

Funciones de varias variables

Dados dos conjuntos A y B , recordemos que una función $f: A \rightarrow B$ es una regla que a cada elemento de A le asigna exactamente un único elemento de B .

Definición: Una función f de n variables es una regla que asigna a cada n -tupla $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un único número real $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

- el dominio de f es el subconjunto $\text{Dom}(f)$ de \mathbb{R}^n dado por

$$\text{Dom}(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) \text{ está bien definida}\}$$

- el rango o imagen de f es el subconjunto $\text{Im}(f)$ de \mathbb{R} dado por

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists \bar{x} \in \text{Dom}(f) \text{ con } y = f(\bar{x})\}$$

- el gráfico de f es el subconjunto $G(f)$ de \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$= \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in \text{Dom}(f)\}$$

Notar que sólo podemos dibujar el gráfico de f cuando

• $n=1$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una curva en el plano)

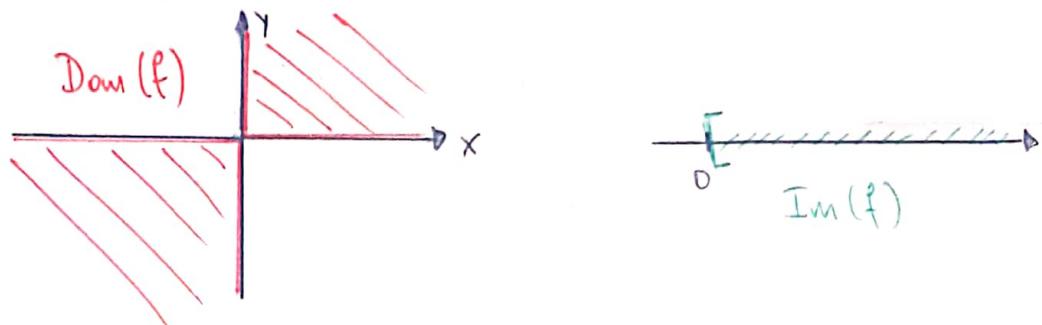
• $n=2$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una superficie en el espacio)

Observación: si $n=2$ escribiremos $f(x,y)$ en lugar de $f(x_1, x_2)$ y
si $n=3$ escribiremos $f(x,y,z)$ en lugar de $f(x_1, x_2, x_3)$.

Ejemplo)

① Sea $f(x,y) = \sqrt{xy}$ (función de $n=2$ variables)

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \leq 0\}$



- $\text{Im}(f) = [0, \infty)$. En efecto, si elegimos $y=1$ tenemos que

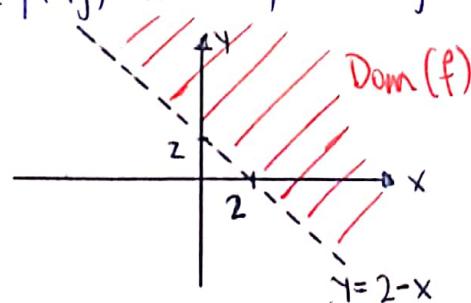
$f(x,1) = \sqrt{x}$ y ya sabemos que $h(t) = \sqrt{t}$ es sobreyectiva de $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ $\therefore f(x,1)$ también.

Otra forma: dado $z \geq 0$ basta tomar $x=y=z$ y luego

$$f(x,y) = \sqrt{xy} = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{z^2} = z \quad \therefore z \in \text{Im}(f)$$

② Sea $f(x,y) = \ln(x+y-2)$

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y-2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2-x\}$



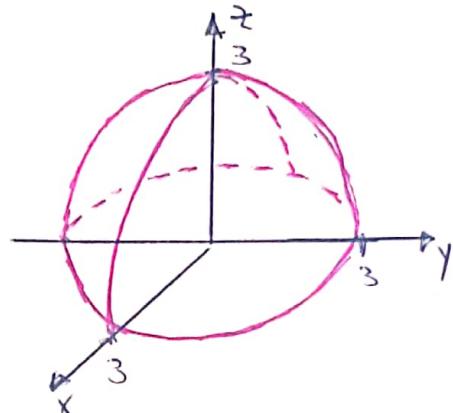
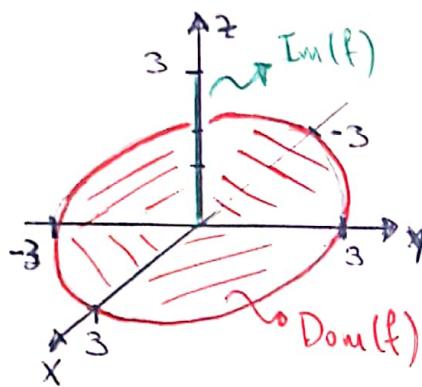
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. En efecto, si elegimos $x=0$ tenemos que

$f(0,y) = \ln(y-2)$ y ya sabemos que $h(t) = \ln(t-2)$ de $(2, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ es sobre.

Otra forma: dado $z \in \mathbb{R}$ basta tomar $(x,y) = (0, e^z + 2) \in \text{Dom}(f)$ ya que $f(0, e^z + 2) = \ln(e^z) = z$.

③ Sea $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ (notación usual $z = f(x,y)$)

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3^2\}$ → Ecuación de un círculo centrado en $(0,0)$ y de radio 3.



- $\text{Im}(f) = [0, 3]$

En efecto, si $y=0$, $f(x,y) = \sqrt{9-x^2}$ sabemos que es sobre de $[-3,3] \rightarrow [0,3]$

Otro forma: dado $0 \leq z \leq 3$, basta tomar $(x,y) = ((9-z^2)^{1/2}, 0)$ ya que

$$f((9-z^2)^{1/2}, 0) = \sqrt{9 - (9-z^2)} = \sqrt{z^2} = z \quad \checkmark$$

- $\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3^2 \wedge z = \sqrt{9-x^2-y^2}\}$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3^2 \wedge \underbrace{z^2+x^2+y^2}_{z^2+x^2+y^2 = 9} \wedge z \geq 0\}$$

Esfera de centro $(0,0,0)$ y radio = 3
z no negativo

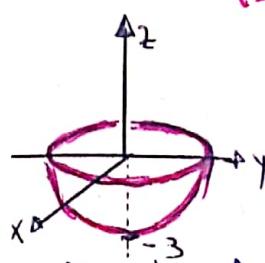
hemisferio superior
(solo la "cara" → superficie)

④ Sea $f(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$

- $\text{Dom}(f) =$ igual al anterior

- $\text{Im}(f) = [-3, 0]$

- $\text{Graf}(f) =$ hemisferios inferiores (lámina) de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 3.



Límite y continuidad de funciones de varias variables

Definición: dado $r > 0$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, llamamos bola (abierta) de centro \bar{a} y radio r al conjunto $B(\bar{a}, r) \doteq \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{a}\| < r\}$.

Observación: si escribimos $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, entonces

$$B(\bar{a}, r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2} < r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2 < r^2\}$$

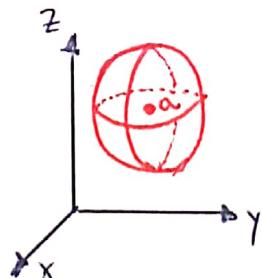
- Si $n=1$, $B(\bar{a}, r)$ es un intervalo abierto centrado en \bar{a} y de "radio" r

$$\cancel{a-r \quad a \quad a+r}$$

- Si $n=2$, $B(\bar{a}, r)$ es un disco abierto con centro \bar{a} y de radio r



- Si $n=3$, $B(\bar{a}, r)$ es una bola centrada en \bar{a} y de radio r (interior de la "lámpara")



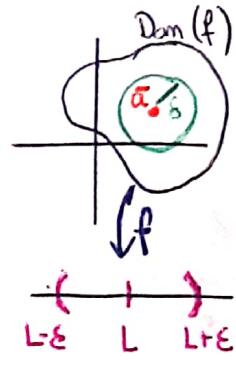
Definición (Límite): sea $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ y $f: \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un dominio $\text{Dom}(f)$ que incluye pts. arbitrariamente cercanos a \bar{a} . Decimos que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = L \quad (\text{o} \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L)$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\bar{x} \in \text{Dom}(f) \cap B(\bar{a}, \delta) \Rightarrow |f(\bar{x}) - L| < \varepsilon$

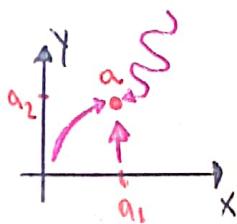
(si $\bar{x} \in \text{Dom}(f)$ queda $\|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - L| < \varepsilon$)

Esto significa que si nos acercamos "por cualquier lado" al punto \bar{a} , f se acerca a L .



Observación: la definición establece que la distancia (en \mathbb{R}) entre $f(\bar{x})$ y L (89) se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo que la distancia (en \mathbb{R}^n) entre \bar{x} y \bar{a} sea suficientemente pequeño. Sin embargo NO hay referencia a la dirección o modo de aproximación. Luego, si existe el límite entonces $f(x,y)$ tiene que aproximarse a L sin importar como \bar{x} se approxima a \bar{a} .

Por lo tanto, si encontramos dos maneras distintas de aproximar \bar{a} en las cuales la función $f(\bar{x})$ tiene diferentes límites, entonces esto nos dice que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x})$ NO existe.



Ejemplos:

① Sea $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Demuéstre que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x})$ NO existe ($\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$)

Tenemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

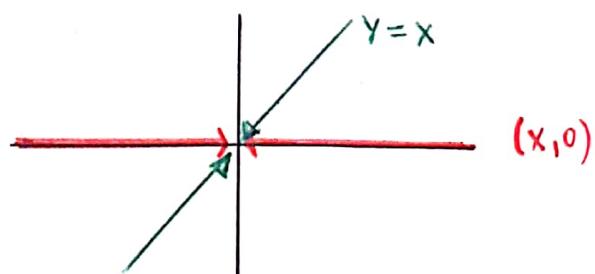
• Si nos acercamos al $(0,0)$ por puntos del eje x , y sea si: $(x,y) = (x,0) \rightarrow (0,0)$

Como $f(x,0) = 0$ tenemos que $\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$. ①

• Si nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y=x$, y sea si $(x,y) = (x,x) \rightarrow (0,0)$

Como $f(x,x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$. ②

De ① y ② concluimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ NO existe.



② Sea $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$. Probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe.

Notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ ("plano - eje x")

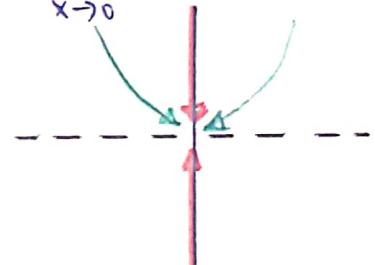
• Si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje y , o sea $(x,y) = (0,y) \rightarrow (0,0)$, como

$$f(0,y) = \frac{0^2+y^2}{y} = y, \text{ entonces } \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0 \quad ①$$

• Si nos acercamos al $(0,0)$ por la parábola $y=x^2$, o sea $(x,y) = (x,x^2) \rightarrow (0,0)$.

$$\text{Como } f(x,x^2) = \frac{x^2+x^4}{x^2} = 1+x^2, \text{ entonces } \lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} 1+x^2 = 1 \quad ②$$

De ① y ② concluimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe.



Ejercicio: Usando la definición de límite demuestre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Definición (continuidad): Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es continua en \bar{a} si $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$ y $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

• Decimos que f es continua si f es continua $\forall \bar{x} \in \text{Dom}(f)$.

Observación: Valen propiedades similares a las de funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} . O sea, si f y g son continuas entonces también son continuas $f \pm g$, $f \circ g$, etc.

Derivadas Parciales

Intro/Motivación: sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si fijamos b , tenemos que $g(x) = f(x, b)$ es una función de una sola variable (b es constante) y entonces tiene sentido considerar su derivada en $x=a$. Esto es

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \stackrel{\text{Definición parcial de } f}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b)$$

Definición parcial de f con respecto a x en el pto. (a, b)

• En general, para cualquier punto (x, y) definimos la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x, y) como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

• Notar que para calcular $f_x(x, y)$ dejamos la variable y fija (la pensamos como una constante) y derivamos respecto a la variable x . Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2y + e^y + x$ entonces $f_x(x, y) = 2xy + 1$.

• De manera análoga podemos definir $f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, y más aún también podemos hacer lo mismo para funciones de n variables.

Definición: Sean $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y sup. $B(\bar{a}, r) \subset \text{Dom}(f)$ para algún $r > 0$. Definimos la derivada parcial de f respecto a x_j en el punto \bar{a} como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) = f_{x_j}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Observación:

- Si $n=2$ escribimos f_x y f_y en lugar de f_{x_1} y f_{x_2}
- Si $n=3$ escribimos f_x, f_y, f_z en lugar de $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$.
- Si $n=1$ tenemos que $f'_{x_1}(a) = f'(a)$ (la derivada usual).

Observación: para calcular la derivada parcial de f respecto a x_j , consideramos todas las variables x_k con $k \neq j$ como constante y derivamos con respecto a la variable x_j . (92)

Ejemplo: Sea $f(x,y,z) = \frac{xy}{y+z}$. Entonces, las derivadas parciales de f son

$$f_x(x,y,z) = \frac{z}{y+z} ; \quad f_y(x,y,z) = \frac{-xz}{(y+z)^2} ; \quad f_z(x,y,z) = \frac{x(y+z)-xz}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+z)^2} .$$

Observación: Sabemos que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \Rightarrow f$ es continua en a . Sin embargo, si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $n > 2$ lo anterior no es cierto. Es decir pueden existir todas las derivadas parciales de f en \bar{a} pero f puede ser discontinua en \bar{a} .

Por ejemplo, sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\text{Teneamos que } f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{(h+0)^2} - 0}{h} = 0 .$$

De manera análoga se prueba que $f_y(0,0) = 0$. Sin embargo f NO puede ser continua en $(0,0)$ ya que ni siquiera existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ (ver pág. 89).

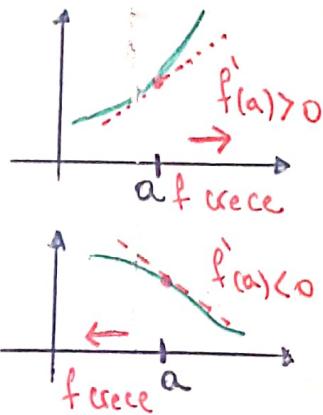
Si pedimos continuidad de las derivadas parciales f_{xj} en \bar{a} entonces podemos garantizar continuidad de f en \bar{a} . Esto es:

Teorema: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$ y $B(\bar{a},r) \subset \text{Dom}(f)$, para algún $r > 0$.

Si f_{x_1}, \dots, f_{x_n} existen y son continuas para todo $\bar{x} \in B(\bar{a},r) \Rightarrow f$ es continua para todo $\bar{x} \in B(\bar{a},r)$. (En particular para $\bar{x} = \bar{a}$).

Interpretación geométrica de los derivados parciales.

- Recordemos que si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada $f'(a)$ nos da información sobre la dirección de crecimiento de f en a . O sea si $f'(a) > 0$ la función crece yendo a lo derecho y si $f'(a) < 0$ la función crece yendo a lo izq (y decrece yendo a lo derecho). Además cuando más positiva/negativa es $f'(a)$ más rápido crece/decrece f en a .



Para $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada parcial $f_{xj}(\bar{a})$ da el tasa de crecimiento de f en \bar{a} cuando nos movemos dejando todas las coordenadas fijas salvo la j -ésima.

- Supongamos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea S el gráfico de f , es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \wedge (x, y) \in \text{Dom}(f)\}.$$

Sea Π_1 el plano $y=b$ y $C_1 = S \cap \Pi_1$. O sea

C_1 es la imagen de la función vectorial

$$\Gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ def. por } \Gamma_1(x) = (x, b, f(x, b)).$$

Sabemos que $\Gamma'_1(x)$ es un vector tangente a $\Gamma_1(x)$

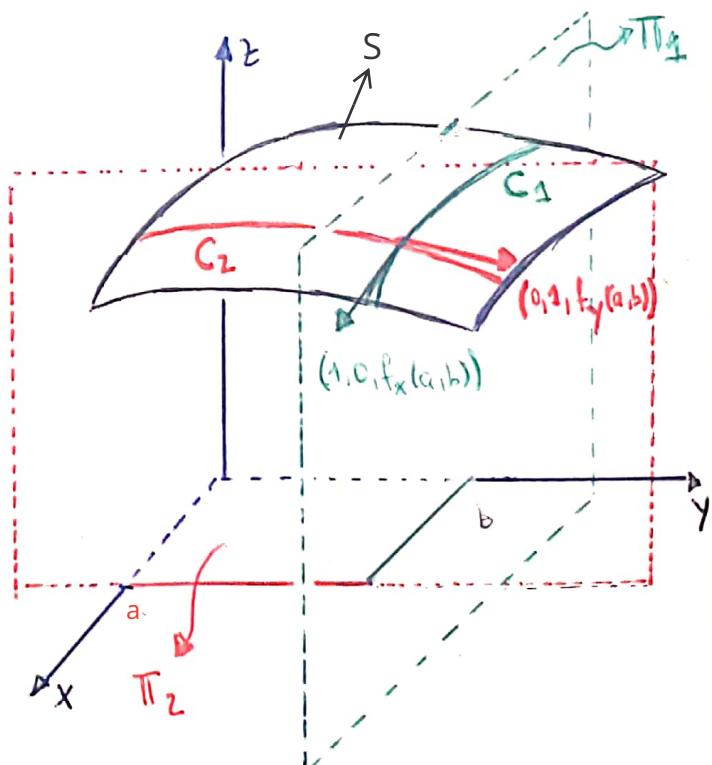
Entonces $\Gamma'_1(a) = (1, 0, f_x(a, b))$ es tangente a

la curva C_1 en el pto $(a, b, f(a, b))$.

Análogamente si Π_2 es el plano $x=a$

$$\text{y } C_2 = S \cap \Pi_2, \text{ el vector } (0, 1, f_y(a, b))$$

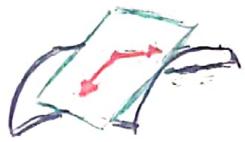
es tangente a C_2 en el pto $(a, b, f(a, b))$.



Otra interpretación: $f_x(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1 .

$f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2 .

Definición: Sea $f: D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b) \in D(f)$. El plano que pasa por $(a,b, f(a,b))$ y es generado por los vectores $(1,0, f_x(a,b))$ y $(0,1, f_y(a,b))$ se llama plano tangente al gráfico de f en el punto $(a,b, f(a,b))$.



Observación: La ecuación vectorial del plano tangente al gráfico de f en $(a,b, f(a,b))$ es

$$(x, y, z) = (a, b, f(a,b)) + t(1, 0, f_x(a,b)) + r(0, 1, f_y(a,b)), \text{ con } t, r \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que el vector $(1, 0, f_x(a,b)) \times (0, 1, f_y(a,b)) = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$ es perpendicular al plano tangente. Luego, la ecuación normal del plano tangente es

$$\langle (x, y, z) - (a, b, f(a,b)), (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1) \rangle = 0.$$

O equivalentemente

$$z = (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b) + f(a,b)$$

Ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(a,b, f(a,b))$.

Ejemplo: Obtener la ecuación del plano tangente al gráfico de $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punto $(\pi, 4, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right))$ y ademas dar la ec. de la recta normal a dicho plano y que pasa por el mismo punto.

Tenemos que: $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \rightsquigarrow f(\pi, 4) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \rightsquigarrow f_x(\pi, 4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{(-x)}{y^2} \rightsquigarrow f_y(\pi, 4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{-\pi}{16} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$$

Luego, la ecuación del plano tangente en el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) - \frac{\pi\sqrt{2}}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por otro parte, la recta que pasa por el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y es normal al plano anterior es:

$$(x_1, y_1, z) = (\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}) + t \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}\pi}{32}, 1 \right)}_{\text{vector normal al plano}}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Regla de la Cadena

Para funciones de 1 variable sabemos que si $h: I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I_2$ y $f: I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I_3$ son funciones derivables en sus dominios, entonces la función $g(t) = f(h(t))$ es derivable y además $g'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$

$$\begin{array}{c} t \mapsto h(t) \mapsto f(h(t)) \\ \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ I_1 \quad I_2 \quad I_3 \end{array}$$

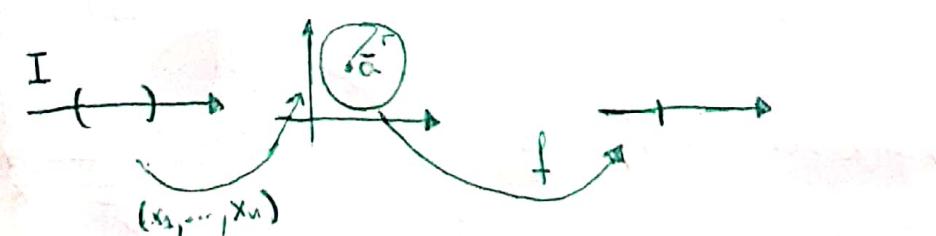
Teorema (Regla de la Cadena, Caso 1): Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$

y tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}, r)$ para algún $r > 0$.

Para $1 \leq i \leq n$ y un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sean $x_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables $\forall t \in I$ y tal que $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in B(\bar{a}, r) \quad \forall t \in I$. Entonces, la función $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es derivable $\forall t \in I$ y además

$$\frac{dg}{dt} = g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x'_2(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x'_n(t)$$

$$\begin{array}{c} t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \mathbb{R} \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \end{array}$$



Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, con $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = e^t$. Hallar $\frac{df}{dt}$. (96)

• Tenemos que: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$.
 $x'(t) = \cos(t)$; $y'(t) = e^t$.

Luego

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= (2x(t) + y(t)) \cdot \cos(t) + (2y(t) + x(t)) e^t \\ &= (2\sin(t) + e^t) \cos(t) + (2e^t + \sin(t)) e^t \quad (\Delta)\end{aligned}$$

Observación: notar que si escribimos $f(t) = x^2(t) + y^2(t) + x(t)y(t) = \sin^2(t) + e^{2t} + \sin(t)e^t$ entonces $\frac{df}{dt} = 2\sin(t)\cos(t) + 2e^{2t} + \cos(t)e^t + \sin(t)e^t$ que es igual a (Δ) .

Teorema (Regla de la Cadena, Caso 2): Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x}_1 \in \text{Dom}(f)$ y \bar{y}_1

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son continuas en $B(\bar{x}_1, r_1)$ para algún $r_1 > 0$. Sean

$x: \text{Dom}(x) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $y: \text{Dom}(y) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con sus derivadas parciales continuas en $B(\bar{x}_0, r_0)$ para algún $r_0 > 0$ y tal que $(x(s,t), y(s,t)) \in B(\bar{x}_1, r_1)$ $\forall (s,t) \in B(\bar{x}_0, r_0)$.

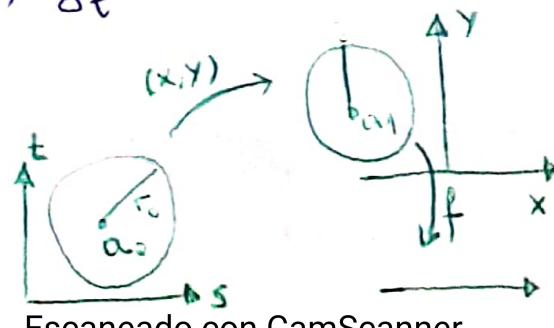
Entonces, la función definida por $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t)) \quad \forall (s,t) \in B(\bar{x}_0, r_0)$ tiene derivadas parciales dadas por

• $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$

• $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$

$$(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t)) \mapsto f(x(s,t), y(s,t))$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



Ejemplo: Sea $f(x,y) = xy + 2y^2 + x^3$, donde $x(s,t) = st$, $y(s,t) = e^{st}$. (97)

Calcular $\frac{\partial f}{\partial s}$ en el punto $(s,t) = (1,1)$.

• Tenemos que:

$$\bullet f_x(x,y) = y + 3x^2 \quad ; \quad f_y(x,y) = x + 4y$$

$$\bullet x_s(s,t) = t \quad ; \quad y_s(s,t) = t e^{st}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) &= f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_s(s,t) \\ &= (e^{st} + 3(st)^2) t + (st + 4e^{st}) t e^{st} \end{aligned} \quad (\textcolor{red}{■})$$

Finalmente, si evaluamos en $(s,t) = (1,1)$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,1) = (e+3) \cdot 1 + (1+4e) e = 4e^2 + 2e + 3$$

Observación: notar que si escribimos $f(s,t) = x(s,t)y(s,t) + 2y^2(s,t) + x^3(s,t)$
 $= st e^{st} + 2e^{2st} + s^3 t^3$

entonces $\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = t e^{st} + st^2 e^{st} + 2 \cdot 2t e^{2st} + 3s^2 t^3$ que es igual a $(\textcolor{red}{■})$.

Derivada direccional

98

Definición: decimos que $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario si $\|\bar{u}\| = 1$.

Definición: Sean $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $B(\bar{a}, r) \subseteq \text{Dom}(f)$ para algún $r > 0$ y \bar{u} un vector unitario. Definimos la derivada direccional de f en la dirección de \bar{u} en el punto \bar{a} como

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \quad \text{si este límite existe.}$$

Observaciones:

- ① Si el vector \bar{u} no es unitario, entonces consideramos $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$ (unitario y misma dirección que \bar{u})
- ② Si tomamos $\bar{u} = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-ésima coord.}}{1}, 0, \dots, 0)$, entonces $D_{e_i} f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$. En sta, las derivadas parciales son un caso particular de derivada direccional.

Definición: sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$ tq existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \quad \forall i = 1, \dots, n$. Llamos gradiente de f en \bar{a} al vector $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$.

Teorema: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r) \subseteq \text{Dom}(f)$ y $\forall i = 1, \dots, n$ y $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vector unitario. Entonces vale que

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) u_n.$$

Demonstración:

Definimos $g(h) = f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n)$ (función de \mathbb{R} en \mathbb{R})

Luego, $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$. ①

Ahora, por la regla de la cadena (caso 1) $g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot \frac{\partial(a_1 + hu_1)}{\partial h} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot \frac{\partial(a_n + hu_n)}{\partial h}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot u_n$$

$$= \langle \nabla f(\bar{a} + h\bar{u}), \bar{u} \rangle$$

Con lo cual, $\vec{g}(0) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{u} \rangle$. ②

De ① y ② obtenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{u} \rangle$.

Interpretación geométrica de la derivada direccional.

• Sea $f: D_f(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D_f(f)$ y

$$P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \text{Gra.}(f) \doteq S$$

• Sea l la recta en el plano $x-y$ dada por

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(u_1, u_2).$$

Sea Π el plano vertical que contiene a la recta l .

• Sea $C = \Pi \cap S$ y r la recta tangente en b. curva C en el punto P . Notemos que C es la imagen de la función vectorial

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dado por } g(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, \underbrace{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)}_{\doteq h(t)})$$

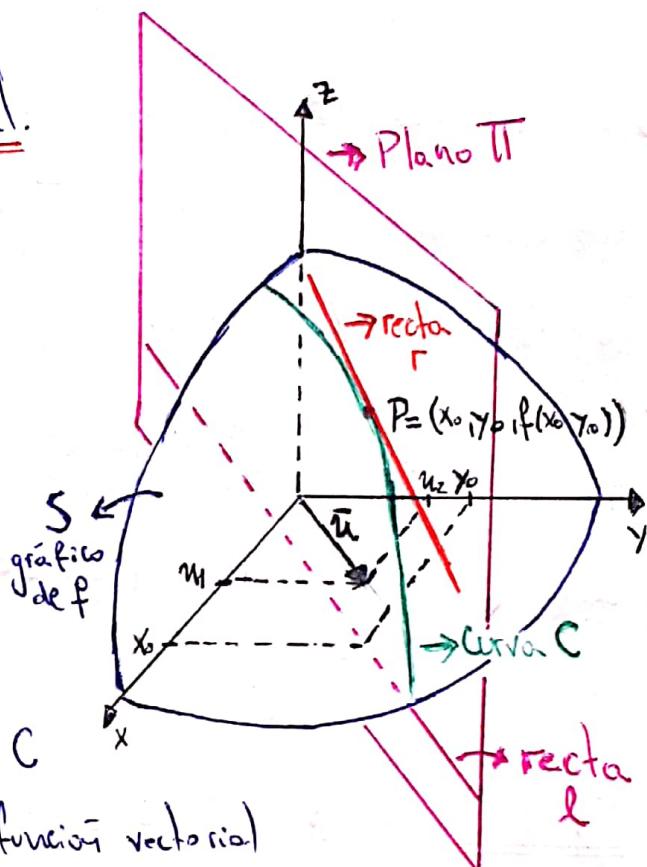
Sabemos que $h'(t)$ da la pendiente de la recta al gráfico de h (pues $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\text{Ahora, } h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_n \text{ y por lo tanto}$$

$$h'(0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \bar{u} \rangle = D_{\bar{u}} f(x_0, y_0).$$

Entonces $D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$ da la pendiente de r , o sea la tasa de crecimiento de f en (x_0, y_0) , cuando nos movemos en la dirección $\bar{u} = (u_1, u_2)$.

Notar que r viene dado por la ecuación $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t(u_1, u_2, D_{\bar{u}} f(x_0, y_0))$ para $t \in \mathbb{R}$.



Ejemplo: calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x e^y$ en el punto 100

$P = (2,0)$ en la dirección de $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$.

Notemos que \bar{v} no es unitario ya que $\|\bar{v}\| = \sqrt{1+3} = \sqrt{2}$. Luego, debemos considerar el vector $\bar{u} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \sqrt{3})$ que tiene la misma dirección que \bar{v} pero es unitario.

Por otra parte, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^y$, ambas son funciones continuas.

$$\begin{aligned} \text{Luego, por teorema, } D_{\bar{u}} f(2,0) &= \langle \nabla f(2,0), \bar{u} \rangle \\ &= \left\langle \left(e^0, 2e^0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{1}{2} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Teorema: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r)$ y para $1 \leq i \leq n$. Si $\nabla f(\bar{a}) \neq (0, \dots, 0)$, entonces

(i) el vector $\bar{u} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de máximo crecimiento de f en \bar{a}

(ii) el vector $\bar{v} = -\frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de mínimo crecimiento de f en \bar{a} .

Demonstración:

Tenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \|\nabla f(\bar{a})\| \|\bar{u}\| \cos(\theta)$. El máximo valor de $\cos(\theta)$ (y por ende el máximo valor de $D_{\bar{u}} f(\bar{a})$) se da cuando $\cos(\theta) = 1$, o sea $\theta = 0$ y esto nos dice que $\nabla f(\bar{a})$ y \bar{u} son paralelos y tienen mismo sentido.

De manera análoga, el mínimo valor de $\cos(\theta)$ es cuando vale -1 , o sea $\theta = \pi$. Es decir, cuando los vectores $\nabla f(\bar{a})$ y \bar{u} son paralelos y con sentido opuesto.

Observación: $\bar{u} = \nabla f(\bar{a})$ y $\bar{v} = -\nabla f(\bar{a})$ tienen la misma dirección que \bar{u} y \bar{v} respect. pero no son unitarios.

Ejemplo: En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,2)$, para obtener la mayor tasa de crecimiento y la mayor tasa de decrecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2$? (101)

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (2(x+y-2), 2(x+y-2))$. Luego, $\nabla f(1,2) = (2,2)$.

Por lo tanto:

- La tasa de mayor crecimiento es en la dirección $\tilde{u} = \nabla f(1,2) = (2,2)$.
- La tasa de mayor decrecimiento es en la dirección $\tilde{v} = -\nabla f(1,2) = (-2,-2)$.

Observación: para poder calcular las derivadas direccionales y obtener los valores de las tasas de máximo crecimiento/crecimiento debemos considerar los vectores $\bar{u} = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$ y $\bar{v} = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$.

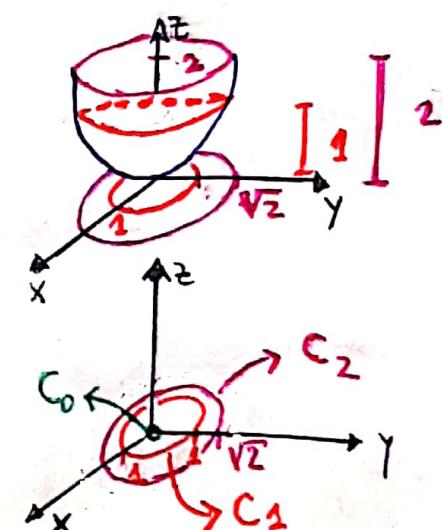
Curvas y Superficies de nivel

Definición: Sea $K \in \mathbb{R}$ y $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Una curva de nivel K def al subconjunto de $\text{Dom}(f)$ definido por $C_K = \{(x,y) \in \text{Dom}(f); f(x,y) = K\}$ (C_K puede ser \emptyset , puntos aislados o una curva).

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$.

- Si $K < 0$, entonces $C_K = \emptyset$ (ya que $f(x,y) \geq 0$)
- Si $K = 0$, entonces $C_K = \{(0,0)\}$
- Si $K > 0$, entonces C_K es un círculo centrado en $(0,0)$ y de radio \sqrt{K}

(las curvas de nivel nos ayudan a entender el gráfico de f)



Definición: Sea $K \in \mathbb{R}$ y $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Llámamos superficie de nivel K de f al subconjunto de $\text{Dom}(f)$ definido por (402)

$$S_K = \{(x, y, z) \in \text{Dom}(f) : f(x, y, z) = K\}$$

Ejemplo: Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, tenemos que

- Si $K < 0$, $S_K = \emptyset$
- Si $K = 0$, $S_K = \{(0, 0, 0)\}$
- Si $K > 0$, S_K es una esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y de radio \sqrt{K}

Observación: notar que dado $P \in \text{Dom}(f)$, existe a lo sumo una curva (o superficie) de nivel que pasa por P .

Dada $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, consideremos C_K . Sea γ una curva incluida en C_K . D sea, γ es la imagen de una función vectorial $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con t en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sea $t_0 \in I$ y denotemos $(x_0, y_0) = (\gamma(t_0))$.

Como $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in C_K \quad \forall t \in I$, tenemos que $f(x(t), y(t)) = K \quad \forall t \in I$

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

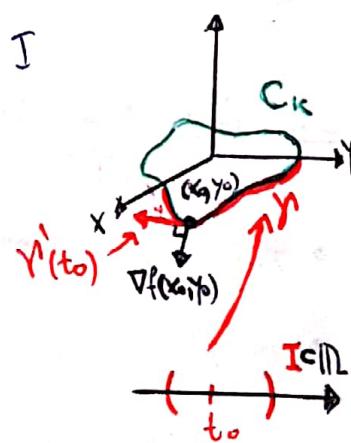
En particular, para $t = t_0$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0$$

y sea,

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Luego, si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, tenemos que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular (u ortogonal)



103

al vector tangente a la curva V , y por lo tanto a la curva de nivel) de f , que pasa por (x_0, y_0) .

\rightarrow es perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$

Entonces, el vector $\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$ es tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0) .

Definición: la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0)

está definida como $(x, y) = (x_0, y_0) + t \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ y $P = (1, 1)$. Calcular

- el gradiente de f en P ;
- la ec. de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por P ;
- la ec. del plano tangente al gráfico de f en P .

Réspuestas:

- Tenemos que $f_x(x, y) = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$ y $f_y(x, y) = \frac{-1 \cdot (x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$

Por lo tanto $\nabla f(x, y) = \left(\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2} \right)$ y en particular $\nabla f(1, 1) = \left(\frac{2}{4}, -\frac{2}{4} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$.

- La ec. de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por $P = (1, 1)$ es $(x, y) = (1, 1) + t \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

- La ec. del plano tangente al gráfico de f en P es

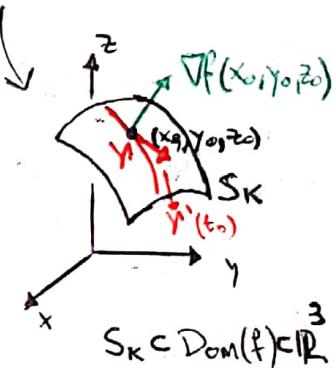
$$\begin{aligned} z &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x-1) + f_y(1, 1)(y-1) \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1). \end{aligned}$$

Dada $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, consideramos S_K . Es fácil ver que si $(x_0, y_0, z_0) \in S_K$ y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es un vector perpendicular (ortogonal) al ^{plano tangente a la} superficie de nivel S_K (al igual que para $n=2$ podemos considerar $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tq su imagen igual que para $n=2$ podemos considerar $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tq su imagen esté contenida en S_K $\forall t \in I$ algún intervalo de \mathbb{R} , & sea $f(x(t), y(t), z(t)) = K$ $\forall t \in I$. Luego derivando con respecto a t obtenemos el resultado buscado).

Definición: la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0) es:

$$\langle (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0), \nabla f(x_0, y_0, z_0) \rangle = 0$$

\downarrow
vector normal al plano



Observación: Supongamos que S es el gráfico de una función $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

O sea, $S = \{(x, y, z) : z = g(x, y)\}$.

Sea $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \in S$. Vimos (ver pág. 94) que el plano tangente al gráfico de g en el punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ es

$$z = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (\Delta)$$

Si definimos ahora $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x, y, z) = z - g(x, y)$ tenemos que S (gráfico de g) es justamente S_0 la curva de nivel 0 de f . Por lo visto recién, el plano tangente a $(x_0, y_0, z_0) \in S_0 = S$ está dado por

$$\langle (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0), \nabla f(x_0, y_0, z_0) \rangle = 0$$

y como $z_0 = g(x_0, y_0)$, $f_x(x, y, z) = -g_x(x, y)$, $f_y(x, y, z) = -g_y(x, y)$; $f_z(x, y, z) = 1$, obtenemos $\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (-g_x(x_0, y_0), -g_y(x_0, y_0), 1) \rangle = 0$ que es justamente (Δ)

Por lo tanto, las dos definiciones de plano tangente coinciden.

Ejemplo: Dar la ecuación del plano tangente a la esfera S de centro o y radio 1, en el punto $(0,0,1)$. (105)

Consideremos la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Tenemos que S es justamente la superficie de nivel S_1 de f , o sea

$$S = S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

\downarrow solo la "cúscara"

Por lo tanto la ecuación del plano tangente a S en $(0,0,1)$ es

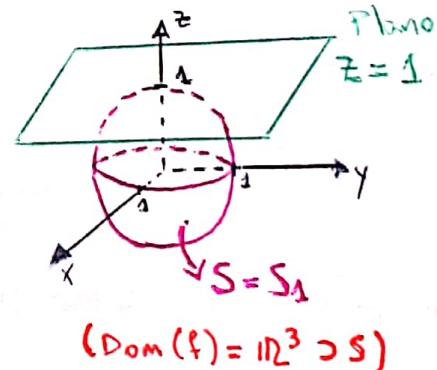
$$\langle (x,y,z) - (0,0,1), \nabla f(0,0,1) \rangle = 0$$

Como $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, tenemos que $\nabla f(0,0,1) = (0,0,2)$ y por lo tanto la ecuación queda

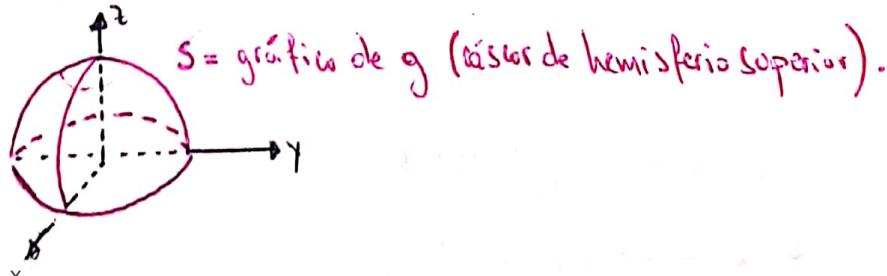
$$\langle (x,y,z) - (0,0,1), (0,0,2) \rangle = 0$$

$$(2-1) \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{Z = 1}$$



Ejercicio: Dar la ecuación del plano tangente al gráfico de la función $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ en el punto $(0,0,1)$.



$$(\text{Dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2)$$

Derivadas de orden 2.

- Dada una función f de n variables, es decir $f(x_1, \dots, x_n)$, y tq existen sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ (que son funciones de n variables), podemos preguntarnos si existen las derivadas parciales de cada función $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, 1 \leq i \leq n$. Estas se llaman derivadas parciales segundas (o de orden 2) de f .

- Si $n=2$, hay 4 derivadas parciales de orden 2:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Si $n=3$, hay 9 derivadas parciales de orden 2: $f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yz},$ etc.

- En general, si f tiene n variables, entonces hay n^2 derivadas parciales de orden 2.

Ejemplos:

- Calcular las derivadas parciales de orden 2 de $z = x^2(1+y^2)$.

Tenemos que $z_x = 2x(1+y^2)$ y $z_y = x^2 \cdot 2y$.

Luego, $z_{xx} = 2(1+y^2)$

$$z_{xy} = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$z_{yx} = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$z_{yy} = 2x^2$$

② Si $z = f(x, y)$, con $x(s, t) = 2s + 3t$, $y(s, t) = 3s - 2t$, calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$. (107)

Primero debemos calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$ y luego a esta función calcularle la derivada parcial con respecto a s .

Entonces, por la regla de la cadena (caso 2)

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \quad (\text{A})$$

$$\text{donde } \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = 3 \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = -2$$

Luego, (A) queda

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) .$$

Calcularemos la derivada parcial con respecto a s de la función $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 3 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right] - 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right]$$

$$\text{donde } \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = 2 \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = 3$$

Finalmente,

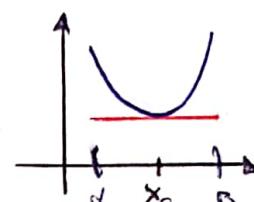
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 3 \left[2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] - 2 \left[2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$$

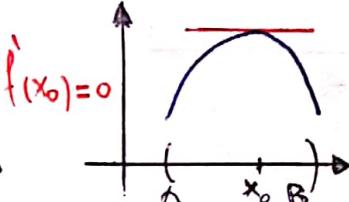
Teorema: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$. Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en $B(\bar{a}, r) \subseteq \text{Dom}(f)$ para algún $r > 0$, entonces

$$f_{xy}(\bar{x}) = f_{yx}(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{a}, r).$$

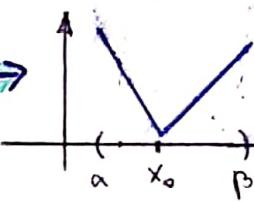
Máximos y mínimos de funciones de dos variables ($n=2$)

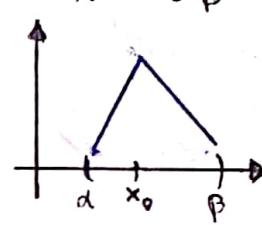
Reposo: Sea $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Si f tiene un mínimo local o un máximo local en x_0 entonces:

- $f'(x_0) = 0$ (x_0 se llama punto crítico) \Rightarrow 



o

- $f'(x_0)$ No existe (x_0 se llama pto. singular) \Rightarrow 



Definición: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$. Decimos que

- f tiene un máximo local (o relativo) en (x_0, y_0) si existe una bola (disco) B centrada en (x_0, y_0) , con $B \subset \text{Dom}(f)$ y tq $f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$.

El número $f(x_0, y_0)$ se llama valor máximo local de f .

- f tiene un mínimo local (o relativo) en (x_0, y_0) si existe una bola B centrada en (x_0, y_0) , con $B \subset \text{Dom}(f)$ y tq $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$.

El número $f(x_0, y_0)$ se llama valor mínimo local de f .

- Si las desigualdades se cumplen $\forall (x, y) \in \text{Dom}(f)$, entonces decimos que f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto, según corresponda) en (x_0, y_0) .

Observación: decimos que f tiene un extremo local en (x_0, y_0) si f tiene un máximo local o un mínimo local en (x_0, y_0) .

Teorema: Si $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tiene un extremo local en (x_0, y_0) y existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) , entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. (109)

Demonstración:

Sea $g(x) = f(x, y_0)$. Entonces, g tiene un extremo local en $x = x_0$. Luego,
 $0 = g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.

De la misma forma también deducimos que $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Definición: dado $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) se llama punto crítico de f

si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (o sea $\nabla f(x_0, y_0) = 0$).

Decimos además que (x_0, y_0) es punto singular de f si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$.

Conclusión: Si $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en (x_0, y_0) , entonces

- o bien (x_0, y_0) es pto. crítico de f (y por lo tanto $\nabla f(x_0, y_0) = 0$)
- o bien (x_0, y_0) es pto. singular de f (y por lo tanto $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$).

Reaso: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y x_0 es punto crítico de f ($f'(x_0) = 0$) y si

además $\begin{cases} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow x_0 \text{ es mínimo local de } f \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow x_0 \text{ es máximo local de } f \\ f''(x_0) = 0 & \Rightarrow \text{no podemos asegurar nada.} \end{cases}$

Veremos un resultado similar para $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Teatrero (Test de los derivados segundos).

- Si $f: \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$. Supongamos que los derivados parciales de 1^{er} y 2^{dgo} orden de f son continuos en una bola B de centro (x_0, y_0) y supongamos ademáis que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (o sea, (x_0, y_0) es pto. crítico de f).

Sea $D \doteq D(x_0, y_0) \doteq f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$, entonces:

- ① Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ($\& f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) $\Rightarrow f$ tiene mínimo local en (x_0, y_0) .
- ② Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ($\& f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) $\Rightarrow f$ tiene un máximo local en (x_0, y_0) .
- ③ Si $D < 0$, entonces f no es un máx. local ni un mín. local en (x_0, y_0) . En este caso decimos que f tiene un punto silla en (x_0, y_0) .
- ④ Si $D = 0$, no se puede asegurar nada.

Observación: para recordar la fórmula que define $D(x_0, y_0)$ notemos que $D(x_0, y_0)$

$$\text{es el determinante de la matriz } H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$\text{y que } \det(H(x_0, y_0)) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \underbrace{f_{xy}(x_0, y_0) f_{xy}(x_0, y_0)}_{f_{xy}(x_0, y_0)^2} \text{ pues } f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \text{ por Tb. anterior (pág. 107).}$$

• La matriz H se llama hessiana de f en (x_0, y_0)

y su determinante se llama hessiano de f en (x_0, y_0) .
(o discriminante)

Ejemplo Caso 3. Sea $f(x,y) = y^2 - x^2$

- Tenemos que $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$. Luego, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, o sea $(0,0)$ es punto crítico de f .

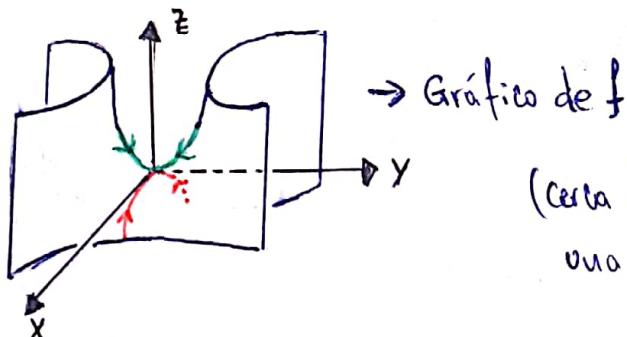
- Además, $f_{xx}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = 2$ y $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$.

Por lo tanto, $D(0,0) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0$ y entonces estamos en el caso 3.

- Analicemos el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto $(0,0)$.

• Si nos acercamos por el eje y tenemos $f(0,y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$ luego $(0,0)$ No es máx local

• Si nos acercamos por el eje x tenemos $f(x,0) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$ luego $(0,0)$ No es min local



(Cerca del $(0,0)$ el gráfico tiene la forma de una silla de montar)

En este caso decimos que $(0,0)$ es un punto de silla.

Ejemplo Caso 4

- Sea $f(x,y) = x^4 + y^4$.

Es fácil ver que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y que $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$.

Por lo tanto, $D(0,0) = 0$ y estamos en el caso 4

Ahora, por como está definida f tenemos que $f(x,y) = x^4 + y^4 \rightarrow$ (y global)

$f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$ y entonces $(0,0)$ es un mínimo local de f

iii) Sea $h(x,y) = -(x^4 + y^4)$.

Es fácil ver (ejercicio) que $D(0,0) = 0$ y entonces también se cumple el caso 4.

Sin embargo, por como está definida h tenemos que $(0,0)$ es un máximo local (y global) de h .

iv) Sea $g(x,y) = y^4 - x^4$

Es fácil ver (ejercicio) que $D(0,0) = 0$ y entonces estamos en el caso 4.

Sin embargo, si graficamos g nos damos cuenta que $(0,0)$ es un punto de silla de g (analizar el comportamiento cuando no acercamos a $(0,0)$).

Por lo tanto, de 1, ii) y iii) vemos que si $D(x_0, y_0) = 0$, el punto (x_0, y_0) podría ser un max local, min. local o punto silla. Es decir, $D(x_0, y_0) = 0$ no nos asegura nada sobre qué tipo de punto ~~que~~ es (x_0, y_0) .

Ejemplo: Encontrar y clasificar (máx./min relativo, pto. silla) los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$.

Recordemos que (x_0, y_0) es pto. crítico de f si $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$.

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$, entonces

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \text{ reemplazo} \Leftrightarrow y^9 = y \Leftrightarrow y(y^8 - 1) = 0$$

Por lo tanto, los únicos puntos críticos de f son: $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

Clasifiquemos estos pts. críticos utilizando el Test de las 2das derivadas.

Tenemos que: $f_{xx}(x,y) = 12x^2$

$f_{yy}(x,y) = 12y^2$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4$

Entonces $D(x,y) = \det \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 16$

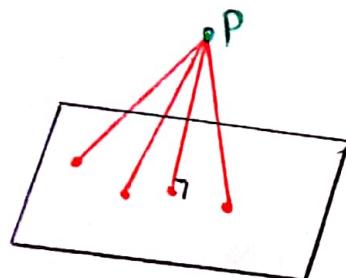
Lucgo, $D(0,0) = -16 < 0$, por lo tanto $(0,0)$ es pto. de silla. de f .

$D(1,1) = 144 - 16 > 0$, \Rightarrow $f_{xx}(1,1) = 144 > 0$ por lo tanto $(1,1)$ es mínimo local de f .

$D(-1,-1) = 144 - 16 > 0$, \Rightarrow $f_{xx}(-1,-1) = 144 < 0$ por lo tanto $(-1,-1)$ es mínimo local de f .

Ejemplo: Encontrar la distancia más corta desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x + 2y + z = 4$

- Recordemos que si $Q = (x,y,z)$ es un pto. en el espacio, la distancia entre P y Q es



$$d\left(\underbrace{(1,0,-2)}_P, \underbrace{(x,y,z)}_Q\right) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} \quad (\text{1})$$

- Ahora, si consideramos que Q está en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces Q es de la forma $Q = (x, y, 4 - x - 2y)$. Reemplazando en (1) tenemos que la distancia de P a un pto. Q que está en el plano es:

$$d(P, Q_{(x,y,z)}) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2} \quad (\geq 0)$$

Por lo tanto, para hallar la distancia más corta de P al plano basta hallar el mínimo de la función (¿por qué?)

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

(el punto (x_0, y_0) donde las funciones $d(x,y)$ y $f(x,y)$ toman su mínimo valor coinciden, sin embargo no es cierto que $d(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$).

Ejercicio (está en el práctico!): Hallar el punto (x_0, y_0) donde f alcanza su mínimo valor y calcular $d(x_0, y_0)$ = distancia más corta de $P = (1,0,-2)$ al plano $x+2y+z=4$.