

矩形简支薄板振动模态及灵敏度分析

王秀颖,张军,兆文忠

(大连交通大学 交通工程学院,辽宁 大连 116028)*

摘要:基于矩形简支薄板模态频率的理论解,推导了模态频率对薄板厚度灵敏度理论解,通过实例计算了矩形简支薄板前10阶模态频率及灵敏度,并计算分析了厚度增加单位值时模态频率灵敏度理论差分解;建立了矩形薄板的有限单元模型,用有限单元法计算了矩形简支薄板的模态频率和振型,分析比较了有限单元数量对模态计算精度的影响;基于有限单元法,用数值微分法计算了薄板模态频率对板厚度的灵敏度,并计算分析了基于有限单元法的模态频率灵敏度差分解.理论推导和计算结果表明,简支矩形薄板模态频率对板厚度灵敏度的理论解与厚度无关,数值微分模态频率灵敏度与理论解的误差最小,其精度高于理论差分解和有限元差分解,证明了数值微分法模态频率灵敏度的准确性和有效性.

关键词:简支薄板;模态频率;灵敏度;有限元法

文献标识码:A **DOI:**10.13291/j.cnki.djdxac.2018.04.006

0 引言

振动模态是结构的固有动力学性能,模态频率及振动模式直接影响工程结构的动力学性能、安全性及稳定性,尤其薄板结构的模态特性更直接与振动强度、噪声及疲劳性能密切相关,薄板类结构也是车辆、船舶等工程中广泛使用的基本结构之一^[1-2],对薄板类结构的研究主要是针对薄板类结构的振动及噪声^[3-5].为了减小振动,在工程设计阶段一般会对结构进行修改,快速准确的修改需要计算结构灵敏度^[6-8],结构灵敏度是结构模态、应力等响应随结构参数的变化率,即响应对结构设计变量的导数.在有限单元法的基础上,灵敏度计算方法有解析法^[9-10]、半解析法^[11]、完全差分法^[12]、伴随变量法等^[13-14].解析法是从有限单元方程出发,严格求响应对设计变量的导数,对不同的单元类型及不同的结构参数,其理论是完全不同的,如壳单元和梁单元中的质量矩阵和刚度矩阵完全不同,其对结构参数的灵敏度也是完全不同的.解析法发展最早,精度最高,但求解效率低.半解析法是在有限单元法的基础上,总体上基

于有限单元方程用微分法求对结构参数的灵敏度,但质量矩阵和刚度矩阵对结构参数的灵敏度用差分法,不用考虑具体的矩阵形式,提高了计算效率,并具有较高精度,这种方法兼顾求解效率和求解精度,是普遍使用的方法之一.完全有限差分法求解灵敏度不必进行复杂的理论推导,具有很大的通用性,但是对 N 个设计参数求解结构响应的灵敏度必需进行 $N+1$ 次响应计算,计算效率低,而且所求得的灵敏度依赖于差分步长,计算精度也较低.伴随变量法是通过伴随变量,解决求解具有大规模设计变量灵敏度的求解效率问题.张保^[15]提出了半解析伴随变量灵敏度计算方法,以四边简支平板为算例,验证了计算精度和效率高于一般伴随变量法.程耿东院士^[16]以梁结构为研究对象,用半解析法计算了模态灵敏度,并分析了半解析法的误差.

本文以矩形简支薄板为研究对象,推导了模态的理论解,并推导出了模态频率对薄板厚度的灵敏度计算式,即简支矩形薄板的模态灵敏度理论解,并计算了基于理论解的模态频率差分解.建

* 收稿日期:2017-11-02

基金项目:牵引动力国家重点实验室开放课题资助项目(TPL1402)

作者简介:王秀颖(1990-),女,硕士研究生;

张军(1964-),男,教授,博士,主要从事声学仿真、结构优化设计的研究

E-mail:zhj@djtu.edu.cn.

立了简支矩形薄板的有限元模型,用有限单元法计算了其振动模态,基于有限元法用半解析法计算了模态频率对板件厚度的灵敏度,并计算了基于有限元法的完全差分模态频率灵敏度.

1 简支薄板模态基本理论

1.1 简支矩形薄板的模态

矩形简支薄板的几何模型如图1所示.

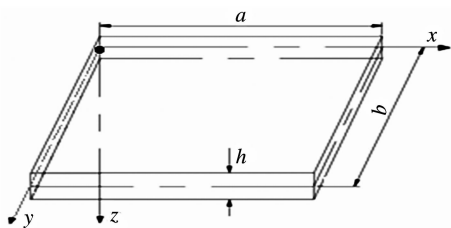


图1 简支矩形薄板几何模型

薄板长和宽分别为 a 、 b ,厚度为 h .设其在 z 方向的振动位移为 w ,则薄板的振动平衡方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

式中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的弯曲刚度, E, μ 分别为材料的弹性模量和泊松比, h 为板的厚度;作自由振动时 $q(x, y)$ 为惯性载荷,且 $q(x, y)$ 可以表示为

$$q(x, y) = -\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

通过分离变量法^[17],可求得薄板的横向频域自由振动方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \frac{\omega^2}{\beta^2} W = 0 \quad (3)$$

式中, W 为薄板的模态振型向量, ω 为对应的特征频率, $\beta = \sqrt{D/\rho h}$, ∇^2 为微分算子,且 $\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$.对于四边简支边界条件,容易得到其模态振型向量和特征频率分别为

$$W = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (5)$$

式(5)表明,矩形简支振动薄板的特征频率与材料参数、板厚度及矩形边长有关.

1.2 矩形简支薄板模态频率灵敏度

将 $\omega = 2\pi f$ 及板的弯曲刚度 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$

代入到式(5),得薄板的模态频率为

$$f = \frac{\pi h}{2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\mu^2)}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (6)$$

通过式(6)表示的模态频率求对薄板厚度 h 的导数,即薄板模态频率灵敏度的理论解,表示为

$$\frac{df}{dh} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\mu^2)}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (7)$$

式(7)表明,矩形简支薄板的模态频率对板厚度的灵敏度的理论解与板厚度无关.

2 基于有限单元法模态及其灵敏度

模态频率灵敏度即结构自由振动频率随结构参数的变化率.模态频率灵敏度可以用结构自由振动模态方程对设计变量进行微分得到.无阻尼结构自由振动有限元方程表示为

$$([K] - \lambda_i [M]) \{\varphi_i\} = 0 \quad (8)$$

式中, $[K]$ 、 $[M]$ 分别为结构刚度矩阵和结构质量矩阵; λ_i 为结构第 i 个特征值, $\{\varphi_i\}$ 为结构第 i 个振型向量.

设第 j 个设计变量为 x_j ,式(8)对其求导数

$$([K] - \lambda_i [M]) \frac{\partial \{\varphi_i\}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial [K]}{\partial x_j} - \lambda_i \frac{\partial [M]}{\partial x_j} \right) \{\varphi_i\} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} [M] \{\varphi_i\} \quad (9)$$

式(9)左乘 $\{\varphi_i\}^T$,由式(8)得下式

$$\{\varphi_i\}^T ([K] - \lambda_i [M]) \frac{\partial \{\varphi_i\}}{\partial x_j} = 0 \quad (10)$$

由式(9)、(10)得模态频率灵敏度为

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = \frac{\{\varphi_i\}^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial x_j} - \lambda_i \frac{\partial [M]}{\partial x_j} \right) \{\varphi_i\}}{\{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\}} \quad (11)$$

式中 $\frac{\partial [K]}{\partial x_j}$ 、 $\frac{\partial [M]}{\partial x_j}$ 分别为结构刚度矩阵及质量矩阵对设计变量的导数.要精确求解 $\frac{\partial [K]}{\partial x_j}$ 、 $\frac{\partial [M]}{\partial x_j}$

需要知道单元刚度矩阵及单元质量矩阵的具体形式,计算比较复杂,采用差分法计算刚度矩阵和质量矩阵灵敏度.这种总体上采用数值微分、刚度矩阵和质量矩阵采用差分的计算方法称为半分析的灵敏度计算方法,这种方法保持了微分法的计算精度,又使得计算相对简化,是一种效率和精度兼顾的灵敏度分析方法.

按式(11)得到的是薄板体振动的特征根灵敏度 $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}$,则薄板自由振动模态频率灵敏度可表示

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \tag{12}$$

3 振动薄板的模态频率

设简支矩形薄板厚度为 h , 两个边长分别为 0.33 m 和 0.2 m, 材料为钢材, 弹性模量 E 为 210GPa, 泊松比 μ 为 0.31, 密度 ρ 为 7 800 kg/m³. 为了研究模态频率及其灵敏度, 分别用式(6)、(7)计算了薄板的模态频率及其灵敏度理论解, 并用有限单元法进行了同样的计算.

3.1 模态频率的理论解

按照式(6)厚度分别为 0.9、1.0、1.1 cm 的矩形简支薄板的前十阶模态频率理论解被列在表 1 中. 表 1 表明, 随着板厚度增加模态频率逐渐增加.

表 1 简支薄板的模态频率					Hz
阶数	参数		厚度/cm		
	m	n	0.9	1.0	1.1
1	1	1	803.9	892.9	982.5
2	2	1	1 545.9	1 717.1	1889.5
3	1	2	2 474.5	2 747.5	3 023.2
4	3	1	2 782.7	3 090.9	3 401.1
5	2	2	3 215.5	3 571.6	3 930.1
6	3	2	4 452.3	4 945.5	5 441.7
7	4	1	4 514.1	5 014.2	5 517.3
8	1	3	5 256.2	5 838.4	6 424.2
9	2	3	5 998.2	6 662.6	7 331.2
10	4	2	6 183.7	6 868.8	7 557.9

3.2 模态频率的有限元解

建立简支薄板的有限单元模型, 如图 2 所示. 为了避免有限单元网格数量的影响, 研究了网格数量对计算结果的影响, 对 0.3 m×0.2 m、1 cm 厚的简支矩形薄板分别板划分了 24、300、600、1200、2 400 个四边形壳单元, 不同单元数量的模态频率被列

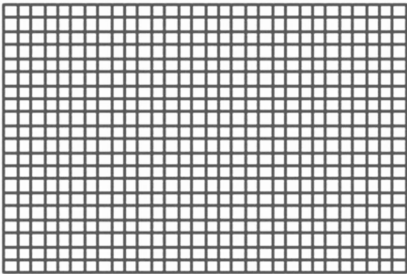


图 2 有限单元模型

在表 2 中. 表 2 表明当网格数量达到 600 个单元以上时, 计算的 1 阶模态频率已经相同, 高阶模态频率之间的误差已经很小, 与理论解的误差也相对不再减小, 可以认为 600 单元的有限单元解已经相对准确了. 前 4 阶模态振型如图 3 所示.

表 2 不同网格数量简支板模态频率						Hz
单元数量	模态阶数					
	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶
24	845	154 9	255 8	273 4	299 9	378 7
300	875	166 6	267 9	298 0	340 6	462 3
600	876	167 1	268 5	299 5	343 1	468 1
120 0	876	167 3	268 8	300 1	344 2	470 7
240 0	876	167 4	268 9	300 4	344 7	472 0

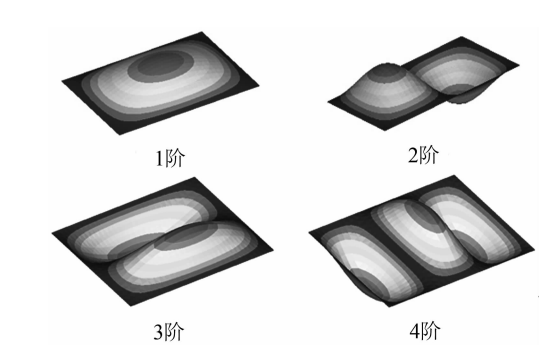


图 3 简支矩形薄板前 4 阶模态振型

3.3 模态频率误差分析

为了分析简支矩形薄板模态频率有限元解与理论解之间的误差, 同样用有限单元法计算了厚度分别为 0.9、1.0、1.1 cm 的简支薄板的前 10 阶模态, 前 5 阶数值解模态频率、理论解模态频率及之间的误差被列在表 3 中, 有限元网格为 600 个单元. 表 3 表明, 随着板厚度增加有限元数值解与

表 3 前 5 阶频率有限元解、理论解及差值						Hz
厚度/cm	方法	阶数				
		1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
0.9	理论	804	1 546	2 474	2 783	3 216
	数值	790	1 509	2 425	2 707	3 104
	差值	14	36	49	76	112
1.0	理论	893	1 717	2 748	3 091	3 572
	数值	876	1 671	2 685	2 995	3 431
	差值	17	46	62	96	141
1.1	理论	983	1889	3023	3401	3930
	数值	961	1832	2943	3279	3753
	差值	22	57	80	122	177

理论解的误差增加,随着模态阶数增加误差也增加.前 10 阶模态频率有限元数值解与理论解的误差百分比如图 4 所示.

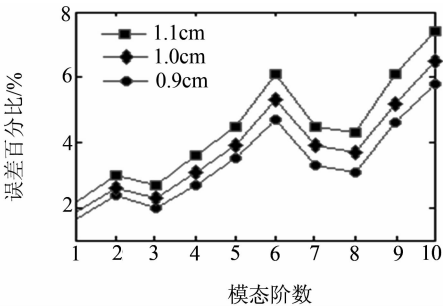


图 4 模态频率有限元解与理论解误差

图 4 表明,虽然总体来看随着模态阶数及模态频率的增加,简支矩形薄板有限单元解与理论解之间的误差增加,但是误差随着模态阶数的变化存在峰值,在有些模态误差会出现较大的峰值.

4 模态频率灵敏度

利用式(7)可以计算简支矩形薄板模态频率灵敏度的理论解,灵敏度理论解与厚度无关,并不随板厚度的改变而改变,将其定义为 s_1 ,同时可以利用理论计算的不同厚度简支薄板的模态频率计算出理论差分灵敏度,0.9 ~ 1.0 cm 的理论模态差分灵敏度定义为 s_2 , 1.0 ~ 1.1 cm 的理论模态差分灵敏度定义为 s_3 . 利用有限元法求得的不同厚度模态频率也可以求出灵敏度差分,0.9 ~ 1.0 cm 的有限元模态差分灵敏度定义为 s_4 , 1.0 ~ 1.1 cm 的有限元模态差分灵敏度定义为 s_5 . 利用式(11)和式(12)可以求出采用基于有限元法的半分析的数值微分法模态灵敏度,板厚度不同模态灵敏度是不同的,板厚度分别取 0.9、1.0、1.1 cm 的半分析数值微分灵敏度分别定义为 s_6 、 s_7 、 s_8 . 利用三个不同的板厚度可以计算出 8 个模态频率灵敏度值,前 5 阶模态频率对板厚度的灵敏度被列在表 4 中. 表 4 表明,一阶模态灵敏度的理论差分解与理论解相差最小,半分析的数值微分解与理论误差最大;但随着模态阶数的增加,理论差分解和有限元差分解与理论解的误差逐渐增大,而半分析的数值微分解与理论解的误差却逐渐减小,到第 4 阶模态时,数值微分解与理论解的误差最小;理论差分解、有限元差分解与理论解之间的误差大致相同. 用数值微分法计算的不同薄板厚度的灵敏度 s_6 、 s_7 、 s_8 几乎是相同的,这与

理论灵敏度类似,即矩形简支薄板模态频率对板件厚度的灵敏度与厚度无关.

表 4 模态频率灵敏度 Hz/mm

敏度	阶数				
	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
S_1	89.3	116.8	151.2	144.3	178.6
S_2	89.4	171.1	275.1	308.7	356.5
S_3	90.1	172.8	275.2	310.8	358.2
S_4	85.6	162	260	288	327.6
S_5	85.2	161.1	258.8	284.5	322.4
S_6	53.7	58.9	122.7	136.3	154.9
S_7	53.5	58.9	122.0	136.1	154.3
S_8	53.2	58.8	121.2	135.6	153.5

板厚度为 0.9 cm 前 10 阶模态频率灵敏度如图 5 所示. 图 5 表明,1、2 阶模态频率灵敏度理论差分解和有限元差分解与理论值的误差较小,但从第 2 阶开始,差分解于理论解之间的误差几乎呈线性增加,到第 10 阶时其误差已经超过 100%;从第 3 阶模态开始,基于有限单元的数值微分法的模态频率灵敏度与理论解之间的误差最小,而且在全部 10 阶模态灵敏度来看,其误差均在合理范围内.

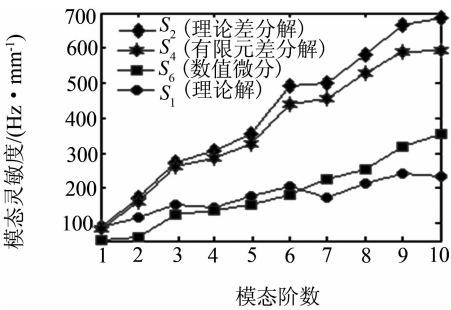


图 5 0.9 cm 简支薄板模态频率灵敏度

5 结论

- (1) 基于简支矩形薄板的模态理论计算式, 推导了模态频率对薄板厚度的灵敏度, 理论计算式表明, 简支矩形薄板模态频率对薄板厚度的灵敏度与薄板厚度无关;
- (2) 用理论差分法、有限单元差分法和基于有限单元的半分析数值微分法分别计算了薄板模态频率对薄板厚度的灵敏度, 计算结果表明只有第 1 阶模态频率差分模态灵敏度与理论解误差较小, 从第 2 阶模态开始, 其与理论解之间的误差几

乎呈线性递增;而基于有限单元的半分析数值微分模态灵敏度与理论解之间的误差均在合理范围内,证明了半分析数值微分法模态灵敏度的有效性和准确性;

(3)取不同的薄板厚度时,基于有限单元的半分析数值微分模态灵敏度几乎相同,这与模态灵敏度理论计算式的结论是相同的,即简支矩形板模态频率对薄板厚度的灵敏度与厚度无关,这进一步验证了半分析数值微分法模态灵敏度的正确性。

参考文献:

- [1]陈雷,王敏庆. 附加集中质量矩形板的强迫振动分析[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(3): 500-504.
- [2]KOPMAZ O, TELLI S. Free Vibrations of a Rectangular Plate Carrying a Distributed mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 251(1): 39-57.
- [3]杨建荣,李建中. 车辆荷载作用下简支板的振动分析. 华中科技大学学报(城市科学版), 2008, 25(4): 171-175, 188.
- [4]吴卫国. 简支板辐射噪声的结构优化控制与仿真[J]. 噪声与振动控制 2009, 29(5): 126-130.
- [5]赵龙胜,吴锦武,赵飞,等. 复合材料简支板固有频率与振型分析[J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2013, 27(2): 10-17.
- [6]丁莉芬,缪龙秀. 基于灵敏度分析的结构动力修改方法研究[J]. 铁道学报, 1999, 21(4): 17-19.
- [7]唐明裴,阎贵平. 结构灵敏度分析及计算方法概述[J]. 中国铁道科学, 2003, 24(1): 74-78.
- [8]张大千,张天侠,张国胜,等. 基于灵敏度分析的客车车身骨架轻量化设计[J]. 机械强度, 2011, 33(6): 913-920.
- [9]张旭明,王德信. 结构灵敏度分析的解析方法[J]. 河海大学学报, 1998, 26(5): 44-49.
- [10]秦东晨,任泰安,李静. 薄壁覆盖件结构优化中敏度分析的研究[J]. 郑州工业大学学报, 2000, 21(1): 62-65.
- [11]罗利龙,常亮,王立凯,等. 超大规模变量结构敏度求解技术研究[J]. 机械科学与技术, 2017, 36(5): 816-820.
- [12]郑佳欢,金伟娅,宋亚玲. 结构灵敏度分析进展[J]. 轻工机械, 2016, 34(1): 93-96, 102.
- [13]HAFTKA R T, ADELMAN H M. Recent developments in structural sensitivity analysis[J]. Structural & multi-disciplinary optimization, 1989, 1(3): 137-151.
- [14]张保,孙秦. 大型结构静力响应的敏度分析技术[J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2013, 27(2): 18-23.
- [15]张保,孙秦. 结构特征值灵敏度的半解析伴随变量法[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(8): 1221-1224, 1229.
- [16]程耿东,刘英卫. 梁的半解析法计算灵敏度的误差分析[J]. 大连理工大学学报, 1989, 29(4): 415-422.
- [17]张亚辉,林家浩. 结构动力学基础[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2007.

Research on Modal and Its Sensitivity of Rectangular Plate Supported Simply

WANG Xiuying, ZHANG Jun, ZHAO Wenzhong

(School of Traffic and Transportation Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

Abstract: The modal frequency sensitivities of rectangle plate supported simply with respect to thicknesses are deduced based on the theoretical solutions of its modal frequency. The first 10 order modal frequencies and its sensitivities of a plate are computed as an example, while the theoretical difference solutions of modal frequency sensitivities are also computed when the thicknesses of 1 mm are increased. A finite element model of rectangle plate supported simply is set up, its modal frequencies and modal vectors are achieved by using of finite element method, and the effect of element number on precision is analyzed and compared. Based on finite element method, the sensitivities of the modal frequencies with respect to plate thicknesses using numerical differentiation method are achieved, and the sensitivities of modal frequencies using method of difference are also computed. The results show that the sensitivities of the plate modal frequencies with respect to the thicknesses have nothing to do with the plate thickness, the errors between the numerical differentiation solutions and theoretical solutions are the least, and the precision of the solutions using the numerical differentiation method are higher than the difference method. the accuracy and validity of numerical differentiation method are tested and verified by this research.

Keywords: plate supported simply; modal frequency; sensitivity; finite element method