数据结构与算法

DATA STRUCTURE

第十七讲 二叉查找树

胡浩栋

信息管理与工程学院

2017 - 2018 第一学期

课堂内容

- 二叉查找树

顺序查找

- 二分法查找

- 插值查找
- Fibonacci查找

二叉查找树

Binary Search Tree

内容

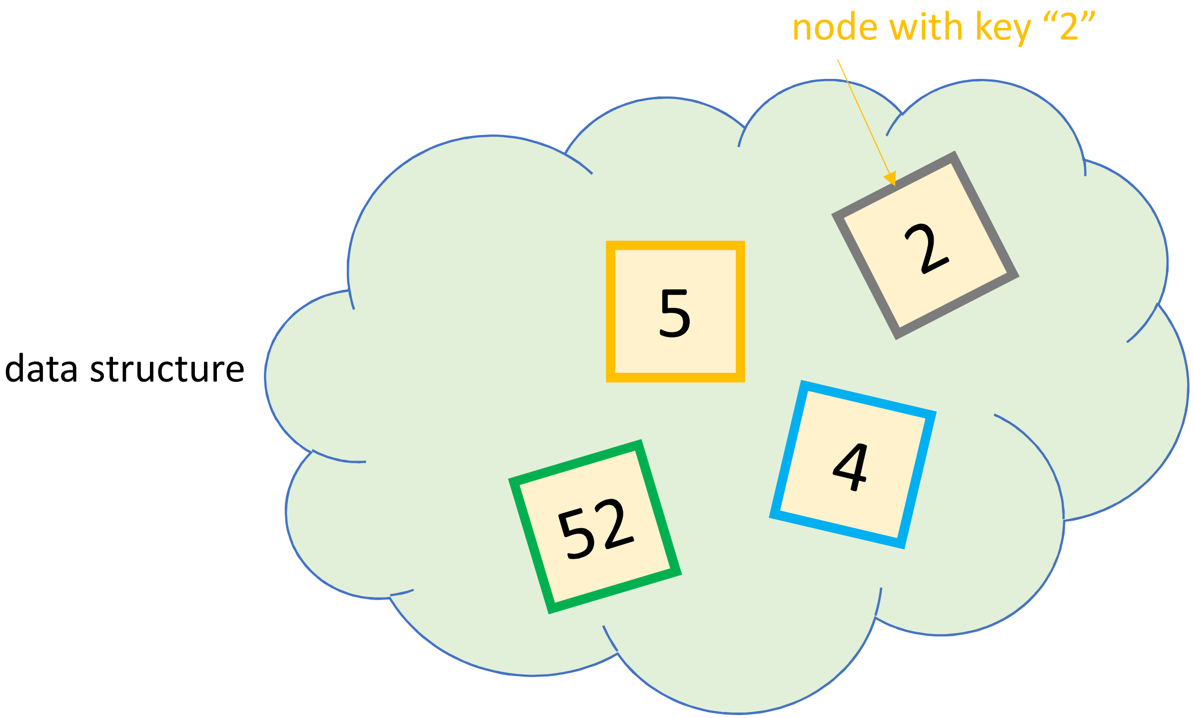
- 为什么使用二叉查找树
- 什么是二叉查找树Binary Search Tree
- 怎么维护二叉查找树

内容

- 为什么使用二叉查找树
- 什么是二叉查找树Binary Search Tree
- 怎么维护二叉查找树

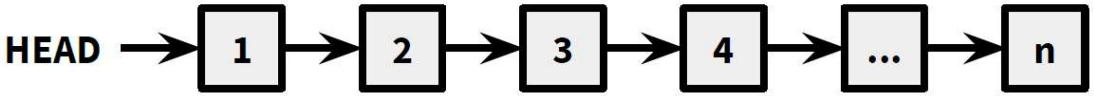
问题:

- 假设有几百万数据+需要维护，如何设计数据结构能够支持高效的查找/插入/删除.



回忆之前的动态数据结构

1. Sorted linked lists:

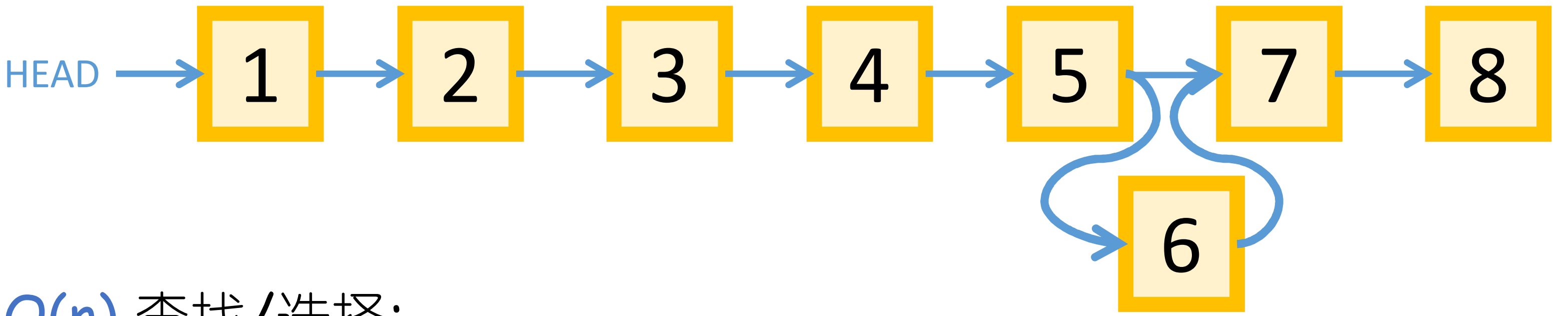


2. Sorted array:

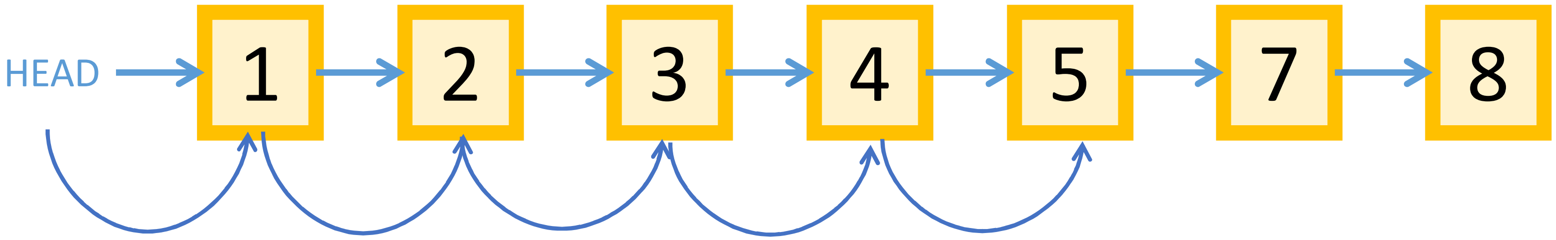
Stack, queue, heap都不能满足要求，比array，linklist还差

Sorted linked lists

- O(1) 插入/删除 (假设已经知道需要插入/删除的节点):



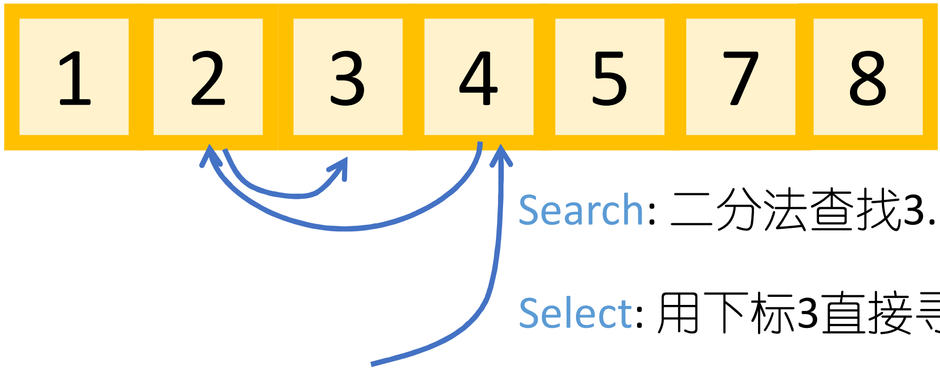
- O(n) 查找/选择:



Sorted Arrays

- O(n)插入/删除：

- O(log(n)) 查找, O(1) 选择:



Search: 二分法查找3.

Select: 用下标3直接寻址A[3].

The best of both worlds

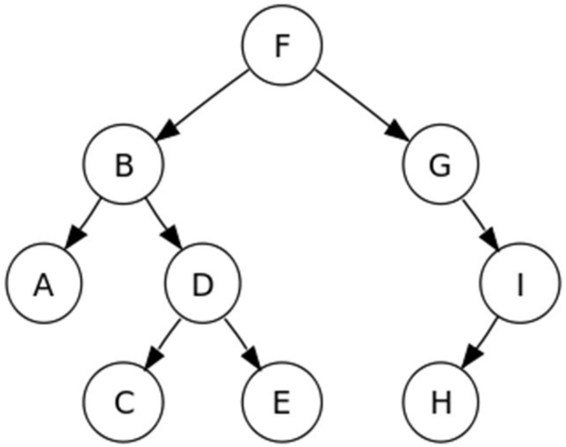
TODAY!

	Sorted Arrays	Linked Lists	Binary Search Trees*
Search	O(log(n))	O(n)	O(log(n))
Insert/Delete	O(n)	O(1)	O(log(n))

内容

- 为什么使用二叉查找树
- 什么是二叉查找树Binary Search Tree
- 怎么维护二叉查找树

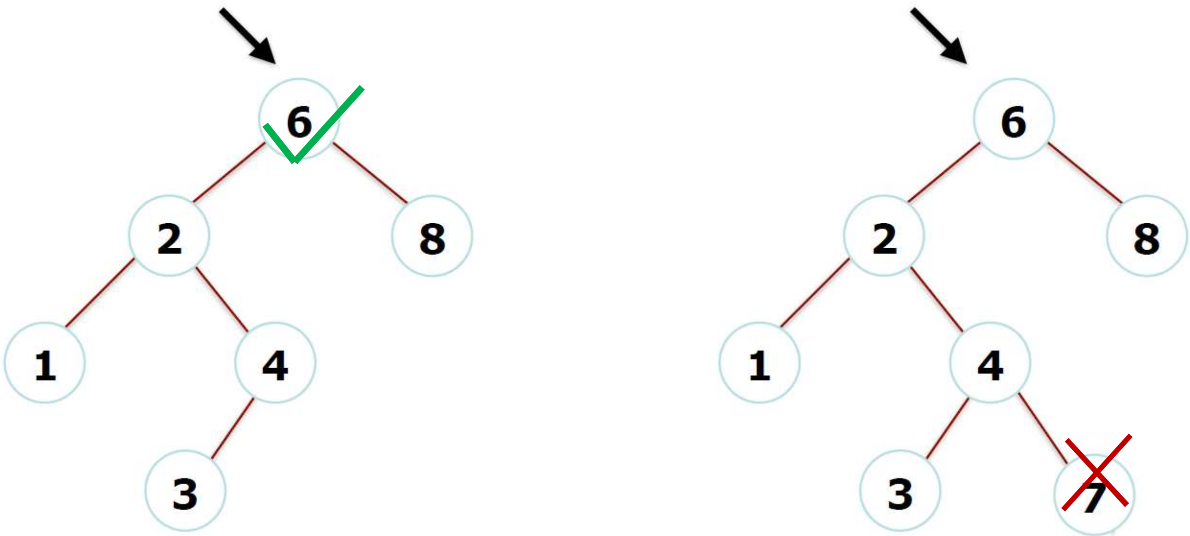
首先是个二叉树



二叉查找树

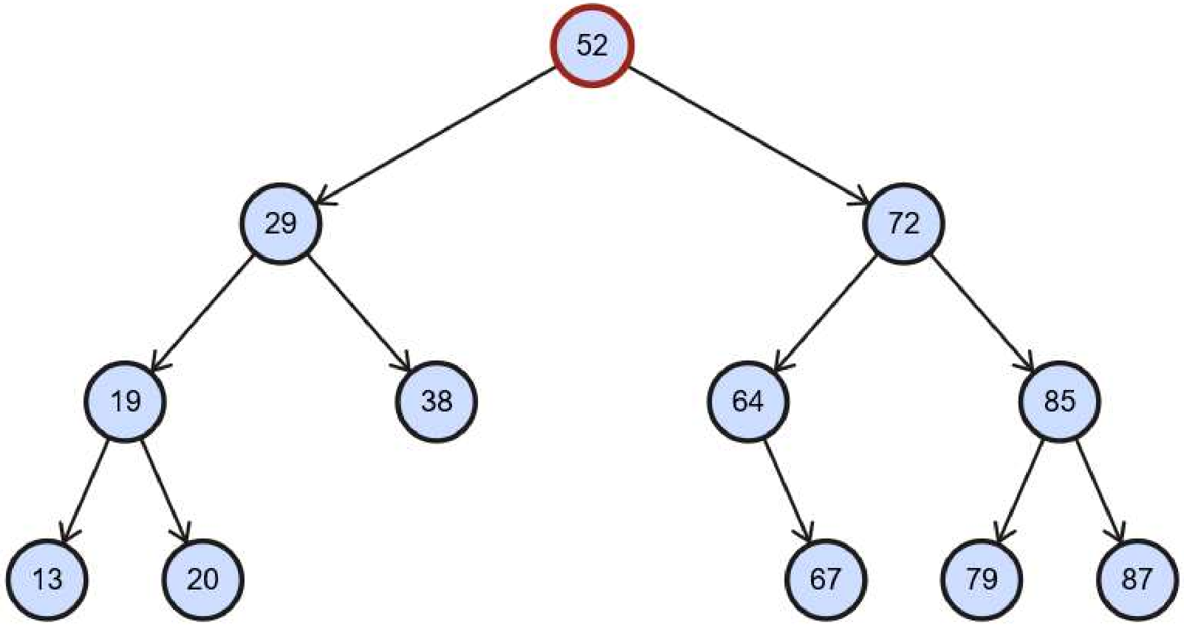
满足下面性质的二叉树：对任何一个节点元素X

- 它左子树里的任何一个节点元素都小于X.
- 它右子树里的任何一个节点元素都大于X.



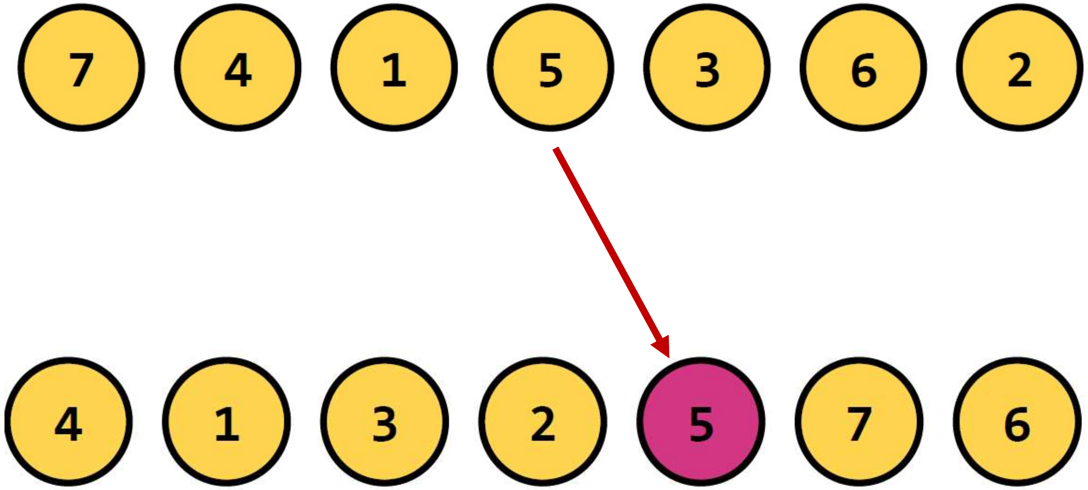
- 注意任意子树都是BST

最大值/最小值



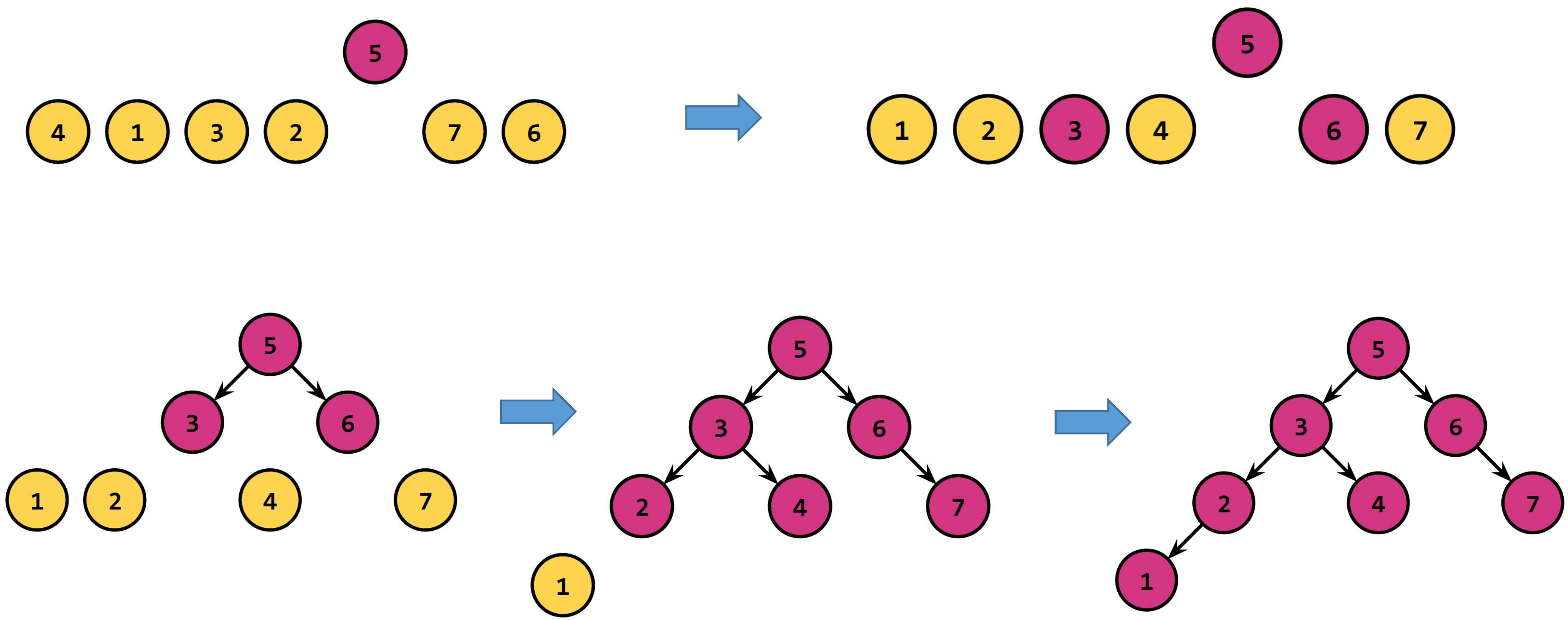

```
// Utility function to find leftmost
// node in a tree rooted with root
Node* Leftmost(Node * root)
{
    while (root && root->left)
    {
        root = root->left;
    }
    return root;
}
```

如何建立二叉查找树

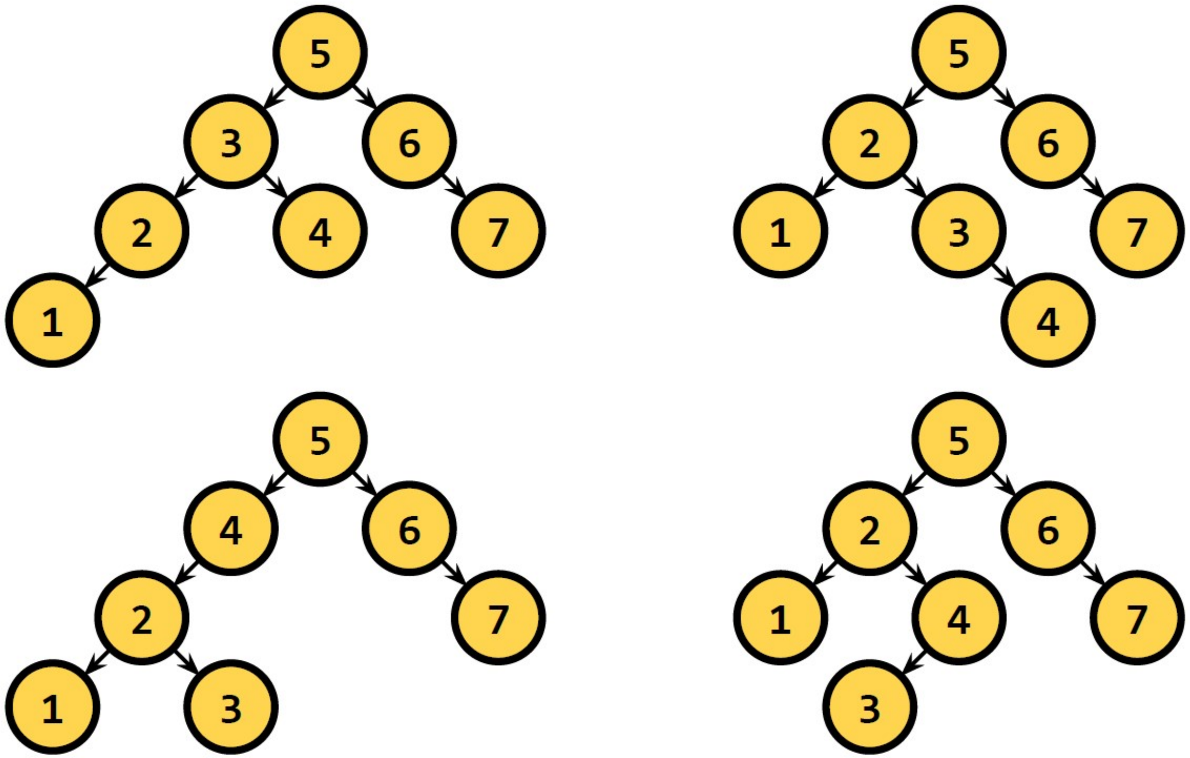


选定一个数据元素作为根节点，并以它为基轴，所有小的元素放左边，大的元素在右边

如何建立二叉查找树

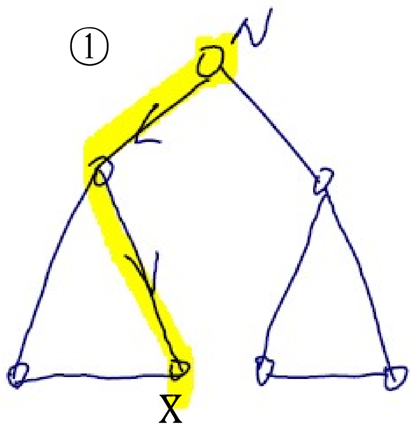


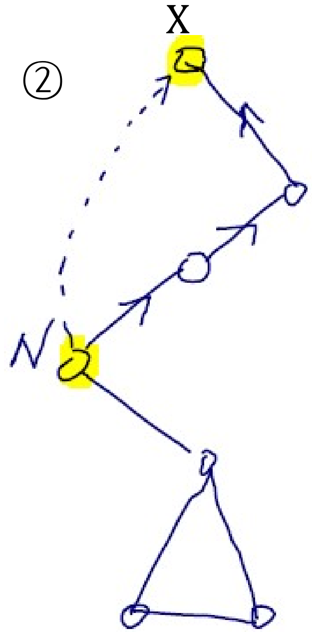
对同一批数据元素，可以有很多二叉树



前驱predecessor/后继successor

- 我们在线索化二叉树里，涉及到了前驱/后继，按中序遍历
- 在BST里，前驱/后继有了更明确的意义
  - 前驱就是所有元素里刚好比它小的元素
  - 后继就是所有元素里刚好比它大的元素
- BST的中序遍历，正好是从小到大的排序

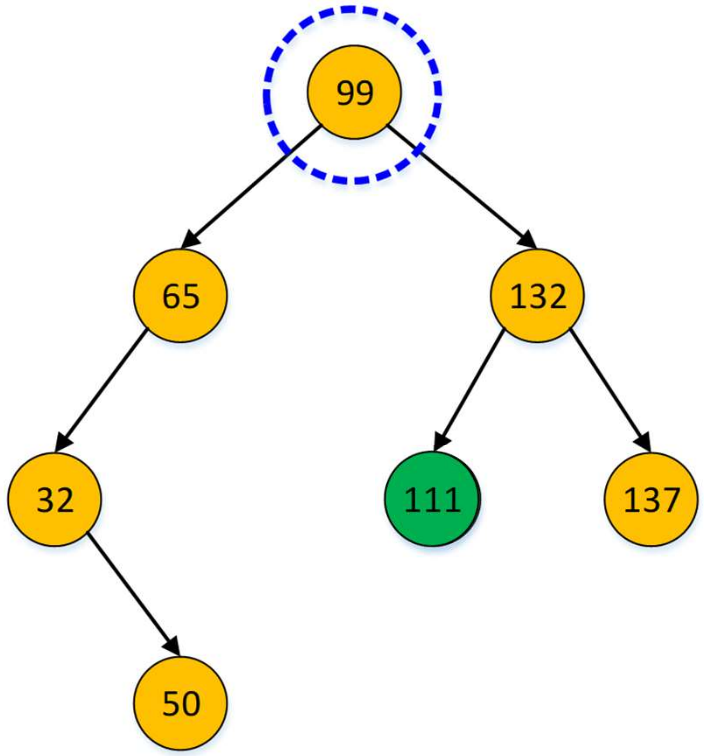




内容

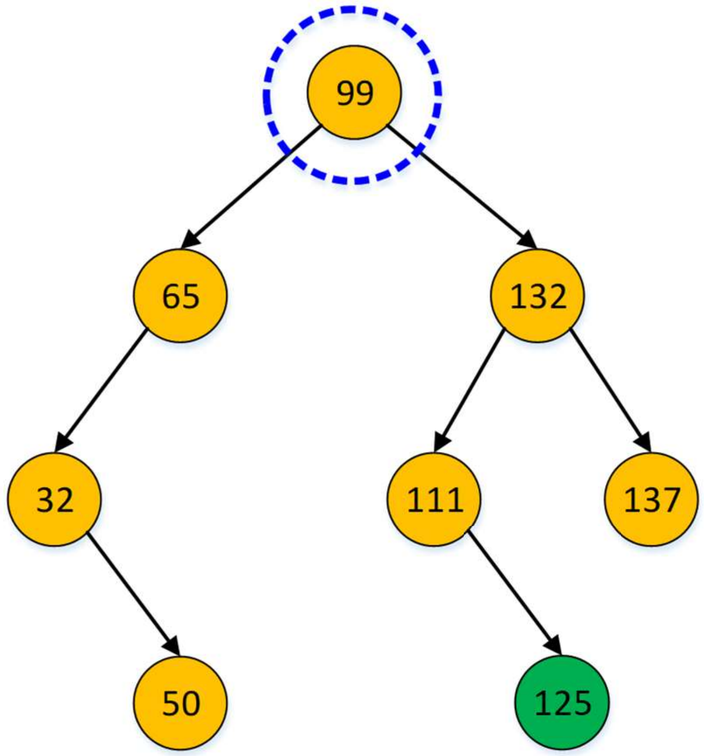
- 为什么使用二叉查找树
- 什么是二叉查找树Binary Search Tree
- 怎么动态维护二叉查找树：
  查找/插入/删除

查找算法(111)



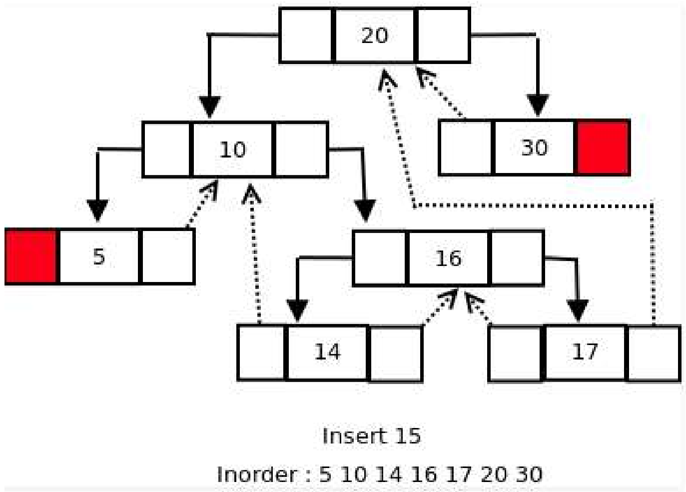
因为对查找特别友好，所以称为二叉查找树

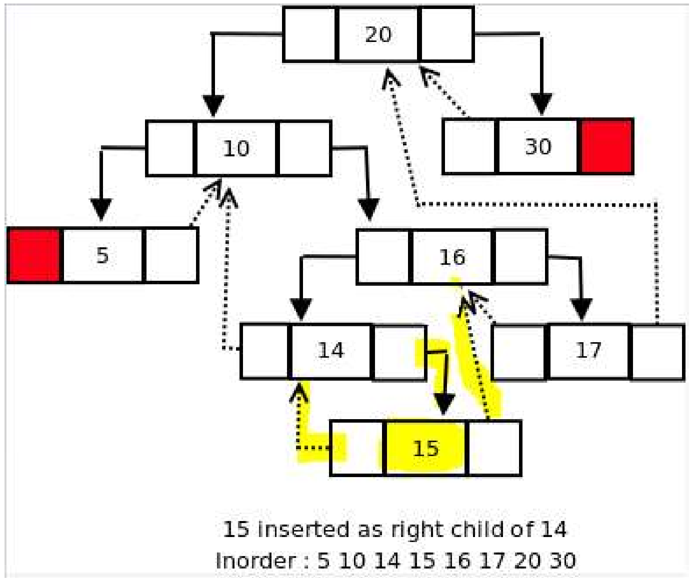
插入算法(125)



先查找到叶节点，然后根据大小插入为左/右子节点

*Threaded BST插入算法





先按正常BST插入新元素
然后按插入节点是左子节点/右子结点，调节相应的thread指针

Randomly built BST

- 对给定的一组数，
- 随机选出一个数x，利用插入算法，把x插入初始为空的BST
- 继续上面步骤，直到数组变空

- 树的平均高度是$O(log(n))$
- 对于Threaded BST，只需要改用Threaded BST插入算法

删除算法

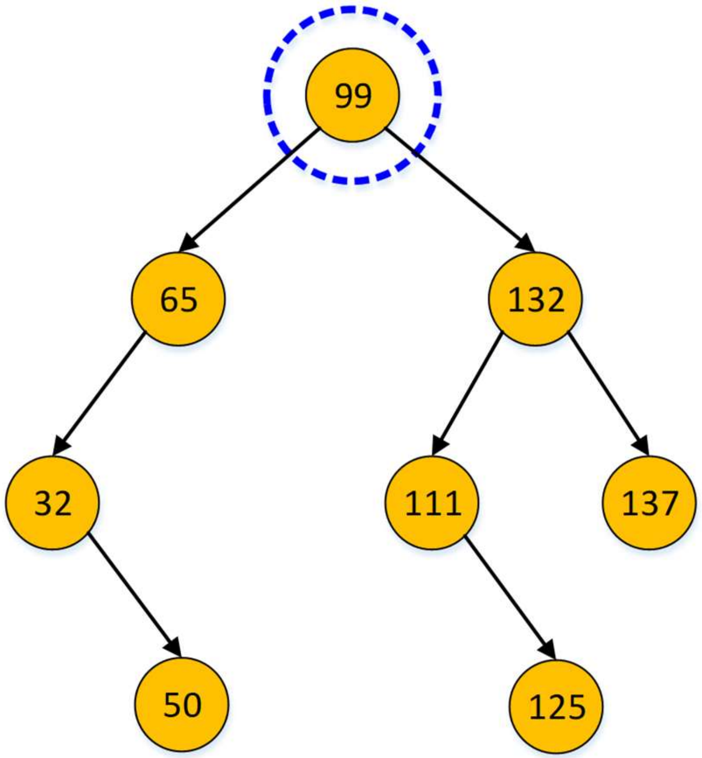
比插入算法要复杂:

Case 1: 被删节点有0个子节点

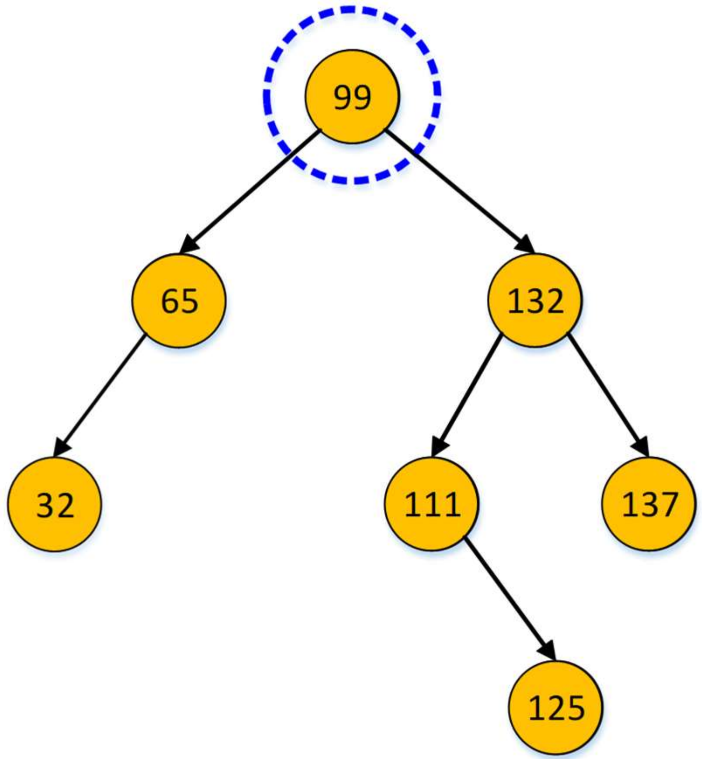
Case 2: 被删节点有1个子节点

Case 3: 被删节点有2个子节点

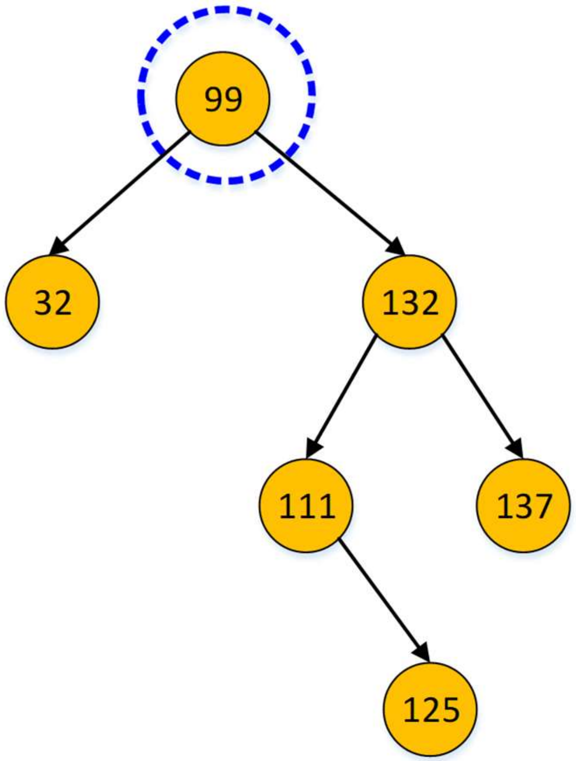
Case 1: Delete Key (50)



Case 2: Delete Key (65)

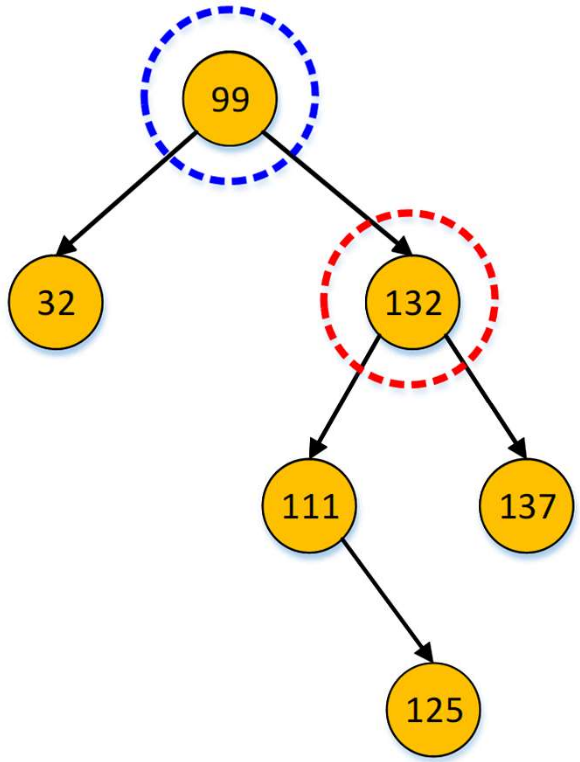


Case 3: Delete Key (99)



如何直接删除99，会剩余两个单独子树，
不好处理

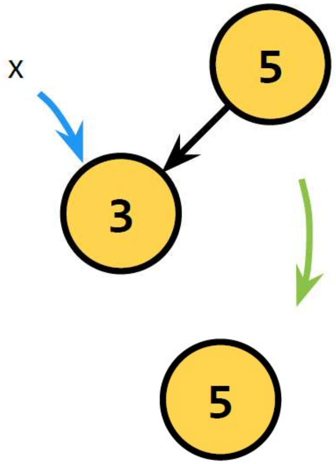
Case 3: Delete Key (99) .



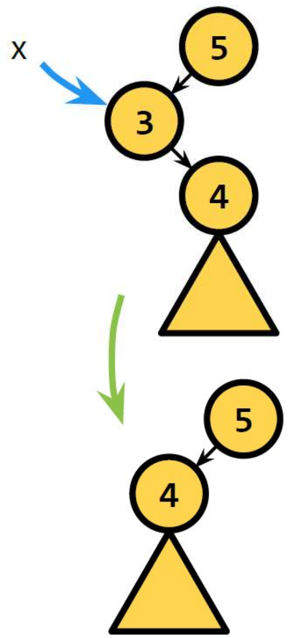
- 先查找99的直接后继111
- 然后用111替换99，111的新位置合法
- 最后删除原来的111（最多1个子节点）

删除算法总结

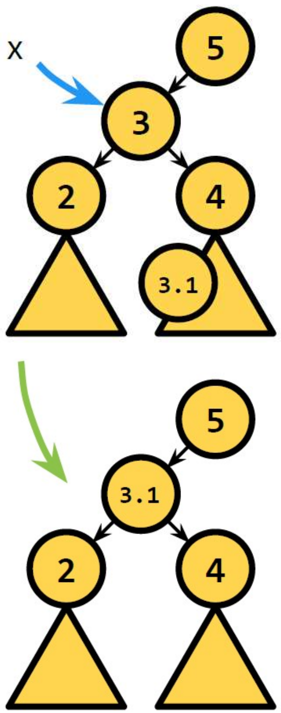
Case 1： x是叶节点，直接删除



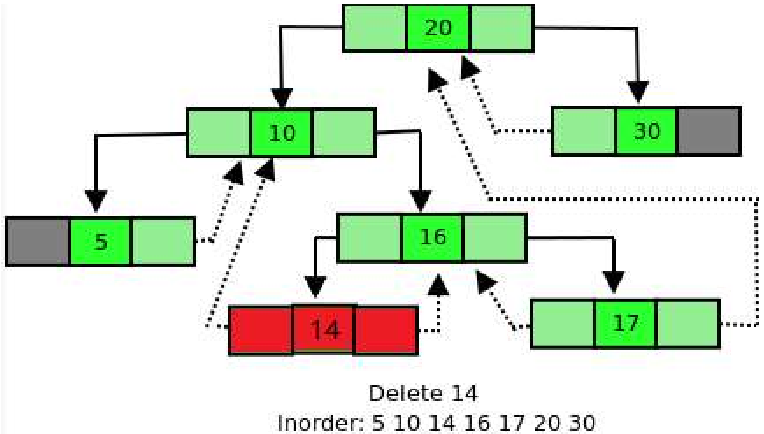
Case 2： x有一个子节点，直接把子节点的子节点接到父节点

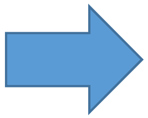


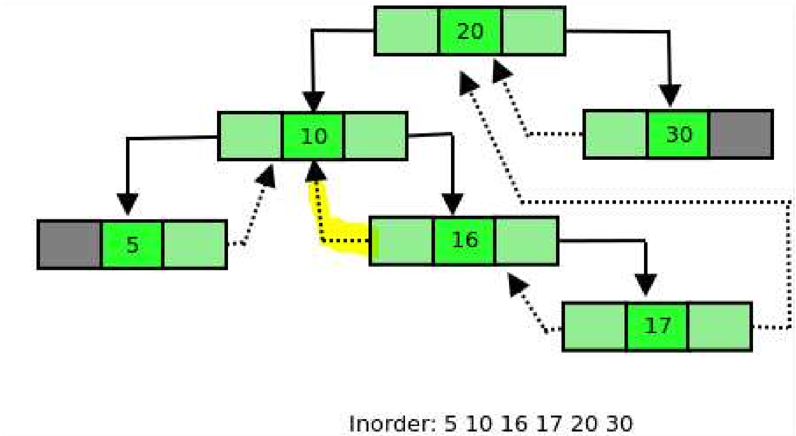
Case 3： x有两个子节点，用x的直接后继代替，然后删除后继原来的节点（最多有一个子节点）



*Threaded BST删除算法（1）

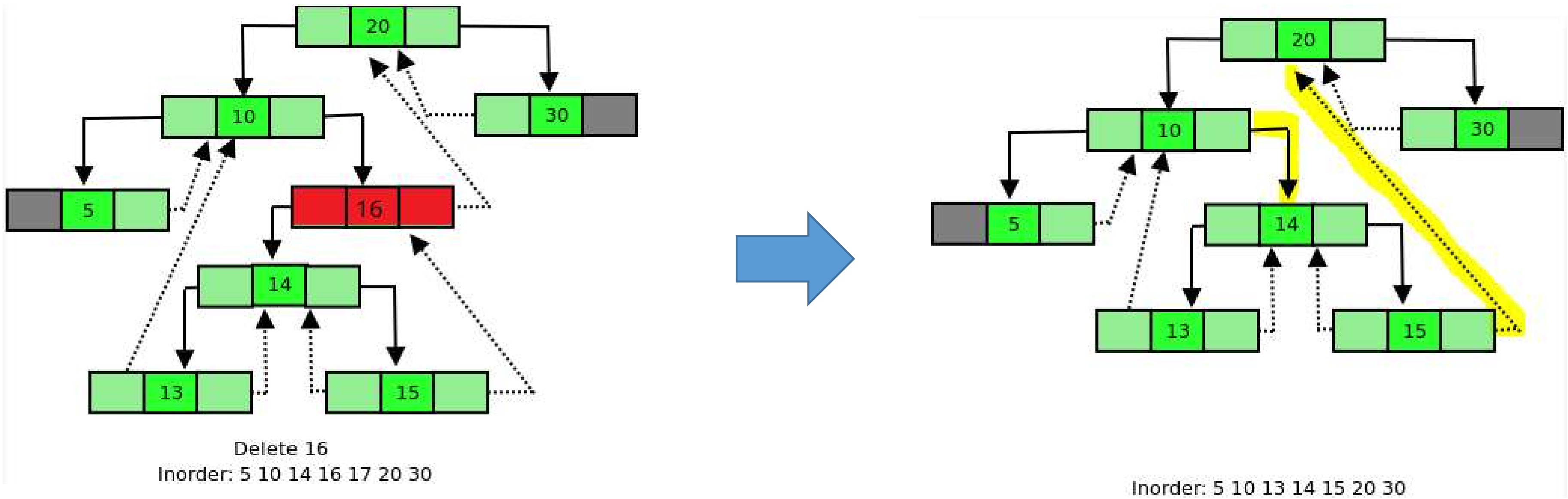






先按正常BST删除叶结点
然后按删除节点是左子节点/右子结点，调节父节点相应的thread指针

*Threaded BST删除算法（2）

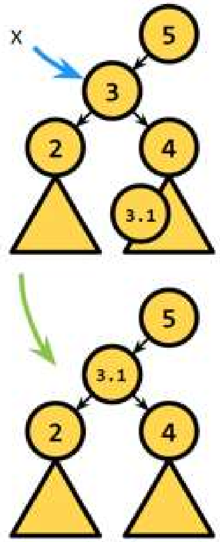


先按正常BST删除结点16，它只有左子节点
然后按删除节点是左子节点/右子结点，调节父节点相应的指针以及14子树中的rightmost结点的thread指针

*Threaded BST删除算法（3）

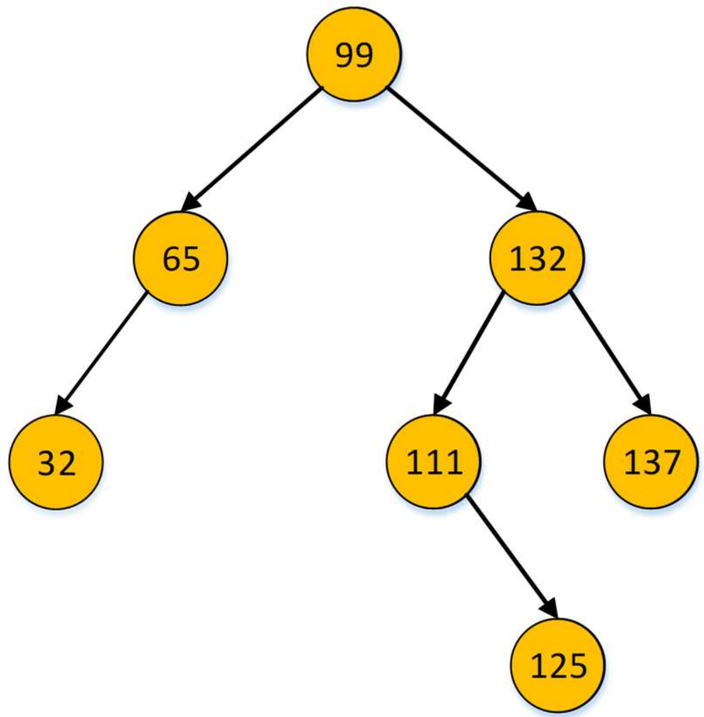
两个子节点的情况：

- 按正常BST删除算法找到被删节点3的直接后继3.1
- 把3.1复制到节点3（不用复制指针）
- 然后删除原来的3.1节点（最多一个子节点）



查找/插入/删除时间复杂度

- 查找是主要的操作
- 插入/删除都是先查找，然后再花费O(1)额外操作.



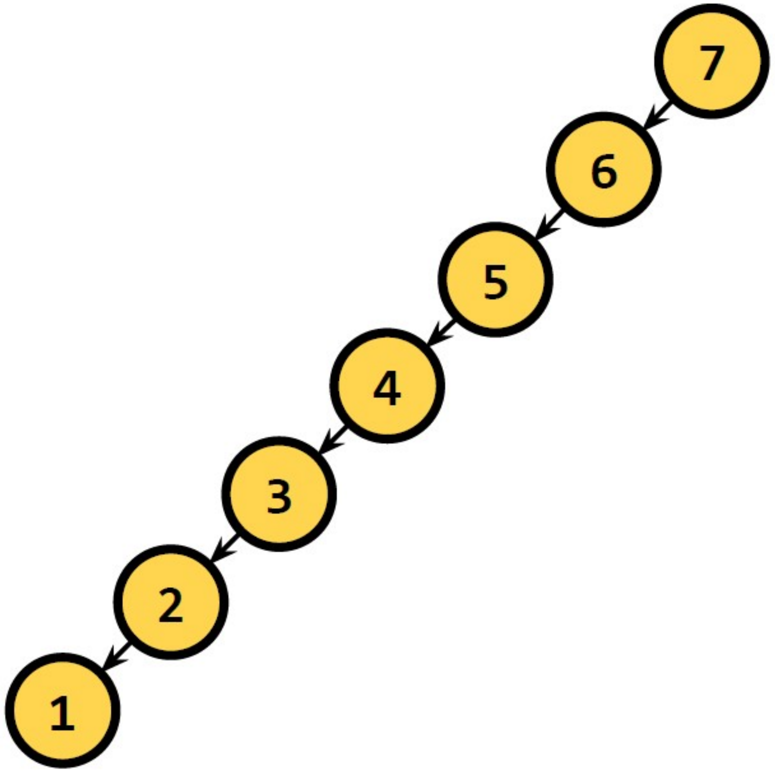
Time = O(depth of tree)

= O(log n) ???

问题是……

- 如果BST里的元素的插入顺序是有序的
- 你会得到一个什么样子的BST？

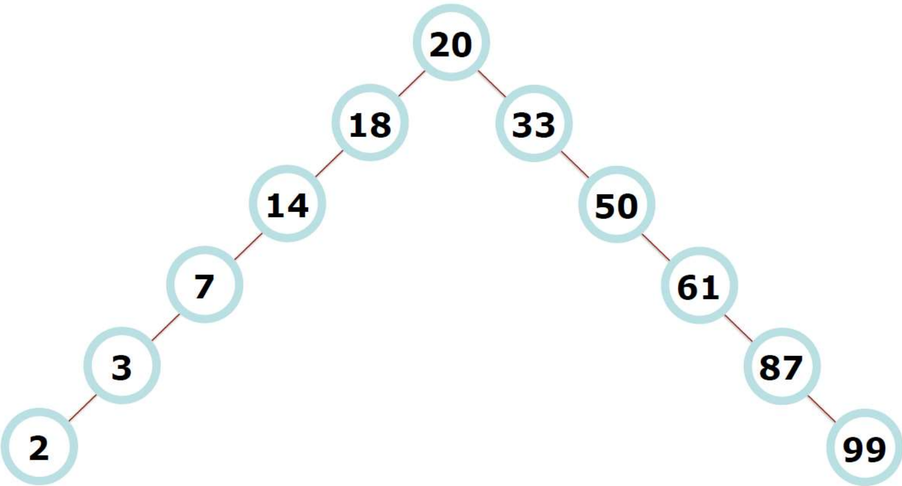
问题是……



- 这还是一个有效的BST
- 但是树的高度是n，不再是 $O(\log(n))$
- 其实退化成了链表

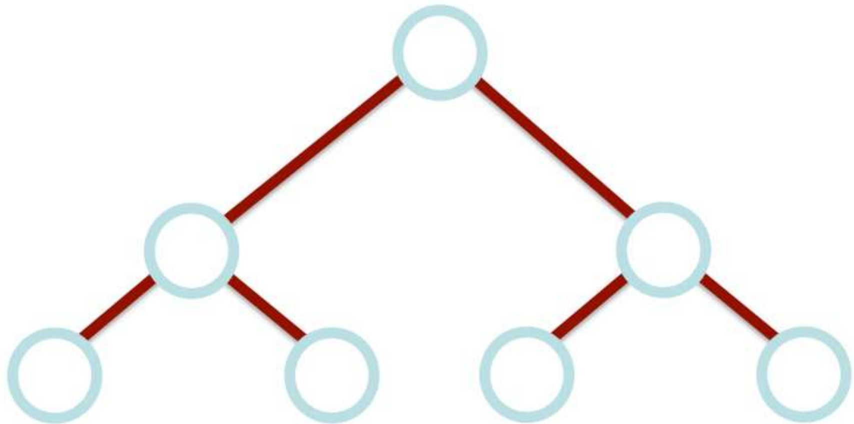
维持O(log n) 复杂度的思路

- 保持二叉查找树的左右节点个数平衡
- 不过不是下面这种平衡，即只有根节点是平衡的



维持O(log n) 复杂度的思路

- 另一方面，如果要求所有节点的左右子树完全平衡
- 却是太难达到要求，只有满的完全的二叉树才是
- 思路是我们只需要维持大体平衡，
- 希望所有节点的左右子树的节点个数只差常数倍



平衡二叉查找树

- AVL树
- 红黑树