第四次作业

1. 设总体概率函数如下，$X_1,\cdots,X_n$是样本，试求未知参数的极大似然估计.

（1） $f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta}$，$\theta>0$；

（2） $f(x;\theta)=1$，$\theta-1/2<x<\theta+1/2$；

（3） $f(x;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}$，$\theta_1<x<\theta_2$.

2．一个罐子里装有黑球和白球，有放回地抽取一个容量为n的样本，其中有k个白球，求罐子里黑球数和白球数之比R的极大似然估计.

3. 设总体$X\sim U(\theta,2\theta)$，其中$\theta>0$是未知参数，又$X_1,\cdots,X_n$为取自该总体的样本，$\bar{X}$为样本均值.

（1）证明$\hat{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$是参数$\theta$的无偏估计和相合估计；

（2）求θ的极大似然估计，它是无偏估计吗？是相合估计吗？

4. 设总体$X\sim Exp(1/\theta)$，$X_1,\cdots,X_n$是样本，θ的矩估计和极大似然估计都是$\bar{X}$，它也是θ的相合估计和无偏估计，试证明在均方误差准则下存在优于$\bar{X}$的估计（提示：考虑$\hat{\theta}_a=a\bar{X}$，找均方误差最小者）.

5. 根据美国第三次健康和营养调查，一个$n=264$的女性样本，每日蛋白质摄入量平均数是 59.6 克，标准差是 30.5 克，估计女性平均每日蛋白质摄入量及 95%置信区间，并对推荐的女性每日蛋白质摄入量 45~50 克相比较，你能得出什么结论？

6. 已知某种材料的抗压强度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：

482　493　457　471　510　446　435　418　394　469.

（1）求平均抗压强度μ的置信水平为 95%的置信区间；

（2）若已知$\sigma=30$，求平均抗压强度μ的置信水平为 95%的置信区间；

（3）求σ的置信水平为 95%的置信区间.

7. 你想通过在不同的地区（代表性地区）抽取最近的房屋销售情况来研究一个国家的房屋平均价格。你的研究目标是提出房屋平均价格的一个 95%置信区间。按以往的研究总体标准差大约是 7200 美元。在下列不同误差幅度情况下，样本容量应该至少是多少？

（1）误差幅度在 500 美元以内？
（2）误差幅度在 100 美元以内？
（3）比较前两问的结果，你能得出什么结论？

8. 你设计了一个调查来估计你所在学校使用手机某 APP 的学生比率。如果你希望 95%的置信水平和误差不超过 4 个百分点，那么你的样本至少应该要多少名学生？

9. 假设人体身高服从正态分布，今抽测甲、乙两地区 18 岁~25 岁女青年身高得数据如下：甲地区抽取 10 名，样本均值 1.64m，样本标准差 0.2m；乙地区抽取 10 名，样本均值 1.62m，样本标准差 0.4m．求：
（1）两正态总体方差比的置信水平为 95%的置信区间；
（2）两正态总体均值差的置信水平为 95%的置信区间.

10. 设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}I_{[x>\theta]},\quad -\infty<\theta<\infty,$$

$X_1,\dots,X_n$为抽自此总体的简单随机样本.
（1）证明：$X_{(1)}-\theta$的分布与θ无关，并求出此分布；
（2）求θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.