数据结构与算法
DATA STRUCTURE

第十四、五讲 树

胡浩栋

信息管理与工程学院

2017 - 2018 第一学期

课堂内容

- 树Tree

递归使用看场合

- 规模不大时候，利用call stack机制实现
- 比如把整数转换进制

```
void PrintDigit(int x, int base = 10)
{
    if (x >= base)
    {
        PrintDigit(x / base, base);
    }
    cout << x % base << " ";
}
```

- 树结构里的算法最好不使用递归（循环+栈结构）

树

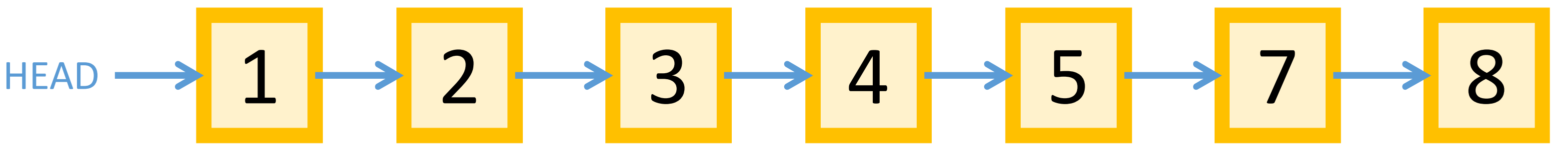
树结构

- 之前讲了array， linklist， stack， queue，都是线性结构
- 树结构Tree是第一个非线性结构
- 数据结构中的重点

应用

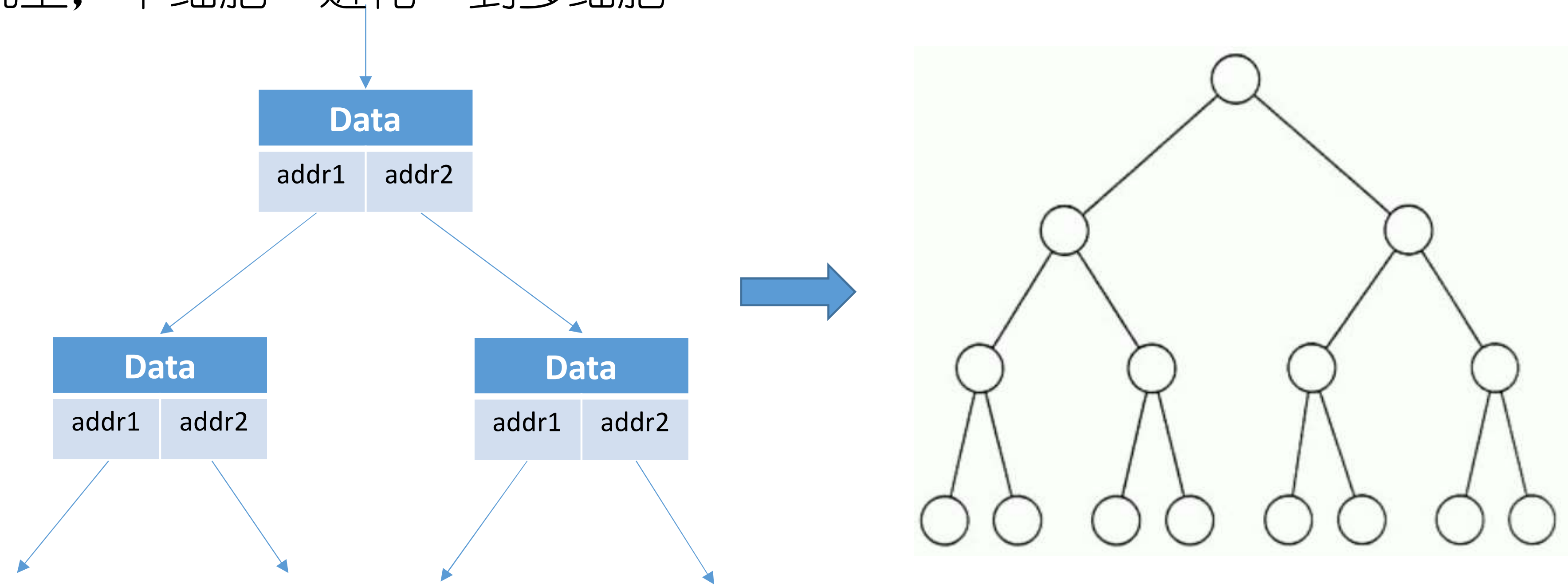
- 数据库用b-tree
- 文件系统
- 编译器
- 图算法
- 常用的数据结构map，dictionary

回顾链表



链表 → 树Tree

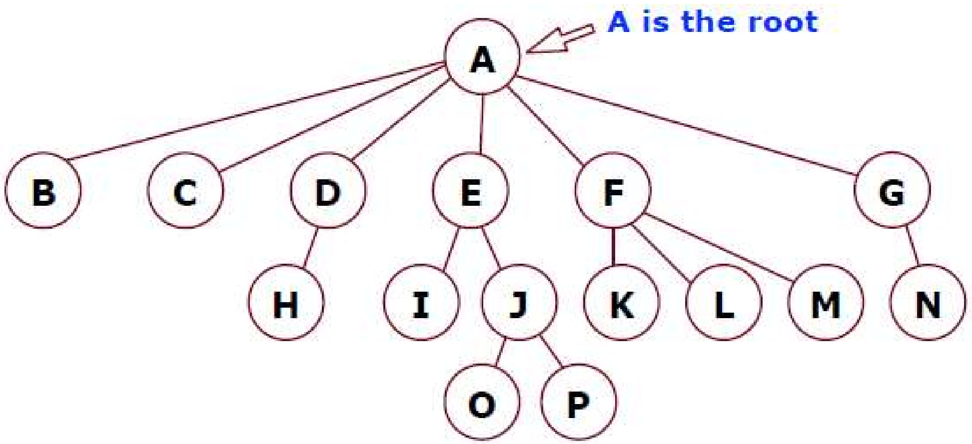
直观上，单细胞“进化”到多细胞



树的定义（递归）

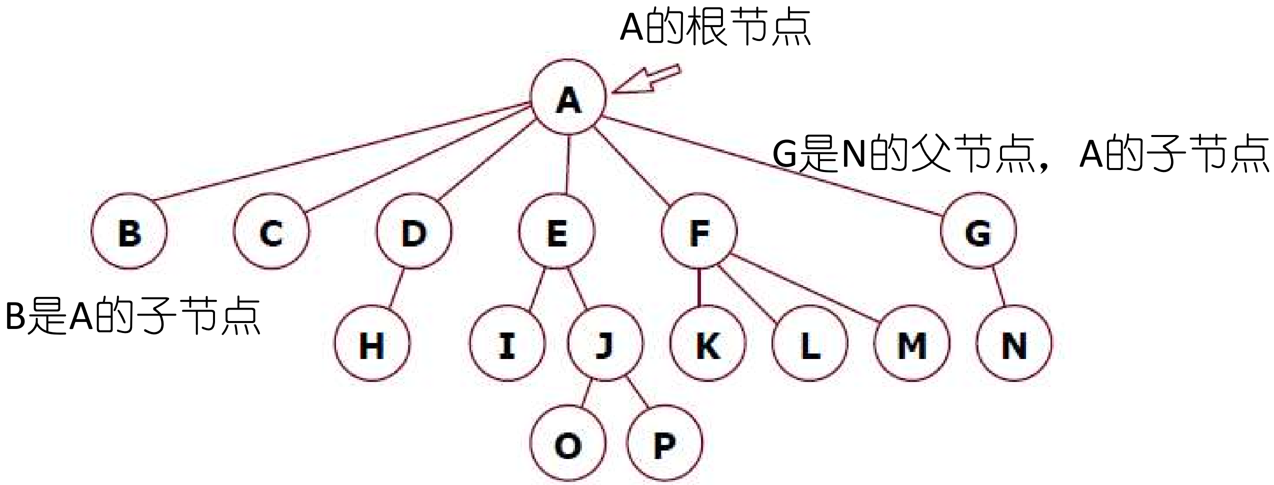
树就是一些节点nodes的集合

- 可以是空集
- 有一个根节点root，和0个或者多个子树T_1，T_2，……，T_k的根节点直接相连
- T_i也是树结构，称为根节点root的子树subtree
- 如果有N个节点，那么有$N-1$条边



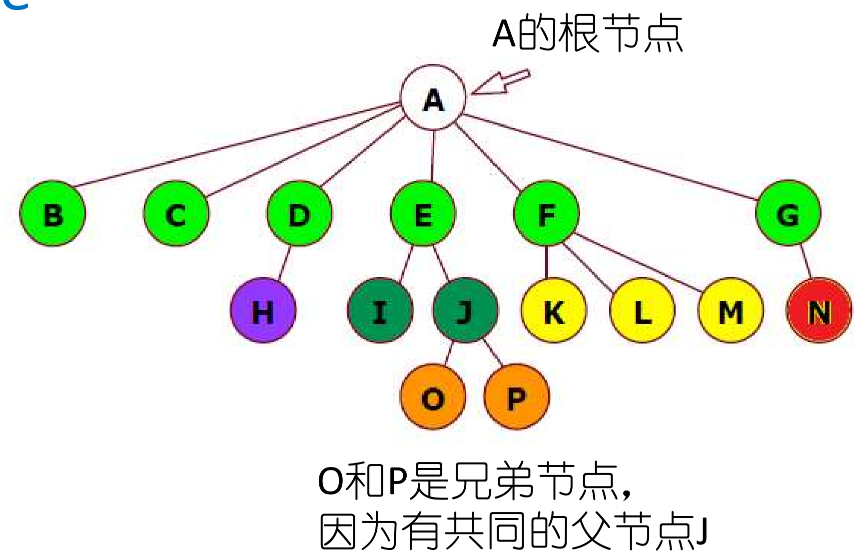
树的术语

- 子节点child node
- 父节点parent node



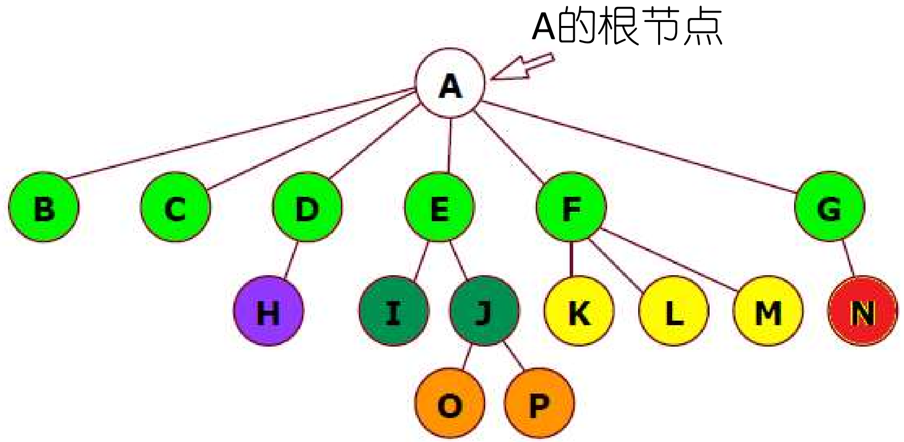
树的术语

- 子节点child node
- 父节点parent node
- 兄弟节点sibling node



树的术语

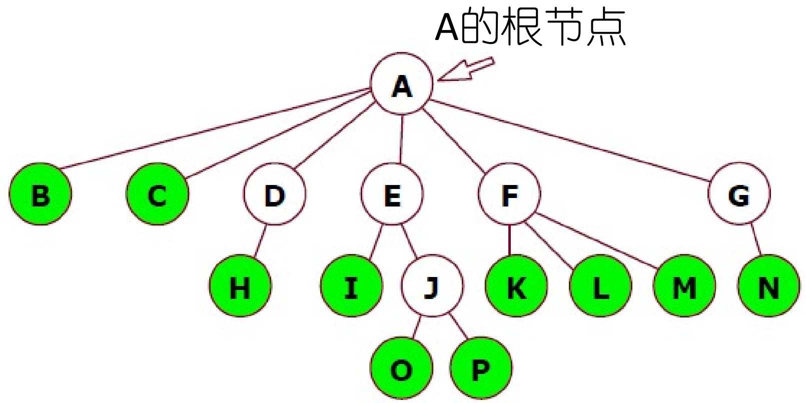
- 子节点child node
- 父节点parent node
- 兄弟节点sibling node
- 祖先节点ancestor
- 子孙节点descendant



O和P是A的子孙节点，
或者说A是O和P的祖先节点

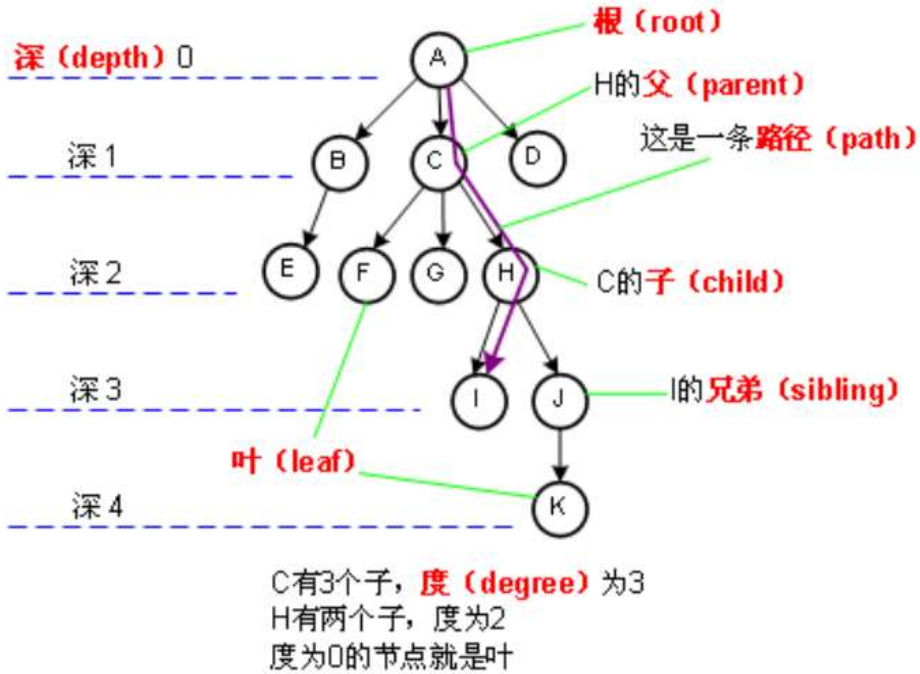
树的术语

- 叶节点leaf node：
  所有没有子节点的节点
- 度degree是指节点有几个子节点



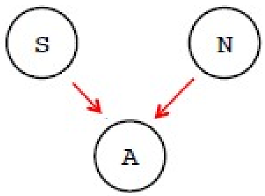
树的术语

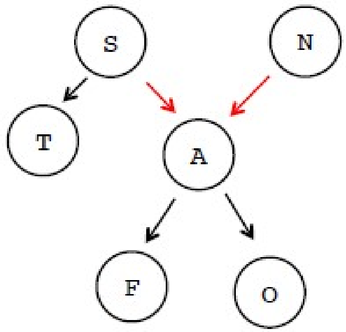
- 定义路径path从某个父节点到子节点
- 路径的长度length就是边的数目
- 一个节点的深度depth就是从根节点到它自己的路径的长度
  - 根节点深度是0
  - J的深度是3
- 一个节点的高度height就是从它自己到子叶节点的的最长路径的长度
  - H的高度是2
  - 叶节点的高度是0
- 树的高度height就是根节点的高度
  - 例子中树的高度是4



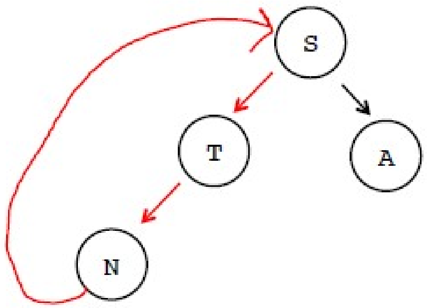
树的特点

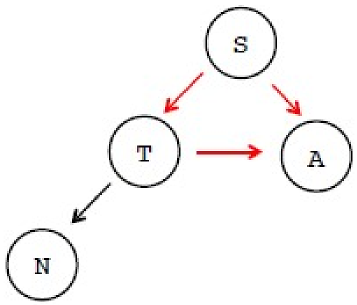
- 每个节点只能有一个父节点





- 不能形成闭路



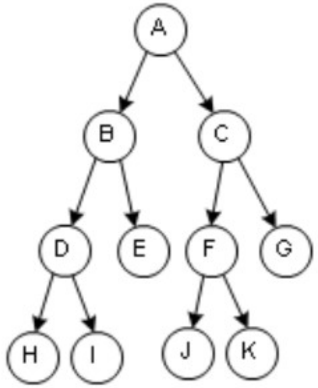


树的种类

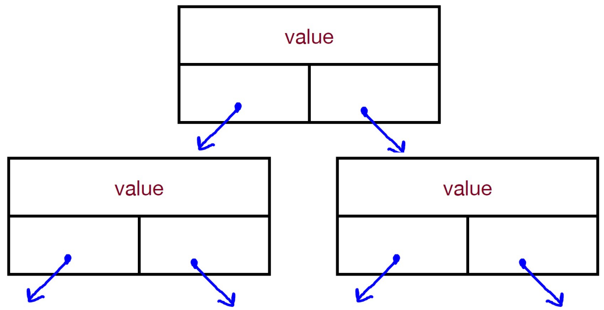
- 无序树：树中任意节点的子结点之间没有顺序关系，这种树称为无序树,也称为自由树;
- 有序树：树中任意节点的子结点之间有顺序关系，这种树称为有序树；
- 二叉树：每个节点最多含有两个子树的树称为二叉树；
- 二叉查找树
- 堆
- 哈夫曼树
- 红黑树，AVL树，等变种

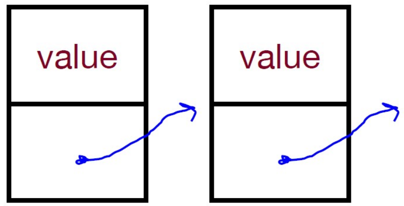
树的表达方式

- 类似于链表，只是链表只指向下一个元素
- 二叉树指向下两个元素



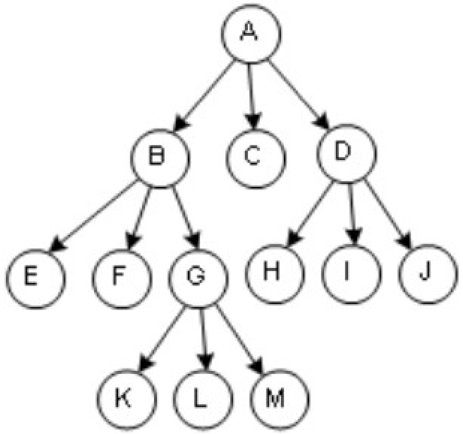

```
struct TreeNode
{
    int key;
    TreeNode *left;
    TreeNode *right;
};
```



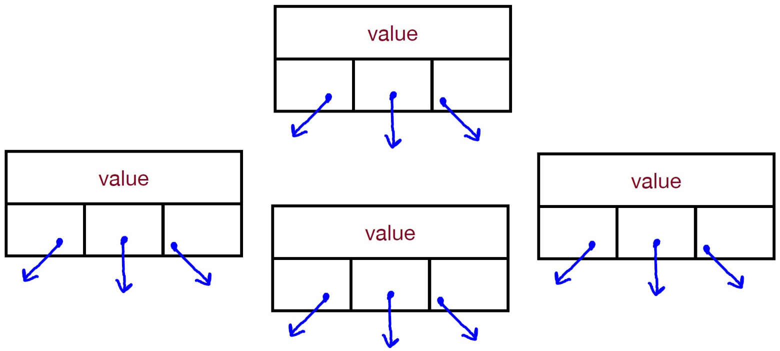


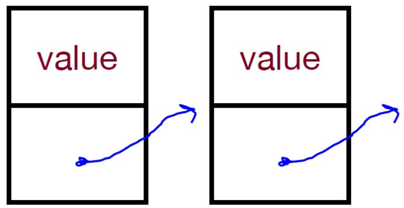
树的表达方式

- 类似于链表，只是链表只指向下一个元素
- 三叉树指向下三个元素



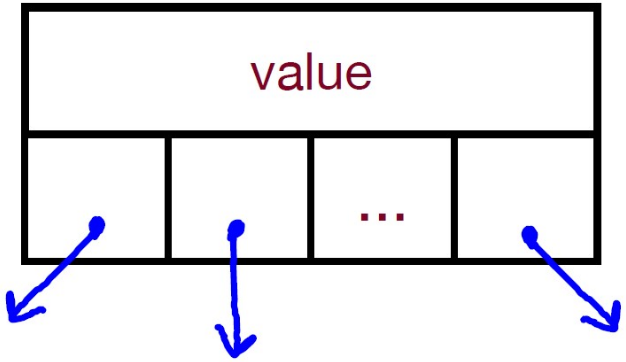

```
struct TreeNode
{
      int key;
      TreeNode *left;
      TreeNode *middle;
      TreeNode *right;
};
```





树的表达方式

- 类似于链表，只是链表只指向下一个元素
- 树指向下几个元素




```
struct TreeNode
{
    int key;
    vector<TreeNode *> children;
};

class Tree
{
private:
    TreeNode * root;
};
```

这里std::vector是动态数组。
如果用静态数组，缺点是一个我们不知道有多少子节点；另一个是就算我们知道有上界，也会浪费很多空间

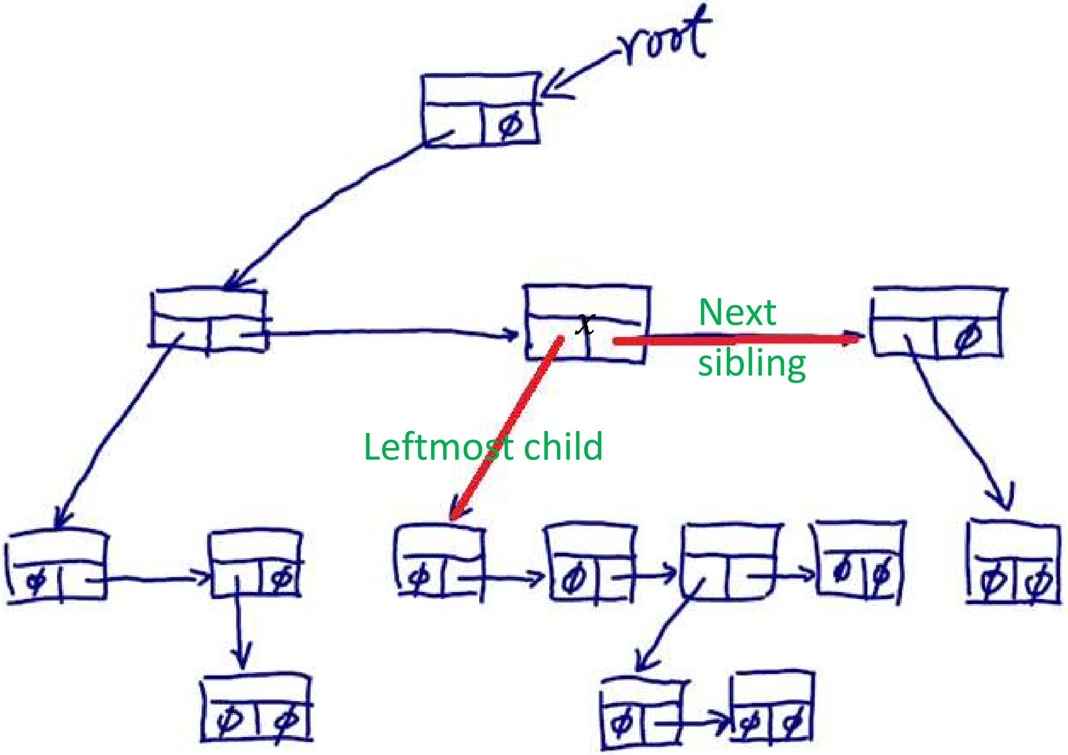
树的表达方式（二）

- 每个节点只用两个指针，却能表示一般的树（多个子节点）
- 巧妙的用了链表来表示多个子节点

1. 节点x的一个指针指向x的最左边的子节点
2. 节点x的另一个指针指向x的下一个兄弟节点

```
struct TreeNode
{
    int key;
    TreeNode * leftMost;
    TreeNode * nextSibling;
};
```

左子节点，右兄弟结点表达方式



父节点表示法

每个节点同样由两个部分构成，第一个部分仍然是数据，第二个部分也是指针，但指向父节点

由于树中每个结点最多只有一个父节点，因此每个节点只需要保存一个指针。

- 可根据指针是否为空判断一个结点是否为根节点。
- 找父节点容易，找子节点难。

- 这种方法一般是辅助手段，不是主要的表达树的方式。

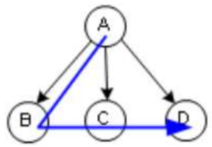
树遍历traversal的方法

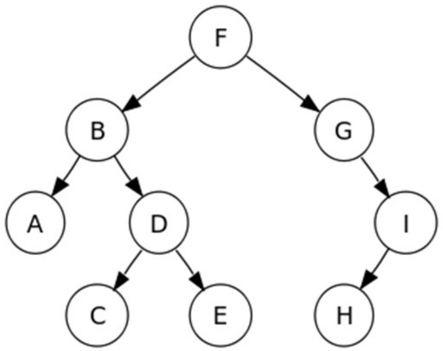
树的遍历是按一定顺序访问树中每个结点，同时每个结点不要重复访问（数据）

- 前序遍历Pre-order： 深度优先
- 后序遍历Post-order： 深度优先
- 按层遍历Level-order： 广度优先
- 中序遍历In-order：

前序遍历

- 先对当前节点操作
- 从左到右找子节点





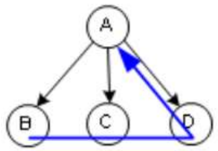
前序遍历输出： F B A DCE GIH

```
struct TreeNode
{
    int key;
    vector<TreeNode *> children;
};
```

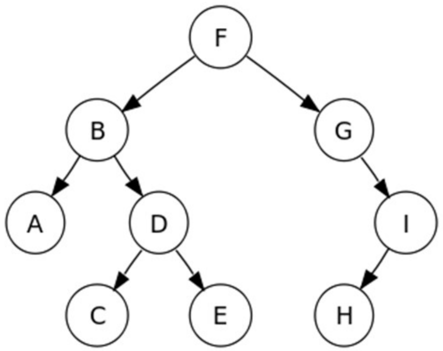
```
void PreOrder(const TreeNode * root)
{
    if(root == nullptr)
    {
        return;
    }

    cout<< root->key << " ";
    for (int i = 0; i < root->children.size(); i++)
    {
        PreOrder(root->children[i]);
    }
}
```

后序遍历

- 从左到右找子节点
- 最后对当前节点操作




```
struct TreeNode
{
    int key;
    vector<TreeNode *> children;
};
```

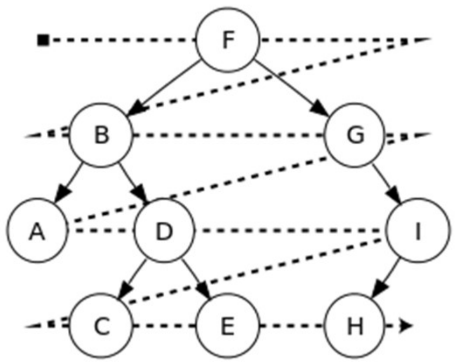



```
void PostOrder(const TreeNode * root)
{
    if(root == nullptr)
    {
        return;
    }
    for (int i = 0; i < root->children.size(); i++)
    {
        PostOrder(root->children[i]);
    }
    cout<< root->key << " ";
}
```

- 后序遍历输出：A CED B HIG F

按层遍历

- 逐层，从左到右
- 广度优先
- 用队列实现，类似用queue实现stack



- 按层遍历输出： F BG ADI CEH

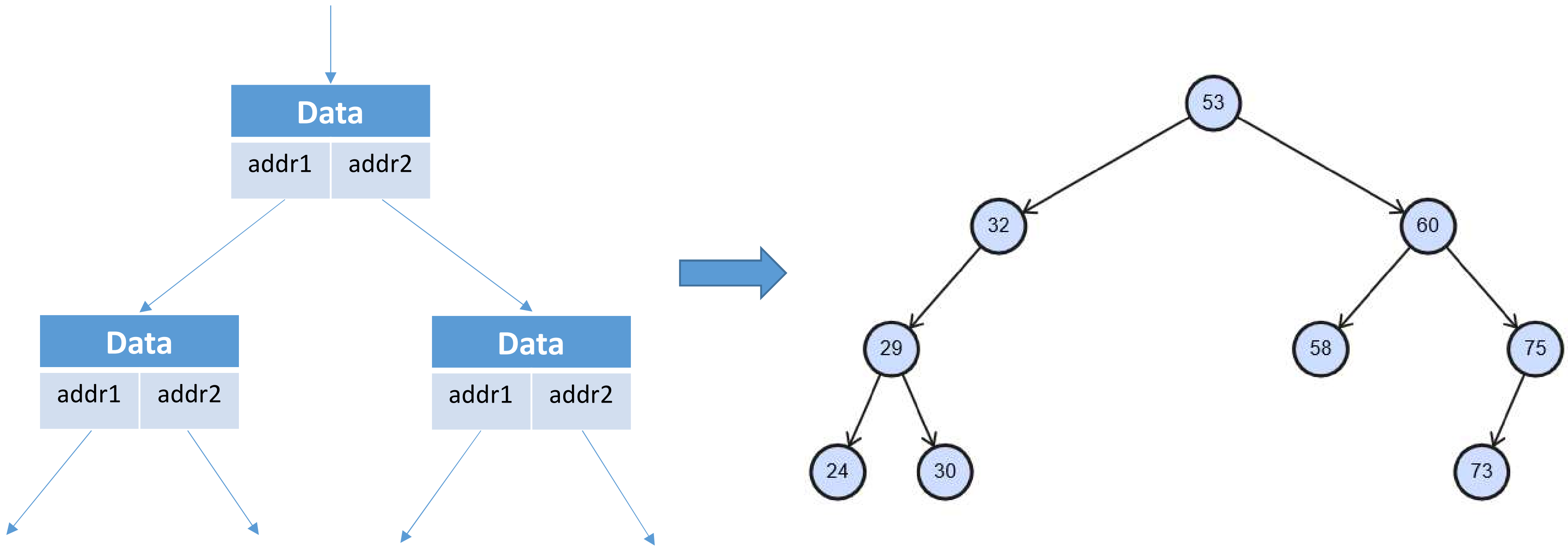
```
struct TreeNode
{
    int key;
    vector<TreeNode *> children;
};
```

```
void LevelOrder(const TreeNode * root)
{
    queue<const TreeNode *> treeQueue;

    if (root != nullptr)
    {
        treeQueue.push(root);
    }

    while (!treeQueue.empty())
    {
        const TreeNode * node = treeQueue.front();
        treeQueue.pop();
        cout << node->key << " ";

        for (int i = 0; i < node->children.size(); i++)
        {
            treeQueue.push(node->children[i]);
        }
    }
}
```

二叉树

Binary Tree

每个节点最多两个子节点

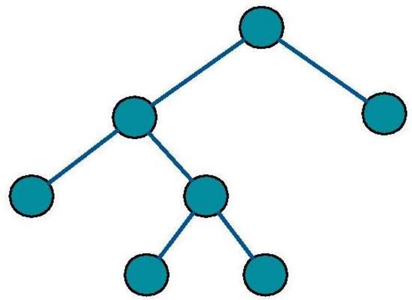


二叉树性质

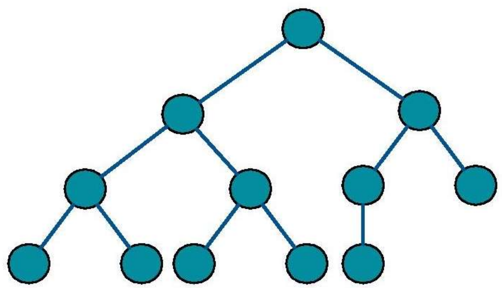
- 性质 1： 在一棵非空的二叉树的第 i 层上至多有2^{i}个节点
  性质 2： 一棵高度为 h 的二叉树至多有$2^{h+1}-1$个节点
- 性质 3： 有n个节点的二叉树，最小高度为$\log_2(n+1) - 1$
- 性质 4： 有L个叶节点的二叉树，最小高度为$\log_2 L$
- 性质 5： （二叉）树的边数$e =$节点数$n+1$
- 性质 6： 对于任何一棵非空的二叉树，如果其叶节点个数为 n_0 ，度为2的节点个数为 n_2 ，则 $n_0 = n_2 + 1$。

特殊二叉树

- 满full二叉树：每个节点要么有两个子节点，要么没有子节点
  - 性质：有n个节点的满二叉树，h是树的高度，那么$2h+1 \le n \le 2^{h+1}-1$



- 完全complete二叉树
  - 性质：有n个节点的完全二叉树，内部节点数是$\lfloor n/2 \rfloor$
  - 性质：有n个节点的完全二叉树，高度是$\lfloor log_2(n+1) \rfloor - 1$



野生二叉树

二叉树遍历方法

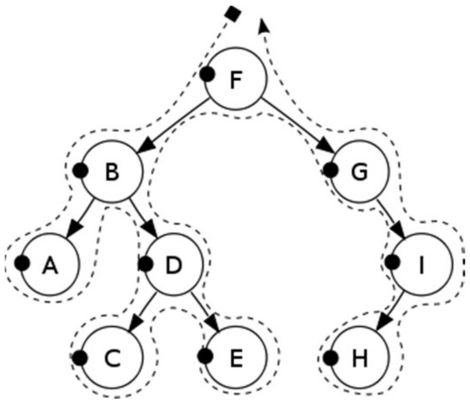
- 前序遍历Pre-order：深度优先
- 后序遍历Post-order：深度优先
- 中序遍历In-order：深度优先
- 按层遍历Level-order：广度优先

不是显示“茴”字有几种写法。有其用途：

- 比如之前的计算表达式
- 比如图算法，道路搜索

前序遍历

- 先对当前节点操作
- 找左子节点
- 找右子节点



前序遍历输出：F B A DCE GIH

```
struct BNode
{
    int key;
    BNode * left;
    BNode * right;
};
```

```
void PreOrder(const BNode * root)
{
    if(root == nullptr)
    {
        return;
    }
    cout<< root->key <<" ";
    PreOrder(root->left);
    PreOrder(root->right);
}
```

前序遍历迭代解法

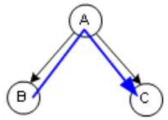
观察一个节点在第一次被访问到就能输出

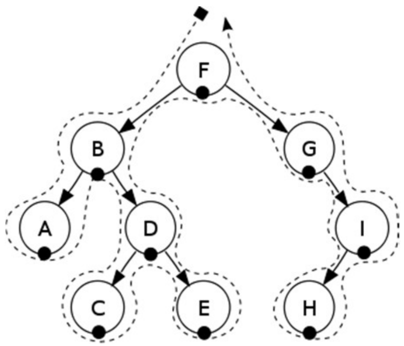
1. 创建一个空stack，并把根节点压入栈
2. 如果栈不空，就一直循环：
   - 从栈里Pop一个元素node，然后打印
   - 把node的右子节点压入栈
   - 把node的左子节点压入栈

```
void PreOrder_Iterative(const BNode * root)
{
    stack<const BNode *> stk;
    if (root)
    {
        stk.push(root);
    }

    while (!stk.empty())
    {
        const BNode * node = stk.top();
        stk.pop();

        cout << node->key << " ";

        if (node->right)
        {
            stk.push(node->right);
        }
        if (node->left)
        {
            stk.push(node->left);
        }
    }
}
```

中序遍历

- 找左子节点
- 再对当前节点操作
- 找右子节点





中序遍历输出： A B CDE F GHI

```
struct BNode
{
    int key;
    BNode * left;
    BNode * right;
};
```

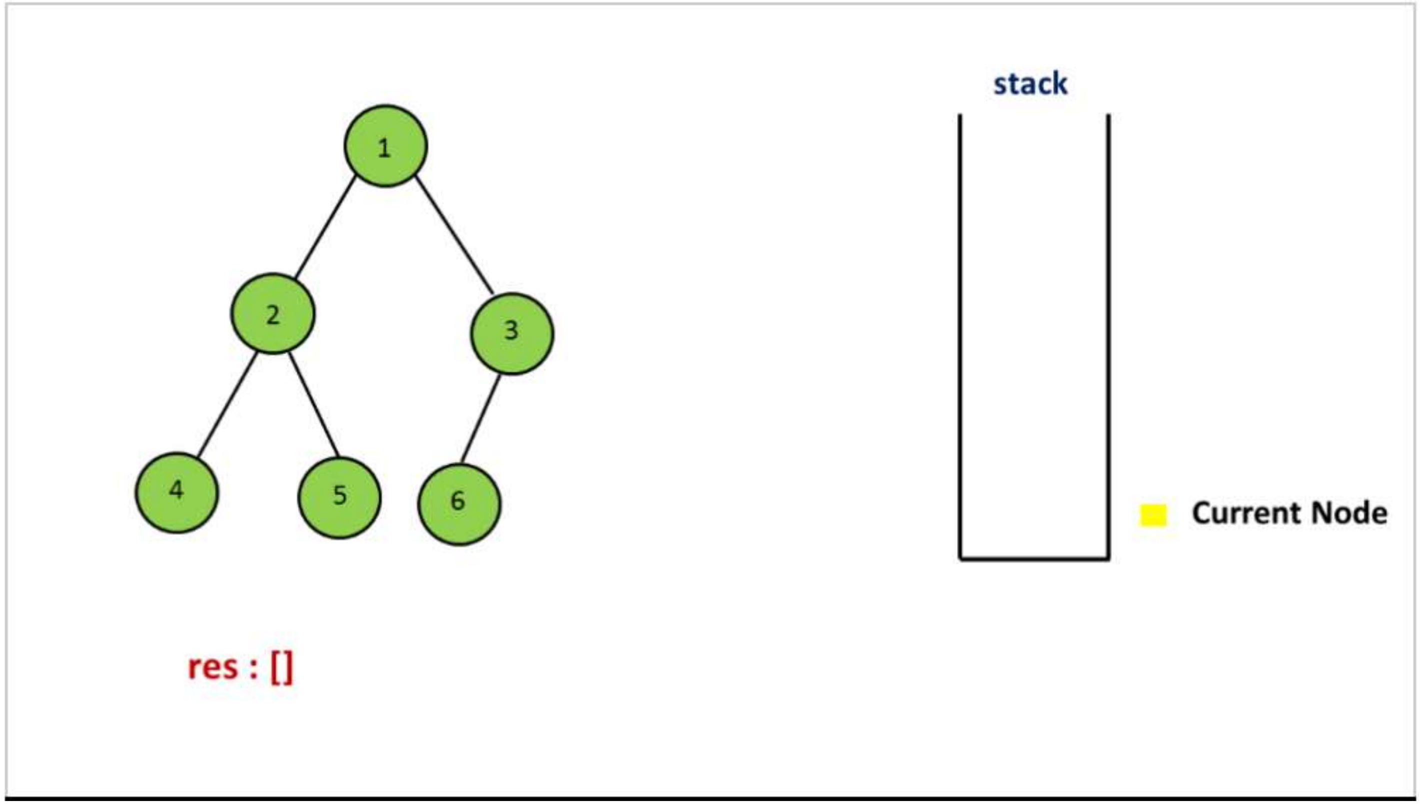
```
void InOrder(const BNode * root)
{
    if(root == nullptr)
    {
        return;
    }
    InOrder(root->left);
    cout<< root->key << " ";
    InOrder(root->right);
}
```

中序遍历迭代解法

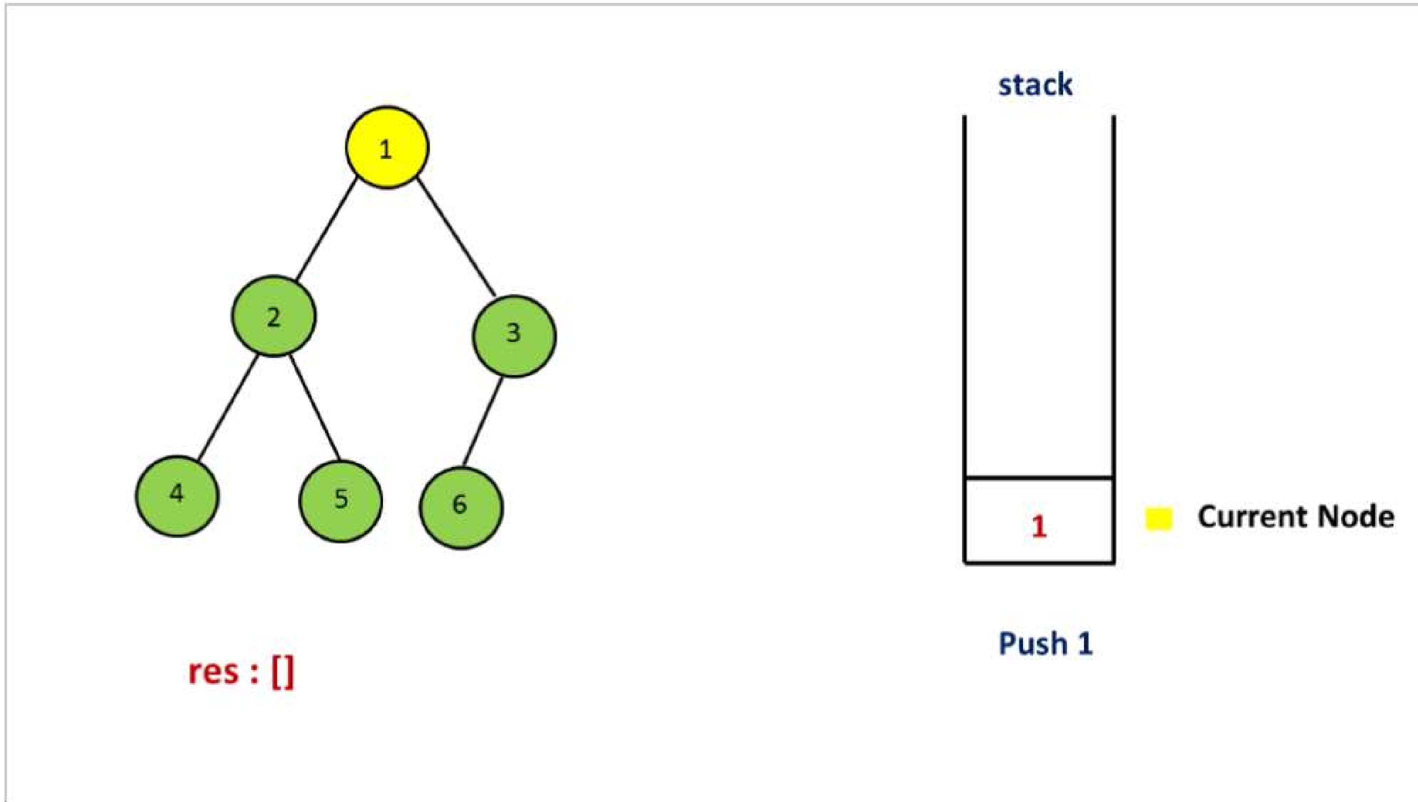
- 观察一个节点只有第二次被访问到才能输出
- 所以不能像preorder一次访问出栈
- 所以需要额外的指针跟踪当前访问节点
  1. 对于当前访问的节点，只要还有左子节点，它得压入栈保存，等第二次访问到
  2. 如果没有左子节点了，相当于从空左子节点返回了，栈顶节点可以输出
  3. 之后当前访问节点跟踪到右子节点后重复之前的步骤

```
void InOrder_Iterative(const BNode * root)
{
    stack<const BNode *> stk;
    const BNode * curr = root;

    while (!stk.empty() || curr)
    {
        if (curr)
        {
            stk.push(curr);
            curr = curr->left;
            continue;
        }

        curr = stk.top();
        stk.pop();

        cout << curr->key << " ";
        curr = curr->right;
    }
}
```

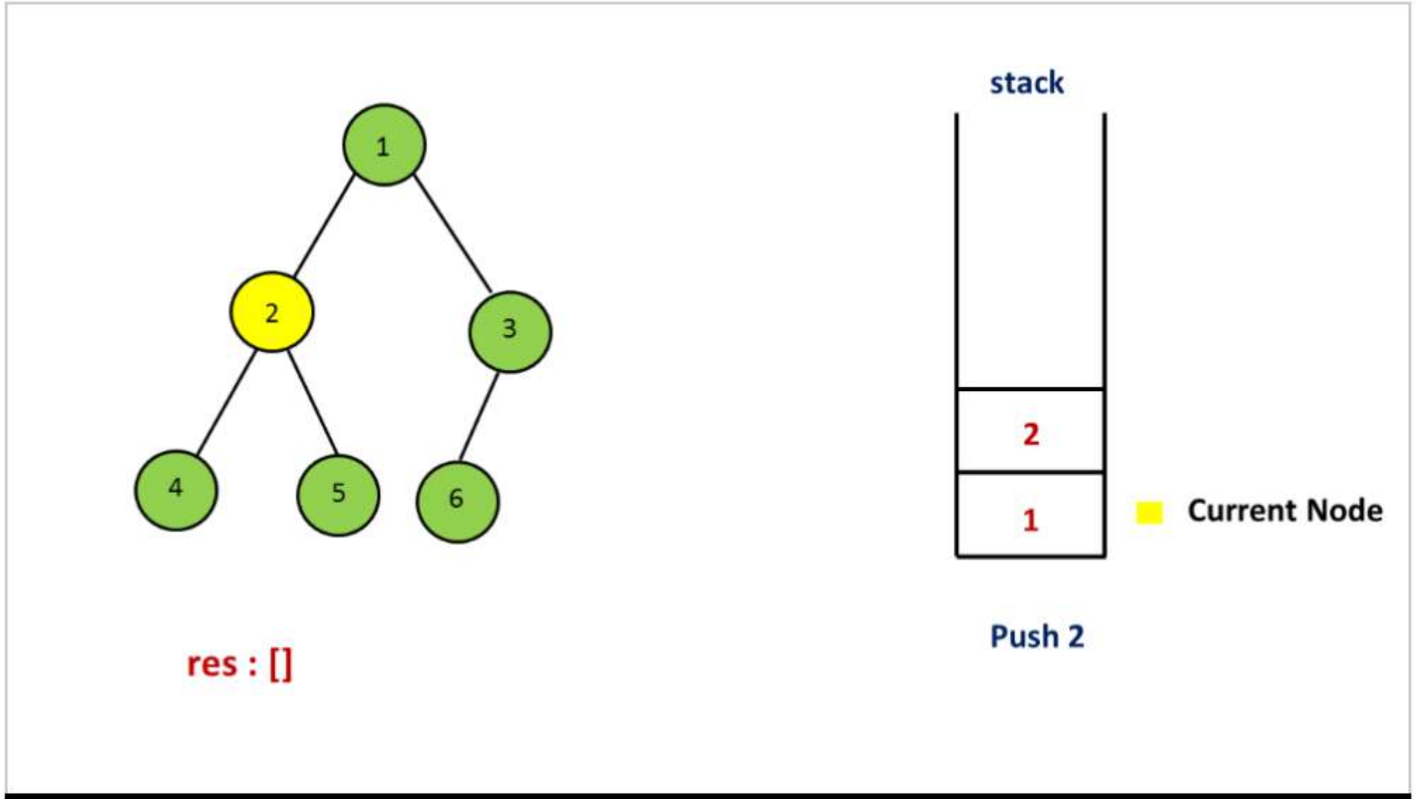
1.初始化栈



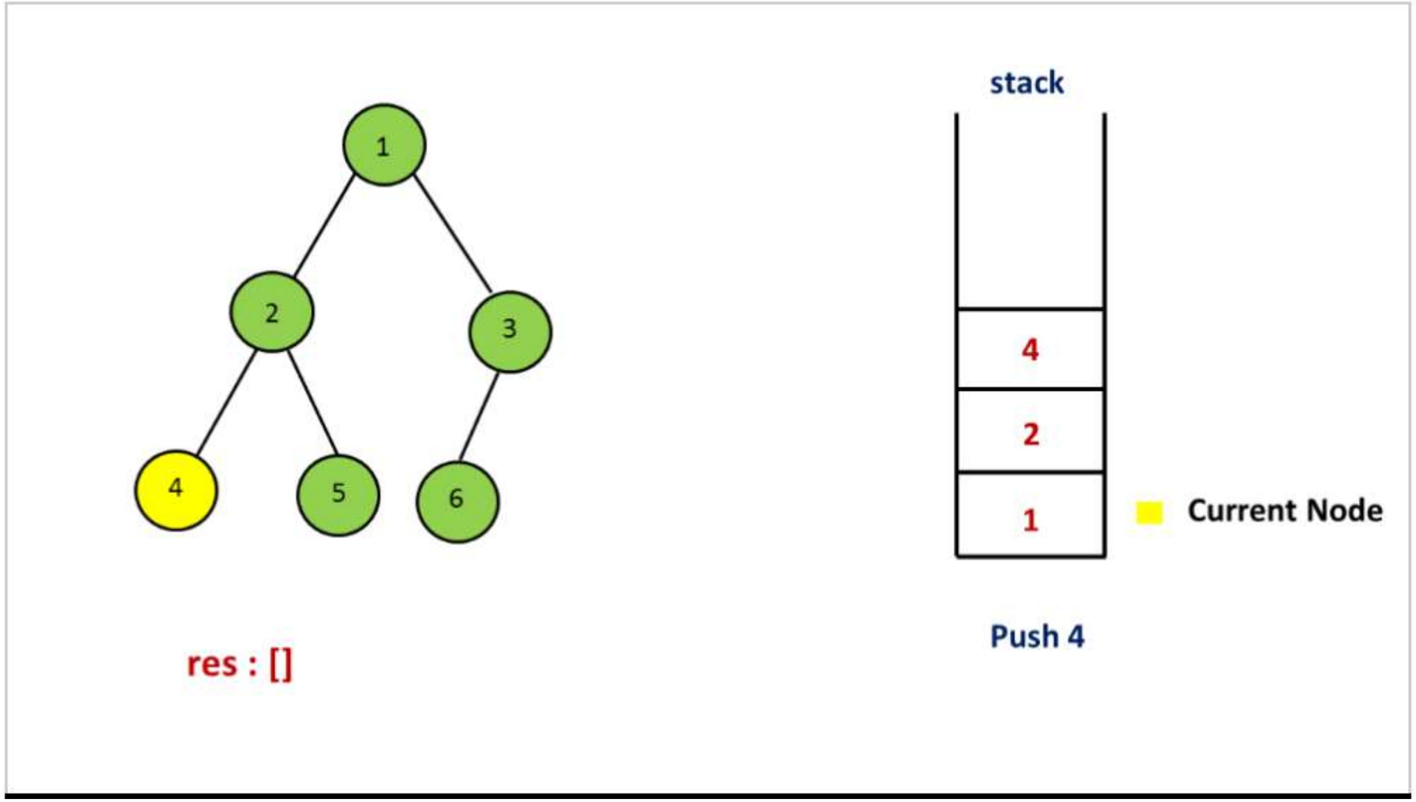
2. Curr1压入栈，并跟踪其左子节点



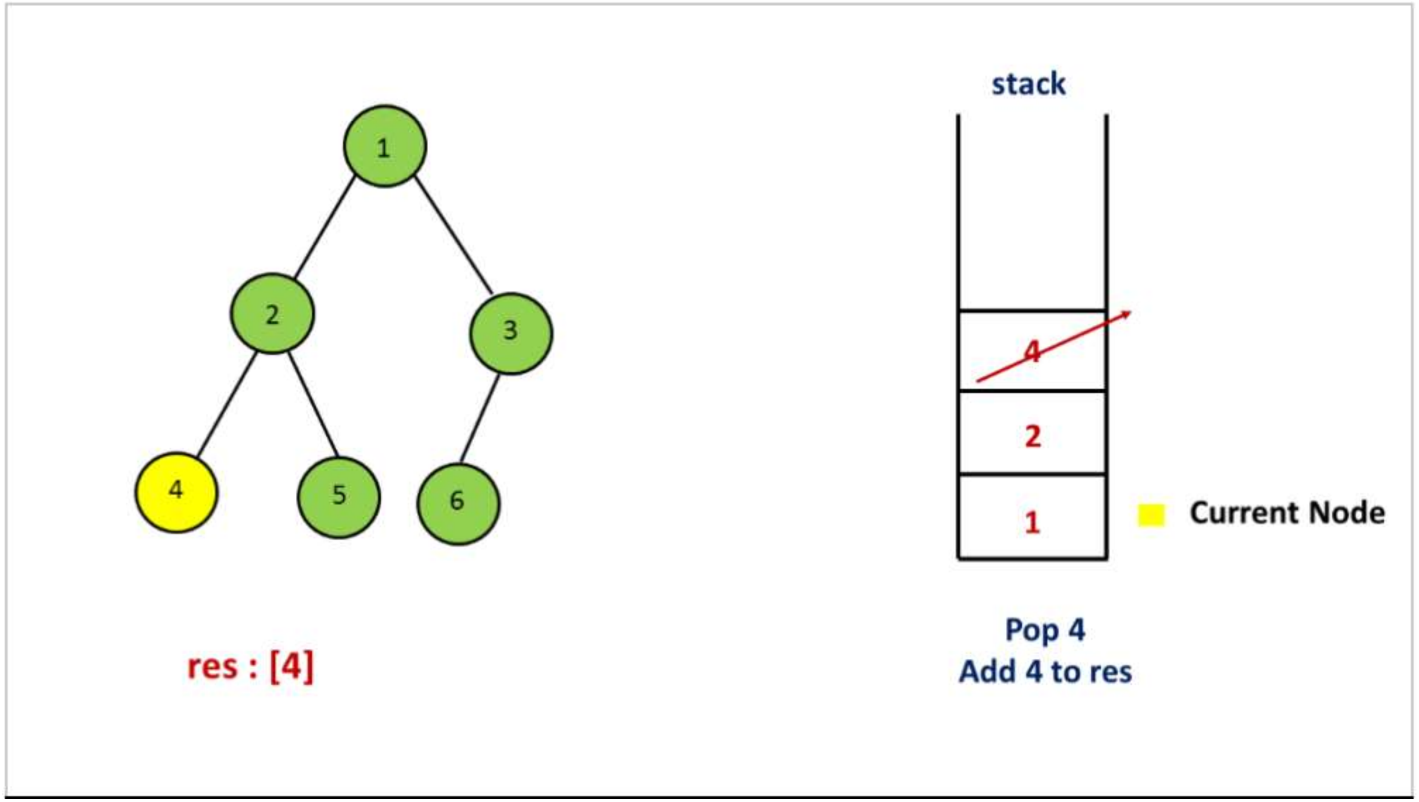
3. Curr2压入栈，并跟踪其左子节点



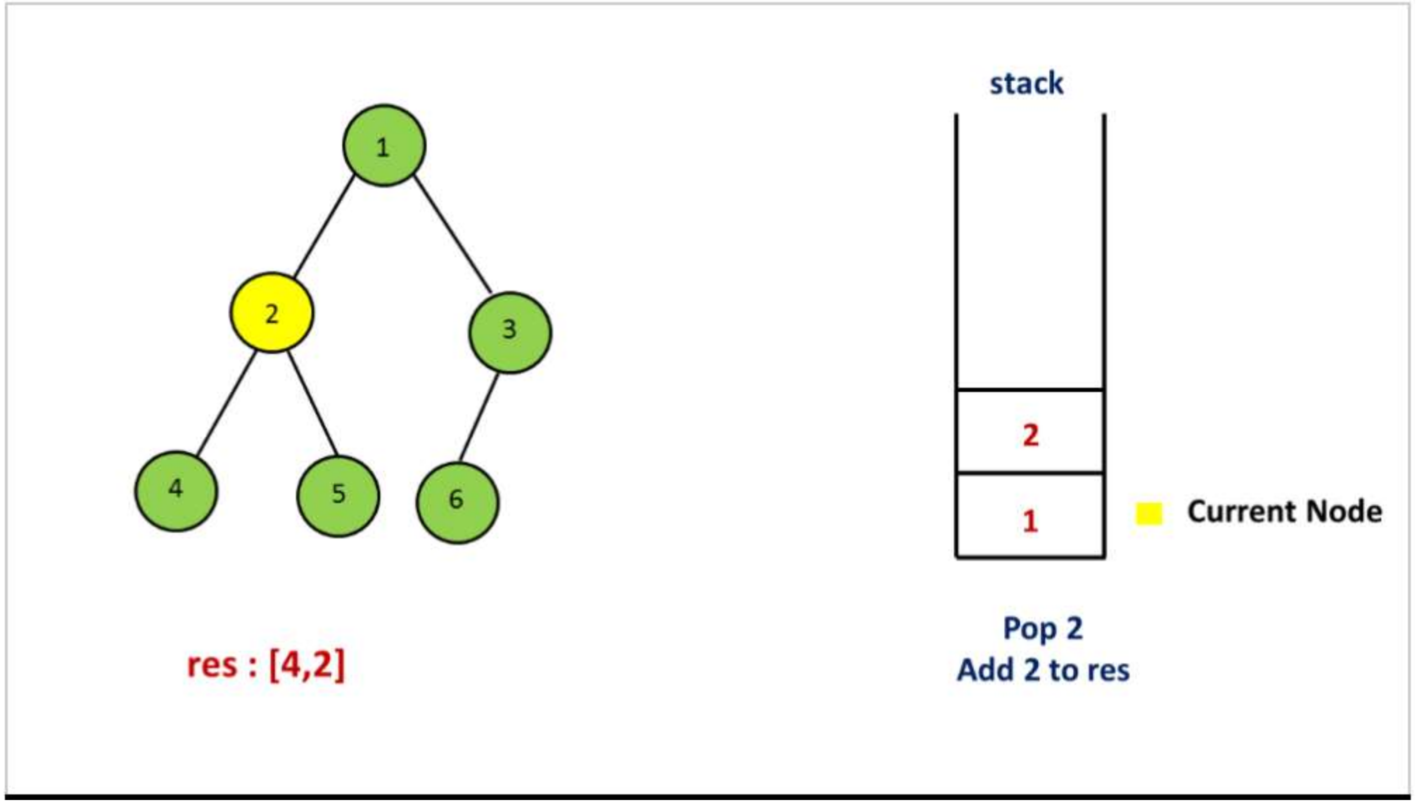
4. Curr4压入栈，并跟踪其左子节点



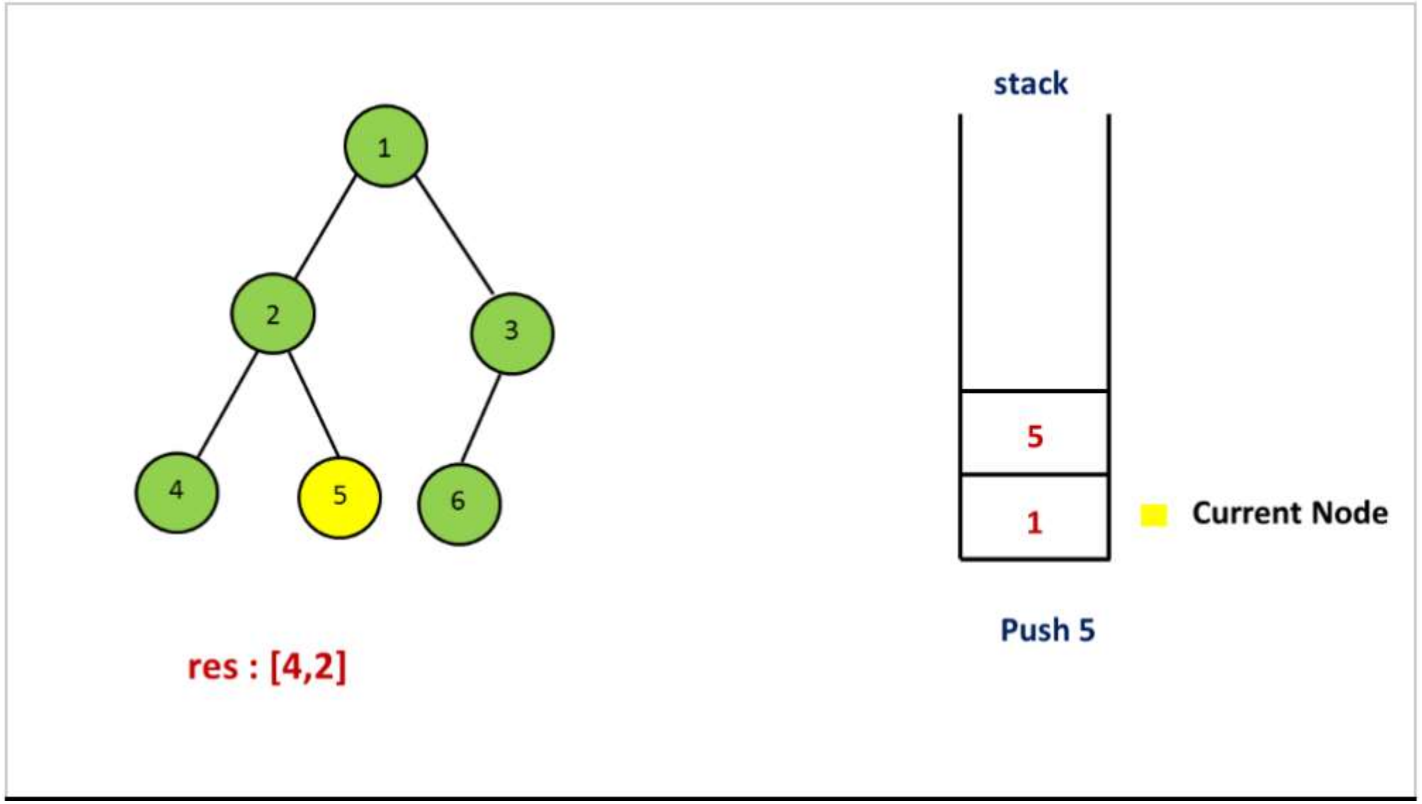
5.Curr为空，只能第二次访问栈顶节点4，所以出栈输出后，跟踪其右子节点



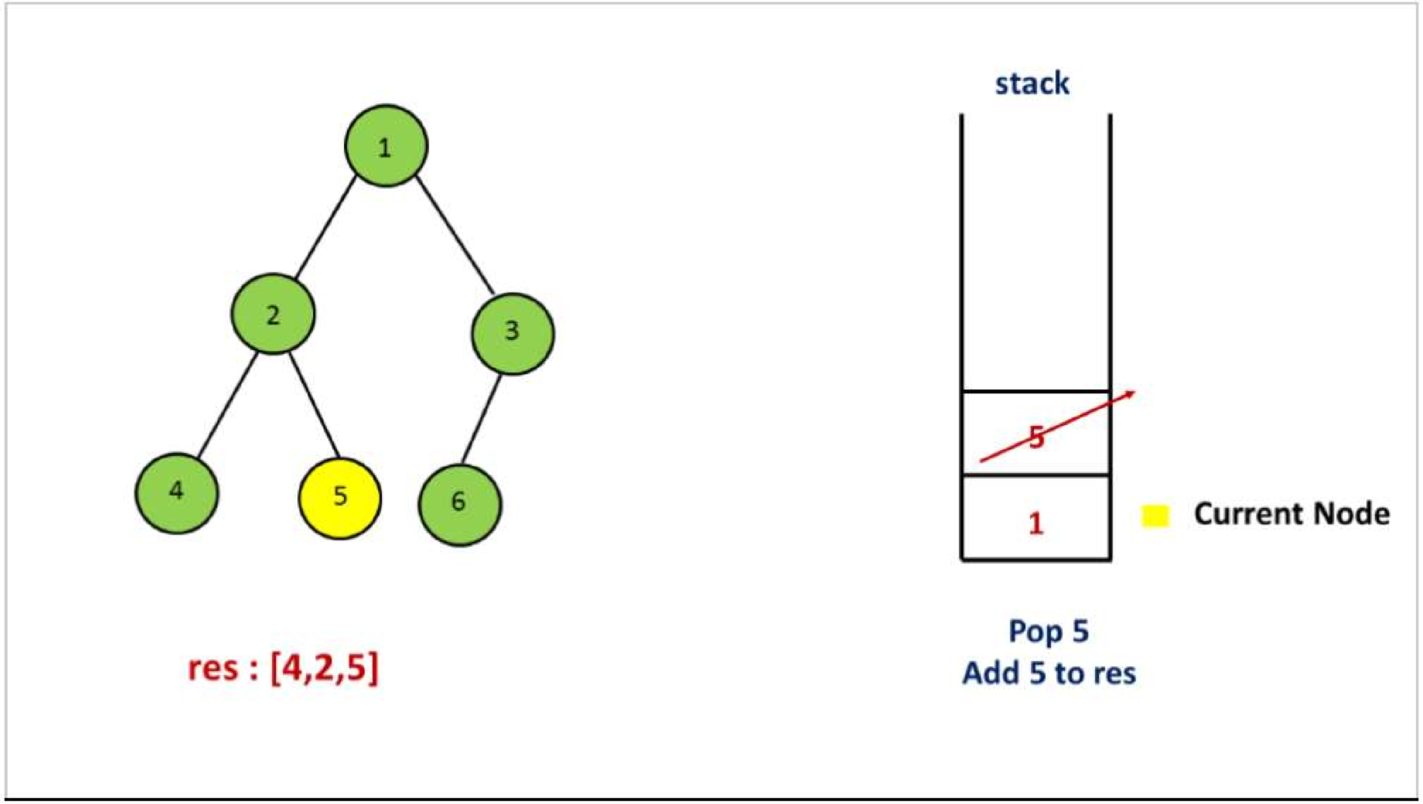
6.Curr是4的右子节点，还是空。只能第二次访问栈顶节点2。出栈输出2后，跟踪右子节点



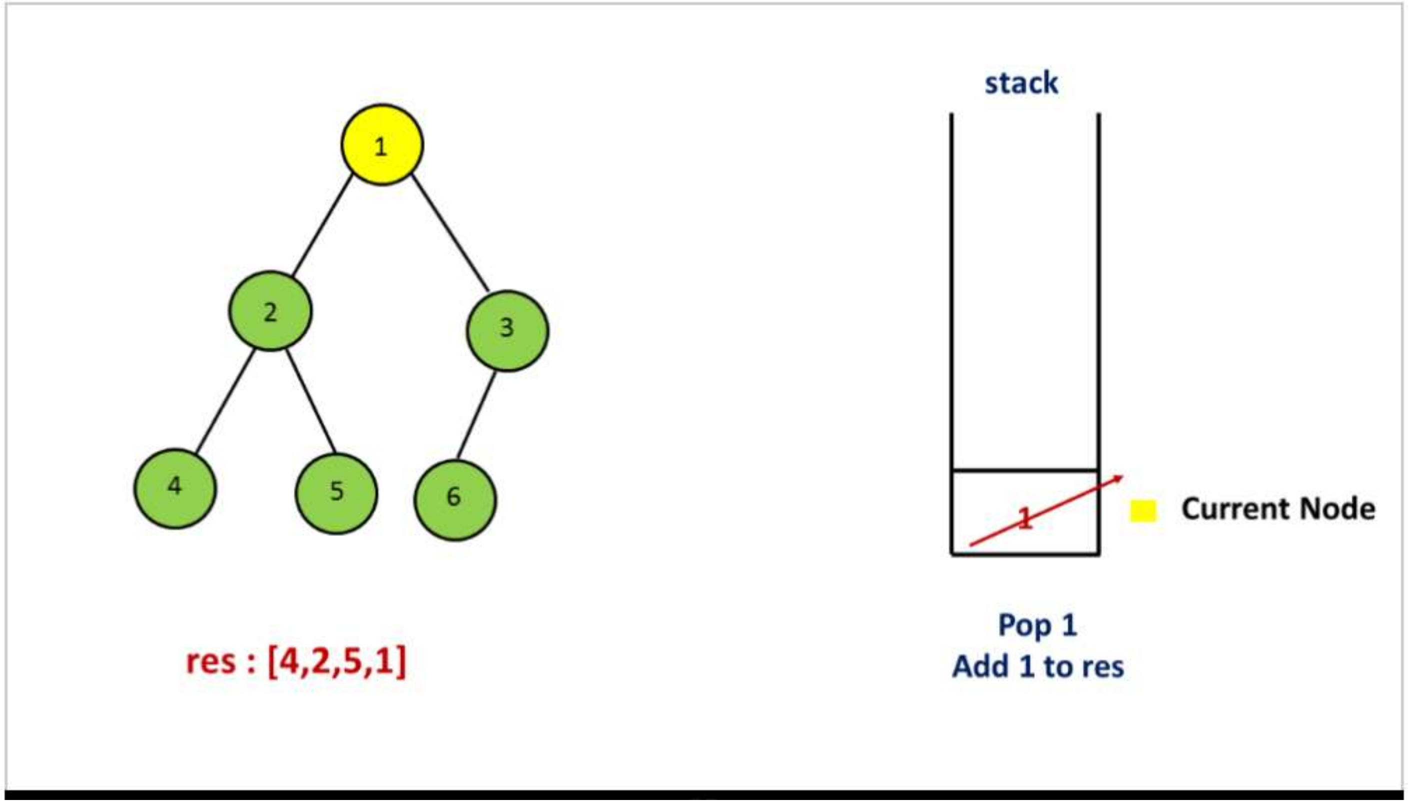
7. Curr5压入栈，并跟踪其左子节点



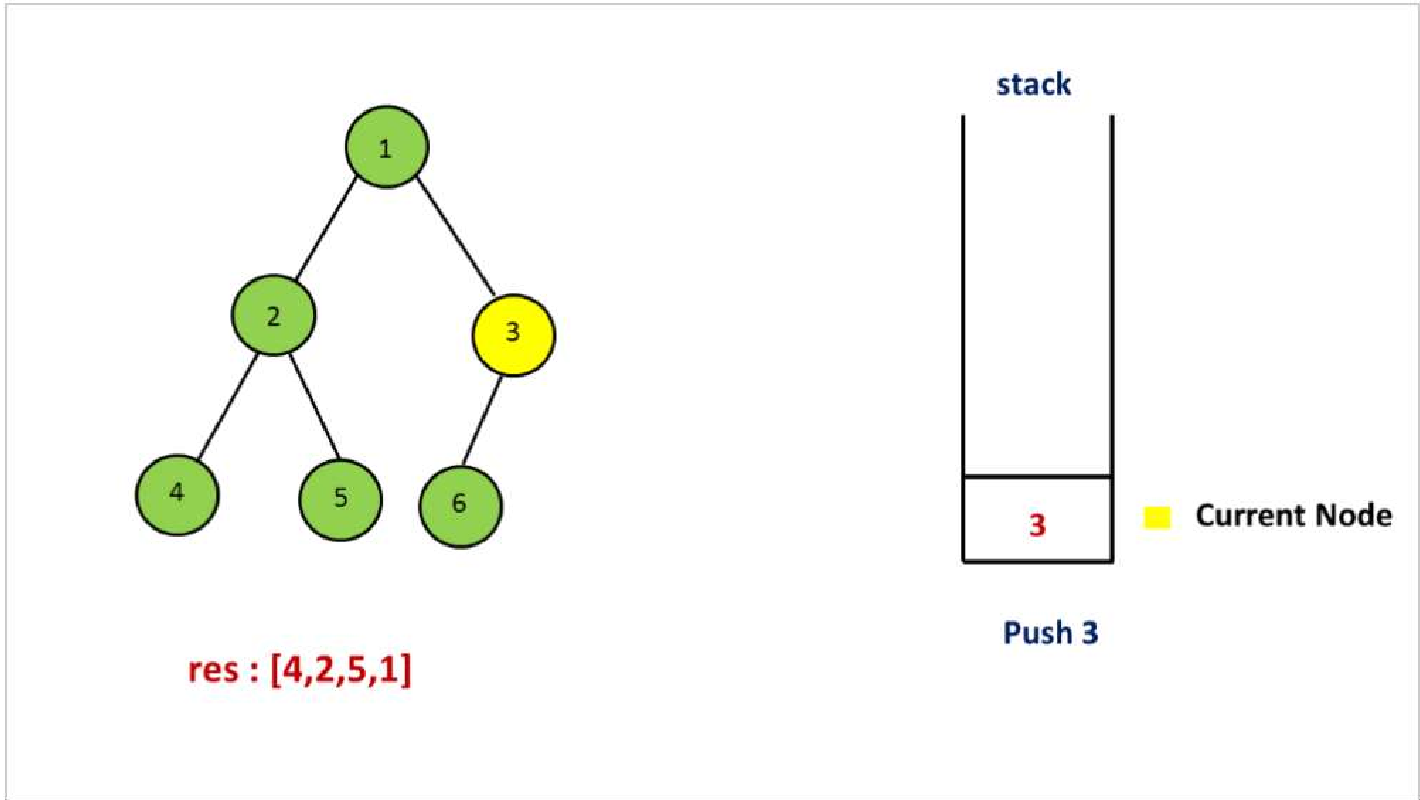
8. Curr为空，只能第二次访问栈顶节点5，所以出栈输出后，跟踪其右子节点



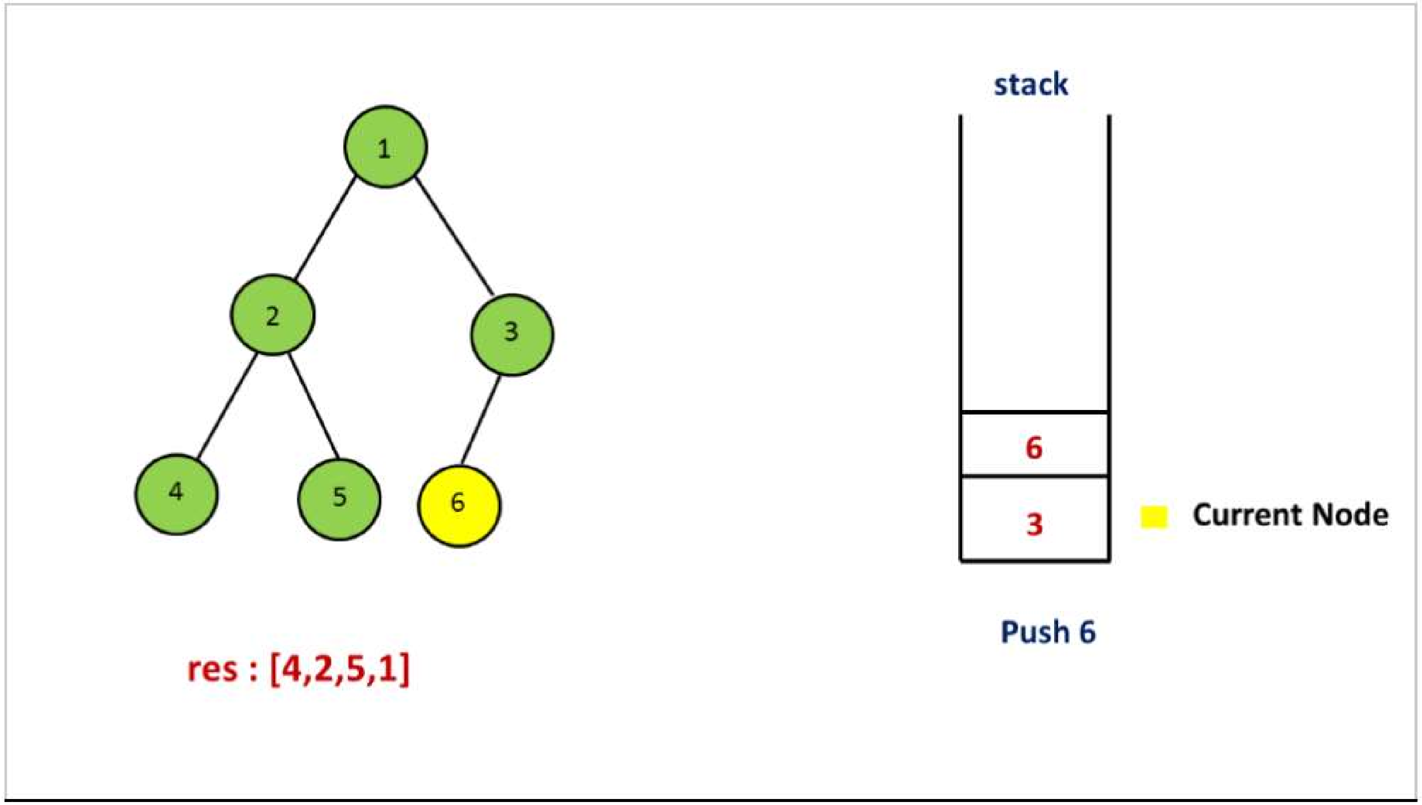
9. Curr是5的右子节点，还是空。只能第二次访问栈顶节点1。出栈输出1后，跟踪右子节点3



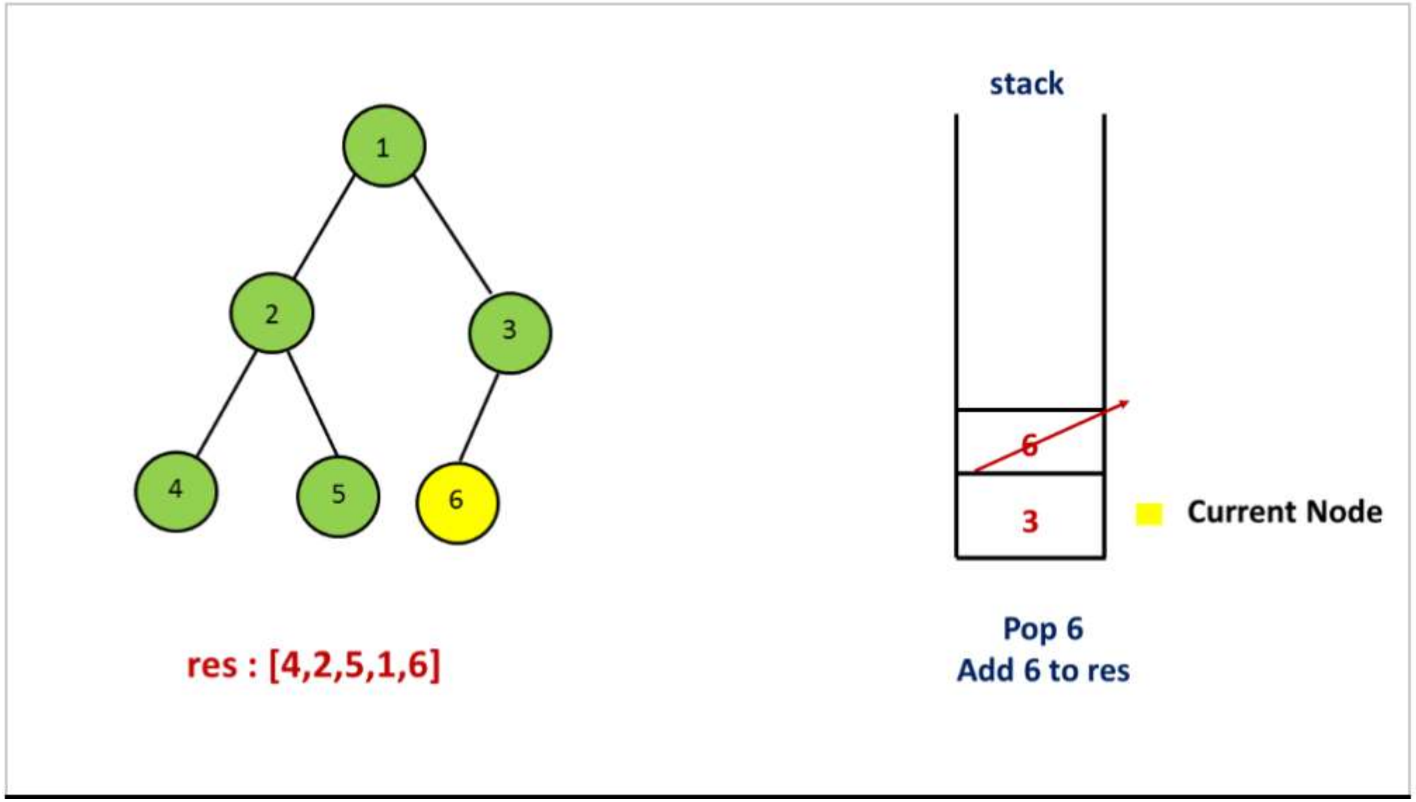
10.把curr3压入栈后，跟踪其左子节点



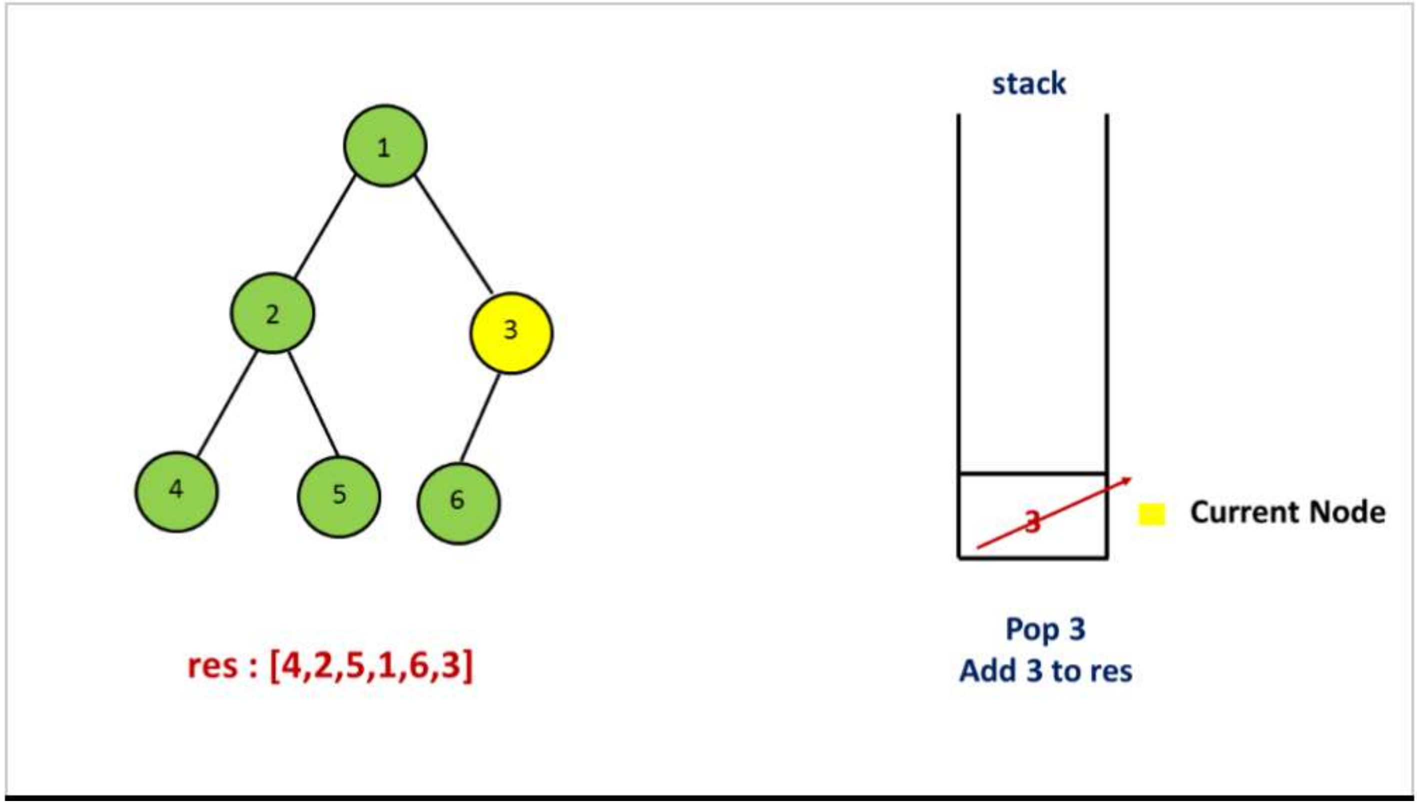
11. 把curr6压入栈后，跟踪其左子节点



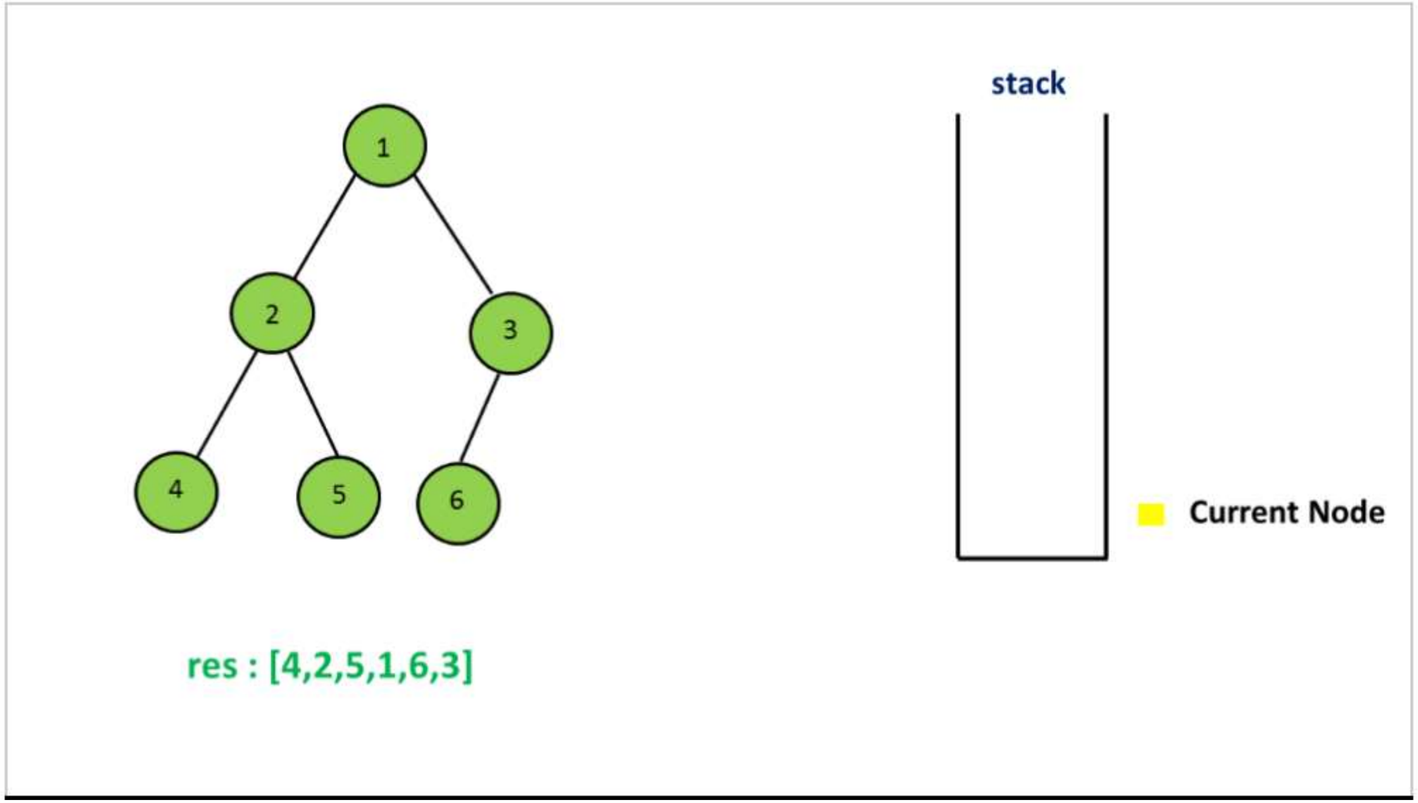
12. Curr为空，只能第二次访问栈顶节点6，所以出栈输出后，跟踪其右子节点



13. Curr是6的右子节点，还是空。只能第二次访问栈顶节点3。出栈输出3后，跟踪右子节点

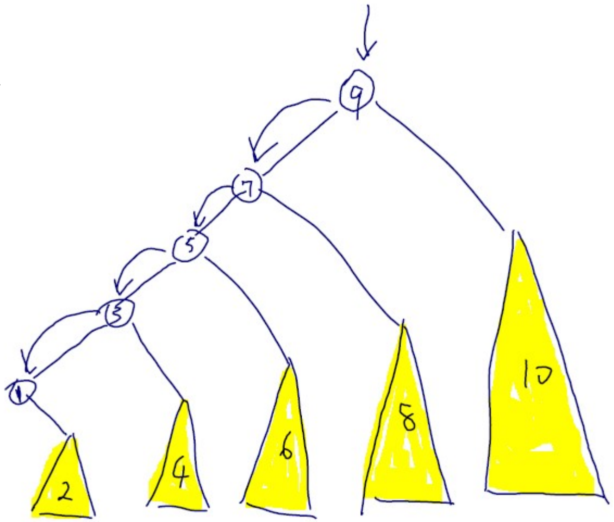


14. curr是3的右子节点，还是空。结束输出



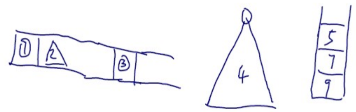
数学归纳法证明中序迭代算法

首先观察一下中序从左到右的元素
然后验证算法是按着这个顺序来的

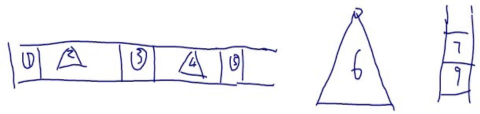


1.

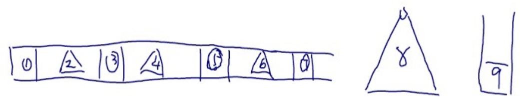
2.



3.

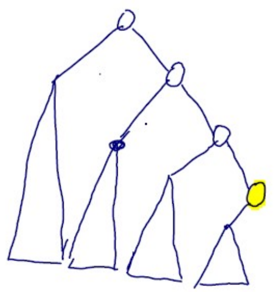


4.



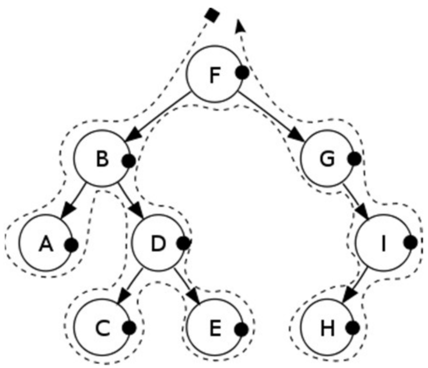
5.

观察按这个算法，
1. 算法结束的条件是栈空了，并且当前指针的右子节点是空
2. 算法能访问到树里的所有节点，即不会遗漏
3. 并且一个树里有且仅有一个元素满足退出条件，也一定是最后访问的
算法在进行子树2、4的中序输出时，不会破坏栈里之前压入元素



后序遍历

- 找左子节点
- 找右子节点
- 最后对当前节点操作



- 后序遍历输出： A CED B HIG F

```
struct BNode
{
    int key;
    BNode * left;
    BNode * right;
};
```

```
void PostOrder(const BNode * root)
{
    if(root == nullptr)
    {
        return;
    }
    PostOrder(root->left);
    PostOrder(root->right);
    cout<< root->key << " ";
}
```

后序遍历迭代解法

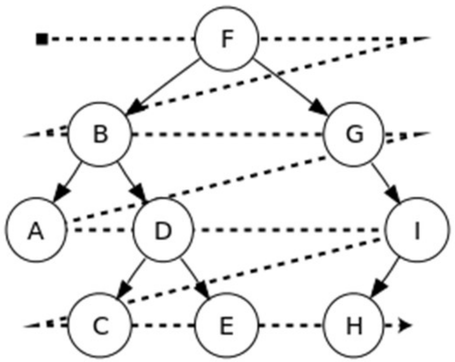
观察一个节点只有第三次被访问到才能输出
使用两个栈，迭代过程大大简化

1. 创建一个空栈stk，并把根节点压入栈；
   创建另一个空栈output
2. 如果栈stk不空，就一直循环：
   - 从栈stk里Pop一个元素top，并压入栈output
   - 把top的左子节点压入栈stk
   - 把top的右子节点压入栈stk
3. 从output栈顶往后输出结果

```
void PostOrder_Iterative(const BNode * root)
{
    if(root == nullptr)
    {
        return;
    }

    stack<const BNode *> output;
    stack<const BNode *> stk;
    stk.push(root);

    while (!stk.empty())
    {
        // Pop top element from stk;
        const BNode * top = stk.top();
        stk.pop();

        // Push top element to output
        output.push(top);

        // push left and right node to stk;
        if (top->left != nullptr)
        {
            stk.push(top->left);
        }

        if (top->right != nullptr)
        {
            stk.push(top->right);
        }
    }

    // print result in output stack
    while (!output.empty())
    {
        cout << output.top()->key << " ";
        output.pop();
    }
}
```

按层遍历

- 逐层，从左到右
- 用队列实现，类似用queue实现stack



- 按层遍历输出： F BG ADI CEH

```
struct BNode
{
    int key;
    BNode * left;
    BNode * right;
};


void LevelOrder(const BNode * root)
{
    queue<const BNode *> treeQueue;

    if (root != nullptr)
    {
        treeQueue.push(root);
    }

    while (!treeQueue.empty())
    {
        const BNode * node = treeQueue.front();
        treeQueue.pop();
        cout << node->key << " ";

        if (node->left != nullptr)
        {
            treeQueue.push(node->left);
        }
        if (node->right != nullptr)
        {
            treeQueue.push(node->right);
        }
    }
}
```

不同二叉树的个数

- $T(n+1) = \sum_{i=0}^{n} T(i)T(n-i)$
- 这和Catalan number一样，即

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

- 参考： https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number

线索二叉树

Threaded Binary Tree

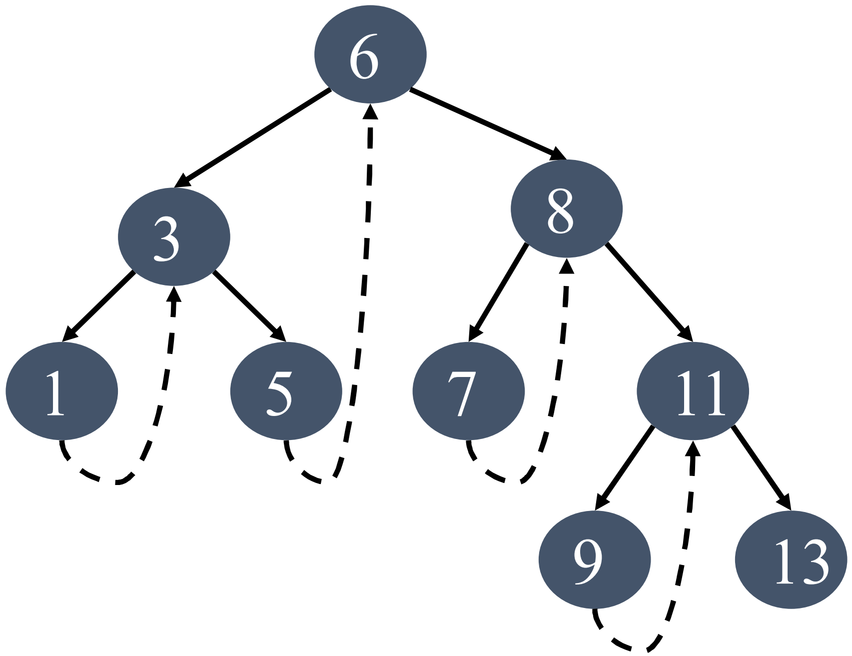
Motivation

- 如果我们不想递归，也不想用stack，有没有办法中序遍历？
- 一个是因为占空间，还有就是如果你在遍历树的时候，插入/删除发生了，就会出错
- Donald Kunth在1968年提出的问题
- Morris在1979年提出了一个方法：Threaded binary tree

思路

- 二叉树的叶节点的两个空指针浪费了空间
- 考虑利用他们来帮助inorder traversals
- 把那些节点，本来其右子节点是空的，现在改为指向中序遍历时的下一个节点
- 为了方便起见，我们在节点里设了一个bool，表明不是正常子节点

线索二叉树例子



Morris遍历算法，非递归，不用stack

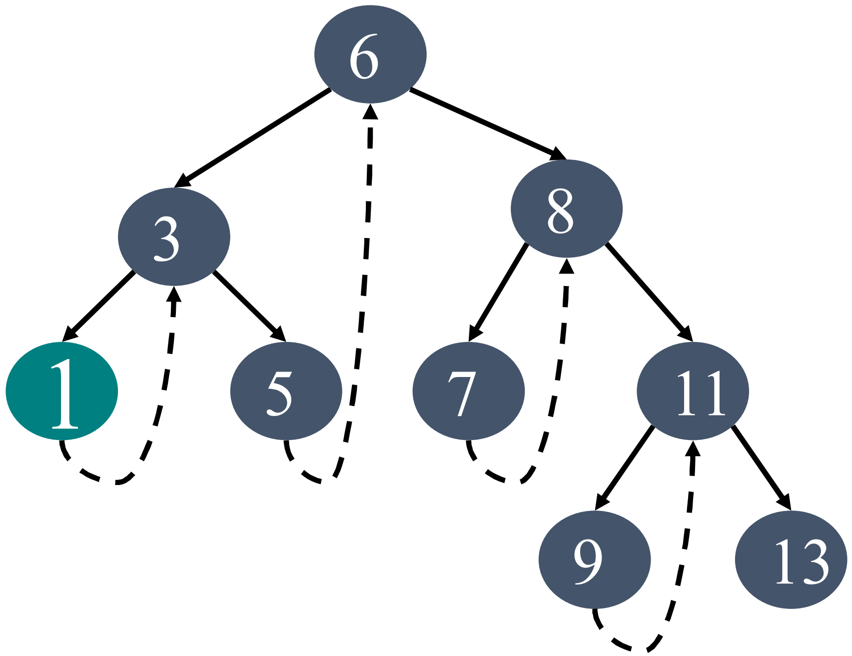
从根节点的最左边leftmost的元素开始，输出后，跟踪它的右子节点

1） 如果跟踪的链接是thread，输出当前结点后，继续跟踪到它的右子节点

2） 如果跟踪的链接不是thread，是正常的链接，那么跟踪到它的最左边leftmost的元素，输出后，对其右子结点的链接按循环1）2）处理

其实和之前中序遍历用stack思想一样

Threaded Tree Traversal

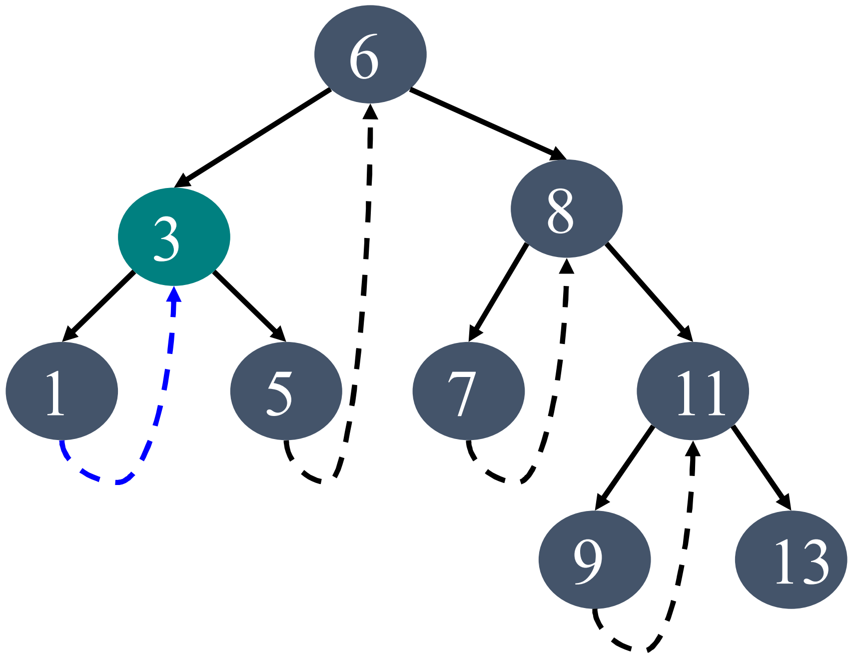


Output

1

找到根节点的leftmost节点，输出

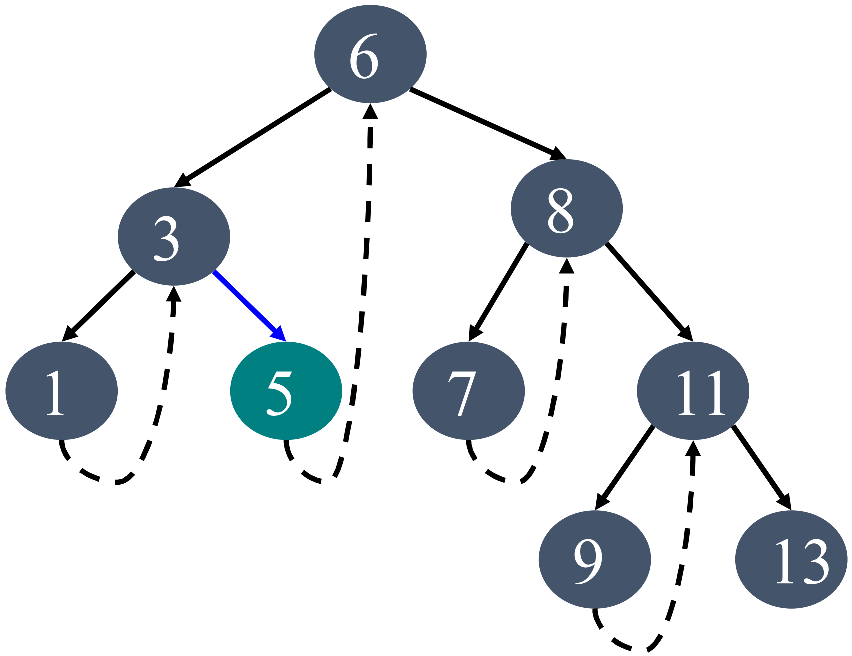
Threaded Tree Traversal



Output
1
3

1）链接是thread，跟踪到3，输出后跟踪其右子节点

Threaded Tree Traversal

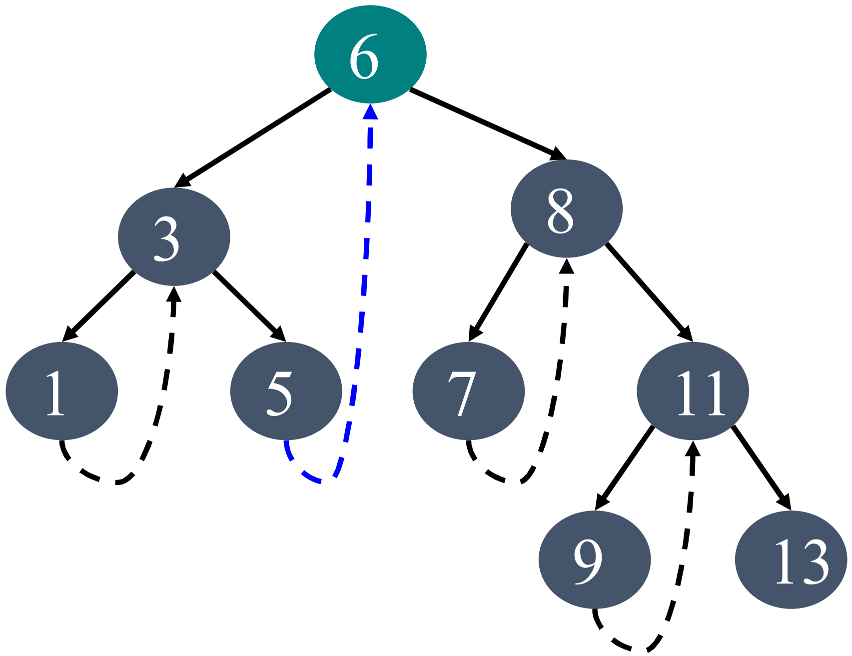


Output
1
3
5

2）正常链接，跟踪到5的leftmost节点，就是自己。

然后跟踪其右子节点

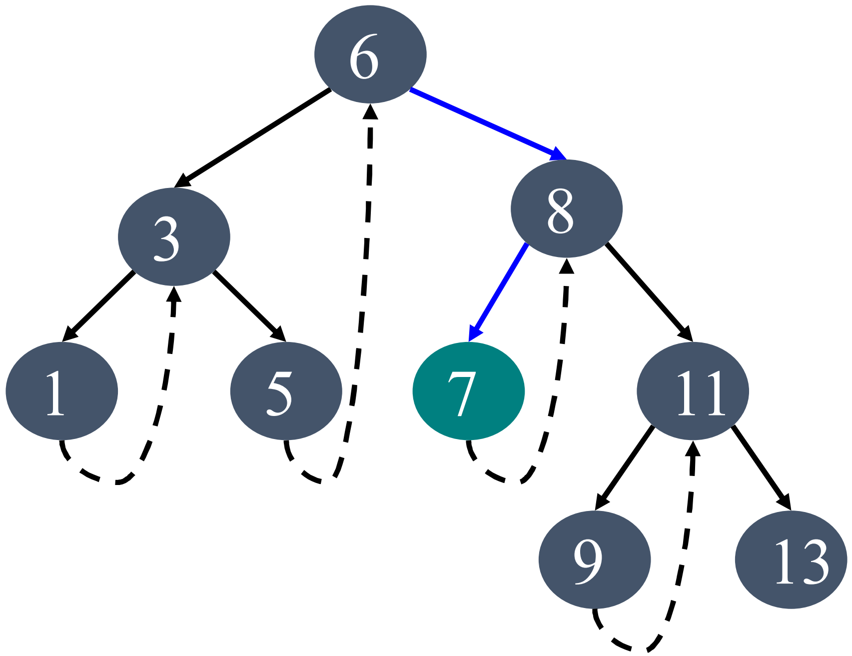
Threaded Tree Traversal



Output
1
3
5
6

1）链接是thread，跟踪到6，输出后再跟踪其右子节点

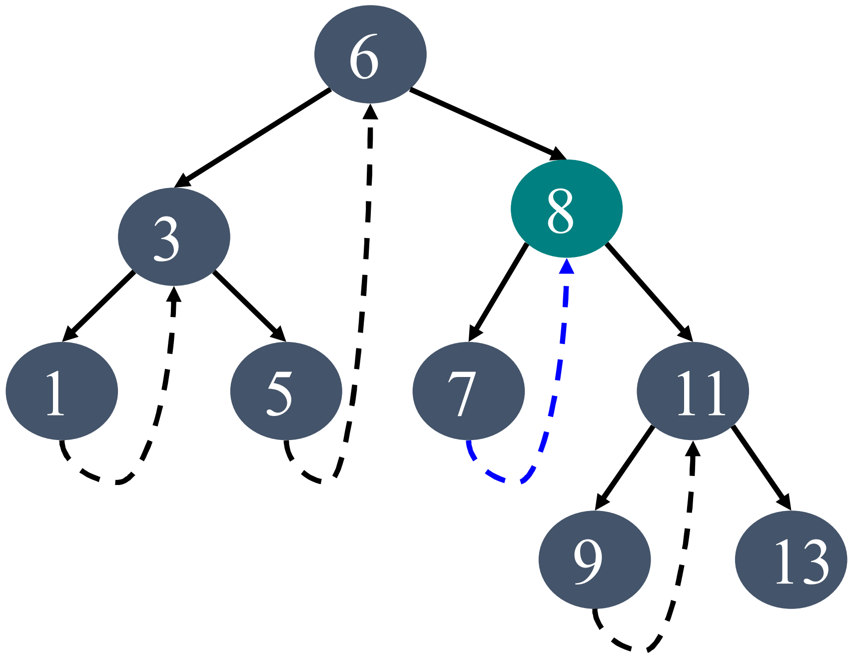
Threaded Tree Traversal



Output
1
3
5
6
7

2）正常链接，跟踪到其leftmost节点7，输出后，跟踪其右子节点

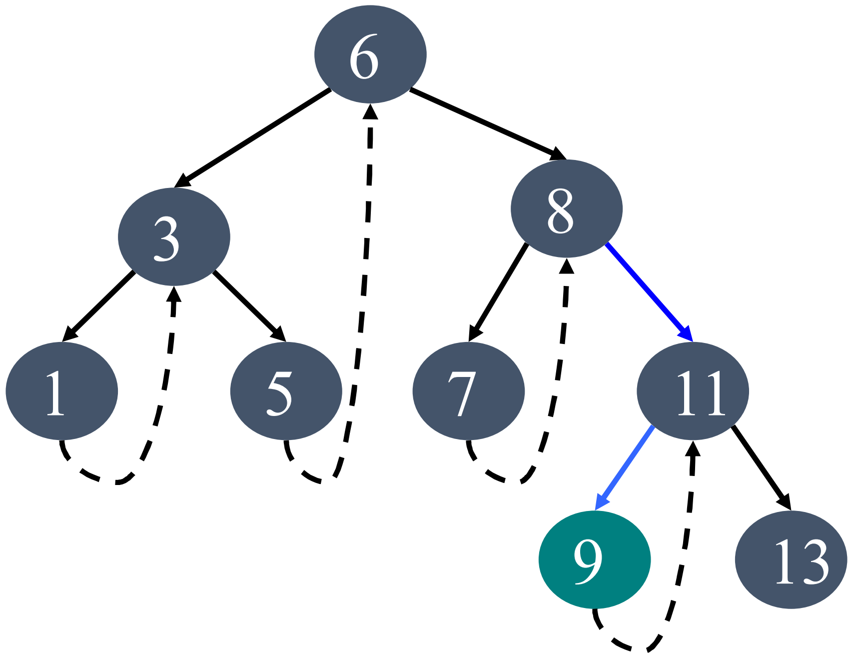
Threaded Tree Traversal



Output
1
3
5
6
7
8

1）链接是thread，跟踪到8，输出后再跟踪其右子节点

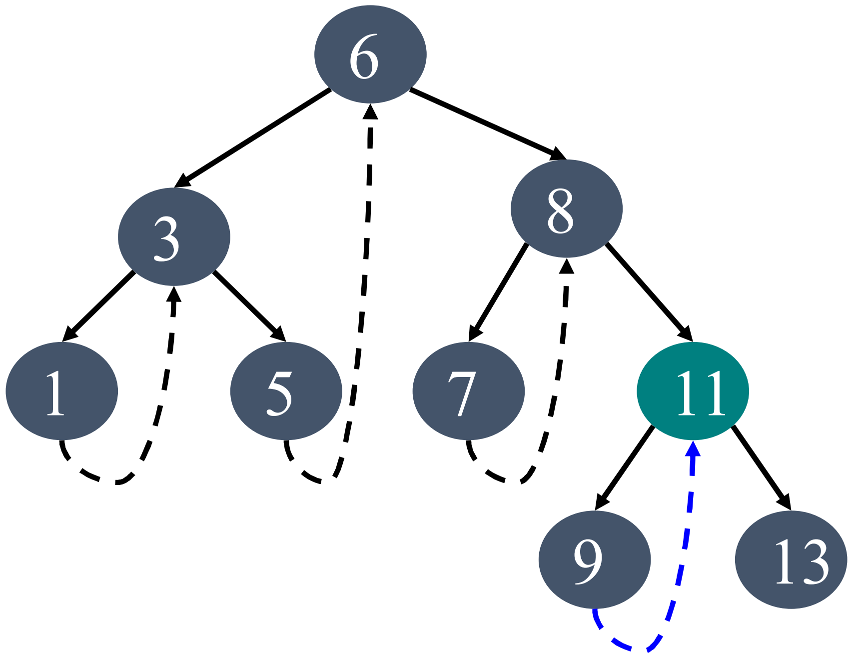
Threaded Tree Traversal



Output
1
3
5
6
7
8
9

2）正常链接，跟踪到其leftmost节点9，输出后，跟踪其右子节点

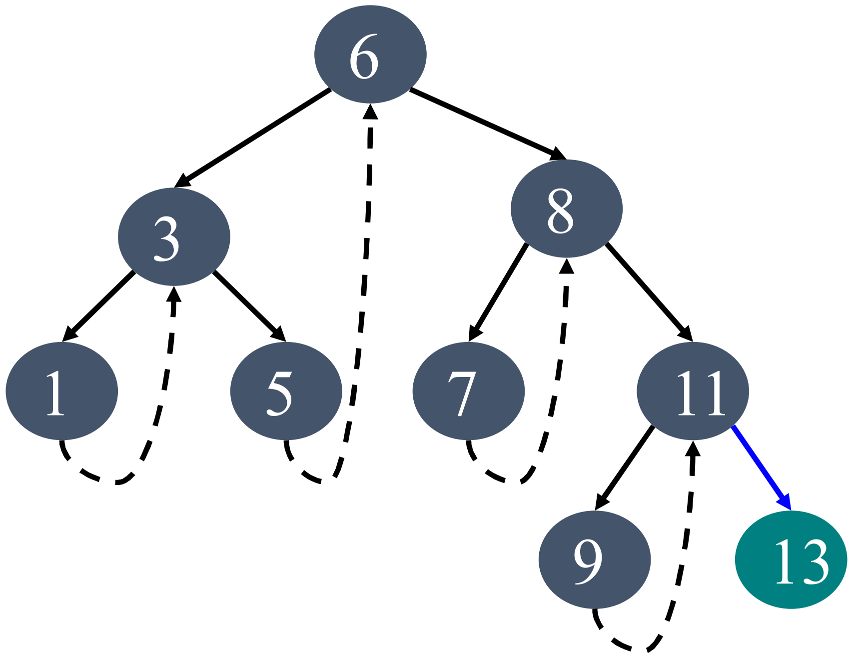
Threaded Tree Traversal



Output
1
3
5
6
7
8
9
11

1）链接是thread，跟踪到11，输出后再跟踪其右子节点

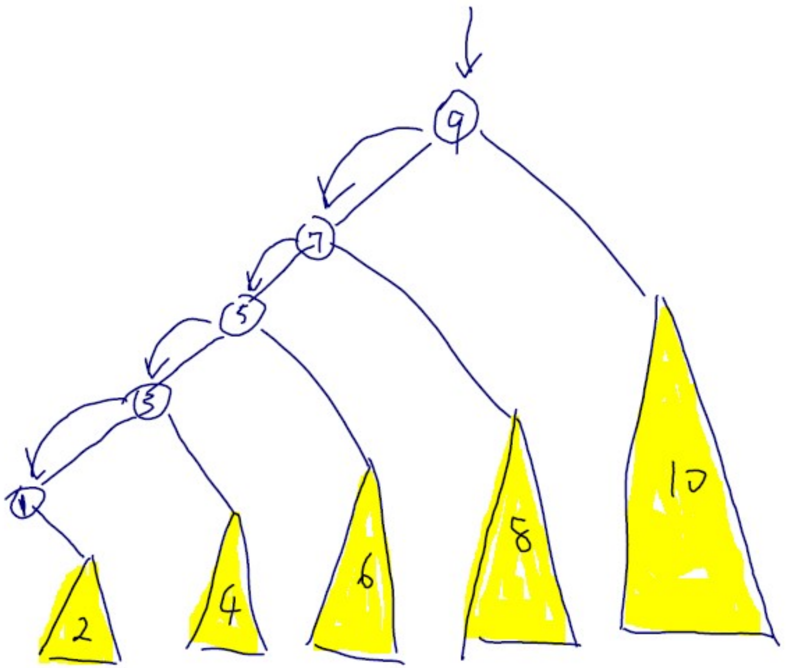
Threaded Tree Traversal



Output
1
3
5
6
7
8
9
11
13

2）正常链接，跟踪到13的leftmost节点，就是自己。然后跟踪其右子节点，是空，表明结束。

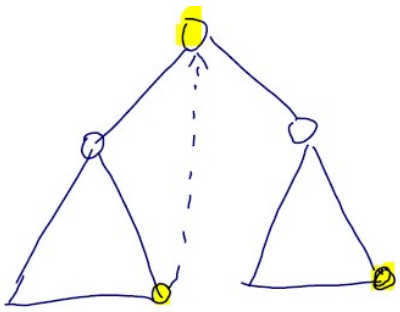
中序遍历代码



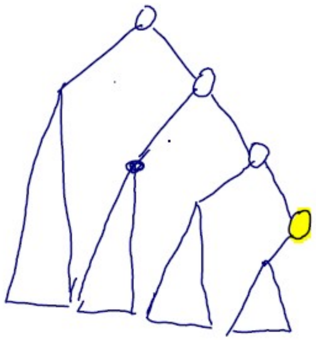

```
// Utility function to find leftmost
// node in a tree rooted with root
Node* Leftmost(Node * root)
{
    while (root && root->left)
    {
        root = root->left;
    }
    return root;
}



void Inorder(Node * root)
{
    Node * curr = Leftmost(root);
    while (curr)
    {
        cout << curr->key << " ";

        // If this node is a thread node, then go to
        // inorder successor
        if (curr->rightThread)
        {
            curr = curr->right;
        }
        // Else go to the leftmost child in right subtree
        else
        {
            curr = Leftmost(curr->right);
        }
    }
}
```

把正常的二叉树线索化

1. 左子树里的rightmost节点返回后需要设置后继
2. 右子树里的rightmost节点同样需要返回



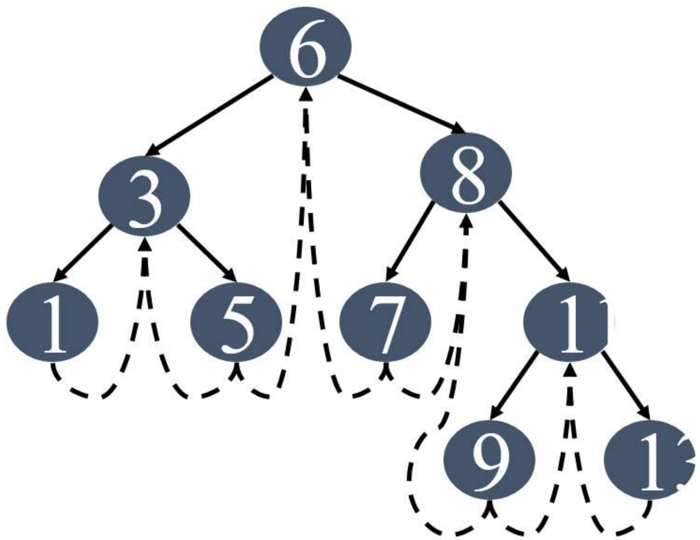
注意：只有左子树中的rightmost节点，它的后继不在这个子树里



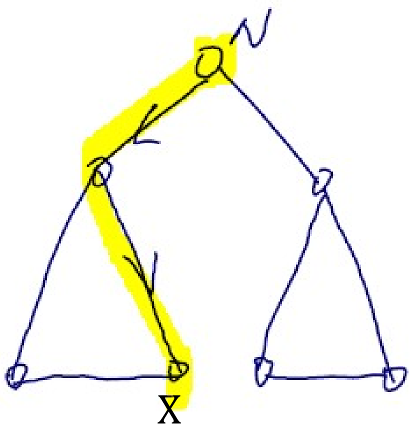
```
// Converts tree with given root to threaded binary tree
// This function returns rightmost child of root
Node * ConvertToThreaded(Node *root)
{
    // Base cases : Tree is empty or has single node
    if (root == nullptr)
    {
        return nullptr;
    }

    // Find predecessor if it exists
    if (root->left)
    {
        // Find predecessor of root (Rightmost child in left subtree
        Node * rightmost = ConvertToThreaded(root->left);

        // Link a thread from predecessor to root
        rightmost->right = root;
        rightmost->rightThread = true;
    }

    // Recursion for right subtree.
    if (root->right)
    {
        return ConvertToThreaded(root->right);
    }

    // If current node is rightmost child
    return root;
}
```

线索二叉树改进

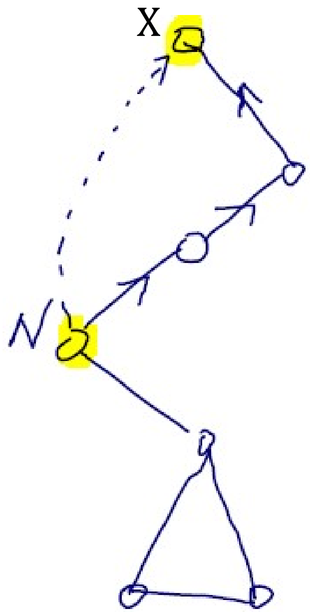
- 有些节点的左指针还是没利用上
- 考虑让它指向中序遍历时的直接前驱Predecessor



找节点N的前驱Predecessor

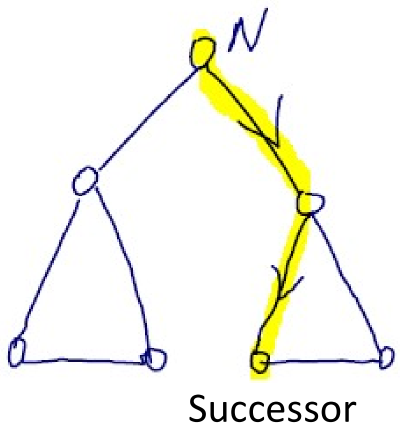


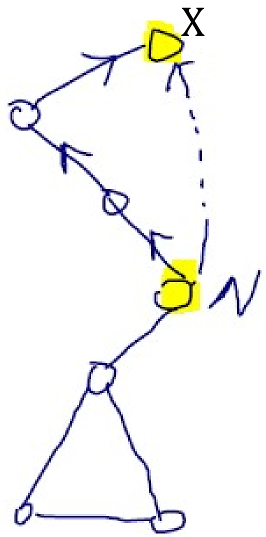
情况1：节点N的左子节点不为空，那么直接找左子树的rightmost节点



情况2：节点N的左子节点为空，那么找thread predecessor。
其实等同于从节点N开始找第一个父节点X，满足N在X的右子树上即可。

找节点N的后继Sucessor





情况1：节点N的右子节点不为空，那么直接找左子树的leftmost节点

情况2：节点N的右子节点为空，那么找thread successor。
其实等同于从节点N开始找第一个父节点X，满足N在X的左子树上即可。

Threaded binary search tree

- 线索化的二叉查找树
- 之后讲到二叉查找树后再回来看

堆

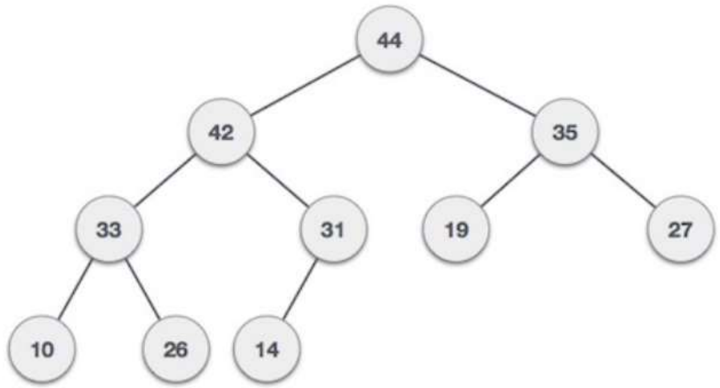
heap

定义

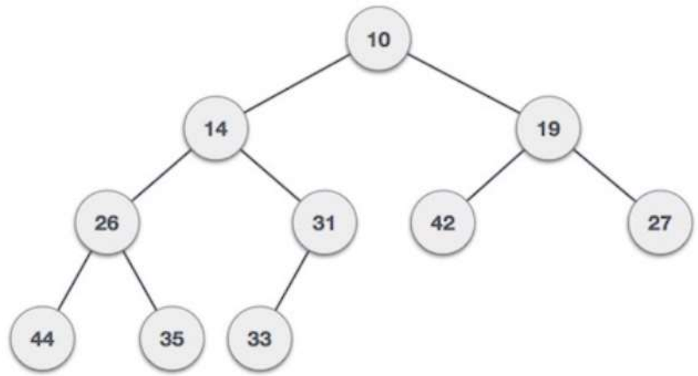
- 是个完全树，即除了最后一层，前面都没有空节点
- 并且满足性质，如果节点A有子节点B，那么$Key(A) \ \geq Key(B)$
- 比较适合按数组存

堆种类

- 最大堆$Key(A) \geq Key(B)$

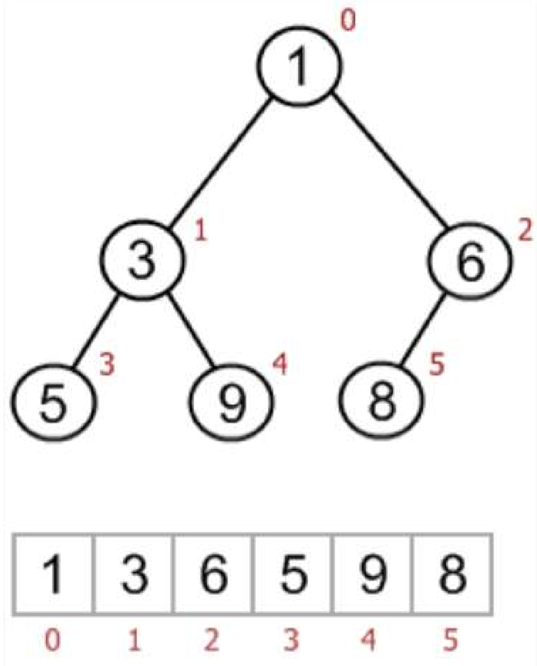


- 最小\堆$Key(A) \leq Key(B)$



如何用数组表达堆

- 根节点是第一个数组元素
- 对于第i个数组元素，
  - 其父节点是第i/2个数组元素
  - 其左子节点是2i+1个数组元素
  - 其右子节点是2i+2个数组元素
- 数组里的元素是按层排列的



最小堆插入算法

- 在堆的最后加入一个新节点，设置值
- 比较其父节点的值，如果比父节点大，就交换
- 循环直到满足最小堆的性质，或者到根节点
- $log(n)$

```
// Inserts a new key 'k'
void insertKey(int k)
{
    // First insert the new key at the end
    data.push_back(k);
    int i = data.size() - 1;

    // Fix the min heap property if it is violated
    while (i != 0 && data[parent(i)] > data[i])
    {
        swap(data[i], data[parent(i)]);
        i = parent(i);
    }
}
```

最小堆维护算法

- 用递归调整根节点i所在的子树
- 这个函数作为子程序被删除算法调用
- $log(n)$

```
void MinHeapify(int i)
{
    int l = left(i);
    int r = right(i);
    int min = i;
    if (l < data.size() && data[l] < data[min])
    {
        min = l;
    }
    if (r < data.size() && data[r] < data[min])
    {
        min = r;
    }

    if (min != i)
    {
        swap(data[i], data[min]);
        MinHeapify(min);
    }
}
```

最小堆移去最小值

- 最小值就是根节点
- 把最后一个元素替代第一个元素
- 然后调用维护算法，把新根结点修正
- $log(n)$

```
int extractMin()
{
    if (data.empty())
    {
        return INT_MAX;
    }

    // Store the minimum value, and remove it from heap
    int root = data[0];
    data[0] = data.back();
    data.pop_back();

    if (data.size() > 1)
    {
        MinHeapify(0);
    }

    return root;
}
```

最小堆删除算法

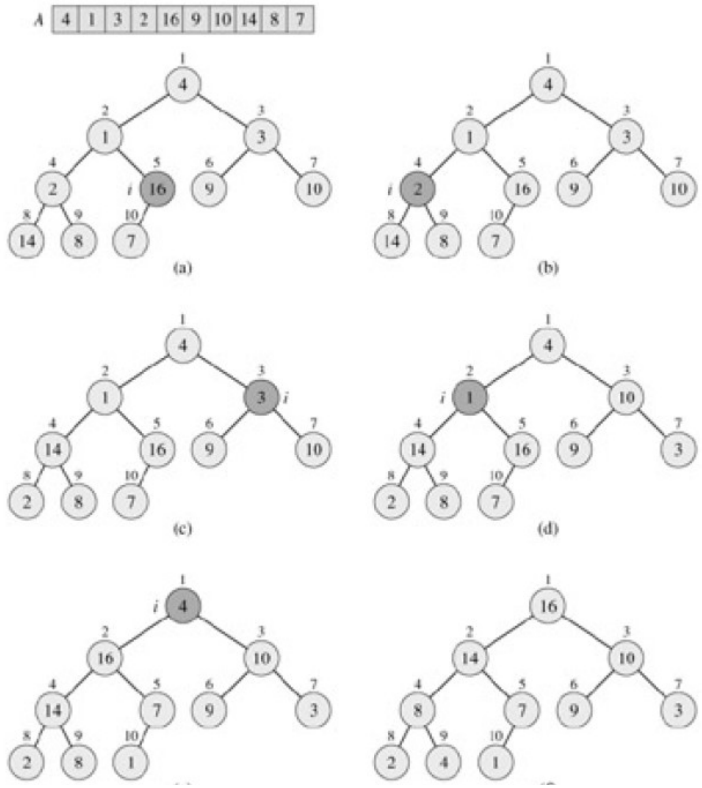
- 先把要删除的元素设为最小值
- 然后根据最小堆性质，把它交换到根节点
- 最后调用移去最小值算法
- $log(n)$

```
void decreaseKey(int i, int new_val)
{
    data[i] = new_val;
    while (i != 0 && data[parent(i)] > data[i])
    {
        swap(data[i], data[parent(i)]);
        i = parent(i);
    }
}

// Deletes a key stored at index i
void deleteKey(int i)
{
    decreaseKey(i, INT_MIN);
    extractMin();
}
```

堆的应用

1. Heapsort
   - 给定一组数，如何建立堆

```
void BuildHeap(int arr[], int length)
{
    for (int i = 0; i < length; i++)
    {
        data.push_back(arr[i]);
    }

    for (int i = length / 2; i >= 0; i--)
    {
        MinHeapify(i);
    }
}
```



2. 找出一组数中前k个最小数
3. 合并K个有序数组
4. 用来实现priority queue

Q&A

Thanks!