

МГУ лаба №114
Изучение тензора инерции твердого тела

Сергей Слепышев 109 группа

Ноябрь 2022

0.1 Вступление

Цель работы

Знакомство с понятием «тензор инерции». Определение компонент тензора инерции цилиндра и параллелепипеда из измерений периода колебаний и углового ускорения при вращении исследуемого тела.

Идея эксперимента

Приводя исследуемое тело в то или иное движение, измерить либо период колебаний, либо угловое ускорение при вращении. По соответствующим формулам оценить момент инерции. Реализуется возможность приведения тела во вращательное движение вокруг различных центральных осей.

0.2 Эксперимент и обработка

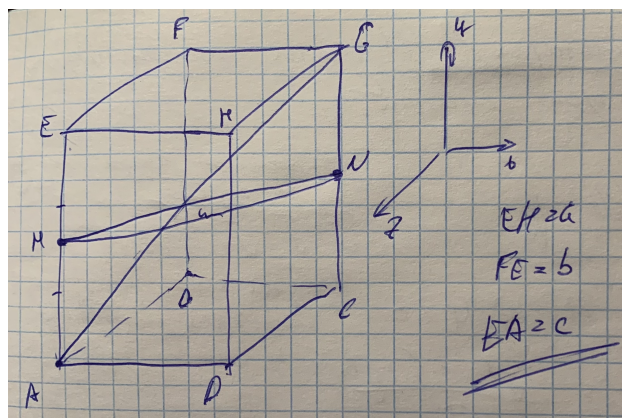
0.2.1 Упражнение 1. Изучение тензора инерции в режиме вращательного движения рамки.

В качестве тела был взят параллелепипед со сторонами a, b, c . Радиус шкива обозначен буквой r .

Радиус шкива r я решил измерить "методом рядов", наматывая веревку с закрепленным на ней грузом на величину Δh в несколько полных оборотов n (измерял Δh линейкой):

$$r = \frac{\Delta h}{2\pi n}$$

Размеры параллелепипеда a, b, c измерил штангенциркулем. Погрешности тут получились только систематические (хоть я и измерял предмет с разных мест, значения получились одинаковыми), их приписал в таблице. Также прилагаю другие характеристики установки:



груз		тело (диск)		Стержень		табличное
m	Sigma m	m	Sigma m	m	Sigma m	g
g	g	g	g	g	g	m/s^2
87,98	0,05	131,86	0,05	79,81	0,05	9,82

delta h	Sigma h	n	r	Sigma r	ai	bi	ci	mean a	Sigma a	mean b	Sigma b	mean c	Sigma c
sm	sm	1	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm
35,2	0,1	5	2,241	0,006	2,88	4,81	7,94	2,88	0,01	4,81	0,01	7,94	0,01
					2,88	4,81	7,94						
					2,88	4,81	7,94						

Далее мерю время t_0 прохождения грузом m расстояния $x_2 - x_1$ без закрепленного в рамке тела.

tx	ty	tz	t AG	t MN	mean tx	Sigma tx	mean ty	Sigma ty	mean tz	Sigma tz	mean tAG	Sigma tAG	mean t MN	Sigma t MN
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
3,064	1,909	2,643	2,277	2,91	3,04	0,07	1,91	0,04	2,69	0,06	2,24	0,05	2,87	0,06
2,98	1,921	2,758	2,206	2,883										
3,083	1,91	2,663	2,261	2,841										
			2,21	2,847										

В данной таблице я перечислил получившиеся значения x_4 :

x4	x4	x4	x4	x4	mean x4	Sigma x4	mean x4	Sigma x4	mean x4	Sigma x4	mean x4	Sigma x4	mean x4	Sigma x4
sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm	sm
x	y	z	AG	MN	x		y		z		AG		MN	
16,3	12,6	17,2	13,6	15,9	15,9	0,2	12,7	0,2	17,0	0,2	13,4	0,3	16,6	0,2
15,6	13	16,6	13	16,9										
15,9	12,5	17,3	13,1	16,9										
			13,9	16,6										

Погрешность измерения времени принял за:

$$\sigma_t = \sqrt{S_t^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}$$

где

$$\sigma_{\text{сист}} = 0.02 * t$$

Случайная погрешность вычислена по формуле:

$$S_a = \sqrt{\frac{(a_i - \bar{a})^2}{N * (N - 1)}}$$

Все координаты x_i измерены с помощью линейки. Если были проведены несколько измерений одной величины x_i , то полную погрешность считал по формуле:

$$\sigma_x = \sqrt{S_x^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}$$

Для упрощения математических выкладок взял $x_1 = x_0$ (по совету Митина).

Я ЗАБЫЛ ПОМЕРИТЬ x_4 для измерений t_0 (((Но расстраиваться не буду и напишу оценки погрешностей:

$$x = \frac{M_{\text{тр}}}{r} = mg \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}$$

$$\sigma_x = x * \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_4 - x_0}}{x_4 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{2x_3 - x_0 - x_4}}{2x_3 - x_0 - x_4}\right)^2}$$

где:

$$\sigma_{x_4 - x_0} = \sqrt{\sigma_{x_4}^2 + \sigma_{x_0}^2}$$

$$\sigma_{2x_3 - x_0 - x_4} = \sqrt{4\sigma_{x_3}^2 + \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{x_4}^2}$$

Потенциально можно найти эти величины. Далее приму $M_{\text{тр}}/r \approx 0$ (!!!) для хоть какого-то завершения эксперимента.

Погрешность измерений массы принял за 1%:

$$\sigma_m = 0.01 * m$$

Формула расчета J была:

$$J = r^2 \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{2(\sqrt{x_0 - x_2} - \sqrt{x_0 - x_1})^2} (t^2 - t_0^2)$$

Но я приколист, поэтому приму:

$$t_0^2 \ll t^2, \quad x_0 = x_1, \quad M_{\text{тр}}/r \approx 0$$

И формула J упростится до:

$$J = \frac{mgr^2}{2(x_0 - x_2)} t^2$$

Отсюда оценка погрешности J (решил добавить "на глаз" 5% от величины как погрешность от пренебрежения величинами):

$$\sigma_J = J * \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{(x_0 - x_2)}}{x_0 - x_2}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + (0.05)^2}$$

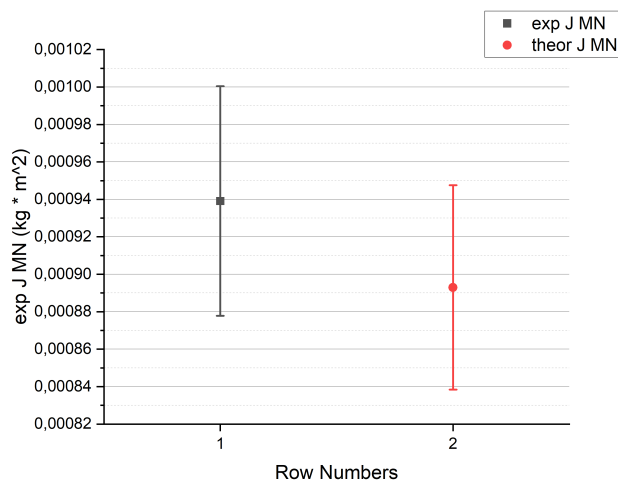
Теоретическое значение J_{MN}^{theor} рассчитал по формуле:

$$J_{MN}^{theor} = J_x \cos^2 \alpha + J_z * \cos^2 \gamma$$

$$\sigma_{\cos^2 \alpha} = \sigma_{\cos^2 \gamma} = \frac{2ac}{(a^2 + c^2)^2} \sqrt{(c\sigma_a)^2 + (a\sigma_c)^2}$$

$$\sigma_{J_{MN}^{theor}} = \sqrt{(\cos^2 \alpha * \sigma_{J_x})^2 + (\cos^2 \gamma * \sigma_{J_z})^2 + (J_x * \sigma_{\cos^2 \alpha})^2 + (J_z * \sigma_{\cos^2 \gamma})^2}$$

Jx	Sigma Jx	Jy	Sigma Jy	Jz	Sigma Jz	J AG	Sigma J AG	J MN	Sigma J MN	th J MN	Sigma th J MN
kg * m^2 * E-4											
10,0	0,7	6,3	0,4	8,8	0,6	7,3	0,5	9,4	0,6	8,9	0,5



Вычислил теоретическое значение $[t_{AG}^2]^{theor}$ по формуле:

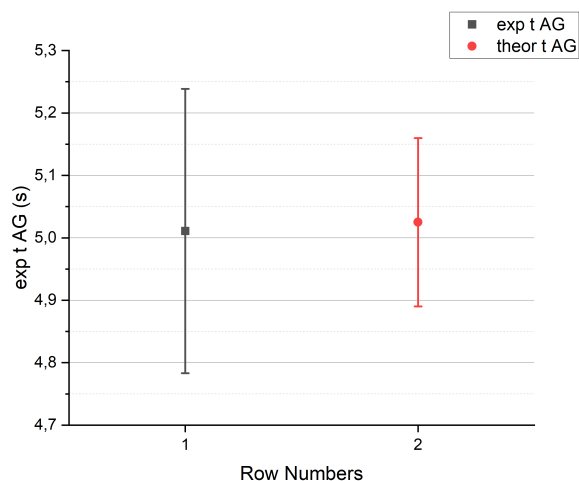
$$[t_{AG}^2]^{theor} = \frac{a^2 t_x^2 + b^2 t_y^2 + c^2 t_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Если взять $\delta a, \delta b, \delta c \ll \delta t_x, \delta t_y, \delta t_z$, то выражение для расчета погрешности упростится:

$$\sigma_{[t_{AG}^2]^{theor}} = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{(a^2 t_x \sigma_{t_x})^2 + (b^2 t_y \sigma_{t_y})^2 + (c^2 t_z \sigma_{t_z})^2}$$

Правда я попутал b и c при написании решения, здесь я написал в соответствии с методичкой (после просто поменял буквы местами при расчетах).

name	Value, s	Sigma, s
t AG ^2 exp	5,01	0,23
t AG ^2 th	5,02	0,13



$$\sigma_t = \sqrt{S_t^2 + \sigma_t^{\text{сист}^2}}$$

$$J = \frac{g(ml - m_0 l_0 / 2)(T^2 - T_0^2)}{4\pi^2}$$

$$\sigma_{(ml - m_0 l_0)} = \sqrt{(l\sigma_m)^2 + (m\sigma_l)^2 + (l_0\sigma_{m_0})^2 + (m_0\sigma_{l_0})^2}$$

$$\sigma_{(T^2 - T_0^2)} = 2\sqrt{(T\sigma_T)^2 + (T_0\sigma_{T_0})^2}$$

$$\sigma_J = J \sqrt{\left(\frac{\sigma_{(ml - m_0 l_0)}}{ml - m_0 l_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{(T^2 - T_0^2)}}{T^2 - T_0^2}\right)^2}$$

Ri	di	mean R	Sigma R	mean d	Sigma d
sm	sm	sm	sm	sm	sm
4	3,98	3,997	0,011	3,993	0,012
3,99	4				
4	4				
SE of R	SE of d				
0,003	0,007				

m	m0	l_0	l_1
g	g	sm	sm
131,86	79,81	19,4	13,7
Sigma m	Sigma m0	Sigma l_0	Sigma l_1
1,3186	0,7981	0,1	0,2

tn0	tny	tnz	tnMN	T_0	T_y	T_z	T_MN
s	s	s	s	s	s	s	s
3,721	4,294	4,542	4,386	0,74	0,86	0,91	0,87
3,679	4,296	4,538	4,358	Sigma	Sigma	Sigma	Sigma
3,704	4,293	4,531	4,355	0,02	0,02	0,02	0,02
	mean	SE	Sigma				
tn0	3,70	0,01	0,08				
tny	4,29	0,00	0,09				
tnz	4,54	0,00	0,09				
tnMN	4,37	0,01	0,09				
n	5						
			Jy	Jz	J_MN		
			0,00049	0,00071	0,00055	Kg * m^2	
			0,00010	0,00010	0,00010		
T^2 - T_0^2	0,19	0,04	y				
T^2 - T_0^2	0,28	0,04	z				
T^2 - T_0^2	0,21	0,04	MN				
					m	m0	
l	0,137	0,002			0,13	0,08	
l_0	0,194	0,001					
g	9,82				Sigma m	Sigma m0	
					0,0013	0,0008	
ml - m0l0/2	0,0103	0,0003					
Ty^2 - T0^2	0,19	0,04					
Tz^2 - T0^2	0,28	0,04					
TMN^2 - T0^2	0,21	0,04					

tnx	tny	tnz	tnAG	Tx	Ty	Tz	TAG	T AG theor
s	s	s	s	s	s	s	s	s
				mean	mean	mean	mean	
4,159	3,878	4,135	3,98	0,8302	0,7745	0,8244	0,7956	0,6272
4,14	3,862	4,122	3,977	SE of mean	SE of mean	SE of mean	SE of mean	SE of mean
4,154	3,877	4,109	3,977	0,0011	0,0010	0,0015	0,0002	0,0012
mean	mean	mean	mean					
4,151	3,872	4,122	3,978					
SE of mean	SE of mean	SE of mean	SE of mean		n = 5			
0,0057	0,0052	0,0075	0,0010					