数据结构与算法

DATA STRUCTURE

第二十四讲 最短路径

胡浩栋

信息管理与工程学院

2017 - 2018 第一学期

课堂内容

- 最短路径算法

最短路径算法

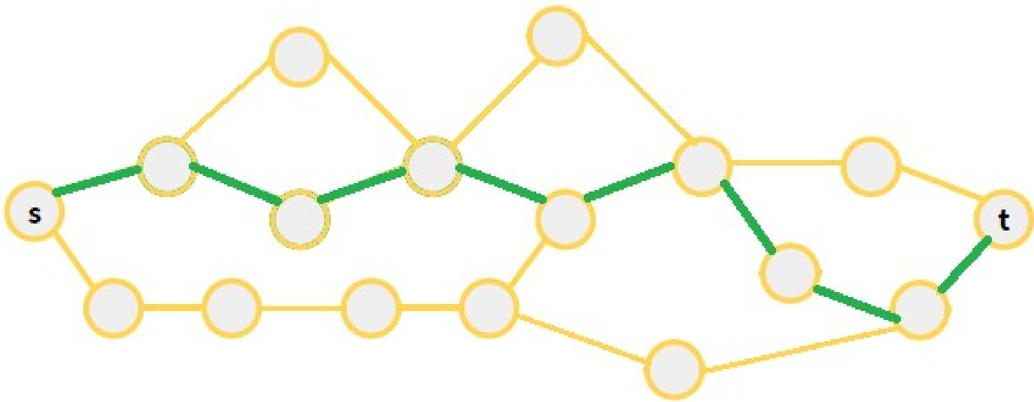
最短路径

- BFS算法可以找到图上最短路径，如果边没有权重
- 在加权图上，最短路径的算法是
  - Dijkstra算法：适用没有负边的图
  - Bellman-Ford算法：适用于没有负环的图（可以有负边）
  - 在DAG上，最短路径算法是线性的
- 在无向加（整数）权图上，有线性的最短路径算法

最短路径问题

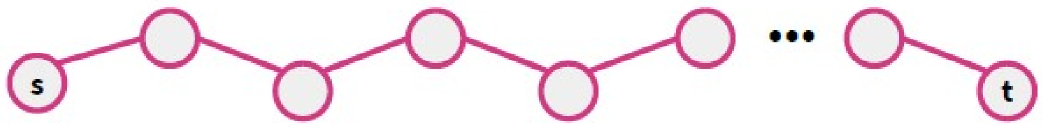
- 不妨假设这里说的图都是有向图，无向图的边可以看作双向边（双向边的话箭头省略）

- 如果从有向图中某一顶点（称为源点）到达另一顶点（称为终点）的路径可能不止一条，如何找到一条路径使得沿此路径上各边的权值总和达到最小？



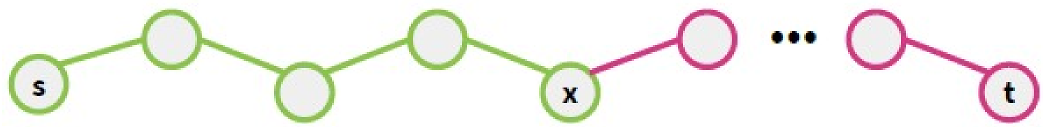
直接结论

- 图有负环（cycle的边权重和是负数），没有最短路径
  - Bellman-Ford算法可以检测到负环的存在
- 如果没负环，最短路径存在，而且一定是简单路径
  - 即最短路径上不存在环
- 最短路径的子路径一定也是最短路径



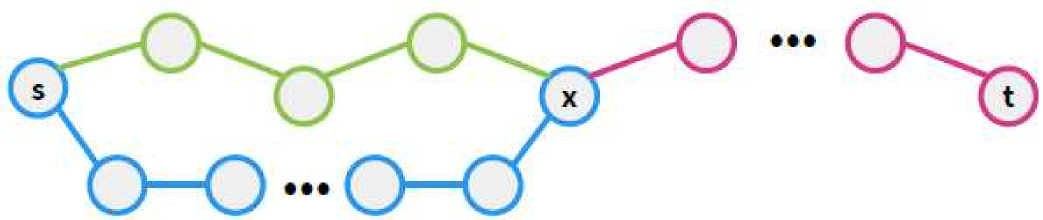
最短路径的子路径也是最短路径

- 假设x是从s到t的最短路径的中间节点，那么s到x的子路径也是最短路径



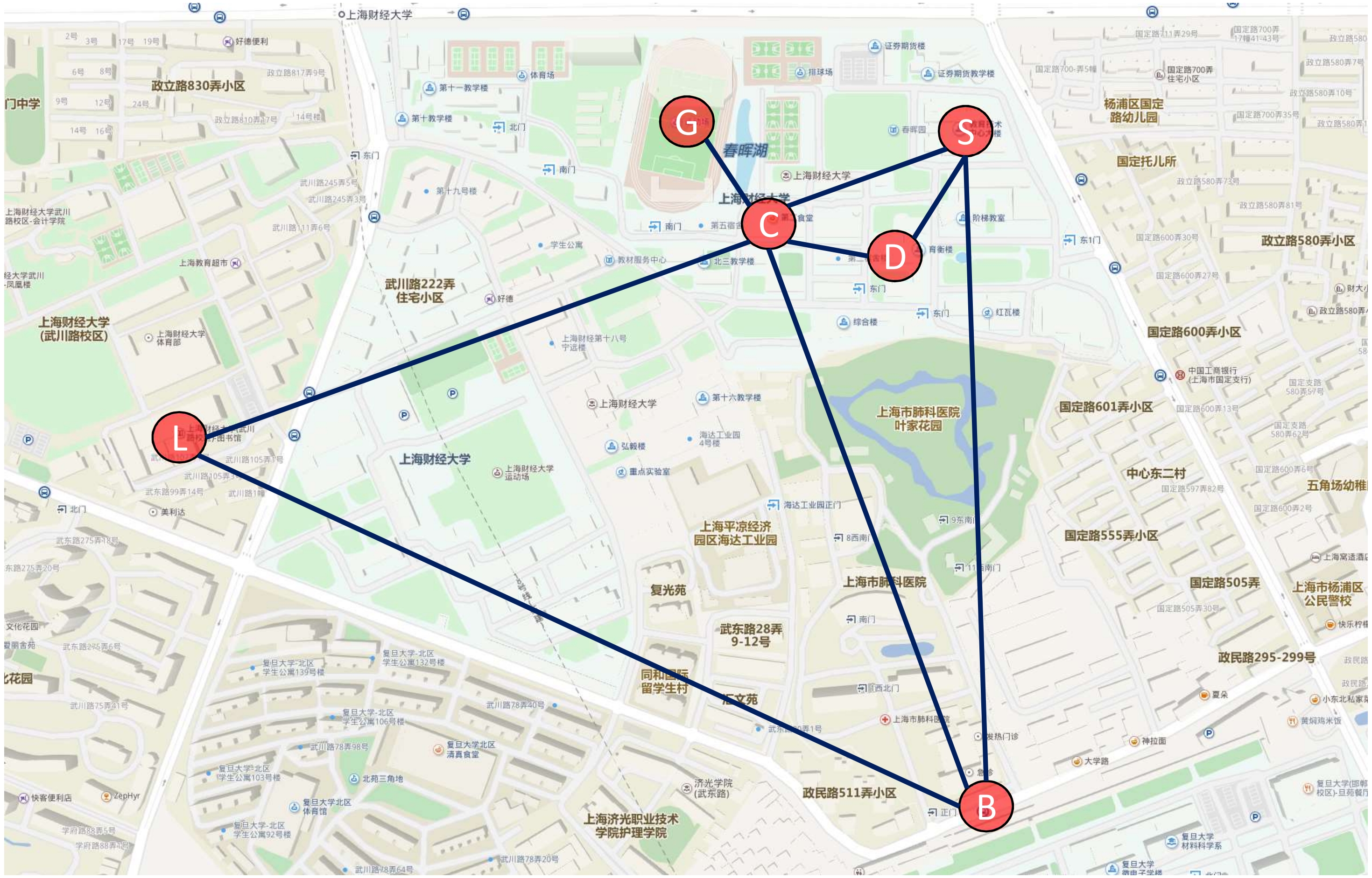
- 反证法：假如s到x的真正最短路径不是绿色路径

  那么s到t的最短路径可以更短（蓝色+紫色）



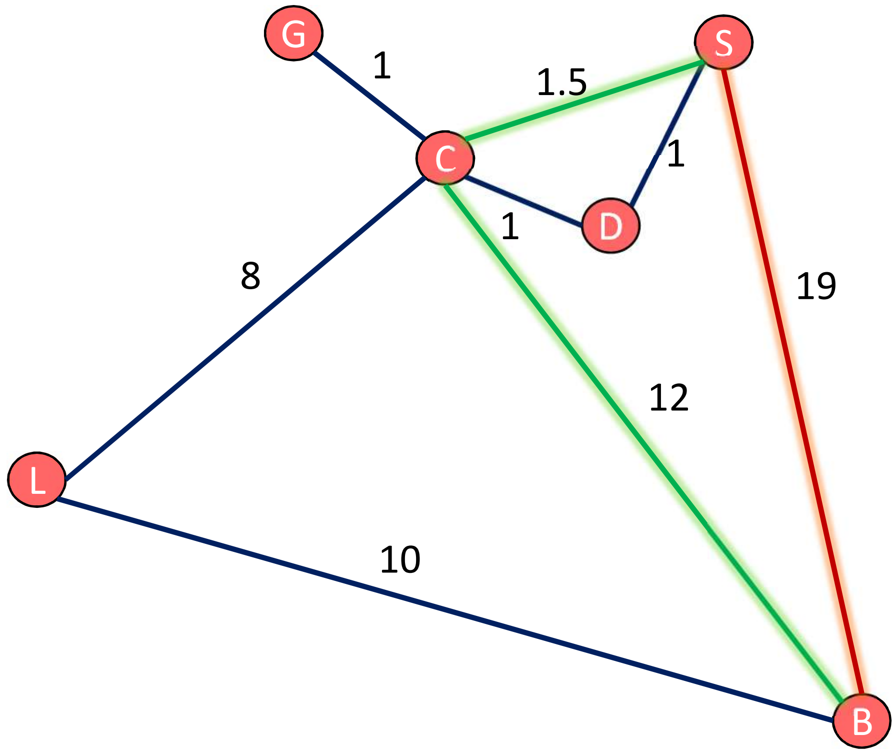
非负边的最短路径算法

如何从上课地点到食堂/宿舍/体育馆/图书馆/车站



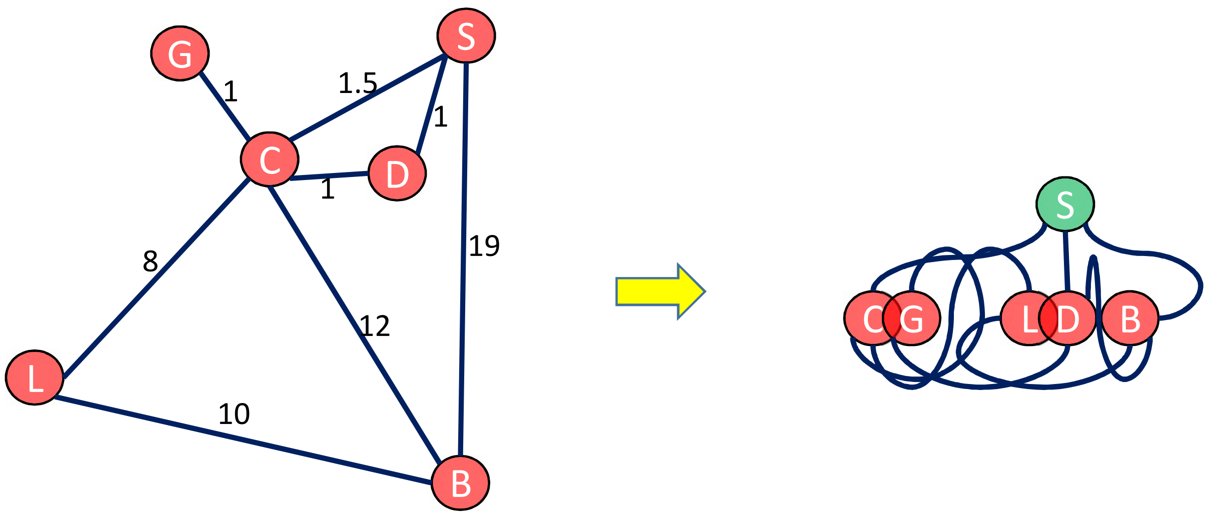
抽象成图，找从s出发的最短路径

- 如果按BFS算法，从S到B直接去最短
- 实际加权图上应该是S→C →B最短
- 这里边权重看作距离，都是大于0的



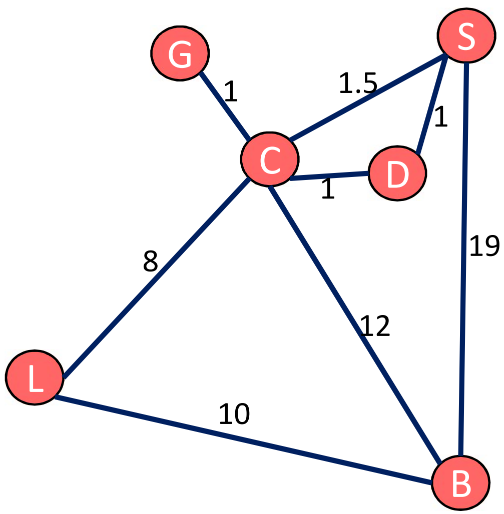
一个直观思路

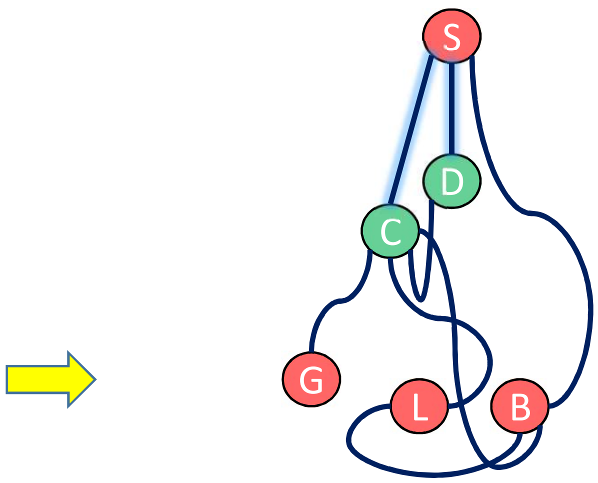
- 把每个顶点看作球
- 边看作细绳连接，长度是权重
- 找从S出发的最短路径，可以看作把球S提起来



一个直观思路

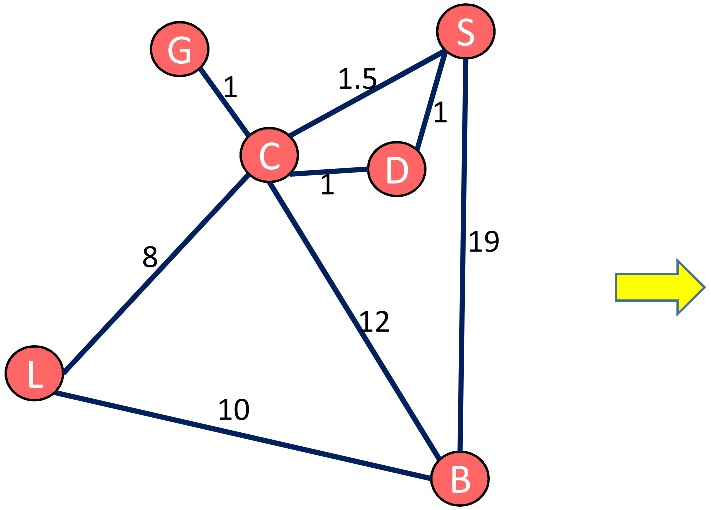
- 第一个被细绳提起来的球D，是从S出发细绳长最短的
- 然后被提起来的是球C

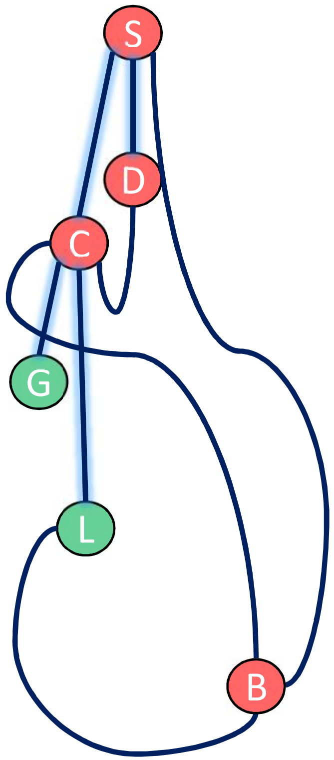




一个直观思路

- 接着是CG细绳和CL细绳被拉紧，对应的球G和L被提起来
- 这里G和L通过球C被提起来，球C一定也已经被提起来了



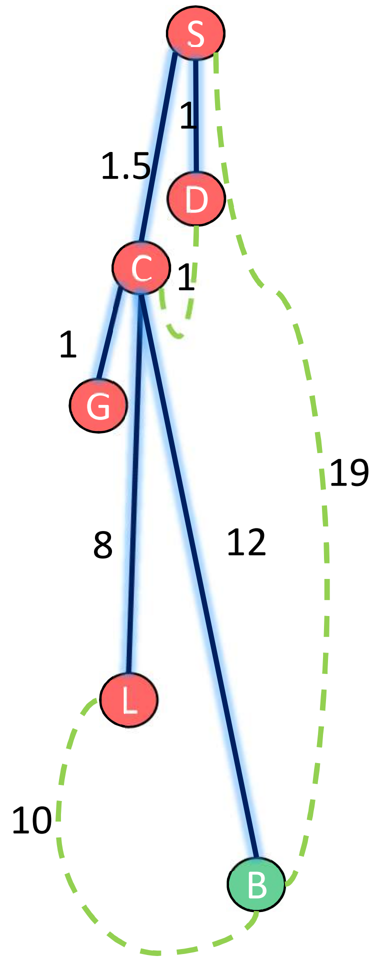


一个直观思路

- 最后是被提起来的是球B
- 那么这些被拉紧的细绳就是从S出发到各个顶点的最短路径

- 这也形成了一颗最短路径树
- 只有沿着树走才是最短路径

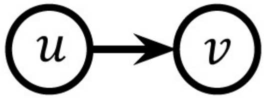
问题：如果不利用重力和细绳，怎么找单源出发的最短路径？



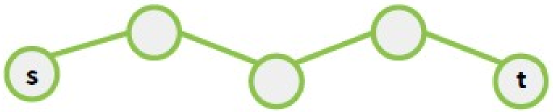
Dijkstra算法
单源最短路径算法

术语

- **Dijkstra**算法:在权重为非负的图上，从单源出发到别的顶点的最短路径
  - 假设u和v的边的权重是$w(u,v)$



  - 假设s到t的实际最短路径是$\delta(s,t)$

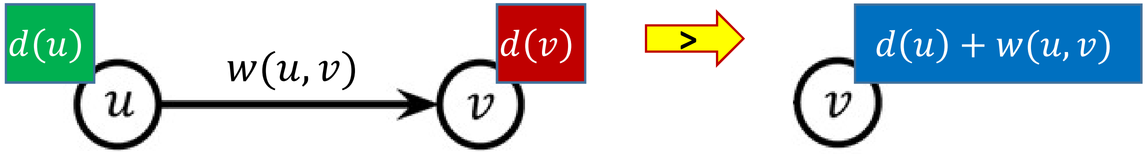


  - 假设顶点u相对于源点s有个距离预估值$d(u)$

- 算法的目的是把预估值$d(u)$逐步收敛到最短路径$\delta(s,t)$

单步收敛

- 对于顶点u的任意邻接顶点v， 即(u, v)是边， 收敛操作是
$$\boldsymbol{d(v)} = \min\{\boldsymbol{d(v)}, \boldsymbol{d(u)} + \boldsymbol{w(u,v)}\}$$



- 算法的过程是不断进行单步收敛操作把$d(u)$逐步收敛到最短路径$\delta(s,t)$
- 把细绳逐个收紧的过程

Dijkstra算法

- 每个顶点u都有个距离预估值$d(u)$，除了起始点s的值是0，别的顶点初始值都是∞
- 每个顶点有两个状态：未完成和完成。初始时，所有顶点都是未完成
  1) 取一个“未完成”的顶点u，其预估值$\boldsymbol{d(u)}$是最小的
  2) 对于顶点u的所有“未完成”邻接顶点v，进行单步收敛操作

$$\boldsymbol{d(v)} \leftarrow \boldsymbol{min}\{\boldsymbol{d(v)}, \boldsymbol{d(u)} + \boldsymbol{w(u,v)}\}$$

  3) 然后把顶点u的状态设置成“完成”
- 因为每次能把一个顶点归为“完成”，最多进行$|V|$次后，算法结束

伪代码

- 初始化
  - 未完成 🟡
  - 完成 🔵

For each vertex u

$\quad \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) = \infty;\ \ u.status =$ 🟡

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}) = 0$

- 最短距离迭代计算过程

For $i = 1, \ldots, n$:

$\quad$ **Find** u with status 🟡**,** such that $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u})$ is min

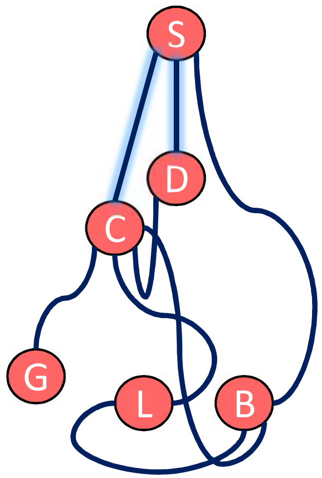
$\quad$ **For** each neighbor v with status 🟡:

$\quad\quad \boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}) \leftarrow \boldsymbol{min}\{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\}$

$\quad u.status =$ 🔵

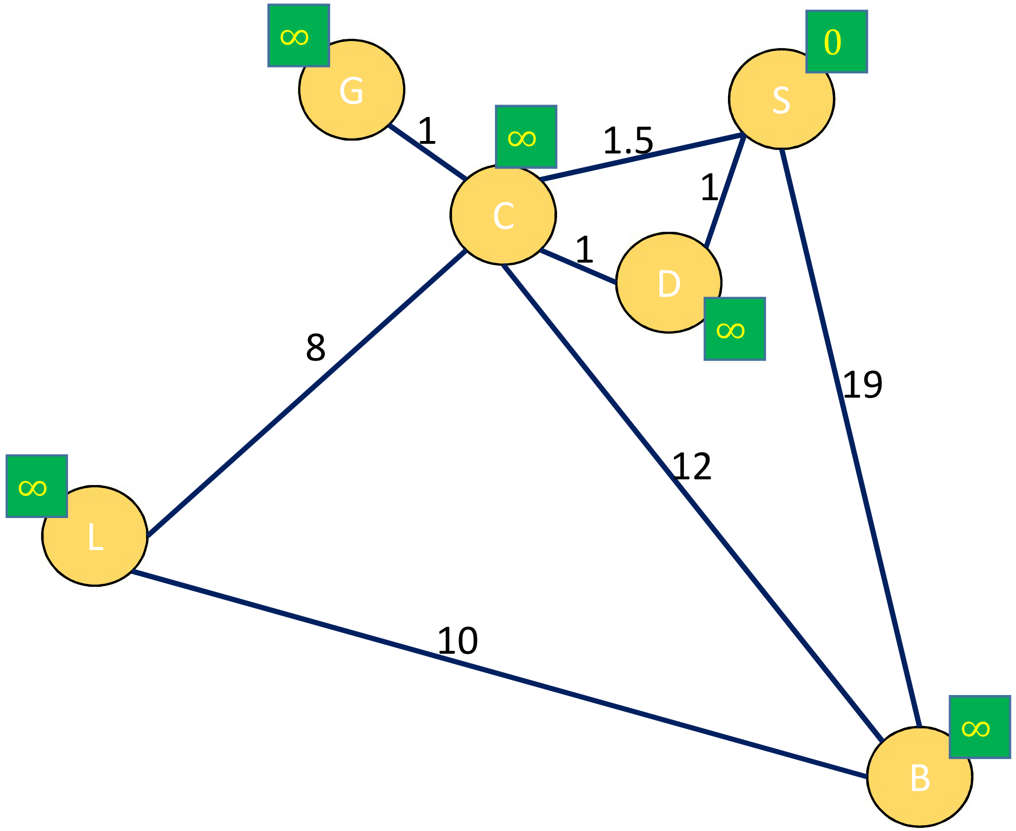
类比重力+细绳做法

- 每次都提起一个球（提起的球变成完成状态）
- 用预估值$d(u)$计算下一个会被提起的球
  - 即除了已经被提起的球外，下一个距离最短的球



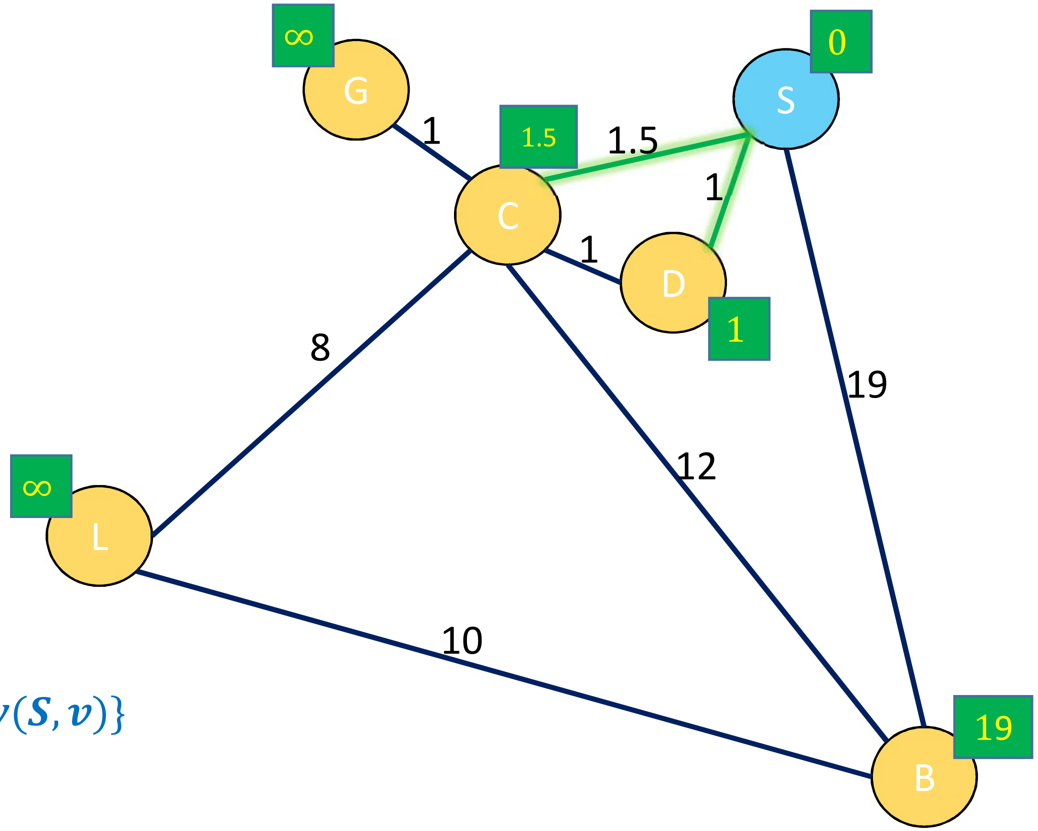
例子

- 未完成
- 完成
- 取预估值最小的顶点S



例子

- 未完成
- 完成



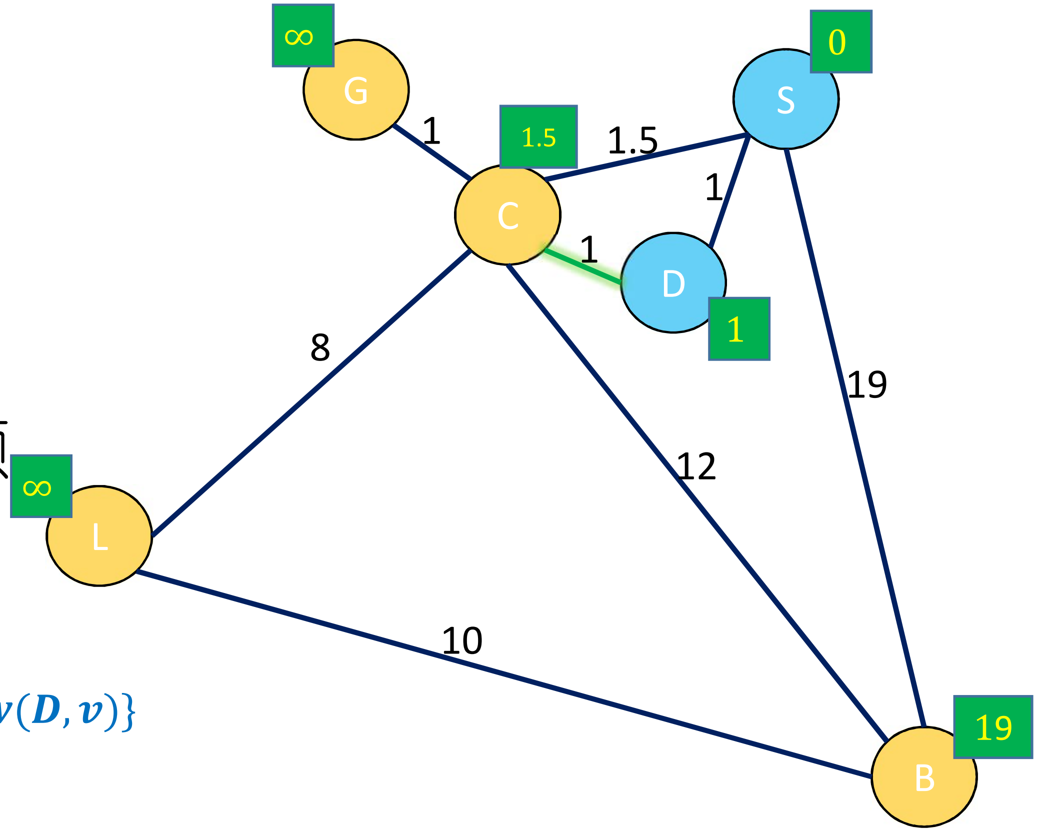
- 对于S邻接顶点v,

  $\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(S) + w(S, v)\}}$

- 把S标成完成

例子

- 未完成
- 完成



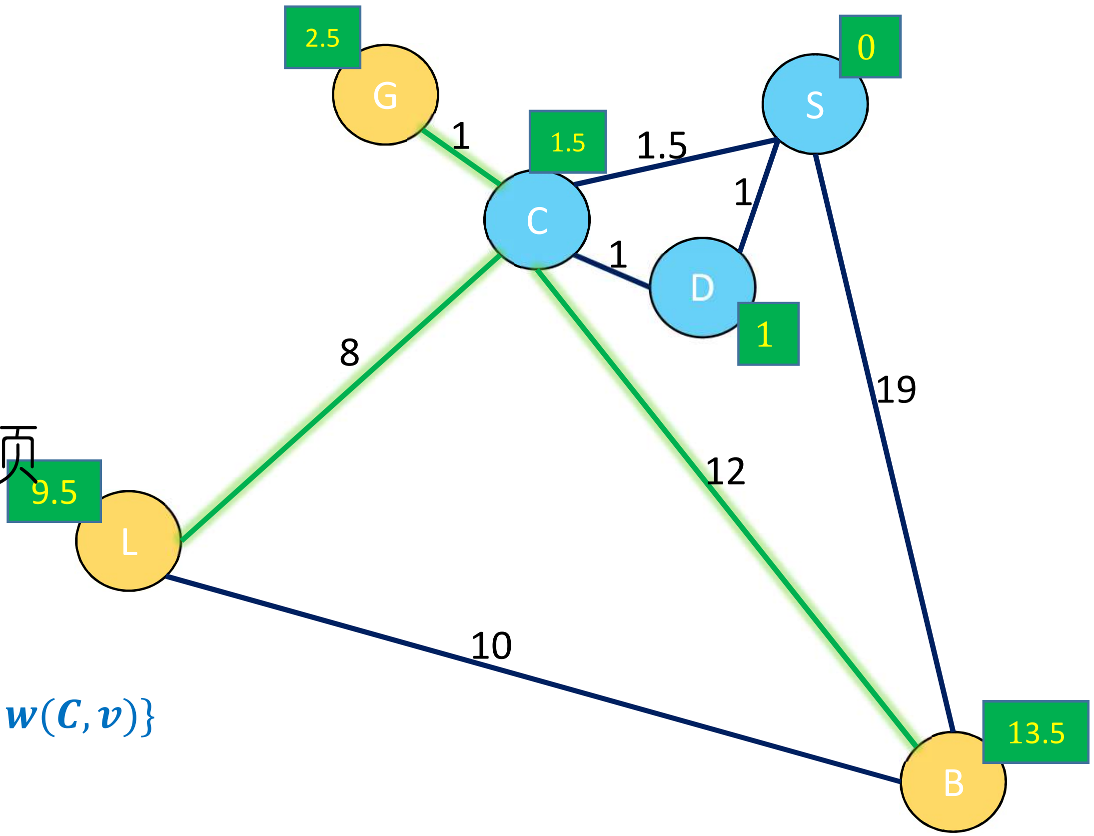
- 取预估值最小的顶点D
- 对于D邻接顶点v,

$\boldsymbol{d(v)} \leftarrow \boldsymbol{min}\{\boldsymbol{d(v)}, \boldsymbol{d(D)} + \boldsymbol{w(D,v)}\}$

- 把D标成完成

例子

- 未完成
- 完成



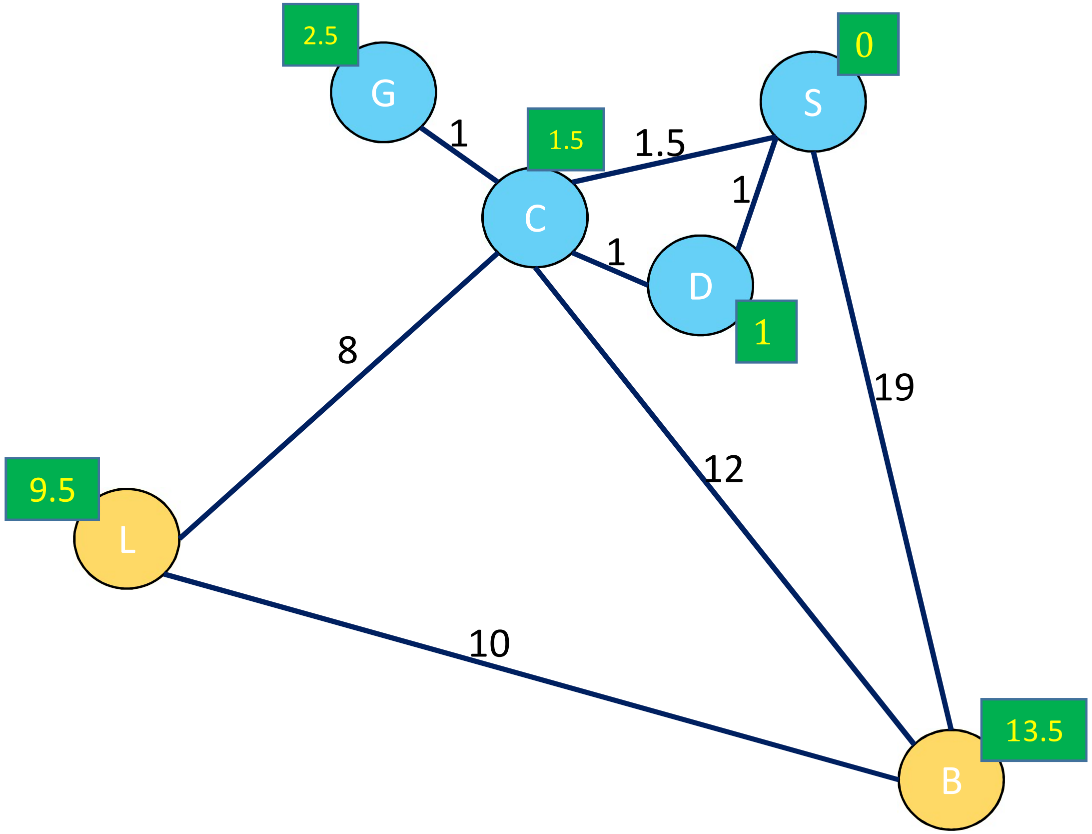
- 取预估值最小的顶点C
- 对于C邻接顶点v,

$$\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(C) + w(C,v)\}}$$

- 把C标成完成

例子

- 未完成
- 完成



- 取预估值最小的顶点G
- 没有邻接顶点
- 把G标成完成

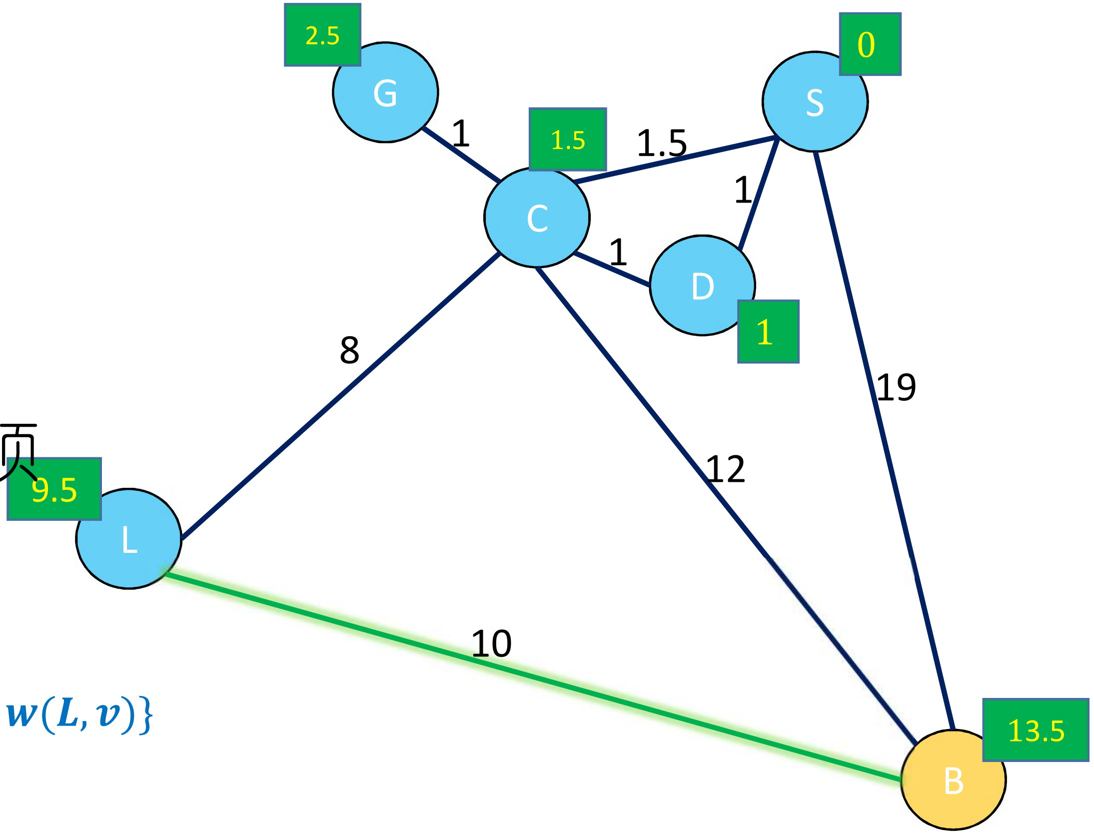
例子

- 未完成
- 完成

- 取预估值最小的顶点L
- 对于L邻接顶点v,

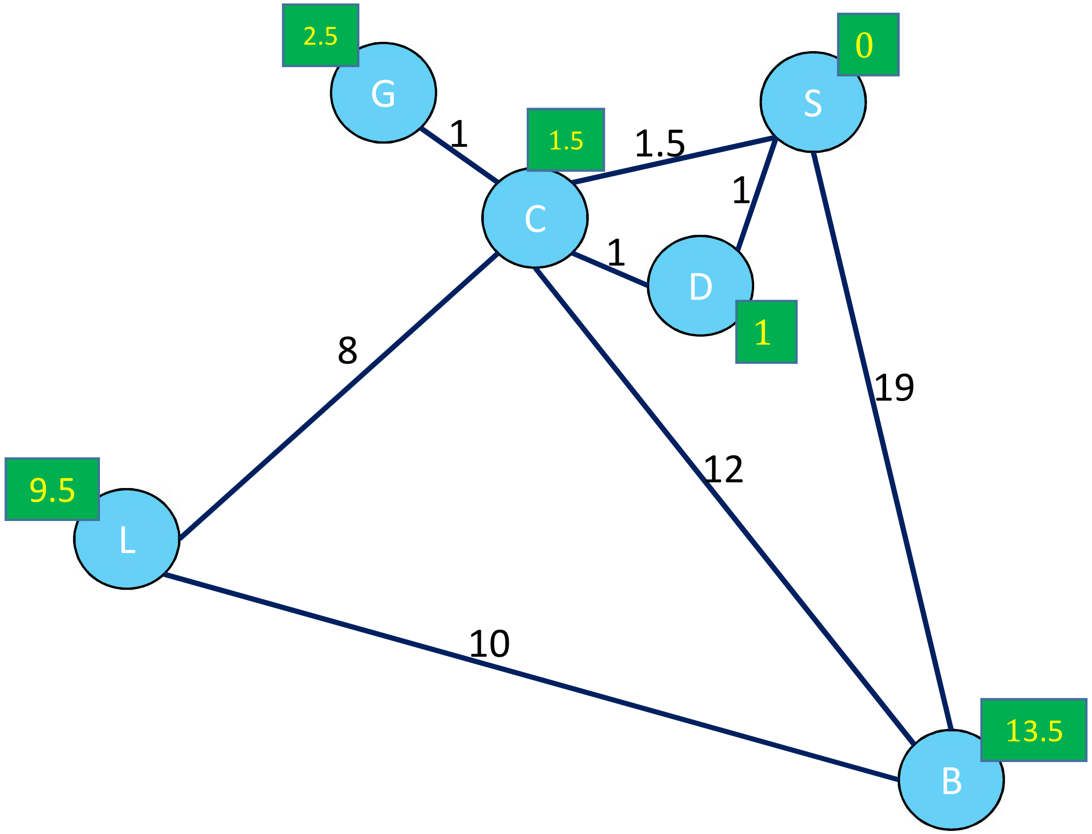
$$d(v) \leftarrow min\{d(v), d(L) + w(L, v)\}$$

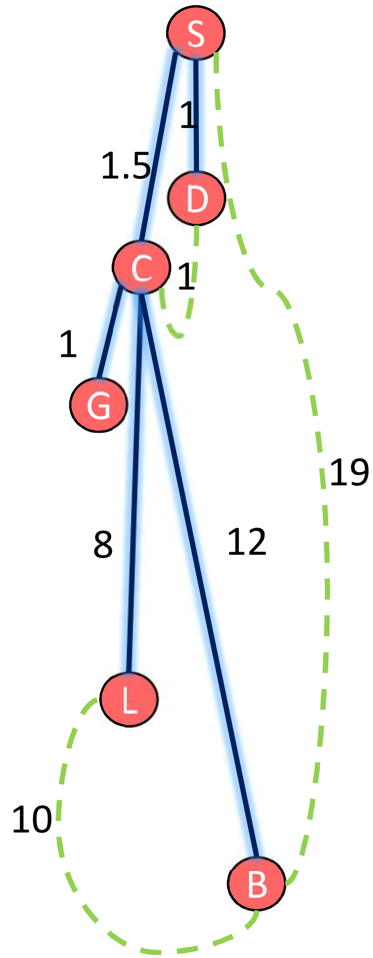
- 把L标成完成



例子

- 未完成
- 完成





- 取预估值最小的顶点B
- 没有未完成邻接顶点
- 把B标成完成

为什么正确

定理：dijkstra算法结束后，所有顶点的预估值$d(v)$都是实际最短距离$\delta(s,v)$

证明：

假设下面两条成立

1) 对任意顶点v，算法过程中$d(v) \geq \delta(s,v)$
2) 当一个预估值最小顶点v设置为完成状态，满足$d(v) = \delta(s,v)$

因为收敛操作只减不增， $d(v)$逐步逼近$\delta(s,v)$

顶点v变成完成状态时，正好其预估值是$\delta(s,v)$，之后就不再变动

最后每个顶点都处于完成状态，所以最后$d(v) = \delta(s,v)$

证明（一）

第一条：对任意顶点v，$d(v) \geq \delta(s,v)$

- 数学归纳法：假设第i次迭代后，我们有$d(v) \geq \delta(s,v)$，我们要证明第$i+1$次迭代后，$d(v) \geq \delta(s,v)$依然成立
- Base Case：起始状态$d(s) = 0 = \delta(s,s)$，$d(v) = \infty \geq \delta(s,v)$
- 在第$i+1$次迭代，我们找到预估值$d(u)$最小的未完成顶点u，对于它的所有未完成邻接顶点v，执行单步收敛操作

$$\boldsymbol{d(v) = min\{d(v),\ \ d(u) + w(u,v)\}}$$

$\delta(s,v) \leq \boldsymbol{d(v)}$

$$\begin{aligned}\delta(s,v) &\leq \delta(s,u) + \boldsymbol{w(u,v)} \\ &\leq \boldsymbol{d(u)} + \boldsymbol{w(u,v)}\end{aligned}$$

证明（二）

第二条：当一个顶点v设置为完成状态，那么$d(v) = \delta(s, v)$

- 数学归纳法：假设第i次迭代后，所有完成状态的顶点v都有$d(v) = \delta(s, v)$，我们要证明下一个预估值最小的未完成顶点x，已经满足$d(x) = \delta(s, x)$
- Base Case：起始状态$d(s) = 0 = \delta(s, s)$，已经满足
- 归纳步骤证明：在第$i + 1$次迭代，我们找到预估值最小的顶点x，然后对其邻接顶点执行收敛操作，同时把x设为完成状态
- 我们用反证法证明对于顶点x，已经有$d(x) = \delta(s, x)$

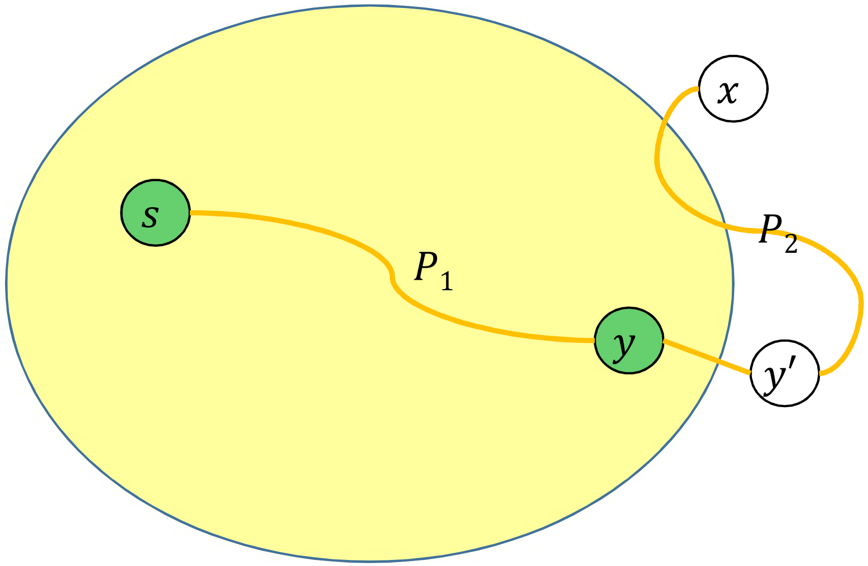
证明（二）

- 反证法：假设下一个预估值最小的未完成顶点x，$d(x) > \delta(s, x)$

假设s到x的真正最短路径是

$$s \xrightarrow{P_1} y \rightarrow y' \xrightarrow{P_2} x$$

- y’是路径上第一个未完成顶点（注意y’可能和x重合）
- $\boldsymbol{y}$是y’前一个的顶点，那么$\boldsymbol{y}$是完成状态（注意$\boldsymbol{y}$可能和$\boldsymbol{s}$重合）
- 路径P_2可能进入黄圈，也可能不进入



证明（二）

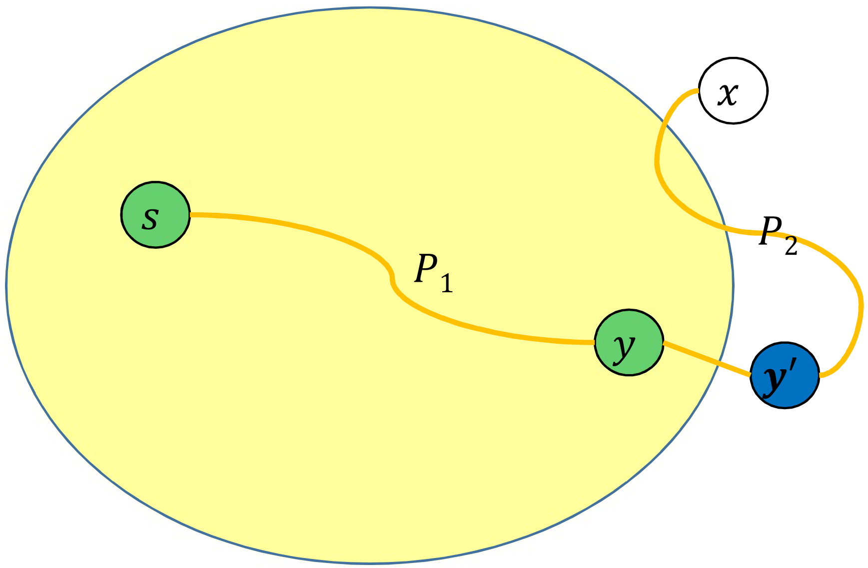
- 我们首先证明$\boldsymbol{d(y') = \delta(s, y')}$
- 根据第一条： $d(y') \geq \delta(s, y')$
- 因为最短路径的子路径是最短路径，所以$\delta(s, y') = \delta(s, y) + w(y, y')$

$$= \boldsymbol{d(y)} + \boldsymbol{w(y, y')}$$

$$\geq \boldsymbol{d(y')}$$

顶点y是完成状态，归纳结果$d(y) = \delta(s, y)$

在设置顶点y完成状态时，已经更新
$\boldsymbol{d(y') = min\{d(y'), d(y) + w(y, y')\}}$



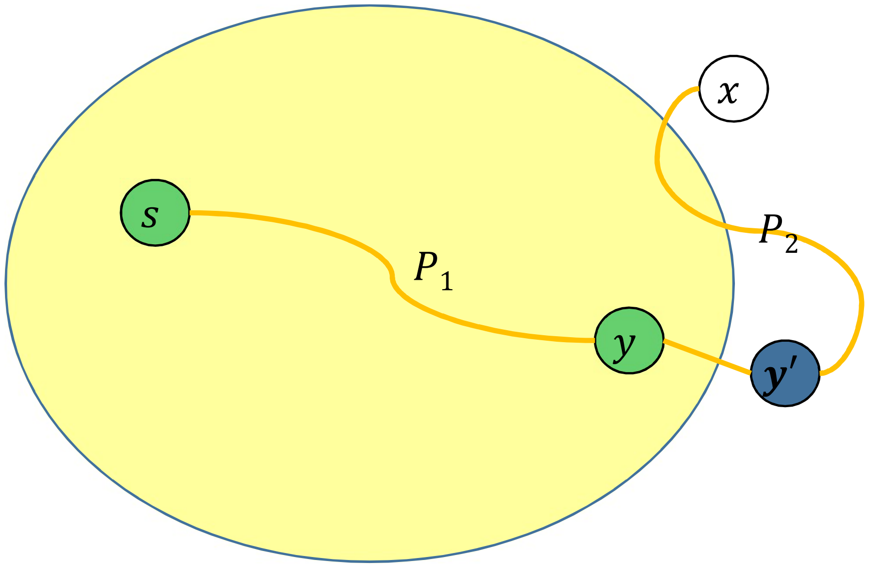
证明（二）

- 我们再证明$\boldsymbol{d(x) \le \delta(s,x)}$，导出矛盾
- 根据我们的选法，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d(x)} &\boldsymbol{\le d(y')} \\
&\boldsymbol{= \delta(s,y')} \\
&\boldsymbol{\le \delta(s,x)}
\end{aligned}
$$

上一页证明结果

$\boldsymbol{\delta(s,y')}$是最短路径的子路径



为什么正确

定理：**dijkstra**算法结束后，所有顶点的预估值$d(v)$都是实际最短距离$\delta(s,v)$

证明：假设下面两条成立

1) 对任意顶点v，算法过程中$d(v) \geq \delta(s,v)$ ✓
2) 当一个预估值最小的顶点v设置为完成状态，满足$d(v) = \delta(s,v)$ ✓

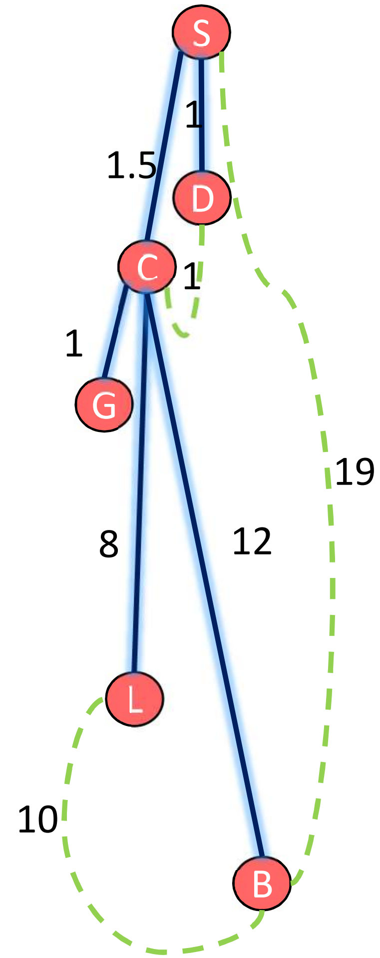
因为收敛操作只减不增，$d(v)$逐步逼近$\delta(s,v)$

顶点v变成完成状态时，正好某预估值是$\delta(s,v)$，之后就不再变动

最后每个顶点都处于完成状态，所以最后$d(v) = \delta(s,v)$

小结

- Dijkstra算法可以找到单源到其余顶点的最短距离
  - 图的边权重非负
- 同时也建立了一颗最短距离树，如果在收敛操作的时候把父节点记录下来



时间复杂度

- 对于每个顶点，都执行右边的一次迭代操作
- 关键是如何实现一次迭代操作，设计管理"未完成"顶点的数据结构：优先队列
  1) 找预估值$d(u)$最小的顶点u
     $u = FindMin()$
  2) 移去预估值最小顶点u，
     $ExtractMin(u)$
  3) 更新邻接顶点的预估值
     $UpdateKey(v, d)$

1) 取一个"未完成"的顶点u，其预估值$\boldsymbol{d(u)}$是最小的
2) 对于顶点u的所有"未完成"邻接顶点v，进行单步收敛操作
   $\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u, v)\}}$
3) 然后把顶点 u 的状态设置成"完成"

算法复杂度是

$$|V| \times \{T(FindMin) + T(ExtractMin)\} + |E| \times T(UpdateKey)$$

方案一：数组

如果$|V| = n$，$|E| = m$，

- $T(FindMin) = O(n)$
- $T(ExtractMin) = O(n)$
- $T(UpdateKey) = O(1)$

- Dijkstra算法的复杂度是
  $|V| \times \{T(FindMin) + T(ExtractMin)\} + |E| \times T(UpdateKey)$

$= n \times O(n) + O(m) = O(n^2)$

方案二：平衡二叉查找树

如果$|V| = n$，$|E| = m$，

- $T(FindMin) = O(\log(n))$
- $T(ExtractMin) = O(\log(n))$
- $T(UpdateKey) = O(\log(n))$

- Dijkstra算法的复杂度是
  $|V| \times \{T(FindMin) + T(ExtractMin)\} + |E| \times T(UpdateKey)$

$= n \times O(\log(n)) + O(m\log(n)) = O((n+m)\log(n))$

方案三：hash table

如果$|V| = n$，$|E| = m$，

- $T(FindMin) = O(n)$
- $T(ExtractMin) = O(1)$
- $T(UpdateKey) = O(1)$

- Dijkstra算法的复杂度是
  $|V| \times \{T(FindMin) + T(ExtractMin)\} + |E| \times T(UpdateKey)$

$= n \times O(n) + O(m) = O(n^2)$

方案四：堆

如果$|V| = n$，$|E| = m$，

- $T(FindMin) = O(1)$
- $T(ExtractMin) = O(\log(n))$
- $T(UpdateKey) = O(\log(n))$

- Dijkstra算法的复杂度是
  $|V| \times \{T(FindMin) + T(ExtractMin)\} + |E| \times T(UpdateKey)$

$= n \times O(\log(n)) + O(m \log(n)) = O((n + m) \log(n))$

方案五：Fibonacci堆

如果$|V| = n$， $|E| = m$，

- $T(FindMin) = O(1)$
- $T(ExtractMin) = O(\log(n))$
- $T(UpdateKey) = O(1)$

- Dijkstra算法的复杂度是
  $|V| \times \{T(FindMin) + T(ExtractMin)\} + |E| \times T(UpdateKey)$

$= \ n \times O(\log(n)) + O(m) = O(n \log(n) + m)$

小结

- Dijkstra算法虽然很快
- 只适用于权重非负的图
- 如果图的权重变了，需要重新计算最短路径

负边的最短路径算法

Bellman-Ford算法

- 比dijkstra算法要慢
- 不过可以处理负边
  - 如果不光考虑距离，额外考虑别的因素
- 检测负环

带负环的图

- 这种情况没有最短路径
- 因为每走一次负环，路径权重和降低

Bellman-Ford算法

- 每个顶点u都有个预估值$d(u)$，除了起始点s的值是0，别的顶点初始值都是∞
- 对下面的步骤执行$n-1$次：
  1) 对于图中所有边(u,v)，进行单步收敛操作
  $$\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u,v)\}}$$
- 然后如果存在某条边(u,v)：
  $$\boldsymbol{d(v) > d(u) + w(u,v)}$$
  那么返回存在负环
- 否则预估值$\boldsymbol{d(v)}$就是从起始点出发到$\boldsymbol{v}$的最短距离

伪代码

- 初始化

For each vertex u
    $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) = \infty$
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}) = 0$

- 最短距离迭代计算过程

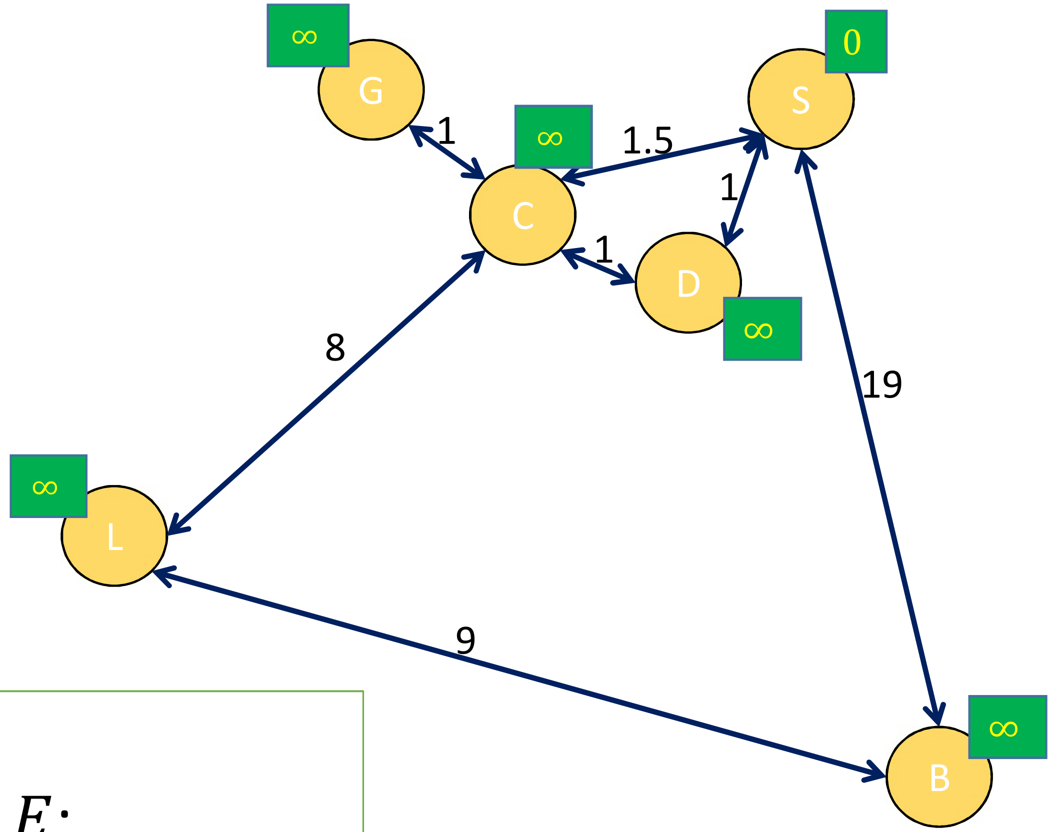
For $i \; = \; 1, \ldots, n - 1$:
    For each edge (u, v) in E:
        $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}) \leftarrow \boldsymbol{min}\{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\}$

- 检测负环

For each edge (u, v) in E:
    If $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}) > \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
        return “negative cycle”

例子

- 设置初始状态



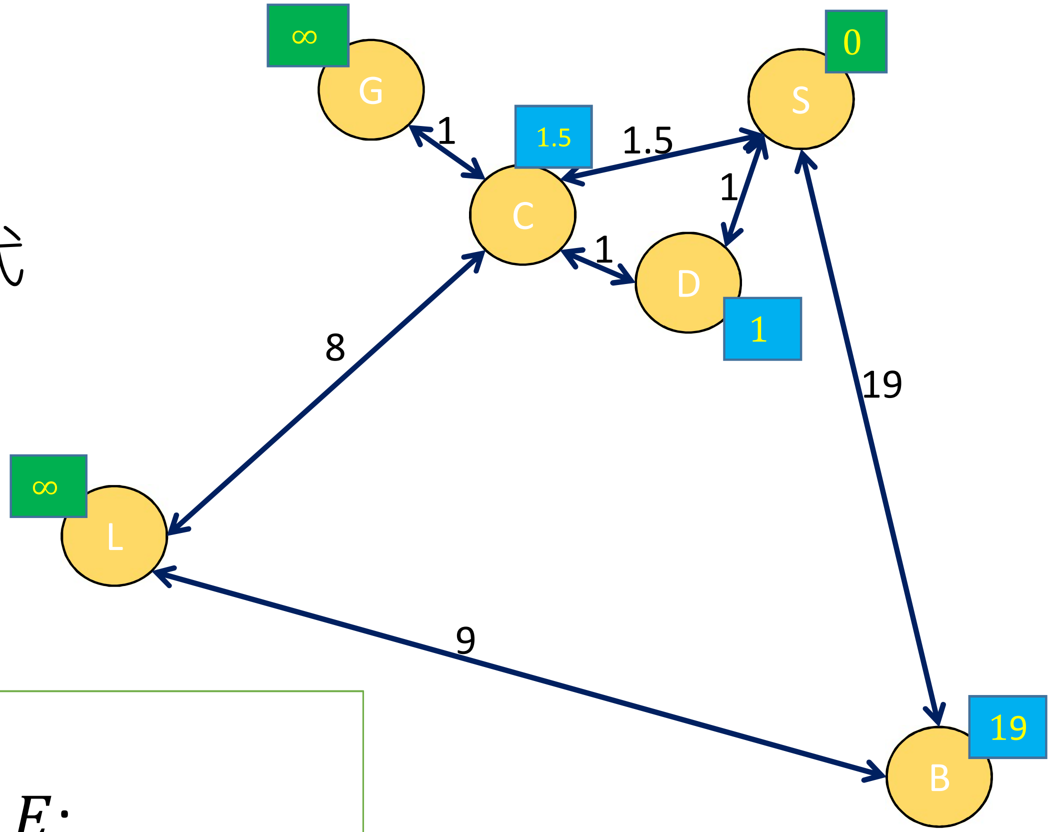
For $i\ =\ 1, \ldots, n-1$:

For each edge (u, v) in E:

$\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u,v)\}}$

例子

- 执行一遍距离迭代



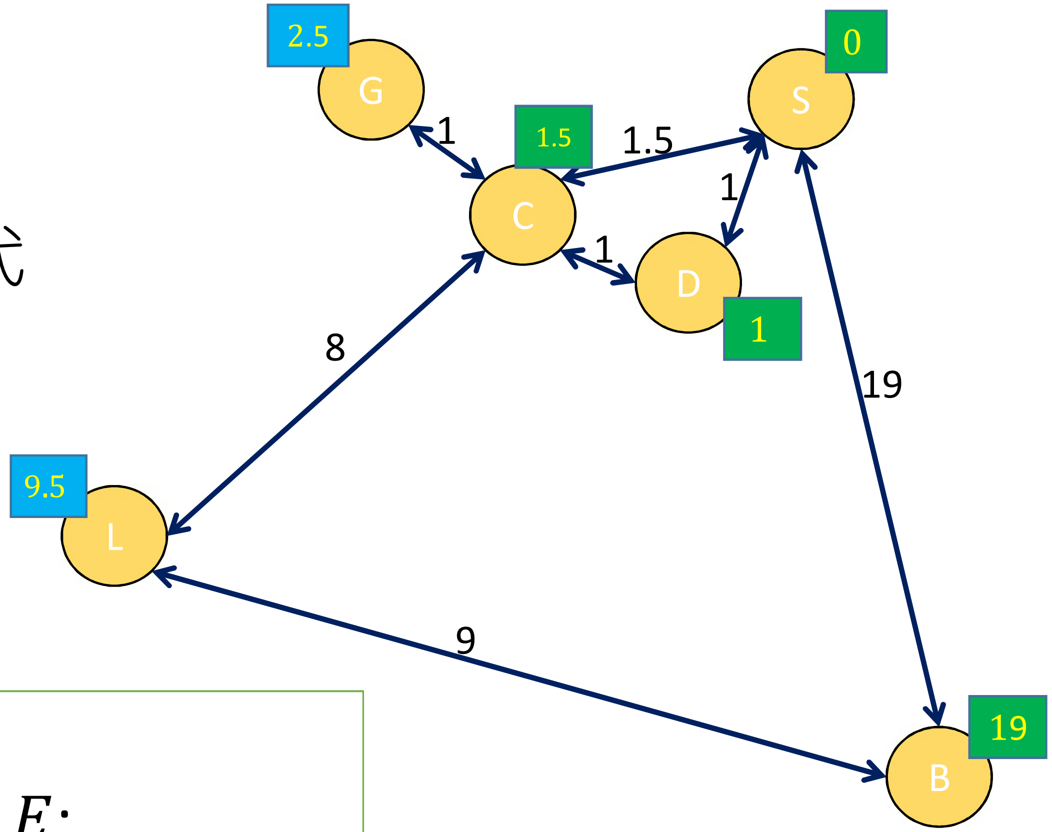
For $i = 1, \ldots, n-1$:

  For each edge (u, v) in E:

    $\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u,v)\}}$

例子

- 执行二遍距离迭代



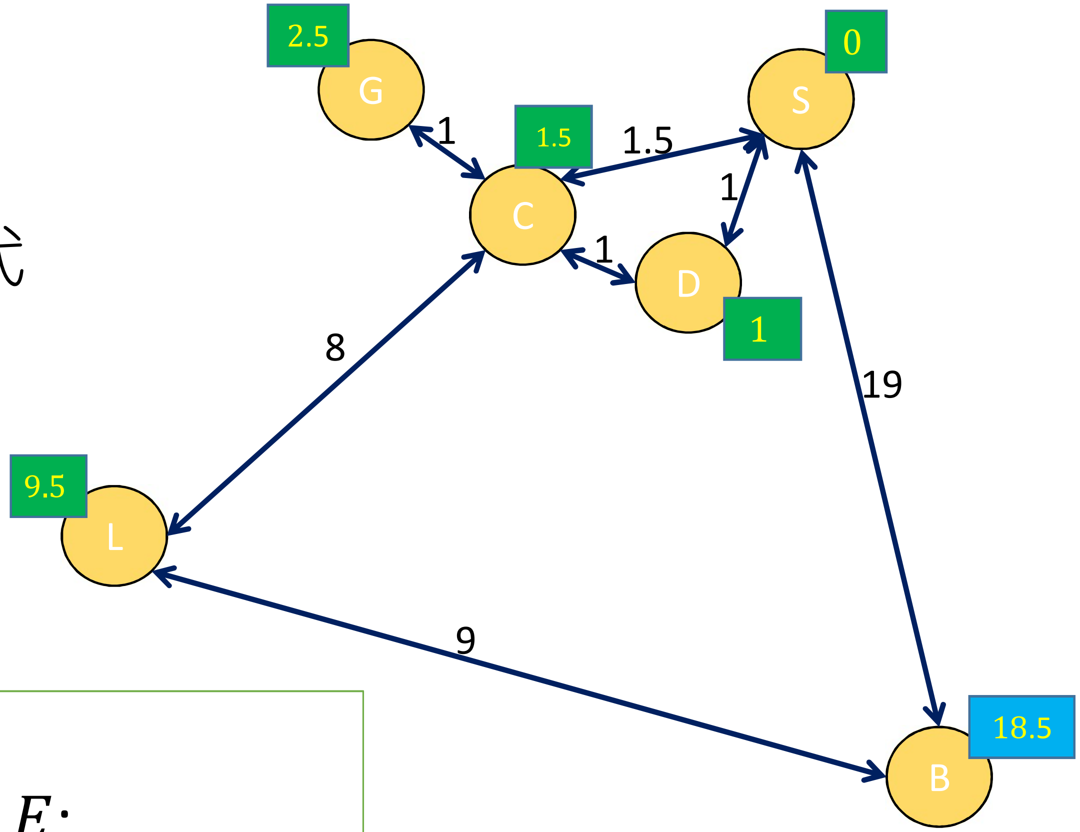
For $i = 1, \ldots, n-1$:

For each edge (u, v) in E:

$$\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u,v)\}}$$

例子

- 执行三遍距离迭代



For $i = 1, \dots, n-1$:

For each edge (u, v) in E:

$\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u,v)\}}$

时间复杂度

如果$|V| = n$， $|E| = m$，

- Bellman-Ford算法复杂度是$O(mn)$
- 比dijkstra算法要慢

- 好处是
  - 可以处理负边
  - 可以分布式计算

For $i = 1, \dots, n-1$:
  For each edge (u, v) in E:
    $\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u, v)\}}$

为什么正确

定理：**Bellman-Ford**算法结束后，所有顶点的预估值$d(v)$都是实际最短距离$\delta(s,v)$

证明：用数学归纳法证明

- 假设第i次迭代后，对于顶点v，如果其真正最短距离最多i条边，那么$d(v)=\delta(s,v)$

- 首先，base case：第0次迭代后，$d(s)=0=\delta(s,s)$

证明

- 要证明再迭代一次后，对于顶点v，如果其真正最短距离最多$i+1$条边，那么$d(v)=\delta(s,v)$

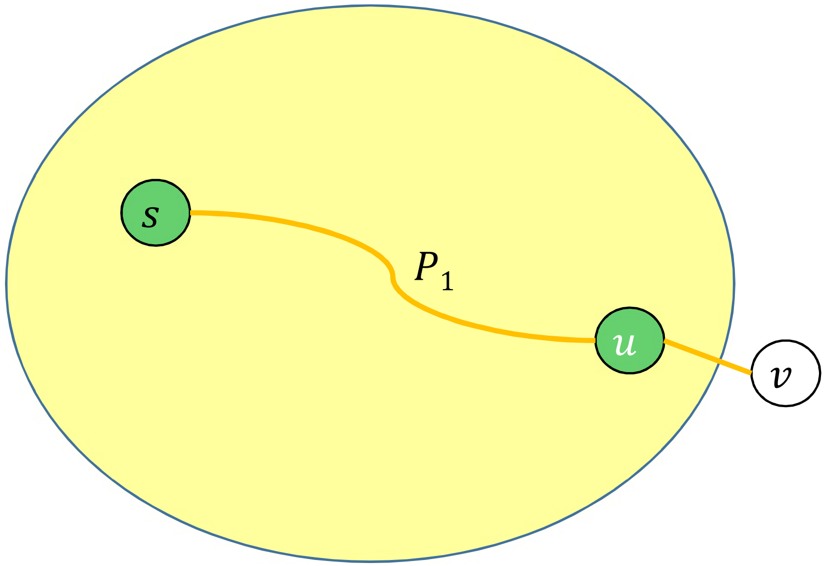
假设s到v的真正最短路径是

$$s \xrightarrow{P_1} u \rightarrow v$$

- 因为$\boldsymbol{s}$到$\boldsymbol{v}$的最短路径最多$i+1$条边
- 所以$\boldsymbol{s}$到$\boldsymbol{u}$的最短路径P_1最多i条边
- 根据归纳假设，$d(u)=\delta(s,u)$
- 那么再迭代一次后，

$$\boldsymbol{d(v)=min\{d(v),\quad d(u)+w(u,v)\}}$$

$$\boldsymbol{\delta(s,u)+w(u,v)=\delta(s,v)}$$



证明

- Base Case： 第0次迭代后， $d(s) = 0 = \delta(s, s)$
- 假设第i次迭代后，对于顶点v，如果其真正最短距离最多i条边，那么$d(v) = \delta(s, v)$
- 再迭代一次后，对于任意顶点v， 如果其真正最短距离最多$i + 1$条边，那么$d(v) = \delta(s, v)$
- 结论：第$n - 1$次迭代后，对于任意顶点v，如果其真正最短距离最多$n - 1$条边，那么$d(v) = \delta(s, v)$

- 在没有负环的情况下，最短距离是简单路径，即最多$n - 1$条边
- 所以结论对所有顶点都成立

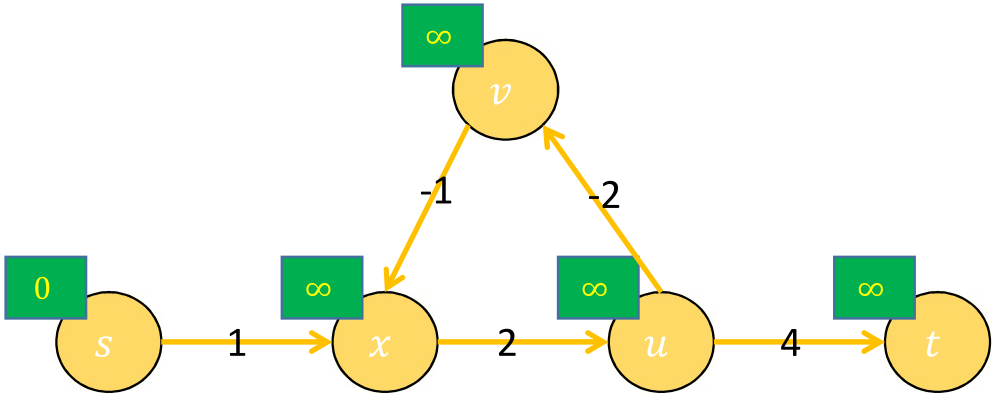
小结

- Bellman-Ford算法复杂度是$O(mn)$
- 如果没有负环，算法结束时，对于任意顶点v， $d(v) = \delta(s, v)$
- 注意负边是允许的
- 如果有负环，那么最短路径不会收敛。可以按以下方法检测

For each edge (u, v) in E:
    If $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}) > \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
        return “negative cycle”

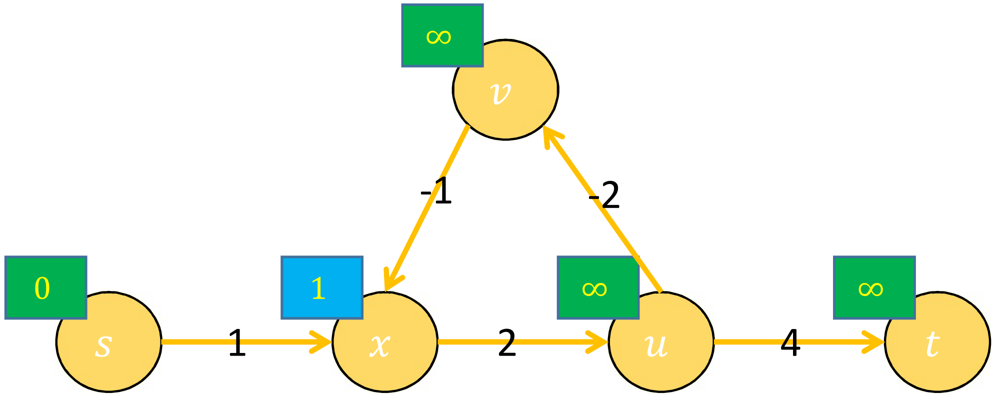
负环图

- 设置初始状态
- 更新顺序 ut, vx, uv, xu, sx



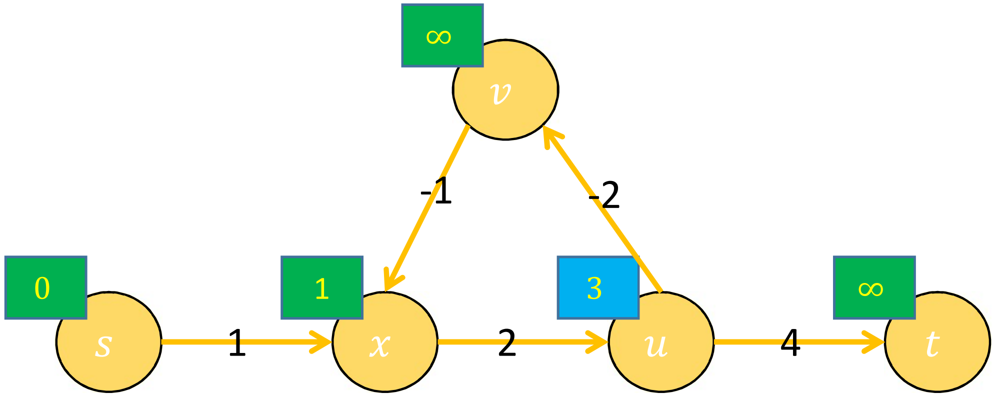
负环图

- 执行一遍距离迭代
- 更新顺序 ut, vx, uv, xu, sx



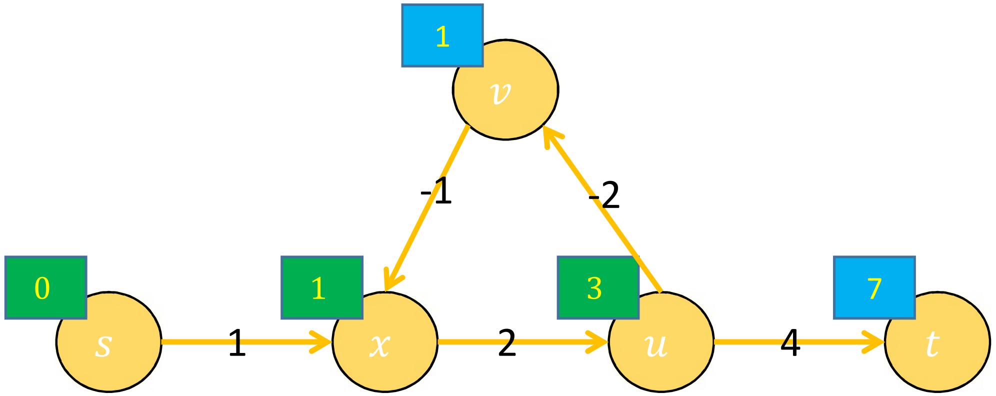
负环图

- 执行二遍距离迭代
- 更新顺序 ut, vx, uv, xu, sx



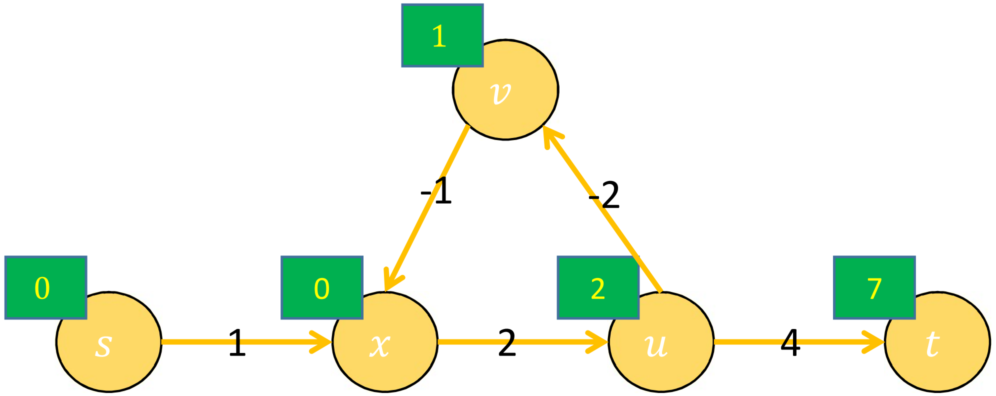
负环图

- 执行三遍距离迭代
- 更新顺序
  ut, vx, uv, xu, sx



负环图

- 执行四遍距离迭代
- 更新顺序 ut, vx, uv, xu, sx
- $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}) = 1$
- $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$



For each edge (u, v) in E:
    If $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}) > \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
        return “negative cycle”

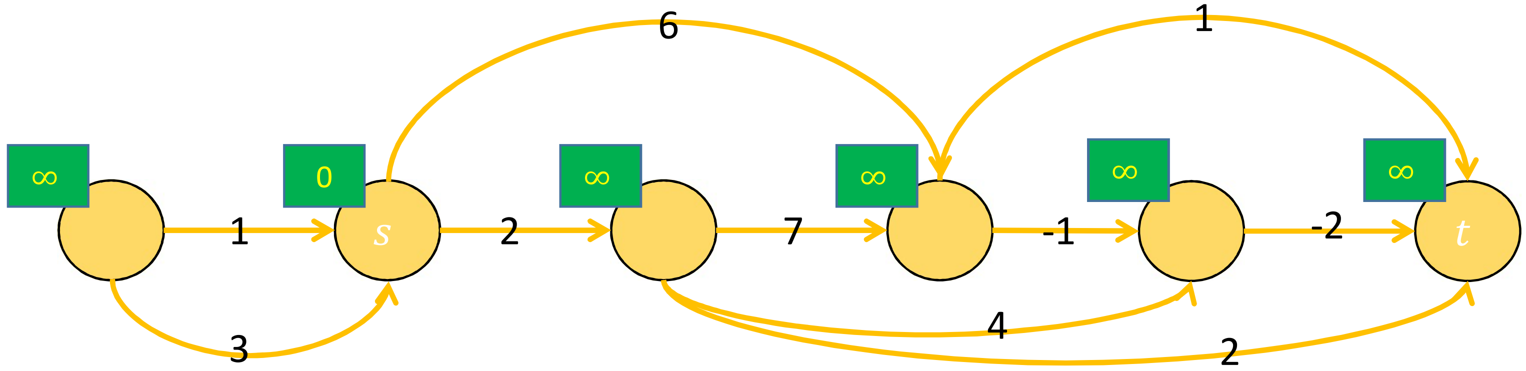
总结

- BFS算最短路径只适合没有权重的图
- 在加权图上，单源最短路径的算法是
  - Dijkstra算法效率很高，不过
    - 适用没有负边的图
    - 需要有个优先队列对所有顶点集中管理
  - Bellman-Ford算法速度要慢点，不过
    - 可以处理有负边的图
    - 可以分布式计算，每个顶点更新只需要知道邻接顶点的信息，更新的顺序无关紧要

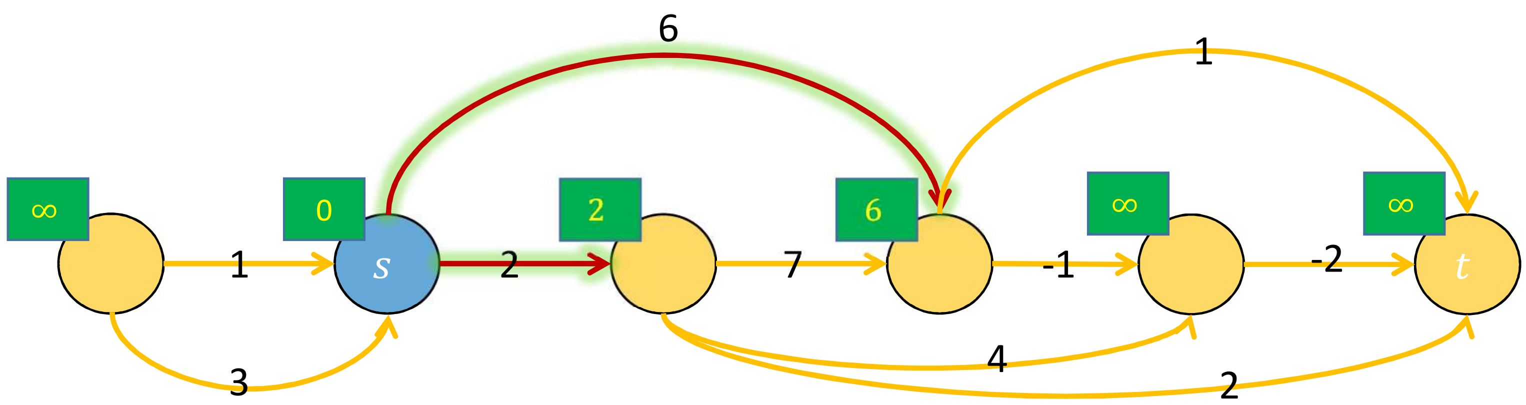
DAG最短路径算法

- 时间复杂度是$O(|V| + |E|)$

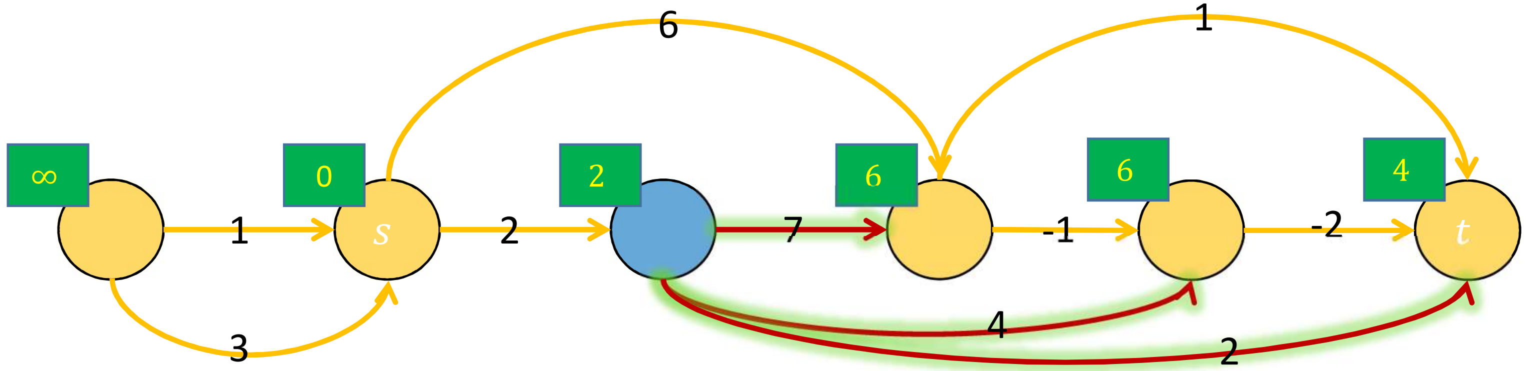
TopologySort()
For each vertex u in topology order:
  For each neighbor v of u:
    $\boldsymbol{d(v) \leftarrow min\{d(v), d(u) + w(u,v)\}}$



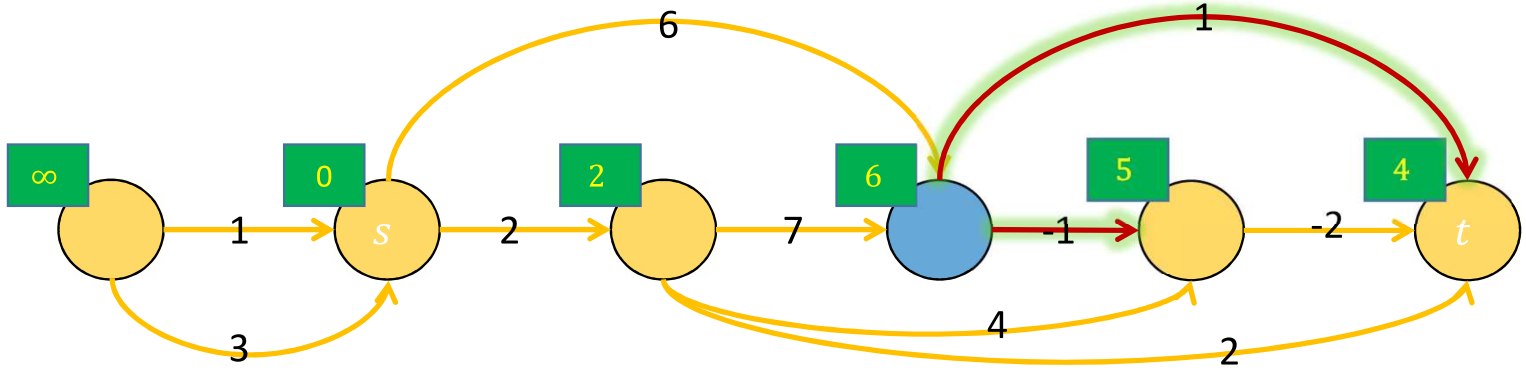
DAG最短路径算法



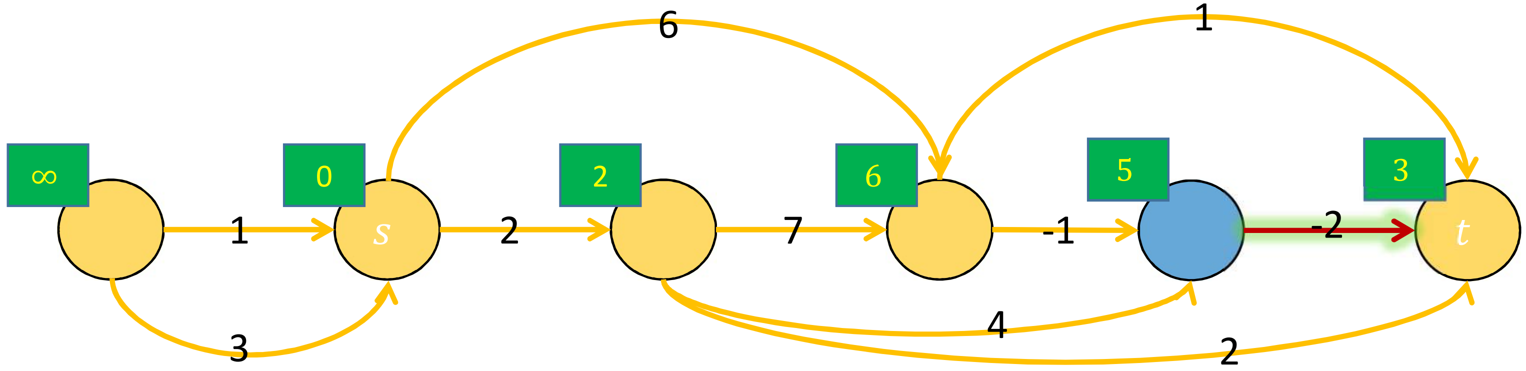
DAG最短路径算法



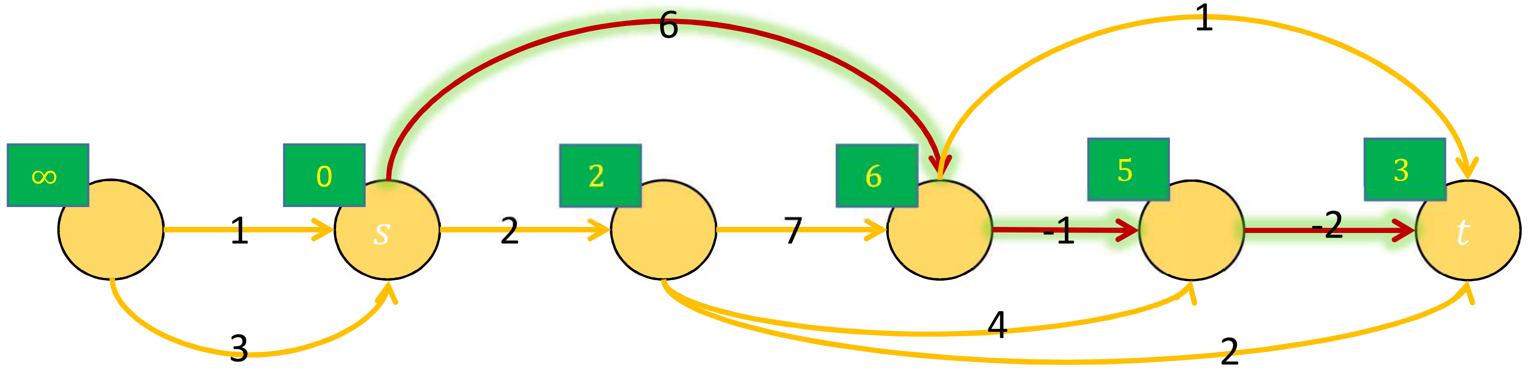
DAG最短路径算法



DAG最短路径算法



DAG最短路径算法



下面……

- 图中两两之间的最短距离
- 使用动态规划Dynamic Programming编程

Q&A

Thanks!