

# 薄板理论的误差分析

马奶连，贺西平

(陕西师范大学应用声学研究所 西安 710062)

**摘要：**在结构工程计算和声学计算中，经常采用 Kirchhoff 薄板理论。然而随着平板厚度的增加，对圆盘的分析仍然使用薄板理论会存在着一定的局限和误差。文中通过利用 Kirchhoff 薄板理论和 Mindlin 理论，对三种不同厚度尺寸的弯曲振动薄厚板的频率、位移分布与其几何尺寸的关系进行了计算，并用有限元模拟对计算结果进行了验证，说明了 Kirchhoff 对中厚板的计算具有一定的局限性。本文直观地看出了这两种理论的区别，物理意义清晰。

**关键字：**Kirchhoff 薄板理论；弯振圆盘；误差分析

## The analysis of the error of thin plate theory

MA Nai-lian, HE Xi-ping\*

(Soochow Institute of Applied Acoustics, Shaanxi Normal University, Xian, Shaanxi, 710062, China)

**Abstract:** The Kirchhoff plate theory is used in calculation of structural engineering and acoustics frequently. As the increase of the thickness of the plate, some limitations and errors will appear in the analysis of the plate still based on the thin plate theory. In this paper, the relationship of the frequencies, displacement distribution and the geometry relations of three different thickness of the flexural vibration thin plate and thick plate is calculated by the Kirchhoff theory and the Mindlin theory. Then the above results are compared with the ANSYS calculation verification. The results show that the limitations of the classical thin plate theory will visibly displayed in the solution of the moderately thick plate. The difference between the two theories displays visually in this article. It has a great physical meaning.

**Keyword:** Kirchhoff thin plate theory; flexural vibration; analysis of the error

## 0 引言

随着科学技术的不断发展，在土木工程、机械工程以及声学研究等领域，薄板结构的应用日益广泛<sup>[1-5]</sup>，这类结构重量轻、体积小，节省材料。对于它的振动特性及声学特性的研究大多采用的是 Kirchhoff 经典薄板理论<sup>[6]</sup>，这一理论建立在 Kirchhoff 假定的前提下，忽略了横向剪应变，但考虑了对应的横向剪应力，提高了板的刚度，将一些三维弹性体问题转化为二维曲面问题来分析，这样使得一些实际问题简单化，且在数学上更容易求得解析解，因此被大量应用于工程结构计算和声学计算中，对科学技术及其生产发展起了巨大的推动作用。

然而，弹性力学中，薄板是指平板厚度  $t$  与板中面最小尺寸  $b$  之比在  $(1/80 \sim 1/100) < t/b < (1/5 \sim 1/8)$

范围内的平板，当  $t/b > (1/5 \sim 1/8)$  时就称为厚板。随着平板厚度的增加，板的机械强度逐渐增大，能够承受高强度、大功率的机械振动，因此，在实际工程中，厚板结构被广泛应用。当  $t/b$  增大时仍然采用经典薄板理论解决平板问题就会存在有缺陷。本文在自由边界条件下，利用 Kirchhoff 薄板理论和 Mindlin 理论，对三种不同厚度尺寸的弯曲振动薄厚板的频率、位移分布与其几何尺寸的关系进行了计算，并与有限元模拟的结果相比较，直观的显示了当弯曲振动圆盘厚跨比较大时，利用 Kirchhoff 薄板理论计算的结果误差较大，说明经典薄板理论在解决中厚板问题时有一定的局限性。本文的工作，物理意义清晰，能更好地理解经典薄板理论的缺陷。

## 1 半径相同的薄、厚板的频率及位移分布

### 1.1 频率与厚度的关系

取圆盘材料为 45 号钢，半径为  $a = 25\text{mm}$ ，其密度为  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ，泊松比  $\sigma = 0.28$ ，杨氏模量  $E = 21.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 。分别利用 Kirchhoff

收稿日期：2013-07-31；修回日期：2013-09-30

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10874107)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(GK201001008)

作者简介：马奶连（1987-），女，山西省吕梁人，汉族，硕士研究生，研究方向为超声工程。

通讯作者：贺西平，E-mail: hexip@snnu.edu.cn.

经典薄板理论频率公式和 Mindlin 理论频率公式求得自由边界条件下弯曲振动圆盘的前三阶频率，并绘出弯曲振动圆盘频率的薄板理论值、Mindlin 理论值及有限元计算值随圆盘厚度变化的曲线图，如图 1 所示。

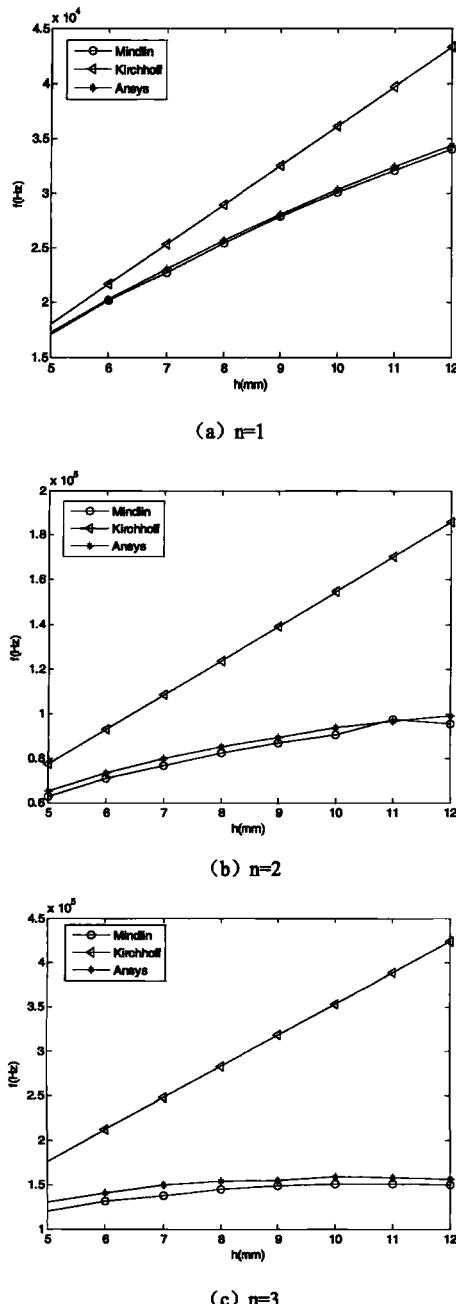


图 1 频率曲线对比图

Fig.1 The contrast figure of frequency curves

由图 1 可以看出，利用 Mindlin 理论计算所得的谐振频率和有限元计算的结果基本吻合，通过 Kirchhoff 薄板理论计算所得的结果比前两种计算结果都要高，而且随着圆盘厚度的增加、振动模态的增大，差别越来越大。这就说明随着圆盘厚跨比的增加，经典薄板理论由于忽略了剪切形变和转动惯量导致了在计算谐振频率的过程中存在着很大的缺陷。

## 1.2 横向位移分布与厚度的关系

取圆盘半径为  $a = 25\text{mm}$  时，利用弯曲振动薄圆盘的横向位移方程和 Mindlin 理论横向位移方程，画出弯曲振动圆盘沿半径方向上的横向位移分布曲线，并求得各阶模态下弯曲振动圆盘的波节圆半径  $\rho$ ，计算结果如表 1。

表 1 半径相同的圆盘的波节圆半径

Table.1 The nodal circle radius of disk with the same radius

$h(\text{mm})$	$n$	$\rho_x (\text{mm})$	$\rho_u (\text{mm})$	$\rho_A (\text{mm})$
2	1	17.0	16.9	16.9
	2	9.8	21.0	9.9
	3	6.4	14.8	22.3
8	1	17.0	16.9	16.8
	2	9.8	21.0	10.0
	3	6.4	14.8	22.3
12	1	17.0	16.8	16.6
	2	9.8	21.0	10.0
	3	6.4	14.8	22.3

从上表 1 可以看出当弯振圆盘厚跨比较小时，利用薄板理论与 Mindlin 理论计算的圆盘波节圆半径和有限元结果基本吻合；当圆盘厚跨比较大时，Mindlin 理论下的圆盘波节圆半径与有限元结果相差不大，而利用薄板理论计算的结果与另两种计算结果差别比较明显；其中最显而易见的是不论平板的厚度为多大，只要半径不变，利用薄板理论计算的圆盘波节圆半径就始终不变，与厚度无关，这说明随着圆盘厚度的增加、振动模态的增大，经典薄板理论已不再适用。

## 1.3 径向位移分布与厚度的关系

利用中厚板的径向位移方程可以绘出中厚板的相对径向位移分布，如图 2 所示（以厚度为 8mm 的圆盘为例）。

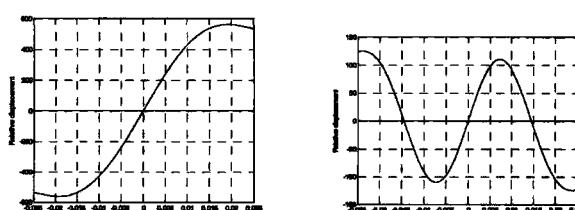
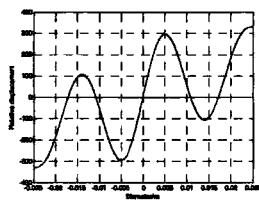
(a)  $n=1$ (b)  $n=2$ 

图 2 圆盘的相对径向位移曲线

Fig.2 The radial displacement curve of disk

经典薄板理论由于忽略了圆盘厚度,使得三维问题二维化,因此薄板理论下弯振圆盘不具有径向位移,然而从图2可以看出,利用Mindlin理论可以计算出圆盘的径向位移,利用有限元模拟也可得到圆盘的相对径向位移分布曲线,而且随着圆盘厚度的增加,圆盘径向位移的影响会越来越大,不可以忽略。

## 2 频率相同的薄、厚板的几何尺寸

取弯曲振动圆盘谐振频率为20kHz,分别利用薄板理论和Mindlin理论计算了不同厚度对应的圆盘半径及波节圆半径,如表2所示。

表2 20kHz时圆盘波节圆半径

Table.2 The nodal circle radius of disk at operating frequency 20kHz

$h(\text{mm})$	$n$	$a_k(\text{mm})$	$\rho_k(\text{mm})$	$a_M(\text{mm})$	$\rho_M(\text{mm})$
2	1	15.0	10.2	14.7	9.8
	2	31.1	12.2 26.2	30.5	12.0 25.6
	3	47.0	12.1 27.8 42.0	46.2	11.9 27.4 41.2
8	1	33.6	22.8	27.0	17.9
	2	69.5	27.2 58.5	58.0	25.9 51.8
	3	105	27.0 62.1 93.9	88.0	25.2 58.4 84.9
12	1	36.8	25.0	32.0	18.1
	2	76.2	29.8 64.1	68.0	28.2 55.0
	3	115	29.6 68.1 103	104	27.2 63.4 91.1

当弯曲振动圆盘谐振频率相同时,不同厚度的圆盘对应的半径不同,利用薄板理论和Mindlin理论计算得到的圆盘半径和波节圆半径都不同,而且从表2的数据可以看出,当圆盘谐振频率相同、厚度相同时,利用薄板理论计算得到的圆盘半径要比Mindlin理论计算结果大,这是因为薄板理论在计算的过程中忽略了剪切形变,考虑横向剪应力,提高了圆盘的刚度,半径增大。

同理,当圆盘谐振频率相同时,半径相同,利用薄板理论计算得到的圆盘厚度要比Mindlin理论计算结果小。

## 3 结论

本文分别用Kirchhoff薄板理论和Mindlin理论,对三种不同厚度尺寸的弯曲振动薄厚板的频率、位移分布与其几何尺寸的关系进行了计算,并与有限元方法计算的结果相对比,直观的说明了

Kirchhoff薄板理论和Mindlin理论在解决薄厚板问题时的差别,具体体现在:

(1)当圆盘半径相同时,厚度相同的圆盘利用薄板理论计算得到的谐振频率要比Mindlin理论的结果要高,而后者结果与有限元模拟结果吻合,而且随着圆盘厚度的增加、振动模态的增大,差别越来越大。

(2)当圆盘半径相同时,分别利用两种理论计算的各阶模态下厚度较小的圆盘的波节圆半径均与有限元模拟结果吻合,然而当圆盘厚度增大时,薄板理论计算的结果误差就会变大。

(3)由于薄板理论忽略了圆盘厚度,将三维问题二维化,因此薄板理论下弯振圆盘不具有径向位移,而通过Mindlin理论可得到圆盘的径向位移,与有限元模拟结果吻合。

(4)当圆盘谐振频率确定,厚度相同时,通过薄板理论计算圆盘的半径要比采用Mindlin理论计算的结果大;半径相同时,利用薄板理论计算的圆盘厚度比采用Mindlin理论计算的结果小。

这就说明在圆盘厚跨比较小(薄板范围内)时,对圆盘的分析采用薄板理论可以使问题简单化,但是当圆盘厚度较大时,采用薄板理论就会带来较大的误差,这时就要考虑圆盘的剪切形变和转动惯量,采用中厚板理论对圆盘进行分析比较合理。

## 参考文献

- [1] Y.Zheng,Q.K.Zhang.Simultaneous measurement of gas and solid holdups in multiphase systems using ultrasonic technique[J].Chemical Engineering Science,2004,59(17):3503-3514
- [2] Tetsuro O,Boris A,and David A B.Broadband multimode baffled piezoelectric cylindrical shell transducers[J].Journal of the Acoustical Society of America,2007,121(6):3465-3471.
- [3] J.A.Gallego-Juarez. Recent Developments in Vibrating-Plate Macrosonic Transducers[J]. Ultrasonics,2002,40:889-893.
- [4] J.A.Gallego-Juarez,G.Rodriguez-Corral. Sonic system for industrial Processing[J]. Ultrasonics,2000,38:331-336.
- [5] J.A.Gallego-Juarez,G.Rodriguez-Corral,V.Acosta.Power ultrasonic transducers with extensive radiators for industrial processing[J]. Ultrasonics Sonochemistry,2010, 17(6):953-964.
- [6] 陈明祥.弹塑性力学[M].北京:科学出版社,2007.115-138,1-57.  
Chen Mingxiang. Elastic-plastic mechanics[M].Beijing:Science Press,2007.115-138,1-57.
- [7] 潘晓娟,贺西平.厚圆盘弯曲振动的研究[J].物理学报,2009,59(11):7911-7915.  
Pan Xiaojuan,He Xiping. Analysis of flexural vibration thick disk[J]. Journal of Physics,2009,59(11):7911-7915.