Лабораторная работа № 5

1. Найдите частные производные и градиент функции $u = f(x, y, z)$. Вычислите в заданной точке градиент функции и производную по направлению из этой точки в начало координат. Найдите $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

N	$f(x,y,z)$	$(x_0,\ y_0,\ z_0)$
1	$xyz\exp(x+2y+3z)$	$(1,\ 0,\ 1)$
2	$\sin(xyz)\cos(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
3	$(x^2-y^2+z)\sin(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
4	$xy\exp(x+2z)$	$(1,\ 1,\ 0)$
5	$\sqrt{x^2+2xy+3xz}$	$(1,\ 1,\ 1)$
6	$xy^2\exp(x^2+2y+3z)$	$(1,\ 1,\ 1)$
7	$\sqrt{(xyz)^3}\sin\frac{xy}{z}$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
8	$\exp\frac{xy}{z}$	$(1,\ 1,\ 1)$
9	$\cos(xyz)\cos(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
10	$\sqrt{x^2+2xyz+3z^3}$	$(1,\ 1,\ 1)$
11	$xyz^2\exp(x+2y^2+3z)$	$(1,\ 0,\ 0)$
12	$(x^2-y^2+z)\cos(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
13	$(x^2+y^3+z^4)\exp(2x+3y^2+4z^3)$	$(1,\ 0,\ 0)$
14	$3^{xy+xz+yz}$	$(1,\ 0,\ 0)$
15	$\frac{3xyz+1}{3x+2y-z}$	$(1,\ 2,\ 3)$
16	$yz\exp(x+2z)$	$(1,\ 1,\ 1)$
17	$x\cos y+y\cos z+xyz\cos(xyz)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
18	$\ln(x^2+y^3+xyz)$	$(1,\ 3,\ 2)$
19	$(3x+2y+z)\sin(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
20	$x^2yz\exp(x+2y+3z^2)$	$(1,\ 0,\ -1)$

2. Запишите для заданной функции разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Изобразите график функции и графики нескольких частичных сумм ряда Тейлора.

N	$f(x)$	x_0	N	$f(x)$	x_0
1	$\frac{2}{x}$	1	**11**	$\ln(2x^2)$	1
2	$\ln x$	1	**12**	e^{-x}	2
3	$\sqrt[3]{x}$	1	**13**	$x^2 \operatorname{ch} x$	1
4	$\sin \frac{\pi}{4} x$	2	**14**	$\left(x - \frac{\pi}{x}\right) \sin x$	$\frac{\pi}{4}$
5	$\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$	5	**15**	$(x-2)^2 \operatorname{ch} x$	2
6	x^5	1	**16**	$\ln \sqrt[3]{x^2}$	1
7	$\frac{x}{3+x}$	2	**17**	$\frac{x}{3-x}$	2
8	e^{-x^2}	1	**18**	$x^3 + 1$	1
9	$\sqrt[3]{2x}$	1	**19**	$\cos \frac{\pi}{4} x$	2
10	$\frac{3}{x}$	2	**20**	$\operatorname{sh} x$	1

3. Найти производную указанного порядка.

1. $y = \left(2x^2 - 7\right)\ln\left(x-1\right), \quad y^{V} = ?$	2. $y = \left(3 - x^2\right)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$
3. $y = x\cos x^2, \quad y^{III} = ?$	$y = \frac{\ln\left(x-1\right)}{\sqrt{x-1}}, \quad y^{III} = ?$
5. $y = \frac{\log_2 x}{x^3}, \quad y^{III} = ?$	6. $y = \left(4x^3 + 5\right)e^{2x+1}, \quad y^{V} = ?$
7. $y = x^2 \sin\left(5x - 3\right), \quad y^{III} = ?$	8. $y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$
9. $y = \left(2x + 3\right)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$	10. $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x, \quad y^{III} = ?$
11. $y = \frac{\ln x}{x^3}, \quad y^{IV} = ?$	12. $y = \left(4x + 3\right) \cdot 2^{-x}, \quad y^{V} = ?$
13. $y = e^{1-2x} \cdot \sin\left(2 + 3x\right), \quad y^{IV} = ?$	14. $y = \frac{\ln\left(3 + x\right)}{3 + x}, \quad y^{III} = ?$
15. $y = \left(2x^3 + 1\right)\cos x, \quad y^{V} = ?$	16. $y = \left(x^2 + 3\right)\ln\left(x - 3\right), \quad y^{IV} = ?$

17. $y=\left(1-x-x^2\right)e^{(x-1)/2}, \quad y^{IV}=?$	$y=\dfrac{1}{x}\sin 2x, \quad y^{III}=?$
19. $y=(x+7)\ln(x+4), \quad y^{V}=?$	20. $y=(3x-7)\cdot 3^{-x}, \quad y^{IV}=?$

4. Показать, что функция y удовлетворяет уравнению (1).

1. $y=x\,e^{-x^2/2}$, $xy'=\left(1-x^2\right)y. \quad (1)$	2. $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x. \quad (1)$
3. $y=5e^{-2x}+e^{x}/3$, $y'+2y=e^{x}. \quad (1)$	4. $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $\left(1-x^2\right)y'+xy=2x. \quad (1)$
5. $y=x\sqrt{1-x^2}$, $yy'=x-2x^3. \quad (1)$	6. $y=\dfrac{c}{\cos x}$, $y'-\operatorname{tg}x\cdot y=0. \quad (1)$
7. $y=-\dfrac{1}{3x+c}$, $y'=3y^2. \quad (1)$	8. $y=\ln\left(c+e^{x}\right)$, $y'=e^{x-y}. \quad (1)$
9. $y=\sqrt{x^2-cx}$, $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0. \quad (1)$	10. $y=x(c-\ln x)$, $(x-y)dx+xdy=0. \quad (1)$
11. $y=e^{\operatorname{tg}(x/2)}$, $y'\sin x=y\ln y. \quad (1)$	12. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$, $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}. \quad (1)$
13. $y=\dfrac{b+x}{1+bx}$, $y-xy'=b\left(1+x^2y'\right). \quad (1)$	14. $y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2}$, $yy'=\dfrac{1-2x}{y}. \quad (1)$

15. $y=\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2+1}$, $\left(1+e^x\right)yy'=e^x$. (1)	16. $y=\operatorname{tg}\ln 3x$, $\left(1+y^2\right)dx=xdy$. (1)
17. $y=-\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}$, $1+y^2+xyy'=0$. (1)	18. $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1}$, $\ln x+y^3-3xy^2y'=0$. (1)
19. $y=a+\frac{7x}{ax+1}$, $y-xy'=a\left(1+x^2y'\right)$. (1)	$y=a\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}$, $a^2+y^2+2x\sqrt{ax-x^2}y'=0$. (1) 20

5. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(4n^2+9n+5\right)x^{n+1}$	2. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+7n+4\right)x^{n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+n+1\right)x^{n+3}$	4. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+4n+3\right)x^{n+2}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+5n+3\right)x^{n}$	6. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+5n+3\right)x^{n+1}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+8n+5\right)x^{n+2}$	8. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+8n+5\right)x^{n}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+7n+5\right)x^{n+1}$	10. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+7n+5\right)x^{n}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty}n\left(2n-1\right)x^{n+2}$	12. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2-n+1\right)x^{n}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-n-1\right)x^{n}$	14. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+5n+4\right)x^{n+1}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+7n+4\right)x^n$	16. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-n-2\right)x^{n+1}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+2n+1\right)x^n$	18. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n-1\right)x^{n+1}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n+2\right)x^{n+2}$	20. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+4n+3\right)x^{n+1}$

6. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y=\left(x-2\right)^3$, $y=4x-8.$	2. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$, $\left(0\le x\le 3\right).$
3. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x.$	4. $y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$, $\left(0\le x\le \pi/2\right).$
5. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1.$	6. $y=x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $\left(0\le x\le 2\right).$
7. $y=\cos x\sin^2 x$, $y=0$, $\left(0\le x\le \pi/2\right).$	8. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 2.$
9. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^3.$	10. $y=\arccos x$, $y=0$, $x=0.$
11. $y=\left(x+1\right)^2$, $y^2=x+1.$	12. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3.$
13. $y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0$, $\left(0\le x\le 6\right).$	14. $x=\arccos y$, $x=0$, $y=0.$

15. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 0,$ $x = \sqrt{3}.$	16. $y = x^2\sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0,$ $\left(0 \le x \le 2\sqrt{2}\right).$
17. $x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0,$ $y = \ln 2.$	18. $y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$ $\left(0 \le x \le 2\right).$
19. $y = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0,$ $x = 1.$	20. $y = \dfrac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0,$ $x = \pi/2, \quad x = -\pi/2.$