§5 общие линейные уравнения гиперболического типа и аналогично

$$\int\limits_M^P (Hd\eta - Kd\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int\limits_P^M 2(\frac{dv}{ds} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}v)uds$$

Отсюда из формулы (6) следует:

$$(uv)M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int\limits_P^M (\frac{dv}{ds} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v)uds + \int\limits_Q^M (\frac{dv}{ds} - \frac{b+a}{2\sqrt{2}}v)uds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_P^Q (Hd\eta - Kd\xi) - \frac{1}{2}\int\limits_{MP}\int\limits_{Q} (v\varphi[u] - uM[v]d\xi d\eta. \qquad (8)$$

Эта формула является тождествомб верным для любых достаточно гладких функций u и ν. Пусть u-решение поставленной выше задачи с нальными условиями, а функция v зависит от точки M как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$M[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)\xi - (bu)\eta + cu = 0 \quad \text{внутри} \quad MPQ \quad (9)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \quad \text{на характеристике} \quad MP, \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}}v \quad \text{на характеристике} \quad MQ, \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$v = e^{\int_{S_o}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{на} \quad MP,$$

$$v = e^{\int_{S_n}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{на} \quad MQ,$$

где s_o - значение s в точке M. Как мы видели в § 4, уравнение (9) и значения функции v на характеристиках MP и MQ полностью определяют ее в области MPQ. Функцию v часто называют *Функцией Римана.*

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Таким образом, формула (8) для функции v, удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующей окончательный вид:

$$v(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_P^Q [v(u_\xi d\eta + u_\eta d_\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d_\xi) +$$

$$+uv(ad\eta - db_\xi)] + \frac{1}{2}\int\limits_{MP}\int\limits_{Q} v(M, M')f(M')do'_M(do'_M = d\xi d\eta). \quad (10)$$

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль PQ, содержит функции, известные на дуге C. В самом деле, функция v была определена выше, а функции

$$u|_c = \phi(x),$$

$$u_x|_c = u_s\cos{(x,s)} + u_n\cos{(x,n)} = \frac{\phi'(x) - \psi(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}},$$

$$u_y|_c = u_s\cos{(y,s)} + u_n\cos{(y,n)} = \frac{\phi'(x)f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

вычисляются при помощи начальных данных.

Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге PQ, то они полностью определяют функцию в характерическом PMQ, если функция $f(x.y)$ известна в этой области [1]).

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает един ственность решения (ср. с формулой Даламбера, гл. 11, § 2, стр. 51).

Можно показать, что функция u, определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7) -(7'). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

3. Физическая интерпретация функция Римана. Выясним физический смысл функции ν (M, M'). Для этого найдем решение неоднородного уравнения

$$\varphi[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

с нулевыми начальными условиями на кривой C. Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

$$u(M) = \int\limits_{MP}\int\limits_{Q} v(M, M')f_1(M')d\sigma_{M''} \qquad (11)$$

---

[1]) *Если характеристика пересекает кривую C в двух точках P и M_1 (см. рис. 26), то значение $u(M_1)$ не может задаваться произвольно, а определяется по формуле (10) с начальъными дынными на дуге PQ_1 и значениями $f(x,y)$ в ΔPM_1Q_1.*