第一章 概率论基础

1. （1）设随机变量X的分布函数$F(x)$连续，求$Y = F(x)$的密度函数；
   （2）求$Y = -2lnF(x)$的密度函数.

2. （寿险精算问题）在保险公司里有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了人寿保险，在 1 年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在 1 月 1 日须交 12 元保险费，而在死亡时家属可从保险公司里领 2000 元赔偿金.求
   （1） 保险公司亏本的概率；
   （2） 保险公司获利分别不少于 10000 元、20000 元的概率.

3. 一位律师要决定收取固定费用 5000 元，还是收取胜诉酬金 25000 元（输掉则一无所获）。他估计打赢的概率为 0.3。求他收取的费用的均值和标准差，如果
   （1） 收取固定费用；
   （2） 收取胜诉酬金费用；
   （3） 你将如何决策呢？为什么？

4. 在每个时间段内，某股票的股价会以 0.39 的概率下降 1，以 0.20 的概率保持不变，以 0.41 的概率上升 1，设股价在每个时间段的变化是独立的，估计 700 个时间段后，股价比开始时增长 10 以上的概率。

5. 某品牌的轮胎的平均寿命为 60000 公里，标准差为 5000 公里。随机抽选 30 只轮胎，问抽取的样本寿命满足以下条件的概率：
   （1） 超过 70000 公里；
   （2） 在 58000 公里和 62000 公里之间。

6. 设(X, Y)具有联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+xy}{4}, |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, \quad\quad\quad \text{其他} \end{cases}$$

   试证X和Y不独立，但X^2和Y^2是相互独立的。

7. （超售问题）若飞机乘客购票后按期搭机的概率为p，各乘客的行动假定是独立的，试问一架 200 座飞机售出 202 张机票不发生超座的概率。
   (1) 对$p = 0.97, 0.96, 0.95$，计算上述概率；
   (2) 查阅文献对超售问题做个简介，生活中你是否碰到过超售现象，举例说明。

8. 若(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

   试证：X和Y不相关，但它们不独立。