

## Лабораторная работа 106

# ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

### Цель работы

*Анализ поступательно-вращательного плоского движения твердых тел и измерение момента инерции осесимметричного твердого тела.*

### Идея эксперимента

Использование маятника Максвелла для анализа плоского движения твердого тела и проверки закона сохранения механической энергии.

### Теоретическое введение

В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения механической энергии – являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из законов сохранения.

Для определенности введем понятия *изолированной* и *замкнутой* систем тел.

*Замкнутой* называется такая система тел, для которой векторная сумма всех внешних сил равна нулю.

*Изолированной* называется такая система тел, на которую внешние силы не действуют.

**Закон сохранения импульса.** Рассмотрим систему взаимодействующих между собой материальных точек с массами  $m_i$ . В силу третьего закона Ньютона для сил взаимодействия двух материальных точек с номерами  $i$  и  $j$  можно записать  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Пусть на систему действуют внешние силы. Тогда для материальной точки с номером  $i$  уравнение движения будет иметь вид

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{F}_{ij}, \quad (1)$$

где вектор  $\mathbf{v}_i$  — скорость материальной точки.

Просуммируем эти уравнения по  $i$  и учтем, что  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . В результате получим:

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i , \quad (2)$$

или

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} = \sum \mathbf{F}_i ,$$

где  $\mathbf{P}_\Sigma = \sum m_i \mathbf{v}_i$  — суммарный (полный) импульс системы точек в выбранной системе отчета.

В частном случае, когда система тел является замкнутой ( $\sum \mathbf{F}_i = 0$ ):

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = 0 ,$$

или

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const} . \quad (3)$$

Соотношение (3) выражает **закон сохранения импульса** системы материальных точек:

*суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется*, т.е. не изменяется во времени.

**Закон сохранения момента импульса.** Обозначим момент импульса системы материальных точек относительно некоторой точки  $O$  через  $\mathbf{L}$ , а радиус-вектор  $i$ -й материальной точки — через  $\mathbf{r}_i$ .

Аналогично тому, как это было сделано выше, возьмем за основу уравнение движения (3.1) материальной точки

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i . \quad (4)$$

Умножим левую и правую части уравнения (1) векторно на  $\mathbf{r}_i$  и просуммируем по  $i$ . Учитывая, что

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0 ,$$

получим

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i . \quad (5)$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}. \quad (6)$$

Первая сумма справа в (6) равна нулю, так как  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$ . Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (7)$$

— суммарный момент внешних сил относительно точки  $O$ .

В результате получаем закон изменения момента импульса:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (8)$$

В случае, когда момент внешних сил равен нулю,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0,$$

или

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (9)$$

Таким образом, *суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется (не изменяется во времени), если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю* (закон сохранения импульса).

Рассмотрим систему материальных точек, которая вращается вокруг неподвижной оси, например, совпадающей с осью  $z$ :  $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$ . В этом случае можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum_i m \rho_i^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

где  $\rho_i$  — расстояние от  $i$  — точки до оси вращения. Таким образом,

$$\mathbf{L} = J \boldsymbol{\omega}, \quad (11)$$

где  $J = \sum m_i \rho_i^2$  — момент инерции системы материальных точек.

**Закон сохранения механической энергии.** Если материальная точка массой  $m$  находится в поле действия силы, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой скалярной функции  $U(x,y,z)$ :

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (12)$$

а других сил нет, то наряду с кинетической энергией  $mv^2/2$  вводится потенциальная энергия  $U$ , при этом будет сохраняться полная энергия  $E = mv^2/2 + U$ . Для доказательства этого утверждения запишем уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона).

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad}U(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Умножим обе части уравнения (13) скалярно на  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dt = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \quad (14)$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \text{grad}U d\mathbf{r} = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} dU = U(r_2) - U(r_1), \quad (15)$$

получим:

$$\frac{mv_2^2}{2} + U(r_2) = \frac{mv_1^2}{2} + U(r_1). \quad (16)$$

Соотношение (16) выражает закон сохранения механической энергии для рассматриваемого случая. Условием потенциальности поля сил, т.е. условием выполнения (12), является равенство нулю работы по замкнутому пути. Потенциальная функция  $U(r)$  определена с точностью до константы. Эту неоднозначность можно устранить, если задать определенное значение  $U$  в некоторой точке поля.

Примером потенциального поля является поле силы тяжести вблизи поверхности Земли. В этом случае, если определить ось  $OZ$  по вертикали вверх, то потенциальная энергия:

$$U(z) = mgz. \quad (17)$$

В этом случае получим:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \quad (18)$$

Если тело вращается вокруг некоторой оси, проходящей или не проходящей через тело, то отдельные элементы тела при этом будут иметь различные скорости и различные перемещения.

В качестве примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной горизонтальной оси. Начало координат выберем на оси вращения тела. Ось  $OY$  направим вдоль оси вращения, радиус-вектор  $i$ -го элемента обозначим через  $\mathbf{r}_i$ , при этом  $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{\rho}_i$ , где  $\mathbf{d}_i$  — вектор, параллельный оси, а  $\mathbf{\rho}_i$  — перпендикулярен оси. Будем предполагать, что на  $i$ -й элемент этого тела помимо силы тяжести, равной  $\Delta m_i \mathbf{g}$  ( $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$ ), действует сила  $\mathbf{F}_i$ , направленная по прямой, соединяющей эту точку с осью. Кроме того, предположим, что между  $i$ -м и  $j$ -м элементами действует сила взаимодействия  $\mathbf{F}_{ij}$ , причем  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  и  $\mathbf{F}_{ij} \uparrow\uparrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , т. е. сила взаимодействия — внутренняя сила. Запишем уравнение движения  $i$ -го элемента

$$\Delta m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \Delta m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (19)$$

Умножив векторно левую и правую части на  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$ , получим  $\dot{\mathbf{v}}_i \mathbf{v}_i dt = d(v_i^2/2)$ ,  $\mathbf{g} d\mathbf{r}_i = -g dz_i$ ,  $\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = 0$ , так как  $\mathbf{F}_i \perp d\mathbf{r}_i$ . Если суммировать по всем элементам, то появятся пары:

$$\mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} (\boldsymbol{\omega} dt \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) = \boldsymbol{\omega} dt ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}) = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по  $d\mathbf{r}_i$  и суммирования отдельных уравнений (19) получим:

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} + \sum \Delta m_i g z_i = \text{const}. \quad (20)$$

Выразим скорость  $v_i$  через вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$ :  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\rho}_i$ . Учитывая, что  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{\rho}_i$ , получим  $v_i^2 = \omega_i^2 \rho_i^2$ . Таким образом,

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (21)$$

где  $J = \sum \Delta m_i \rho_i^2$  — момент инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Второе слагаемое в левой части (20) можно преобразовать, введя координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}. \quad (22)$$

В результате получим закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + mgz_c = \text{const}, \quad (m = \sum \Delta m_i). \quad (23)$$

В качестве другого примера рассмотрим силу, возникающую при смещении элемента тела из положения равновесия ( $z = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) и линейно зависящую от смещения  $x$ :

$$F = -kx. \quad (24)$$

Потенциальная энергия равна работе силы при перемещении тела из данного положения в положение, потенциальная энергия которого принимается равной нулю:

$$U(x) = - \int_x^0 F(x) dx = \frac{kx^2}{2} \quad (25)$$

При записи (25) потенциальная энергия равной нулю при  $x = 0$ .

В этом случае закон сохранения механической энергии будет иметь вид:

$$m \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const}. \quad (26)$$

Таким образом, *механическая энергия системы тел сохраняется неизменной, если суммарная работа всех внешних сил и сил трения внутри системы равна нулю* (закон сохранения механической энергии).

**Маятник Максвелла.**

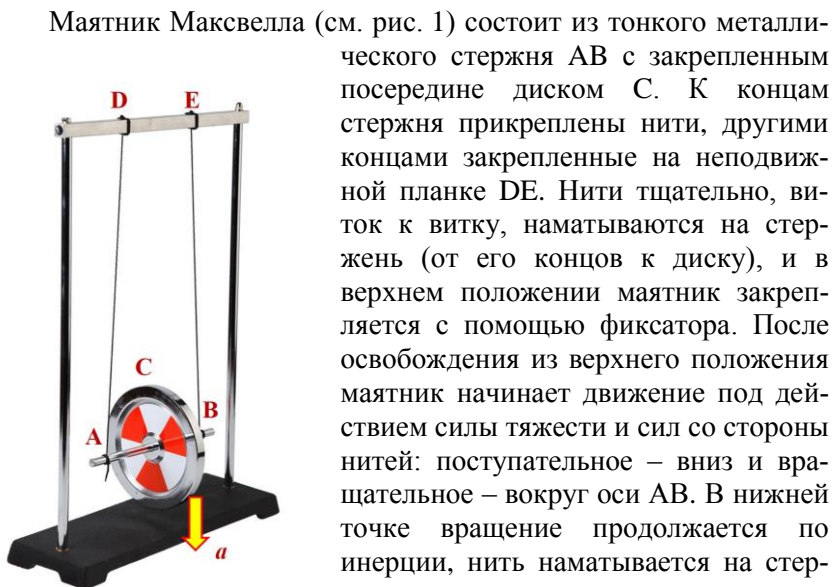


Рис. 1. Принципиальная схема маятника Максвелла.

Маятник Максвелла (см. рис. 1) состоит из тонкого металлического стержня АВ с закрепленным посередине диском С. К концам стержня прикреплены нити, другими концами закрепленные на неподвижной планке DE. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску), и в верхнем положении маятник закрепляется с помощью фиксатора. После освобождения из верхнего положения маятник начинает движение под действием силы тяжести и сил со стороны нитей: поступательное – вниз и вращательное – вокруг оси АВ. В нижней точке вращения продолжается по инерции, нить наматывается на стержень, а маятник начинает подниматься. Достигнув верхней точки, маятник снова начинает движение вниз и т. д. Такой характер движения (вверх-вниз)

в чем-то схож с колебаниями груза на пружине. Поэтому это устройство и получило название маятника Максвелла.

В движении маятника Максвелла можно выделить три временные стадии: спуск, удар и подъем. На рис. 2 (а, б) схематически представлены зависимости скорости и ускорения оси маятника.

Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар).

Отметим, что удар маятника в нижней точке отличается от удара, например, шарика о плиту. Если кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации, то при ударе маятника Максвелла кинетическая энергия его вращения (которая гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом) практически не изменяется.

В связи с тем, что полное аналитическое решение за весь

цикл движения маятника не представляется возможным, в эксперименте исследуются плоское движение и удар. Теоретически стадии движения рассматриваются отдельно, и, кроме того, используются предположения, которые упрощают решение задачи. Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар).

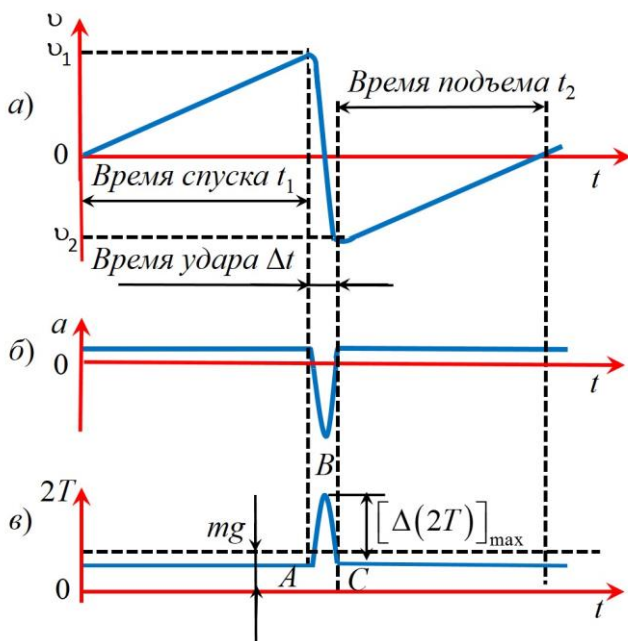


Рис. 2. Схематические зависимости скорости  $v$  (а) и ускорения  $a$  (б) точек оси маятника, а также силы натяжения нитей  $T$  (в) от времени движения маятника.

В связи с тем, что полное аналитическое решение за весь цикл движения маятника не представляется возможным, в эксперименте исследуются плоское движение и удар. Теоретически стадии движения рассматриваются отдельно, и, кроме того, используются предположения, которые упрощают решение задачи.

Движение маятника происходит под действием силы тяжести



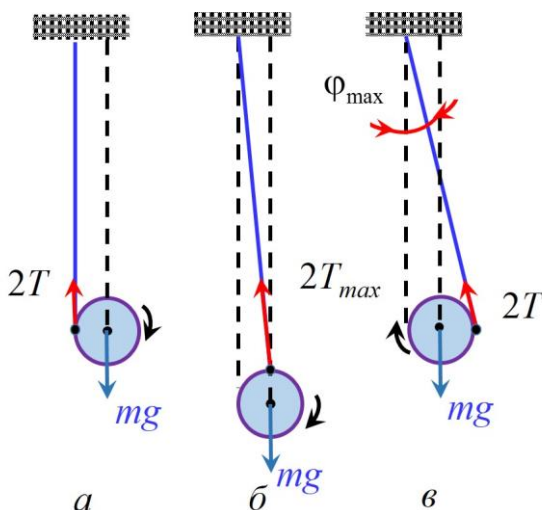


Рис. 3. Три последовательных положения оси маятника: в начале (*a*), в середине (*б*) и в конце (*в*) удара.

и силы натяжения нитей, поэтому устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно, только если нити находятся в вертикальной плоскости (рис. 3). При отклонении нитей от вертикальной плоскости возникают горизонтальные составляющие сил натяжения, возвращающие маятник к положению, когда нити вертикальны. В результате возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это можно наблюдать во время подъема маятника, когда нити выходят из вертикальной плоскости. Если перед отпусканием маятника нити находятся в вертикальной плоскости, то движение вниз происходит без колебаний (заметим, что при этом центр масс маятника находится вне плоскости расположения нитей).

Итак, без учета силы сопротивления воздуха и отклонения нитей от вертикали, уравнения движения маятника Максвелла вниз и вверх в лабораторной системе отсчета одинаковы и имеют вид:

$$ma = mg - 2T, \quad (27)$$

где  $m$  — масса маятника,  $T$  — сила натяжения нити,  $g$  — ускорение свободного падения,  $a$  — ускорение поступательного движения цен-

тра масс маятника.

Для записи уравнения вращательного движения (уравнения моментов) выберем ось маятника в качестве «оси моментов», которая движется с ускорением  $a$ . В такой системе отсчета уравнение моментов не будет содержать момента сил инерции\*, т.е.

$$J\varepsilon = 2rT, \quad (28)$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно его оси,  $r$  – радиус стержня маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника.

Уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нитей, имеет вид

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (29)$$

При опускании маятника начальная скорость его центра масс равна нулю, а при подъеме она отлична от нуля. Решая систему уравнений (27) – (29), получим:

$$a = \frac{g}{1 + J/mr^2}. \quad (30)$$

Момент инерции маятника приближенно можно представить в виде  $J \approx \frac{mR^2}{2}$ , где  $R$  – радиус диска. Поскольку радиус диска  $R$

много больше радиуса стержня  $r$ , то величина  $\frac{J}{mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} \gg 1$  и ускорение маятника  $a \ll g$ . Следовательно, для суммарной силы натяжения нитей справедливо выражение:

$$2T = m(g - a) \approx mg. \quad (31)$$

На первой стадии движения (спуск) ускорение центра масс равно:

$$a_1 = \frac{2h_1}{t_1^2}, \quad (32)$$

где  $t_1$  – время опускания маятника,  $h_1$  – расстояние, которое он проходит за это время.

Из соотношений (30) и (32) получаем формулу для экспериментального определения момента инерции маятника:

$$J = mr^2(g/a - 1) = mr^2(gt_1^2/2h_1 - 1). \quad (33)$$

---

\* Момент сил инерции равен нулю, т.к. и равнодействующая сил инерции  $m(-a)$  и равнодействующая сил тяжести  $mg$  приложены в центре масс маятника.

Скорость опускания центра масс маятника непосредственно перед его ударом равна

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (34)$$

При подъеме маятника вверх после удара (III стадия) он движется равнозамедленно с ускорением  $a$ , направленным так же, как при его движении вниз. Скорость движения центра масс маятника при подъеме определяется уравнением:

$$v = v_2 - at, \quad (35)$$

где  $v_2$  – начальная скорость при движении маятника вверх,  $t$  – время от начала этого движения,  $a$  – модуль ускорения. Движение маятника вверх обусловлено продолжающимся по инерции вращением маятника в нижней точке его траектории. Наматывание при этом вращении нитей на стержень маятника и приводит к его подъему.

Если время подъема маятника до его остановки равно  $t_2$ , то для начальной скорости имеем:

$$v_2 = at_2 = \frac{2h_2}{t_2}, \quad (36)$$

так как ускорение при подъеме маятника связано с расстоянием  $h_2$ , которое проходит его ось до остановки, таким же соотношением, как и при спуске:

$$a_2 = \frac{2h_2}{t_2^2}. \quad (37)$$

Ускорения при спуске и подъеме одинаковы. Высота подъема  $h_2$  несколько меньше, чем  $h_1$ . Это обусловлено изменением механической энергии маятника за один цикл движения:  $\Delta W = mg(h_1 - h_2)$ . Уменьшение механической энергии связано как с неупругими процессами в нитях в момент удара, так и с потерями энергии на трение при движении маятника. Поскольку сопротивление воздуха мало, можно считать, что потери энергии происходят главным образом в момент удара и равны уменьшению кинетической энергии маятника:  $\Delta W_{\text{мех}} \approx \Delta W_{\text{уд}} = W_{\text{к1}} - W_{\text{к2}}$ .

Кинетическая энергия маятника равна:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mr^2} \right), \quad (38)$$

где  $\omega = v/r$  – угловая скорость маятника. Поскольку  $J/mr^2 \gg 1$ , кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$ , связанная с поступательным движением, мала по сравнению с энергией вращательного движения  $\frac{J\omega^2}{2}$ . Это обстоятельство является главной особенностью маятника Максвелла.

Кроме того, потери энергии при ударе малы ( $\Delta W_{\text{уд}} \ll W_k$ ), т.е. коэффициент восстановления скорости  $K_B = v_2/v_1 \approx 1$ . Именно благодаря этому в данной системе можно наблюдать многократное повторение цикла движения вниз – вверх, а сама система называется «маятником».

Теперь рассмотрим удар в нижней точке движения маятника. Явление удара сопровождается, как уже упоминалось, резкими изменениями сил взаимодействия за очень малый промежуток времени. Эти силы сначала нарастают, а затем убывают. Как правило, их зависимость от времени, неизвестна, и применение уравнений движения в явном виде затруднительно.

В теории удара рассматривают суммарный импульс силы:

$$\int_0^{\Delta t} F(t) dt = \Delta(mv) = m(v_2 - v_1), \quad (39)$$

где  $m$  – масса ударяющегося тела,  $v_1$  и  $v_2$  – его скорости до и после удара,  $F(t)$  – сила, действующая на тело во время удара,  $\Delta t$  – длительность удара.

В нашем случае во время удара происходит резкое увеличение силы натяжения нитей  $2T$ . График изменения этой силы приведен на рис. 3 в. Поскольку скорость маятника при ударе меняет свое направление, изменение импульса –  $m(v_1 + v_2)$  обусловлено импульсом силы  $F(t) = (2T)_{\text{II}} - mg$ . Так как при движении маятника вниз и вверх (I и III стадии) сила натяжения нитей мало отличается от веса маятника:  $(2T)_{\text{I,III}} \approx mg$  (ускорение  $a_{\text{I,III}} \ll g$ ), то

можно считать, что  $F(t) \approx (2T)_{II} - (2T)_{I,III} = \Delta(2T)$ .

Таким образом, импульс силы при ударе равен:

$$m(v_1 + v_2) = F_{\text{cp}} \Delta t = \int_0^{\Delta t} 2T(t) dt, \quad (40)$$

т.е. определяется площадью под кривой АВСА на рис. 2 в. Поскольку при ударе угловая скорость маятника практически не изменяется (потери энергии малы), можно считать, что во время удара вращение происходит со средней угловой скоростью

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2r}, \quad (41)$$

а время удара равно

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_{\text{cp}}} = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2}. \quad (42)$$

Преобразуя соотношения (40) и (42), получаем выражение для среднего значения силы  $F$ :

$$F_{\text{cp}} = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{2\pi r}. \quad (43)$$

Рассмотрим упрощенную картину движения маятника при ударе. Удар начинается в тот момент, когда нити полностью размотались со стержня и заканчивается через пол-оборота маятника, в момент начала нового наматывания нитей. Будем считать нити нерастяжимыми, т.е. пренебрежем дополнительным удлинением  $\delta h$  нитей при ударе (возникающим из-за роста сил натяжения) по сравнению с радиусом  $r$  стержня маятника:

$$\delta h \ll r. \quad (44)$$

При таких предположениях центр масс маятника во время удара совершает движение вниз – вверх по закону:  $h_{\text{цм}} = h_0 - r \sin(\omega_{\text{cp}} t)$ , где  $h_0$  – вертикальная координата центра масс в начале удара, время отсчитывается от момента начала удара. Поэтому сила, действующая на маятник во время удара, равна:

$$F(t) = \Delta(2T) = ma(t) = m \frac{d^2 h_{\text{цм}}}{dt^2} = m \omega_{\text{cp}}^2 r \sin(\omega_{\text{cp}} t), \quad (45)$$

а ее максимальное значение:

$$[F(t)]_{\max} = [\Delta(2T)]_{\max} = m\omega_{\text{cp}}^2 r = \frac{m(v_1 + v_2)}{4r}, \quad (46)$$

Нетрудно видеть (сравнивая соотношения (43) и (46)), что во время удара максимальное значение силы натяжения нитей в  $\pi/2$  раз превышает среднее значение силы.

Заметим, что поскольку радиус  $r$  стержня маятника мал по сравнению с длиной нитей  $h$ , нити маятника за время удара лишь незначительно отклоняются от вертикальной плоскости:  $\varphi_{\max} \leq 2r/h \ll 1$ , и небольшая горизонтальная проекция силы натяжения  $2T$  не успевает вызвать заметного смещения центра масс маятника по горизонтали (см. рис. 3, где показаны три последовательных положения оси маятника:  $a$  – в начале,  $b$  – в середине и  $c$  – в конце удара). Однако отклонение нитей от вертикальной плоскости, возникающее после удара, приводит к появлению небольшого раскачивания оси маятника во время его подъема (III стадия). Это раскачивание маятника и вибрации системы, возникающие в результате удара, объясняют наблюдаемые в эксперименте осцилляции в зависимости силы натяжения нитей от времени.

### Экспериментальная установка

Фото установки представлено на рис.4. Она состоит из *рамы 1*, прикрепленной к стене, *маятника 2*, который с помощью *нитей 3*, проходящих через продольную щель в *планке 4* закреплен на *стержне 5*. Стержень 5 закреплен на *датчике силы 6*. Расстояния, которые проходит маятник при движении вниз и вверх измеряется *датчиком положения 7*. Для движения маятника из верхнего положения, он устанавливается в *электромагнитных защелках 8*, управляемых с помощью *пускового устройства 9*. Датчики положения (7) и силы (6) соединены с *компьютером (10)*.

Схема маятника Максвелла представлена на рис.5. Он состоит из алюминиевого диска с радиусом  $r_1 = 50$  мм и толщиной  $S = 20$  мм, который надет на стальную ось, которая имеет три секции с радиусами  $r_2 = 9$  мм,  $r_3 = 7$  мм,  $r_4 = 5$  мм, длина каждой секции  $l =$

25 мм. Такое устройство маятника Максвелла позволяет получать три значения отношения  $\frac{R}{r}$ .

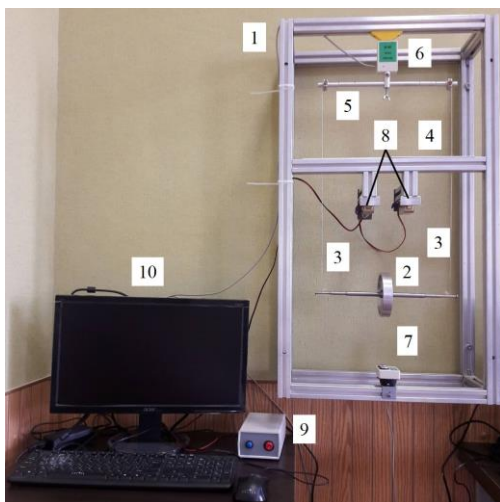


Рис. 4. Экспериментальная установка.

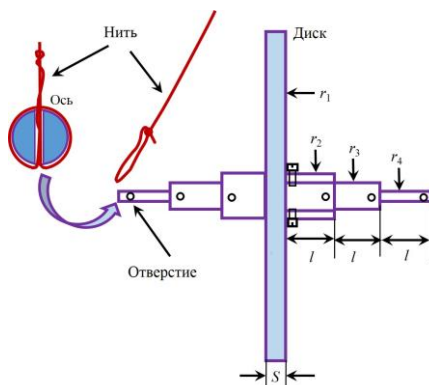


Рис. 5. Схема маятника Максвелла.

На обоих концах каждой секции просверлены тонкие поперечные отверстия (2 мм) для крепления нитей. На концах каждой нити имеется петля, которая вставляется в отверстие и закрепляется на оси (как показано на рис.5).

Для проведения эксперимента и обработки результатов работы используется компьютерная программа «Цифровая лаборатория». После запуска программы на экране монитора появится главное меню. В этом меню следует выбрать два датчика: **датчик положения** (рис. 6) и **датчик силы** (рис. 7). Для выбранного датчика с помощью кнопки установите нулевое показание (рис.8). Программа готова к измерению.

Для проведения измерений необходимо закрепить маятник в



Рис. 6. Включение датчика положения.



Рис. 7. Включение датчика силы.

электромагнитных защелках. Для этого тщательно, виток к витку навивают нити на ось, следя за тем, чтобы сохранялось горизонтальное положение оси при натянутых нитях. Намотку производят до тех пор, пока ось маятника не окажется на уровне защелок. После этого вставить снизу ось в защелки (рис. 9). Для управления работой пускового устройства (защелок) включить в сеть пусковое



устройство. Защелки будут удерживать ось. Установка готова к измерениям.

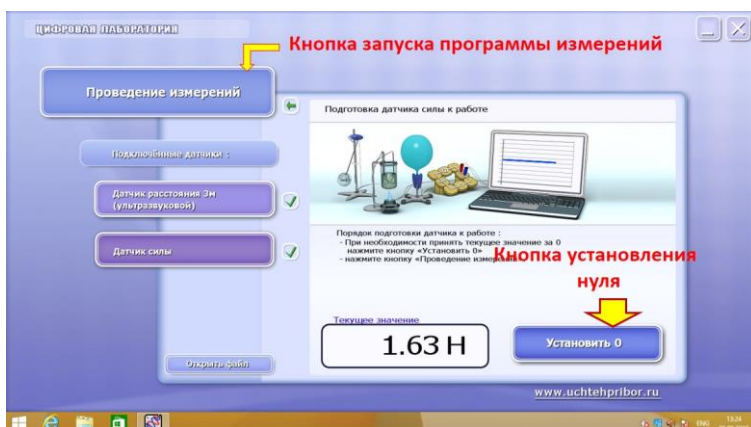


Рис. 8. Установка нуля для датчика и запуск измерений.

Убедившись, что установка готова к измерениям, нажмите на кнопку проведение измерений (рис.8). После этого нажмите последовательно на кнопку

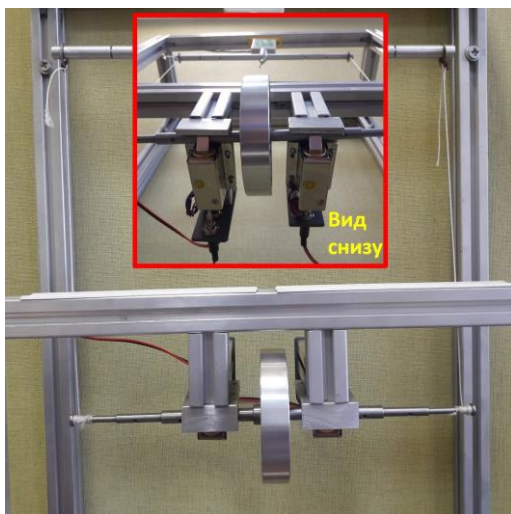


Рис. 9. Установка Маятника Максвелла в защелки.

на кнопку «пуск» на пусковом устройстве. После окончания измерения нажмите на кнопку «стоп». Вид наблюдаемых зависимостей координаты маятника от времени и силы от времени показан на рис. 10.

Для просмотра графика зависимости координаты маятника от времени и силы от времени с помощью

кнопки «масштаб» и регуляторов выбираете нужный масштаб. Окно просмотра можно двигать, нажав на левую кнопку «мыши» (курсор при этом должен быть на окне просмотра).

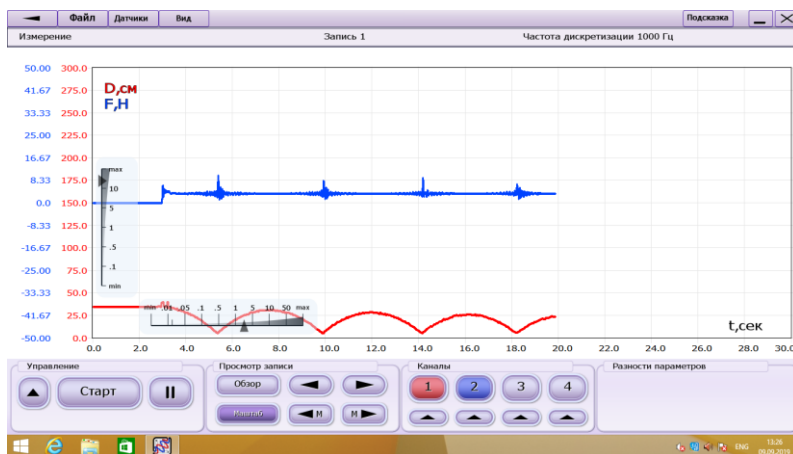


Рис. 10. Графики зависимости сил и координаты от времени.

Для получения информации о движении маятника Максвелла курсор мышки устанавливается на точке кривой и после нажатия на правую кнопку «мыши» на экране появляется вертикальная линия высвечиваются время и измеренное значение координаты или силы (или одновременно координаты и силы, если выбрано два датчика) (рис. 11). Одновременно на экране может быть не более двух измеренных значений. Для того, чтобы получить третье измерение следует убрать одно из предыдущих, нажав на крестик вблизи соответствующей вертикальной черты (см рис.11). При измерении в двух точках на экране появляется разность параметров

Кнопка «файл» позволяет записать полученные данные в файл, который можно использовать для последующей обработки результатов. Файл можно записать в трех форматах: record, excel, text. Форматы excel и text позволяют обрабатывать результаты, используя соответствующие программы (например, excel). Формат record позволяет открыть файл программой «цифровая лаборатория».

На экране монитора также есть кнопка «помощь». Нажав на нее, можно получить дополнительную информацию.



Рис. 11. Графики зависимости сил и координаты и определенные параметры.

Важно, чтобы при движении вниз и вверх ось маятника не перекашивалась, нити навивались от места крепления по направлению к диску. Если эти условия нарушаются, необходимо прекратить движение маятника, а затем повторить опыт.

По окончании измерений стержень маятника фиксируется в верхнем положении (в защелках), при этом нити не должны быть натянуты.

## Проведение эксперимента

### Подготовка установки к проведению эксперимента.

1. Зафиксируйте защелками маятник в верхнем положении. Убедившись, что нити подвеса не натянуты, установите «ноль» датчика силы.

2. Нажмите кнопку «пуск» и после начала движения маятника остановите его руками в нижнем положении. Показания датчика силы при этом соответствуют весу маятника (силы тяжести)  $mg$ . Запишите значение  $mg$  в тетрадь. Относительную погрешность датчика силы при выполнении расчетов принять равной 1%.

3. При прохождении маятника в нижнем положении установите «ноль» датчика расстояния.

*Установка подготовлена к проведению экспериментов.*

## Упражнение 1. Определение ускорений и скоростей маятника Максвелла при его спуске и подъеме.

### Измерения

1. Нажав кнопку «Проведение измерений», перейдите в основное окно программы. Нажмите кнопку «Старт» на экране монитора. Так как маятник находится в нижнем положении, то датчик расстояния должен показывать нулевое значение, а датчик силы – значение силы тяжести маятника. Если это не так, проведите повторную настройку системы.

2. Не прекращая измерений и аккуратно наматывая нить на ось маятника, поднимите маятник в верхнее положение и закрепите его в фиксирующих защелках. Теперь датчик расстояния должен показать максимально возможную координату маятника (запишите ее), а датчик силы – нулевое значение. Остановите измерения, нажав на «Стоп». *Установка готова к работе.*

3. Нажмите кнопку «Старт» на экране монитора и сразу же кнопку «Пуск» на пусковом устройстве маятника. Маятник начинает движение, а на экране появляются графики зависимостей координаты  $x(t)$  и силы  $F(t)$  от времени (см. рис. 10). После того, как маятник совершит 6-8 колебаний вверх-вниз, нажмите кнопку «Стоп».

4. Нажмите кнопку «Обзор». Внимательно рассмотрите получившиеся графики. На графике координаты от времени четко видны моменты удара в нижней точке, координата которой  $x(t_{\text{удар}})$  должна быть равна нулю (отличие от нуля позволит оценить погрешность датчика измерения координаты). В то же время на графике  $F(t)$  в момент удара видны колебания (в отличие от теоретического графика на рис. 2в), что вызывает погрешность измерения  $F(t)$ . Из графика  $x(t)$  можно довольно точно определить для каждой верхней точки координату маятника  $x_{\text{верх}}$ , но точность определения для этой точки момента времени  $t_{\text{верх}}$  будет довольно низкой вследствие пологого участка на графике. Так как сила натяжения нити при смене направления движения маятника в верхней точке не изменяется, то ускорения при движении вверх, а затем вниз одинаковы. Следовательно, можно предложить, что одинаковы и время движения маятника вверх и вниз. Поэтому в рамках этого предпо-

ложения для определения  $t_{\text{верх}}$  будем измерять время  $\Delta t$  от удара до удара и делить его на 2.

5. По графику зависимости координаты от времени необходимо измерить время от начала движения до 1-го удара, от 1-го удара до 2-го, от 2-го удара до 3-го, и т.д. Для этого, как описано выше, курсор мыши устанавливается на соответствующей точке графика и после нажатия на правую кнопку мыши появляется вертикальная черта, около которой показываются значения времени  $t$ , координаты  $x(t)$  и силы  $F(t)$ . Положение вертикальной черты можно изменять, удерживая нажатой наведенную на нее правую кнопку мыши. Аналогично устанавливается вертикальная черта и на второй точке. При этом в правом нижнем углу экрана высвечивается измеряемый интервал времени  $\Delta t$  и разность координат  $\Delta x$  (см. рис. 11). Так как выбор точек удара осуществляется самостоятельно, то процедуру измерения  $\Delta t$  между ударами следует повторить не менее  $n = 3$  раз для оценки случайной погрешности (курсоры удаляют и вновь устанавливают).

6. Установите курсор мыши на точку, соответствующую максимальной высоте подъема маятника, и определите по графикам высоту  $h$  и силу натяжения нитей  $F = 2T$  вблизи верхней точки. Для оценки случайной погрешности измерения следует повторить не менее  $n = 3$  раз.

Результаты измерений запишите в табл. 1\*.

Таблица 1

### Экспериментальные данные

Процесс	$n$	$\Delta t$ с	$\langle \Delta t \rangle \pm \sigma_{\Delta t}$ с	$h$ м	$\langle h \rangle \pm \sigma_h$ м	$2T$ Н	$\langle 2T \rangle \pm \sigma_{2T}$ Н
До 1-го удара	1						
	2						
	3						
От 1-го до	1						

\* По возможности следует провести измерения  $\Delta t$  и  $h$  и до 1-го удара, но надо иметь в виду, что при срабатывании пускового механизма может иметь место временное запаздывание. При расчете ускорения и скорости следует учесть, что на этом этапе измеряется только время опускания. Измерение силы  $2T$  не производится.

2-го удара	2						
	3						
От 2-го до 3-го удара	1						
	2						
	3						
От 3-го до 4-го удара	1						
	2						
	3						
...	1						
	2						
	3						

### *Обработка результатов*

1. Для каждого участка движения найти:

- Среднее арифметическое всех измеряемых величин  $\langle \Delta t \rangle$ ,  $\langle h \rangle$ ,  $\langle 2T \rangle$  по формуле

$$\langle Y \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, \quad (Y = \langle \Delta t \rangle, \langle h \rangle, \langle 2T \rangle).$$

- Оценку случайной погрешности измеряемых величин по формуле для серии прямых измерений:

$$\sigma_{\langle Y \rangle} = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \langle Y \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad (Y = \langle \Delta t \rangle, \langle h \rangle, \langle 2T \rangle).$$

- Суммарную погрешность измеряемых величин  $Y = \langle \Delta t \rangle$ ,  $\langle h \rangle$ ,  $\langle 2T \rangle$  (считать относительные систематические погрешности измерений времени, расстояния и силы равными 1 проценту):

$$\sigma_{Y\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\langle Y \rangle}^2 + \sigma_{Y_{\text{случ}}}^2}.$$

Результаты записать в табл. 1

2. Так как ускорения центра масс маятника при движении вверх и вниз одинаковы (в пренебрежении силой сопротивления воздуха), то одинаковыми будут и скорости поступательного дви-

жения маятника в нижней точке непосредственно после удара и за мгновение до следующего удара.

3. Рассчитайте ускорения  $a$  и скорости  $v$  в нижней точке для каждого участка (кроме участка до 1-го удара) по формулам:

$$a = \frac{2h}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} = \frac{8h}{(\Delta t)^2};$$

$$v = a \frac{\Delta t}{2} = \frac{4h}{\Delta t}.$$

4. Проведите оценку погрешностей  $a$  и  $v$  по формулам для косвенных измерений:

$$\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial h}\right)^2 \cdot \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial ((\Delta t)^2)}\right)^2 \cdot \sigma_{(\Delta t)^2}^2},$$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)^2 \cdot \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial (\Delta t)}\right)^2 \cdot \sigma_{(\Delta t)}^2}.$$

Результаты расчетов запишите в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов

Процесс	$a$ м/с <sup>2</sup>	$\sigma_a$ м/с <sup>2</sup>	$v$ м/с	$\sigma_v$ , м/с	$K$	$\sigma_K$
До 1-го удара					-	-
От 1-го до 2-го удара						
От 2-го до 3-го удара						
От 3-го до 4-го удара						
...						

5. Для каждого удара найти отношение потенциальных энергий до и после удара:

$$K = \frac{W_{\text{после}}}{W_{\text{до}}} = \frac{h_{\text{после}}}{h_{\text{до}}}.$$

6. Сравнить рассчитанные значения ускорений и скоростей для различных этапов движения и сделать выводы.

7. Сравнить силу натяжения нитей  $2T$  в верхних точках с силой тяжести  $mg$  и сделать выводы.

### Упражнение 2. Определение времени удара и максимального увеличения силы натяжения нитей.

В данном и последующих упражнениях измерения не проводятся, осуществляется только обработка полученных в [Упр.1](#) экспериментальных результатов.

1. Рассчитайте для 1-го и 2-го ударов время удара  $\tau$  и максимальное увеличение силы натяжения  $[\Delta(2T)]_{\max}$  по формулам (42) и (46):

$$\tau = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2};$$

$$[\Delta(2T)]_{\max} = \frac{m(v_1 + v_2)}{4r}.$$

2. Оцените погрешности по формулам погрешности косвенных измерений\*:

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial v_1}\right)^2 \cdot \sigma_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v_2}\right)^2 \cdot \sigma_{v_2}^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)^2 \cdot \sigma_r^2},$$

$$\sigma_{[\Delta(2T)]_{\max}} = \sqrt{\left(\frac{\partial [\Delta(2T)]_{\max}}{\partial v_1}\right)^2 \cdot \sigma_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial [\Delta(2T)]_{\max}}{\partial v_2}\right)^2 \cdot \sigma_{v_2}^2 +}$$

---

\* Будем считать, что число  $\pi$  определено без погрешностей и известно с любой необходимой точностью  $\pi = 3,14159$ .



$$+ \left( \frac{\partial [\Delta(2T)]_{\max}}{\partial m} \right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left( \frac{\partial [\Delta(2T)]_{\max}}{\partial r} \right)^2 \cdot \sigma_r^2.$$

3. Вычислите отношение максимальной силы натяжения нити к силе тяжести:

$$P_{\text{расч}} = \frac{(2T)_{\max}^{\text{расч}}}{mg} = \frac{[\Delta(2T)]_{\max}^{\text{расч}} + mg}{mg} = \frac{[\Delta(2T)]_{\max}^{\text{расч}}}{mg} + 1. \quad (47)$$

Результаты запишите в табл. 3

Таблица 3

**Расчетные значения  $\tau$ ,  $\Delta(2T)_{\max}$ ,  $P_{\text{расч}}$ , погрешности их вычисления и экспериментальное значение  $P_{\text{эксп}}$**

Процесс	$\tau$ с	$\sigma_\tau$ с	$\Delta(2T)_{\max}$ Н	$\sigma_{\Delta(2T)\nu}$ Н	$P_{\text{расч}}$	$P_{\text{эксп}}$
1-й удар						
2-й удар						

3. Из экспериментальной зависимости (графика с датчика силы) измерьте максимальную силу натяжения  $(2T)_{\max}^{\text{эксп}}$  при 1-м и 2-м ударах. Найдите отношение этих величин к силе тяжести  $P_{\text{эксп}}$  и сравните с результатами расчетов.

### Упражнение 3. Определение момента инерции маятника Максвелла.

1. С помощью формулы (33)

$$J_{\text{эксп}} = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right)$$

рассчитайте момент инерции маятника  $J_{\text{эксп}}$  на основании установленных значений ускорения  $a$  (табл. 2) после 1 удара.

2. Оцените погрешность полученного результата по формуле\*:

$$\sigma_J = \sqrt{\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial J}{\partial m} \right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left( \frac{\partial J}{\partial (r^2)} \right)^2 \cdot \sigma_{r^2}^2.}$$

\*Считая, что  $g$  определено без погрешности и равно  $9,82 \text{ м/с}^2$ .

3. Вычислите момент инерции маятника  $J_{\text{теор}}$ . При  $r \ll R$  момент инерции маятника является хорошим приближением к моменту инерции диска

$$J_{\text{теор}} \approx \frac{mR^2}{2}.$$

Сравните полученный результат с определенным из экспериментальных данных.

#### **Упражнение 4. Проверка закона сохранения механической энергии.**

1. По формуле (38), используя найденное значение скоростей (из табл.2) рассчитайте кинетическую энергию маятника после 1 – го и 2-го ударов.

2. Рассчитайте потенциальную энергию маятника  $mgh$  используя измеренные значения  $h$  после 1-го и 2-го ударов (см. табл.1).

3. Сравните полученные значения кинетической и потенциальной энергий и сделайте выводы.

### **Основные итоги работы**

*В результате выполнения работы определяются и сравниваются:*

- *ускорения центра масс маятника между ударами;*
- *скорости центра масс маятника до и после удара;*
- *сила натяжения нитей в верхних точках и сила тяжести;*
- *момент инерции тела маятника определенный экспериментально и рассчитанный ;*
- *кинетическая энергия сразу после удара и потенциальная энергия в верхней точке.*

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте определение плоского движения.
2. Что такое центр масс системы? Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Сформулируйте закон изменения импульса.
4. Сформулируйте закон изменения механической энергии.
5. Как изменяется кинетическая энергия системы в момент

удара?

6. Получите формулу для вычисления момента инерции маятника Максвелла.

### Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. Гл. 8.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. М.: Изд. центр «Академия», 2004. Лекции 12,13
3. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.