

中厚板弯曲问题的拟薄板边界元分析

李增福 夏世群

(天津大学)

提 要

本文从简化的Reissner理论出发,利用叠加原理和功的互等定理导出了中厚板弯曲问题的一组基本解,然后,导出了类似于求解薄板经典理论的边界积分方程组。本文提出的方法适用于任意边界、任意荷载的薄板、中厚板的弯曲问题,使求解中厚板弯曲问题的工作量减小到与求解薄板的工作量相同。文中计算了若干例题,结果是令人满意的。

一、前 言

近年来,边界元法在中厚板弯曲问题中的应用已有文献论述过,并且获得了较为满意的结果(文献[2]、[3])。但是,就其解决问题的范围来说还有一定限制,并且计算过程也较复杂。文献[1]利用不完全广义变分原理重新推导了Reissner理论,在此基础上提出了一个简化的Reissner理论。它的一大优点就是将求解问题时所需的三个边界条件简化为两个,这就大大减小了求解问题的难度和工作量,而其精确度是实际工程中所允许的。

本文首先推导出基于简化的Reissner理论的基本解,进而建立起分析问题的边界积分方程组,成功地完成了域积分向边界积分的转化。我们计算过大量的例题,文中给出的只是几个具有代表性的例子。

二、基 本 公 式

根据文献[1]给出的简化Reissner理论,中厚板弯曲问题的基本方程为:

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w &= q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\mu}{1-\mu} \nabla^2 q \\ \psi &= -D\nabla^2 w - \frac{h^2}{10} \frac{2-\mu}{1-\mu} q \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

边界条件表达成:

$$\left. \begin{aligned} \text{固定边:} \quad w &= \bar{w}, \quad \theta_n = \bar{\theta}_n. \\ \text{简支边:} \quad w &= \bar{w}, \quad M_n = \bar{M}_n. \\ \text{自由边:} \quad V_n &= \bar{V}_n, \quad M_n = \bar{M}_n. \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

而内力分量和截面的转角可用下面的式子进行计算。

本文收到日期1988年6月2日

$$\left. \begin{aligned}
 Q_n &= \frac{\partial \psi}{\partial n} = -D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - \frac{h^2}{10} \frac{2-\mu}{1-\mu} \frac{\partial q}{\partial n} \\
 M_n &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_n}{\partial n} - \frac{qh^2\mu}{10(1-\mu)} \\
 M_{nt} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_n}{\partial t} + \frac{\partial Q_t}{\partial n} \right) \\
 V_n &= Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \\
 \theta_n &= -\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{12}{5} \frac{1+\mu}{Eh} Q_n
 \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

上面式子中各符号的含义是众所周知的, 此处就不再加以说明, 值得注意的是运算符

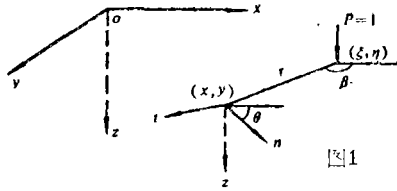
$$\frac{\partial}{\partial s} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2-4)$$

式(2-4)中, θ 为曲线边界S的外法线与x轴的夹角, ρ 为曲线的曲率半径。

三、基本解

1. 第一基本解

无限大中厚板在 (ξ, η) 点作用集中力 $P=1$, 如图1所示。



求图1所示情形的挠度场归结为解以下方程

$$D \nabla^4 w = \delta(x-\xi, y-\eta) - \frac{h^2}{10} \frac{2-\mu}{1-\mu} \nabla^2 \delta(x-\xi, y-\eta) \quad (3-1)$$

式(3-1)是由式(2-1)导出的, 不难验证

$$w_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \text{Lnr} - \frac{h^2}{20\pi D} \frac{2-\mu}{1-\mu} \text{Lnr} \quad (3-2)$$

是方程(3-1)的解, 式中, $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ 。将式(3-2)代入式(2-3)中并注意式(2-4)的运算式, 我们可以推导出

$$\begin{aligned}
 \theta_n &= - \left[\frac{1}{8\pi D} r (2\text{Lnr} + 1) + \frac{\mu h^2}{20\pi D (1-\mu)} \frac{1}{r} \right] \cos(\beta-\theta) \\
 M_n &= -\frac{1}{8\pi} \left[2(1+\mu)\text{Lnr} + 2(1-\mu)\cos^2(\beta-\theta) + (1+3\mu) \right] \\
 &\quad + \frac{\mu h^2}{20\pi r^2} \cos 2(\beta-\theta) \\
 M_{nt} &= \left[\frac{\mu h^2}{20\pi r^2} - \frac{(1-\mu)}{8\pi} \right] \sin 2(\beta-\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_n &= -\frac{1}{2\pi r} \cos(\beta-\theta) \\
 V_n &= -\frac{1}{4\pi r} \left[(1+\mu) \cos(\beta-\theta) + 2(1-\mu) \cos^3(\beta-\theta) - \frac{r}{\rho} (1-\mu) \cos 2(\beta-\theta) \right] \\
 &\quad + \frac{h^2}{10\pi r^3} \left[\cos 3(\beta-\theta) - \frac{r}{\rho} \cos 2(\beta-\theta) \right] \quad (3-3)
 \end{aligned}$$

2. 第二基本解

无限大中厚板在 (ξ, η) 点沿 v 方向作用集中力偶 $M=1$, 如图 2 所示。

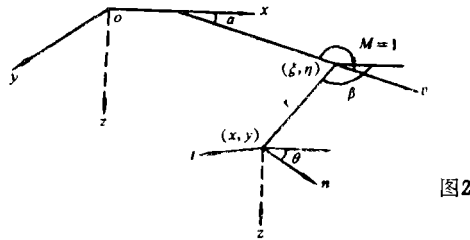


图2

图 2 中的力偶 M 可以用大小相等方向相反的一对集中力代替, 就像在薄板理论中的做法一样。进一步可求得图 2 情形的挠度场为:

$$w_2(x, y; \xi, \eta) = -\frac{\partial w_1}{\partial v}$$

即

$$w_2(x, y; \xi, \eta) = -\left[\frac{1}{8\pi D} r(2Lnr + 1) - \frac{h^2}{20\pi D} \frac{(2-\mu)}{(1-\mu)} \frac{1}{r} \right] \cos(\beta-\alpha) \quad (3-4)$$

由式 (3-4) 出发, 根据式 (2-3) 可以求得各内力分量和截面的转角:

$$\begin{aligned}
 \theta_n &= \frac{1}{8\pi D} \left[\cos(2\beta-\alpha-\theta) + 2(Lnr + 1) \cos(\alpha-\theta) \right] \\
 &\quad - \frac{\mu h^2}{20\pi D(1-\mu)} \frac{1}{r^2} \cos(2\beta-\alpha-\theta) \\
 M_n &= \frac{1}{4\pi D} \frac{1}{r} \left[(1+\mu) \cos(\beta-\alpha) + (1-\mu) \sin 2(\beta-\theta) \sin(\beta-\alpha) \right] \\
 &\quad + \frac{\mu h^2}{10\pi r^3} \cos(3\beta-2\theta-\alpha) \\
 M_{nt} &= -\frac{(1-\mu)}{4\pi r} \cos 2(\beta-\theta) \sin(\beta-\alpha) + \frac{\mu h^2}{10\pi r^3} \sin(3\beta-2\theta-\alpha) \\
 Q_n &= -\frac{1}{2\pi r^2} \cos(2\beta-\theta-\alpha) \\
 V_n &= -\frac{(1-\mu)}{8\pi r^2} \left[2\cos(4\beta-3\theta-\alpha) - \cos(2\beta-3\theta+\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5-\mu}{1-\mu} \cos(2\beta-\alpha-\theta) + \frac{4r}{\rho} \sin 2(\beta-\theta) \sin(\beta-\alpha) \right] \\
 &\quad - \frac{\mu h^2}{10\pi r^4} \left[3\cos(4\beta-3\theta-\alpha) - \frac{2r}{\rho} \cos(3\beta-2\theta-\alpha) \right] \quad (3-5)
 \end{aligned}$$

3、第三基本解

无限大中厚板在 (ξ, η) 点沿垂直于 v 的方向切开长为 $2c$ 的切口, 如图3所示。沿切口线两侧截面作用大小相等方向相反的分布力偶 m , m 使切口线两侧的截面产生相对转角 $\Delta\theta$, 令其沿切口线的积分值为1, 即 $\int_{-c}^c \Delta\theta dl = 1$ 。 $\Delta\theta$ 为相对转角密度, 其平均值为 $\frac{1}{2c}$ 。如果令 $2c \rightarrow \infty$ 而沿切口线的积分值保持不变, 我们就定义了一个描述相对转角的 δ 函数, $\Delta\theta = \delta(x-\xi, y-\eta)$ 。

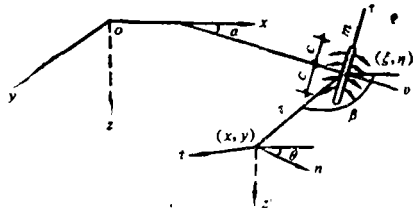


图3

对应该情形, 即在 (ξ, η) 点处作用线元裂纹相对转角位移(广义荷载), 其挠度场用 $w_3(x, y; \xi, \eta)$ 表示。由对称性分析知

$$w_3(x, y; \xi, \eta) = w_3(\xi, \eta; x, y) \quad (3-6)$$

我们把图3中在 (ξ, η) 点施加的广义荷载平行地移至 (x, y) 点施加, 将此状态和图1状态视为两个不同的平衡状态。值得注意的是: 此时, 在图1中应该在 (x, y) 点沿垂直于 v 线方向也要切开一个切口, 暴露出相应截面上的内力, 但没有产生相对转角。应用Betti互等定理, 可以导得:

$$1 \cdot w_3(\xi, \eta; x, y) + \int_{2c} M_v(w_1) \Delta\theta dl = 0$$

代入式(3-6)并注意到 $\Delta\theta = \delta(x-\xi, y-\eta)$, 结果有

$$w_3(x, y; \xi, \eta) = -M_v(w_1) \quad (3-7)$$

式(3-7)中的 $M_v(w_1)$ 为图1情形 (x, y) 点沿 v 方向的弯矩。由式(2-3)知(此时 $q=0$)

$$M_v(w_1) = -D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial v^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} \right) - \frac{h^2}{5} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\nabla^2 w_1)$$

将式(3-2)代入上式, 经整理后导得:

$$w_3(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} \left[2(1+\mu) \text{Ln}r + 2(1-\mu) \text{Cos}^2(\beta-\alpha) + (1+3\mu) \right] + \frac{\mu h^2}{20\pi r^2} \text{Cos}2(\beta-\alpha) \quad (3-8)$$

进一步根据式(2-3)可以导得截面转角和各内力分量:

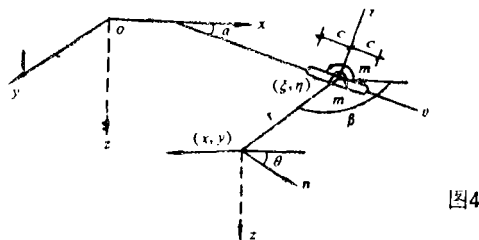
$$Q_n = \frac{1}{4\pi r} \left[(1+\mu) \text{Cos}(\beta-\theta) + (1-\mu) \text{Sin}2(\beta-\alpha) \text{Sin}(\beta-\theta) \right] + \frac{(2+\mu)h^2}{10\pi r^3} \text{Cos}(3\beta-2\alpha-\theta)$$

$$M_n = -\frac{D(1-\mu)}{4\pi r^2} \left[(1+\mu) \text{Cos}2(\beta-\theta) + 2(1-\mu) \text{Sin}(3\beta-2\alpha-\theta) \text{Sin}(\beta-\theta) \right] - \frac{D\mu(1-\mu)}{2\pi r^2} \text{Cos}2(\beta-\alpha) - \frac{3(1-\mu)(2+\mu)Dh^2}{10\pi r^4} \text{Cos}2(2\beta-\alpha-\theta)$$

$$\begin{aligned}
 M_{nt} = & -\frac{D(1-\mu)}{4\pi r^2} \left[-(1+\mu)\sin 2(\beta-\theta) + (1-\mu)\sin 2(2\beta-\alpha-\theta) \right] \\
 & -\frac{3(1-\mu)(2+\mu)Dh^2}{10\pi r^4} \sin 2(2\beta-\alpha-\theta) \\
 Q_n = & \frac{(1-\mu)D}{\pi r^3} \cos(3\beta-2\alpha-\theta) \\
 V_n = & -\frac{(1-\mu)D}{2\pi r^3} \left[(1+\mu)\cos 3(\beta-\theta) - 2\cos(3\beta-2\alpha-\theta) \right. \\
 & \left. - (1-\mu)\cos(5\beta-3\theta-2\alpha) - (1-\mu)\cos 2(2\beta-\alpha-\theta)\cos(\beta-\theta) \right] \\
 & + \frac{(1-\mu)D}{2\pi r^2 \rho} \left[(1+\mu)\cos 2(\beta-\theta) - (1-\mu)\cos 2(2\beta-\alpha-\theta) \right] \\
 & - \frac{12(1-\mu)(2+\mu)Dh^2}{10\pi r^5} \left[\cos(5\beta-3\theta-2\alpha) - \frac{r}{2\rho} \cos 2(2\beta-\alpha-\theta) \right]
 \end{aligned} \quad (3-9)$$

4、第四基本解

无限大中厚板在 (ξ, η) 点沿 v 方向切开长为 $2c$ 的切口,沿切口线两侧截面作用大小相等方向相反的分布扭转力偶 \bar{m} ,如图4所示。类似于推导第三基本解时的步骤,我们可以定义一个描述线元裂纹发生相对扭转的 δ 函数,其挠度场用 w_4 表示。



$$w_4(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1-\mu}{8\pi} \sin 2(\beta-\alpha) + \frac{\mu h^2}{20\pi r^2} \sin(\beta-\alpha) \quad (3-10)$$

从式(3-10)出发推导出截面转角和内力分量如下:

$$\begin{aligned}
 \theta_n = & -\frac{1-\mu}{4\pi r} \cos 2(\beta-\alpha) \sin(\beta-\theta) + \frac{(2+\mu)h^2}{10\pi r^3} \sin(3\beta-2\alpha-\theta) \\
 M_n = & \frac{(1-\mu)^2 D}{2\pi r^2} \sin(\beta-\theta) \cos(3\beta-2\alpha-\theta) - \frac{\mu(1-\mu)D}{2\pi r^2} \sin 2(\beta-\alpha) \\
 & - \frac{3(1-\mu)(2+\mu)Dh^2}{10\pi r^4} \sin 2(2\beta-\alpha-\theta) \\
 M_{nt} = & -\frac{(1-\mu)^2 D}{4\pi r^2} \cos 2(2\beta-\alpha-\theta) + \frac{3(1-\mu)(2+\mu)Dh^2}{10\pi r^4} \cos 2(2\beta-\alpha-\theta) \\
 Q_n = & \frac{(1-\mu)D}{\pi r^3} \sin(3\beta-2\alpha-\theta) \\
 V_n = & \frac{(1-\mu)^2 D}{2\pi r^3} \left[\frac{2}{1-\mu} \sin(3\beta-2\alpha-\theta) + \sin(5\beta-3\theta-2\alpha) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin 2(2\beta - \theta - \alpha) \cos(\beta - \theta) \Big] - \frac{(1-\mu)^2 D}{2\pi r^2 \rho} \sin 2(2\beta - \theta - \alpha) \\
 & - \frac{6(1-\mu)(2+\mu) D h^2}{10\pi r^5} \left[2\sin(5\beta - 3\theta - 2\alpha) - \frac{r}{\rho} \sin 2(2\beta - \alpha - \theta) \right]
 \end{aligned}
 \quad (3-11)$$

四、拟薄板边界积分方程

图5表示一有界中厚板,板面上作用着横向荷载 $q(x,y)$,边界 Γ 上的位移分量、内力分量分别用 $\bar{w}(s)$ 、 $\bar{\theta}_n(s)$ 、 $\bar{M}_n(s)$ 、 $\bar{V}_n(s)$ 表示。

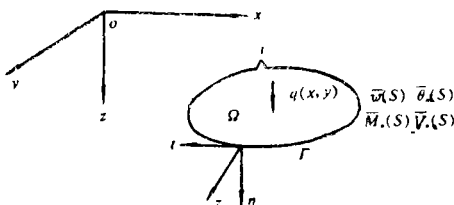


图5

由Betti互等定理可以推导出边界积分方程:

$$\begin{aligned}
 C(P)K_j(P) + \int_{\Gamma} [V_n^*(w_j) \cdot w] ds + \int_{\Gamma} [M_n^*(w_j) \cdot \theta_n(w)] ds + \sum_i [M_{nti}^*(w_j)]_+^+ w_i \\
 = \int_{\Omega} q w_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} [V_n(w) \cdot w_j^*] ds + \int_{\Gamma} [M_n(w) \theta_n^*(w_j)] ds + \sum_i [M_{nti}(w)]_+^+ w_j^*
 \end{aligned}
 \quad (j=1,2) \quad (4-1)$$

式中:

$$K_j(P) = \begin{cases} w(P) & j=1 \\ \frac{\partial w}{\partial v} & j=2 \end{cases}$$

$$C(P) = \begin{cases} 1 & P \in \Omega \\ \frac{1}{2} & P \in \Gamma \text{ 且 } P \text{ 为光滑边界点} \\ \phi/2\pi & P \in \Gamma \text{ 为角点} \\ 0 & P \text{ 为域外点} \end{cases}$$

式(4-1)中带*号的项为基本解。此外,利用第三、第四基本解尚可列出求域内弯矩和扭矩的积分方程

$$\begin{aligned}
 K_j(P) + \int_{\Gamma} [V_n^*(w_j) \cdot w] ds + \int_{\Gamma} [M_n^*(w_j) \cdot \theta_n(w)] ds + \sum_i [M_{nti}^*(w_j)]_+^+ w_i \\
 = \int_{\Omega} q w_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} [V_n(w) \cdot w_j^*] ds + \int_{\Gamma} [M_n(w) \theta_n^*(w_j)] ds + \sum_i [M_{nti}(w)]_+^+ (w_j^*)_i
 \end{aligned}
 \quad (j=3,4) \quad (4-2)$$

式中:

$$K_j(P) = \begin{cases} M_n(P) & j=3 \\ M_{nt}(P) & j=4 \end{cases}$$

五、域积分项的处理

如何有效地计算域积分项,对计算的精度及经济性有重大的影响。本文针对线性分布荷载,利用Green公式将域积分项转化成了边界积分。

Green第二公式:

$$\int_{\Omega} q w_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left[q \frac{\partial w_i}{\partial n} - w_i \frac{\partial q}{\partial n} \right] ds \quad (5-1)$$

(j = 1, 2, 3, 4)

根据微积分的性质不难找到与 w_i^* 相对应的函数 u_i 如下:

$$\begin{aligned} u_1(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{8\pi D} \left[\frac{r^4(2\text{Lnr}-1)}{32} - \frac{(2-\mu)h^2}{10(1-\mu)} r^2(\text{Lnr}-1) \right] \\ u_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{8\pi D} \left[\frac{r^3(4\text{Lnr}-1)}{16} - \frac{(2-\mu)h^2}{10(1-\mu)} r(2\text{Lnr}-1) \right] \cos(\beta-\alpha) \\ u_3(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{128\pi D} \left[8(1-\mu)r^2\text{Lnr}\cos^2(\beta-\alpha) + 4(1+3\mu)r^2\text{Lnr} \right. \\ &\quad \left. + (1-\mu)r^2\cos 2(\beta-\alpha) \right] - \frac{h^2}{40\pi} \left[2\cos^2(\beta-\alpha) + 2\text{Lnr} + 1 \right] \\ &\quad + \frac{(2-\mu)h^2}{80(1-\mu)\pi} \left[2\text{Lnr}(1+\mu) + (1-\mu)\cos 2(\beta-\alpha) \right] \\ &\quad - \frac{(2-\mu)h^4}{100(1-\mu)\pi} \frac{1}{r^2} \cos 2(\beta-\alpha) \\ u_4(x, y; \xi, \eta) &= - \left[\frac{(1-\mu)r^2}{128\pi} (4\text{Lnr}+1) + \frac{\mu h^2}{80\pi} - \frac{(2-\mu)h^4}{100\pi r^2(1-\mu)} \right] \sin 2(\beta-\alpha) \end{aligned} \quad (5-2)$$

将式(5-2)代入式(5-1)中即可构成域积分向边界积分的转化式,由于式子太长,此处不再列出。

六、边界积分的处理

实际求解问题时,在满足一定的边界条件下,将方程(4-1)离散化(边界划分成若干个单元)并将未知量予以合并和整理,导得下面形式的定解方程组(本文采用了常值单元):

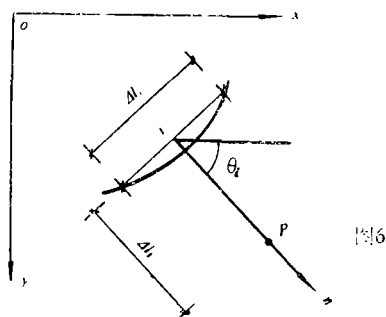
$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (6-1)$$

式中, \mathbf{X} 为未知量列向量, \mathbf{A} 为系数矩阵, \mathbf{F} 中各元素都是已知的。

本文中采用了域外积分法,即设虚拟无限大板中单位集中力(或力偶)的作用点位于实际板域 Ω 的外边,于是式(4-1)中的 $C(P) = 0$ 。这样就避免了边界积分中出现有奇异积分,即 \mathbf{A} 中不再有奇异积分项元素,使问题的求解大为简化。

我们不难发现,虽然奇异积分项给问题的求解带来一定的困难,但也正是奇异积分项保证了代数方程组具有良好的特性。本文为了既避免奇异积分项在 \mathbf{A} 中出现,又不破坏方程组

的良好特性, 将域外施力点的位置分别取在过每个单元结点*i*处的外法线上且距结点*i*为 Δl_i 的地方(Δl_i 为第*i*个单元的长度), 如图6所示。实际运算表明, 以上做法效果很好。



七、几点补充说明

1、关于描述线元裂纹相对竖向位移的第五基本解, 虽已导出但在本文中没有列出(因为算例中没有应用它)。

2、在用式(4-2)求域内某点处沿*n*方向的弯矩时, 式中域积分项中的基本解 w_3^* 不能直接应用式(3-8), 要加以修正。因为式(3-8)是在(*x, y*)点与(ξ, η)点不重合的前提下得到的。当(*x, y*)点与(ξ, η)点重合时, 由式(2-3)可以求得 w_3^* 应修改为:

$$w_3^* = -\frac{1}{8\pi} \left[2(1+\mu) \text{Ln} r + 2(1-\mu) \cos^2(\beta-\alpha) + (1+3\mu) \right] \\ + \frac{\mu h^2}{20\pi r^2} \cos 2(\beta-\alpha) - \frac{h^2}{10} \frac{\mu}{1-\mu} \delta(x, y; \xi, \eta) - \frac{(2-\mu)h^4}{50(1-\mu)} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \delta(x, y; \xi, \eta) \quad (7-1)$$

3、在用式(4-2)求域内某点处的扭矩时, 基于2. 中同样的理由, 域积分项中的基本解 w_4^* 也应加以修正。

4、本文中对角点附加项的处理采用了文献[6]的办法。

八、算例

例1: 对边简支、另对边自由、受均布荷载的方板, 如图7。取 $\frac{1}{4}$ 板进行计算, $\mu = 0.3$ 、 $N = 32$ 个单元, 计算结果见图8。

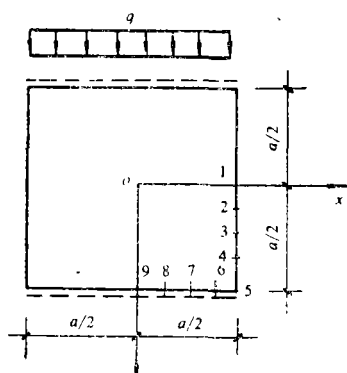


图7

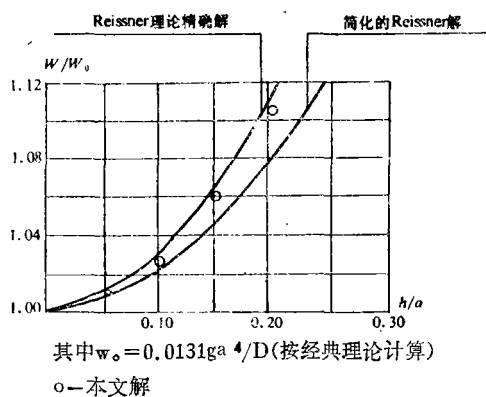


图8

例2: 周边简支正三角形板受均布荷载, 如图9。 $\mu = 0.3$, $N = 24$, 计算结果列于表1中。其中: $w = k_w \frac{qa^4}{D}$, $M = k_M qa^2$ 。

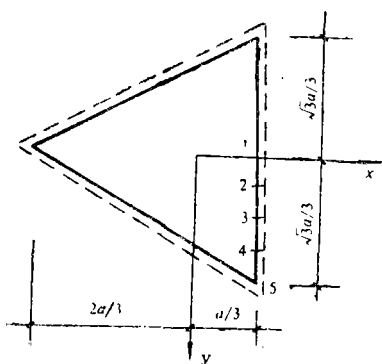


图9

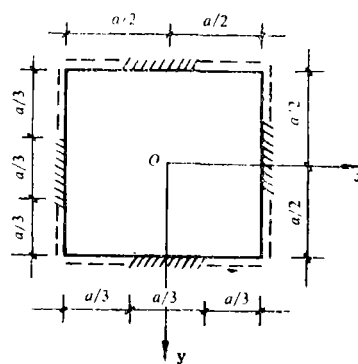


图10

表1

系数 $h/a \setminus k$ 值	(0,0)处 k_w		(0,0)处 $k_{M_x} = k_{M_y}$	
	本文解	解析解	本文解	解析解
0	0.001029	0.001029	0.02406	0.02407
0.1	0.001117	0.001119	0.02418	—
0.2	0.001382	0.001388	0.02456	—
0.3	0.001824	0.001838	0.02517	—
0.4	0.002439	0.002468	0.02596	—
0.5	0.003216	0.003277	0.02663	—

例3：部分边界固定、部分边界简支的方板受均布荷载作用，如图10。 $\mu = 0.3, N = 48$ ，计算结果列于表2中。

表2

	中点挠度因子 k_w	误差	中点弯矩因子 K_M	误差
〔5〕中所列实验结果	1.50×10^{-3}	0	0.0263	0
〔5〕中所列文献计算结果	1.42×10^{-3}	-5.3%	0.0240	-9.5%
〔5〕的计算结果	1.45×10^{-3}	-3.3%	0.0255	-2.9%
本文经典理论解	1.432×10^{-3}	-4.5%	0.02404	-8.7%
本文考虑 $h = 0.02a$ 计算结果	1.45×10^{-3}	-3.3%	0.02413	-8.2%
本文考虑 $h = 0.05a$ 计算结果	1.526×10^{-3}	1.7%	0.02448	-6.8%

参 考 文 献

- 〔1〕 苗天德、程昌钧，关于弹性板弯曲变形的Reissner理论，应用数学与力学，1,2 1980
- 〔2〕 王有成，样条边界元法解Reissner型板，合肥工业大学学报，1984(4)
- 〔3〕 雷小燕，解Reissner板弯曲问题的一个新边界元法，工程力学，Vol.2, No.4, 1985
- 〔4〕 Brebbia, C.A., Progress in Boundary Element Methods, Pentech Press, London, 1981
- 〔5〕 陈政清、钟正华、熊祝华，四边简支部分固定矩形板的弯曲，固体力学学报，1984(3)
- 〔6〕 姚敏武，边界积分方程——边界元法解柯希霍夫薄板问题，天津大学学报，Vol.1, 1985

The Boundary Element Analysis of Imitating Thin Plate on Bending Problem of Middle Thick Plate

Li Zengfu Xia Shiqun
(Tianjin University)

Abstract

According to the simplified Reissner theory, three boundary conditions of

plate can be simplified into two ones. Some fundamental solutions for bending problems of middle thick plate have been obtained. Using the principle of superposition and the reciprocal work theorem, the analogous operation in the classical theory for thin plates, the boundary integral simultaneous equations for middle thick plate have been derived.

The method in this paper can be used in calculation of thin plates and middle thick plates with arbitrary boundary and arbitrary loading conditions, and the amount of work is reduced to the same as solving the thin plate problems. Using the method derived in this paper and the integral method beyond the domain, some valuable calculation examples have been given. And the results is of great satisfaction.