Лабораторная работа №6
Матрицы и определители матриц

<u>Задание 1.</u> Выполнить действия над матрицами (см. табл. 1).

<u>Задание 2.</u> Вычислить определитель $\Delta^{(4)}$ (см. табл. 2) четвёртого порядка:

1) путем понижения порядка (предварительно получив максимальное количество нулей в строке или столбце);

2) путем приведения определителя к треугольному виду.

3) при помощи специальной функции в Maple.

<u>Задание 3.</u> Вычислить определитель $\Delta^{(4)}$ четвёртого порядка (см. табл. 3) ($\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ – параметры) путем понижения порядка, предварительно получив максимальное количество нулей в строке (столбце). Значения коэффициентов a,b,c,d соответствующего варианта студента берутся из табл. 4.

Таблица 1

Вар	Задание
1	Даны матрицы A,B,C: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $D=A\cdot B^T\cdot C^{-1}$;
2	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=A^{-1}\cdot B^T\cdot\left(C+E\right)$, где E – соответствующего размера единичная матрица;
3	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A^{-1}\cdot B^T\cdot B^{-1}$. Показать, что $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
4	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ -4 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^{-1}\cdot\left(B^T-E\right)\cdot A$. Выяснить, справедливо ли равенство $\left(AB\right)^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$;
5	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти общий вид матрицы $D=\left(A^{-1}\cdot B^T\cdot C\right)^{-1}$. Указать, при каком условии, наложенном на числа a,b, можно найти матрицу $D=\left(A^{-1}\cdot B^T\cdot C\right)^{-1}$;

6	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\\1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}$. Найти, если возможно, матрицу $C=\left(A\cdot A^T\right)^{-1}+B\cdot B^T$. Выяснить, выполняется ли матричное равенство $\left(A\cdot A^T\right)^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}A^{-1}$;
7	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\\0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) A^{-1} (сделать проверку); 2) $D=A^T\cdot B\cdot\left(2C+E\right)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B\cdot B^T\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку.
8	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -2\\3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) A^{-1} (сделать проверку); 2) $D=A^T\cdot B\cdot\left(E-2C\right)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку;
9	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $\left(A+E\right)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=\left(A+E\right)^{-1}\cdot B\cdot\left(E-C\right)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку;
10	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $\left(A+E\right)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=\left(A+E\right)^{-1}\cdot B\cdot\left(E-C\right)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку;
11	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 2\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\1 & -2 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^{-1}\cdot\left(B^T+E\right)\cdot A$. Выяснить, справедливо ли матричное равенство $\left(AB\right)^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$;

12	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $D=(A+E)\cdot B\cdot(C-E)^{-1}$;
13	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $(A+E)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=(A+E)^{-1}\cdot B\cdot(E-C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку;
14	Даны матрицы A,B,C: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $D=A^{-1}\cdot\left(-B^T\right)\cdot C^{-1}$;
15	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $(A+E)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=(A-E)^{-1}\cdot B\cdot(E-C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку;
16	Найти значение многочлена $f(x)=x^2-2x$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$
17	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=A^{-1}\cdot B^T\cdot(C-E)^{-1}$, E – соответствующего размера единичная матрица;
18	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=\left(2A^{-1}-B\right)\cdot C$. Проверить, выполняется ли для данных матриц A,B матричное равенство $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$;
19	Найти значение многочлена $f(x)=x^2-3x+1$ от матрицы A (вычислить $f(A)=A^2-3A+E$): 1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

20	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=\left(A+E\right)^{-1}\cdot B\cdot\left(E+C\right)$. Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку;

Таблица 2

Вар	Определитель	Вар	Определитель	Вар	Определитель
1	$\begin{vmatrix}8 & 7 & 2 & 0\\ -8 & 2 & 4 & 3\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 7 & 2 & -2\end{vmatrix}$	**2**	$\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -2 & -2\\ 3 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$	**3**	$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 5 & 2\\ -2 & -5 & 0 & 4\\ 3 & -2 & -4 & 0\end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix}3 & 4 & 3 & 6\\ 9 & 8 & 5 & 9\\ 3 & 7 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$	**5**	$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 5 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5 & -2\\ -1 & -3 & -2 & 1\end{vmatrix}$	**6**	$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -3 & 9 & -27\\ 1 & 4 & 16 & 64\\ 1 & -2 & 4 & -8\end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{vmatrix}$	**8**	$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 4 & 1\end{vmatrix}$	**9**	$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 6 & -3 & -4 & 2\\ 4 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix}-3 & 0 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 2 & -3\end{vmatrix}$	**11**	$\begin{vmatrix}-1 & -2 & -3 & -4\\ 4 & 5 & 6 & -2\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$	**12**	$\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 3\\ 5 & -5 & -3 & 7\end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -2 & -2\\ 3 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$	**14**	$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 2 & 5 & 6 & -4\\ 4 & 5 & -2 & 3\\ 3 & 8 & 24 & -19\end{vmatrix}$	**15**	$\begin{vmatrix}2 & 7 & 4 & 5\\ 4 & 4 & 8 & 5\\ 1 & -9 & -3 & -5\\ 3 & 5 & 7 & 5\end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix}5 & 3 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3 & 7\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$	**17**	$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ 3 & 5 & -2 & 3\\ 2 & 8 & -3 & 9\end{vmatrix}$	**18**	$\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & -1 & -5 & 9\\ 7 & 3 & 5 & 1\\ 7 & 5 & 3 & 1\end{vmatrix}$

19	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 4 & 8 \\ 4 & -9 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	**20**	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	**21**	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

Таблица 3

Вар	Определитель $\Delta^{(4)}$	**Вар**	Определитель $\Delta^{(4)}$
1–7	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 2 & a & b & c \\ b & 2c & a+b & -a \\ -d & -a & c+b & 0 \end{vmatrix}$	**8–14**	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d & a+d \\ 1 & -a & -b & -c \\ -b & 2 & b-c & a-d \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$
15–22	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a-b & 1 & 2c & \alpha_1 \\ b-c & -a & 3b & \alpha_2 \\ c-d & -b & 2a & \alpha_3 \\ d-a & -c & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix}$		

Таблица 4

Вар	a	b	c	d	**Вар**	a	b	c	d
1	2	2	3	4	**11**	2	3	1	3
2	2	4	3	1	**12**	1	3	3	4
3	3	2	1	4	**13**	3	4	3	2
4	4	1	2	3	**14**	2	2	3	4
5	2	4	1	3	**15**	3	3	2	3
6	2	1	3	2	**16**	3	4	4	2
7	1	3	4	2	**17**	3	2	4	1
8	2	3	1	2	**18**	2	3	4	3
9	2	3	1	4	**19**	4	4	2	1
10	3	2	1	4	**20**	2	2	4	3

Задание 4. Вычислить обратную матрицу для матрицы A при помощи нахождения алгебраических дополнений, т.е. опираясь на формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Таблица 5

Вар	Матрица A	Вар	Матрица A
1	$A=\begin{pmatrix}1&4&1&3\\0&-1&3&-1\\3&1&0&2\\1&-2&5&1\end{pmatrix}$	**2**	$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&4&2&3\\1&10&3&6\\6&10&1&4\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-2\\2&-1&-2&-3\\3&2&-1&2\\2&-3&2&1\end{pmatrix}$	**4**	$A=\begin{pmatrix}-2&2&1&0\\1&-3&3&7\\2&-1&2&-3\\-5&4&-1&2\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&2&2&0\\0&-1&1&4\\1&1&-1&-1{,}5\end{pmatrix}$	**6**	$A=\begin{pmatrix}3&-2&2&0\\2&1&1&-2\\3&-1&2&1\\1&2&-1&-1\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}5&-4&0&2\\-1&1&1&-1\\2&3&-1&6\\1&2&0&-1\end{pmatrix}$	**8**	$A=\begin{pmatrix}4&-1&0&1\\3&2&-1&2\\0&2&2&1\\-1&1&-3&-1\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\-1&-3&3&-1\\0&4&-10&2\\1&-1&2&-1\end{pmatrix}$	**10**	$A=\begin{pmatrix}1&4&-3&0\\0&4&1&2\\-1&2&4&1\\1&0&-1&5\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&2\\1&2&-1&1\\3&0&-1&-3\\1&-1&1&3\end{pmatrix}$	**12**	$A=\begin{pmatrix}2&1&2&0\\-1&-3&3&-1\\1&3&-8&1\\1&-1&2&-1\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-1&1&3&0\\0&2&-1&1\\3&-1&1&-2\end{pmatrix}$	**14**	$A=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&2&0\\0&2&2&0\\-1&3&3&3\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}1&0&3&24\\0&1&5&6\\-3&4&10&6\\0&-6&0&-6\end{pmatrix}$	**16**	$A=\begin{pmatrix}3&1&3&3\\2&2&1&3\\1&0&2&0\\1&1&1&3\end{pmatrix}$

17	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$	**18**	$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$	**20**	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$