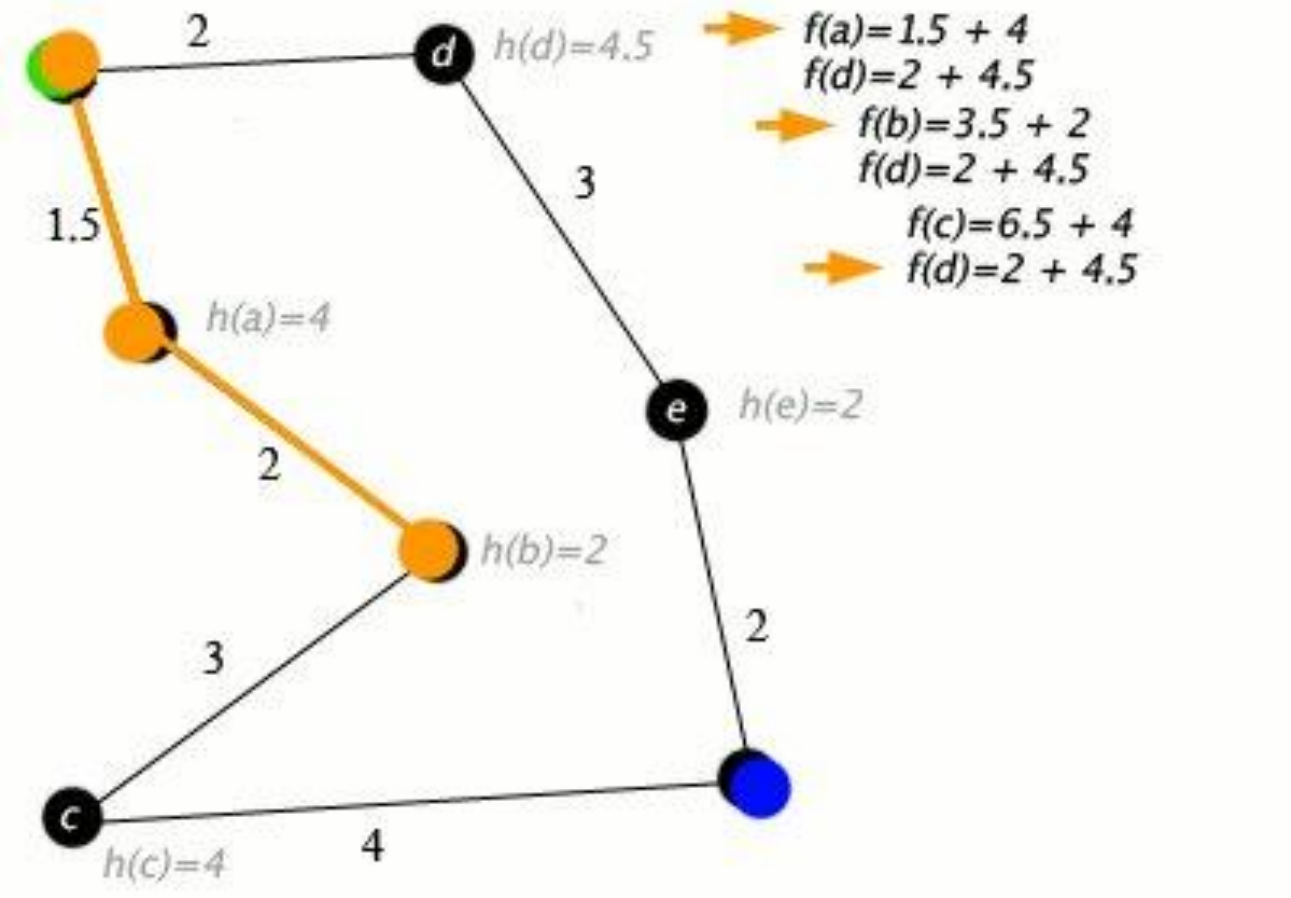
A Star Search



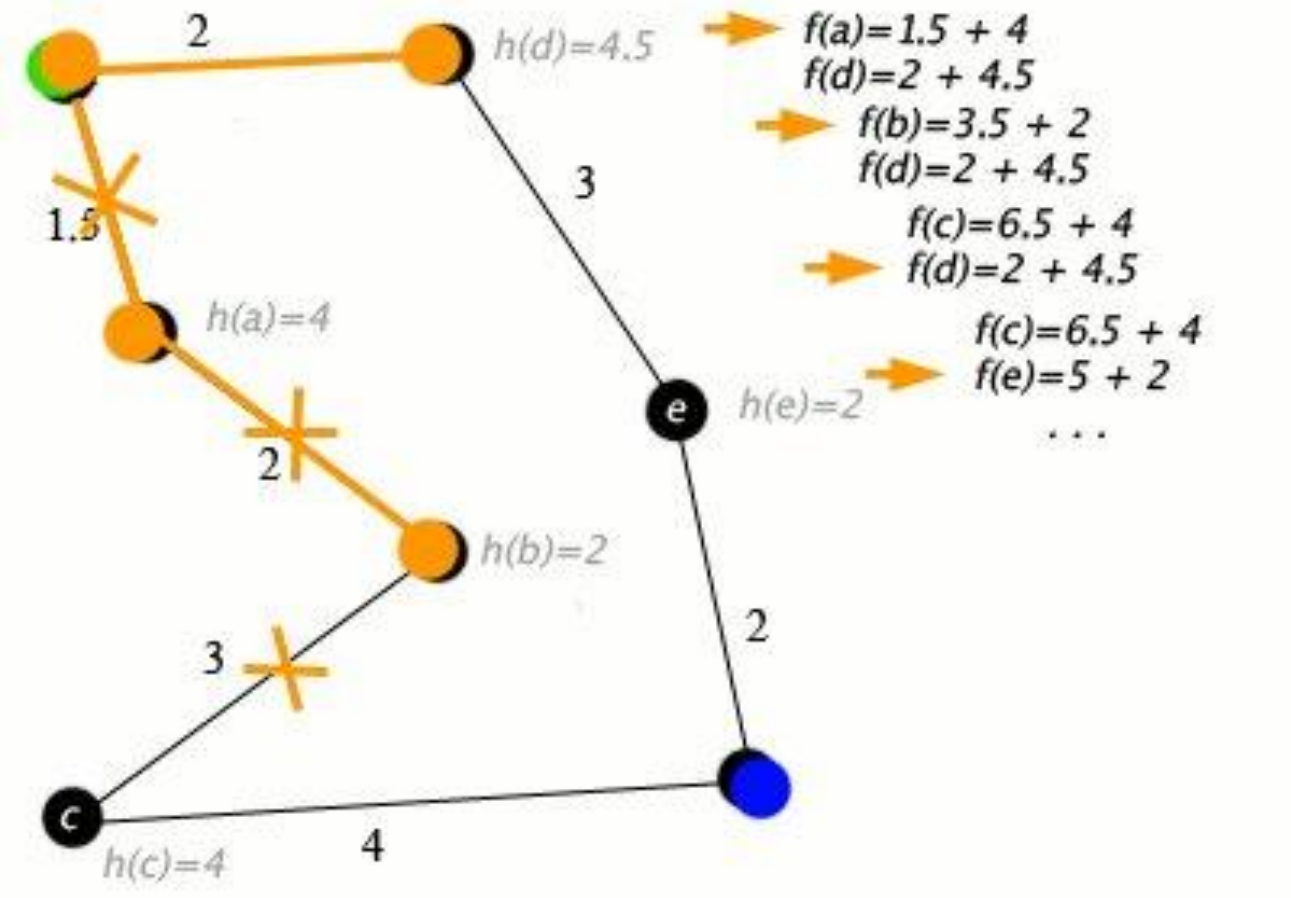
A Star Search



A Star Search



A Star Search



SON