Modelos especiales de distribuciones de probabilidad de variable discreta: binomial

Innumerables situaciones se nos presentan en la vida diaria y profesional que requieren una inminente toma de decisiones. Tanto en el control de calidad de los productos fabricados y comercializados por algunas empresas como en el ámbito de la medicina y en otros servicios se necesitan hacer verificaciones de lo calculado o lo estimado.

Las distribuciones de probabilidad, tanto de la variable discreta como de la continua, tienen múltiples aplicaciones.

Anteriormente, estudiamos que las distribuciones de probabilidad necesitaban modelizarse con funciones y que tenían distintas características según el tipo de variable utilizada.

Ahora nos adentramos en las distribuciones de variable aleatoria discretas: binomial.

Caso: Empresa Cuidado Integral

La empresa de medicina prepaga Cuidado Integral ha diseñado un plan para toda la familia que incluye algunas prestaciones más que lo que incluyen sus planes actuales. Se llama *Plan Premium* y, por grupo familiar, no es mucho más caro que los que pagan actualmente. Para poder vender este plan y poder proyectar una oferta masiva de este, seleccionan aleatoriamente a diez familias de la base de datos de sus asociados.

El resultado correspondiente de la entrevista a cada familia se clasifica como *éxito* si la familia accede al Plan Premium y como *fracaso* si la familia se queda con el plan actual.

Por experiencia, y por un sondeo de campo, los directivos estiman que la probabilidad de que una familia tomada al azar de las diez seleccionadas, también en forma aleatoria, acceda al nuevo plan es del 15 %.

Los directivos te solicitan, como empleado de la empresa, que investigues lo siguiente:

1. ¿Qué tipo de modelo de distribución de probabilidades se acerca más a esta situación?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que solo una familia acceda al Plan Premium?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las familias seleccionadas acceda al Plan Premium?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos cinco familias accedan al plan?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que más de dos familias accedan al plan?
6. Determine la esperanza matemática de la distribución.

7

Determine la varianza de la distribución.

Distribución binomial

¿Qué es un experimento binomial?

Ante una determinada situación, es de suma importancia tener los conceptos claros sobre las propiedades que corresponden a cada modelo; de esta manera, la elección será la correcta y correctos también los resultados obtenidos.

Un experimento binomial está relacionado con un experimento de pasos múltiples en el que es necesario identificar todas las posibles maneras en que el experimento puede presentarse y la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas. Estas posibles maneras pueden determinarse teóricamente o como resultado de un análisis subjetivo, producto de la experiencia.

A partir del ejemplo —ya bastante citado— de la moneda, podremos generalizar la fórmula de una distribución de probabilidad binomial y sus características distintivas.

Ejemplo 1: Experimento de lanzar una moneda cuatro veces

Por ejemplo, considere el experimento que consiste en lanzar una moneda cuatro veces y observar si la cara de la moneda que cae hacia arriba es cara o cruz. Suponga que deseas contar el número de caras que aparecen en los cuatro lanzamientos. ¿Presenta este experimento las propiedades de un experimento binomial? ¿Cuál es la variable aleatoria que interesa? Observe que:

1. El experimento consiste en cuatro ensayos idénticos; cada ensayo consiste en lanzar una moneda.

2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: cara o cruz. Se puede considerar cara como éxito y cruz como fracaso.

3. La probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso son iguales en todos los ensayos, siendo p= 0,5 (probabilidad de éxito) y (1 - p) = 0,5 (probabilidad de fracaso, también denotada por q).

4. Los ensayos o lanzamientos son independientes porque el resultado de un ensayo no afecta lo que pase en los otros ensayos o lanzamientos.

En este caso, la variable aleatoria que interesa es x = *número de caras que aparecen en cuatro ensayos*. Es decir que x puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 o 5.

Recuerda que solo estamos analizando las características de un experimento binomial, más adelante resolveremos el ejemplo. El caso del ejemplo 1 es un experimento binomial.

Características de un experimento binomial

Resumamos sus características:

1. El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.

2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de estos resultados, se lo llama *éxito* y, al otro, se lo llama fracaso o desacierto.

3. La probabilidad de éxito, que se denota p, no cambia de un ensayo a otro. Por ende, la probabilidad de fracaso, que se denota (1 - p), tampoco cambia de un ensayo a otro. La probabilidad del acierto se mantiene constante (esto implica que la población es muy grande o infinita, o los ensayos se realizan sin reposición).

4. Los ensayos son independientes. Esto indica que el resultado de cada ensayo es independiente del resultado de ensayos anteriores.

El estudio está centrado en determinar la probabilidad que en *n* ensayos se obtenga un número *x* de aciertos. Este número de aciertos se constituye en los distintos valores que puede adoptar la variable, que, por ser producto de un conteo, es del tipo discreta.

Aclaraciones:

1. Si se presentan las propiedades 2), 3) y 4), se dice que los ensayos son generados por un proceso de Bernoulli. Si, además, se presenta la propiedad 1), se trata de un experimento binomial.

2. En un experimento binomial, lo que interesa es el número de éxitos en *n* ensayos. Si *x* denota el número de éxitos en *n* ensayos, es claro que *x* tomará los valores 0, 1, 2, 3, ..., *n*. Dado que el número de estos valores es finito, *x* es una variable aleatoria discreta.

3. A la distribución de probabilidad correspondiente a esta variable aleatoria se le llama *distribución de probabilidad binomial*.

Para fijar conceptos analizaremos dos casos más.

El que se describe a continuación, ¿corresponde a un modelo binomial? —

Ejemplo 2: Supón que cuentas con una partida de 3000 pernos de pistón. Su aceptación está sujeta a que, en una muestra de diez pernos elegidos azarosamente, no se encuentre ninguno defectuoso. Si el productor de pernos indica que el 1 % de los pernos producidos salen defectuosos, indique la probabilidad existente de que la partida sea aceptada.

Observamos que el estudio está centrado en determinar la probabilidad de que, en *n* ensayos, se obtenga un número x de aciertos. Este número de aciertos se constituye en los distintos valores que puede adoptar la variable, que, por ser producto de un conteo, es del tipo discreta.

Veamos si cumple con las cuatro características o propiedades de una distribución binomial:

1. Se trata de extraer diez pernos y el método es el mismo para cada uno de ellos.
2. Como resultado de cada ensayo, se tiene una de solo dos posibilidades: defectuoso o no defectuoso. En este caso, adoptaremos que el estar defectuoso es un éxito.
3. La probabilidad de éxito, de acuerdo con lo informado por el productor, es de p = 0,01 (1 %), por lo tanto, la P (no éxito) = 1 - p = 0,99. La probabilidad de que un perno cualquiera sea defectuoso la consideramos constante, debido a que el tamaño de la población es grande (en este caso de 3000, sobre una muestra de 10).
4. El que un perno este defectuoso, no influye en el resultado del ensayo de otro perno, es decir, se cumple la independencia entre los ensayos

Se cumplen todas las propiedades y, por lo tanto, la situación problemática planteada en el ejemplo 2, responde a una distribución binomial.

El caso de la empresa Cuidado Integral, ¿será un experimento binomial?

Al revisar las propiedades de un experimento binomial en el caso planteado:

1. El experimento consiste en 10 ensayos idénticos; cada ensayo consiste en entrevistar a una familia.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: la familia accede al Plan Premium (éxito) o la familia conserva el plan que tenían (fracaso).
3. La probabilidad de éxito (que una familia acceda al Plan Premium) es de p = 0,15 (15 %) y se mantiene constante de un ensayo a otro. Del mismo modo, la probabilidad de fracaso (que la familia no acceda al Plan Premium y permanezca en el plan que tenía), también es constante. Es $q = 1 - p = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$, que tampoco cambia de un ensayo a otro. Esto se debe a que la población de todos los asociados se considera infinita frente a la muestra de 10 y, además, los ensayos se realizan sin reposición (una vez que se entrevista una familia, esta no se vuelve a integrar a la muestra).
4. Los ensayos son independientes porque las familias se eligen en forma aleatoria. Además, lo que responda una familia no afecta la elección de otra.

Aclaraciones:

- Como estos cuatro puntos se satisfacen, este ejemplo es un experimento binomial.
- La variable aleatoria que interesa es el número de visitas a las 10 familias. En este caso los valores que puede tomar x son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

- La propiedad 3 de un experimento binomial se llama *suposición de estacionaridad* y algunas veces se confunde con la propiedad 4, independencia de los ensayos.
- Para ver la diferencia entre estas dos propiedades, reconsidere el caso que estamos analizando. Si, a medida que el día avanza, el entrevistador se va cansando y va perdiendo entusiasmo, la probabilidad de éxito puede disminuir, por ejemplo, a 0,08 en la décima llamada. En tal caso, la propiedad 3 (estacionaridad) no se satisface y no se tiene un experimento binomial. Incluso si la propiedad 4 se satisface puesto que en cada familia la decisión que se toma se hizo de manera independiente.

Entonces, si no se satisface la propiedad 3 (o cualquier otra), no se trataría de un experimento binomial.

Expresión general de la distribución binomial

En las aplicaciones de los experimentos binomiales, se emplea una fórmula matemática llamada *función de probabilidad binomial*, que sirve para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos. Empleando los conceptos de probabilidad, se mostrará el desarrollo de la fórmula.

Parámetros

Como en cualquier función, existen parámetros (números reales) y variables (en este caso la función binomial que depende de la variable aleatoria).

En el caso de la función binomial, los parámetros son n y p. Estos son los parámetros que caracterizan a la función y son constitutivos de la fórmula:

n: número de ensayos

p: probabilidad de éxito

por lo que se suele escribir: Bin (n,p) que significa distribución binomial de parámetros n y p.

Desarrollo de la fórmula de cálculo, con el ejemplo 1

Partiremos del ejemplo para desarrollar la fórmula general, y luego la aplicaremos para resolver el ejemplo 1.

El experimento consiste en lanzar una moneda cuatro veces y observar si la cara de la moneda que cae hacia arriba es cara o cruz.

- Definiremos como acierto o éxito la obtención de una cara y la variable aleatoria toma el valor de 1 (número de aciertos).
- De esta manera, en caso de obtener una cruz x tomará el valor de 0 (cero aciertos).
- Además, no sabemos si la moneda está perfectamente balanceada, por lo tanto, diremos que la probabilidad de obtener una cara será p (probabilidad del acierto) y una cruz $q = 1 – p$ (probabilidad del desacierto).

Parte 1: Analicemos el caso de una tirada: n=1 ensayo

Tabla 1: Distribución de probabilidad al tirar una moneda

Descripción de la tabla 1: En la tabla se muestran los valores que puede adoptar la variable aleatoria x y su probabilidad p (expresada en forma general).

Eventos posibles	Variable x	Probabilidad de ocurrencia P(x)

Eventos posibles	Variable x	Probabilidad de ocurrencia P(x)
cruz	0	$q = 1 - p$
cara	1	p

Fuente: elaboración propia.

Significa entonces que $P(x=0)=q$ *y* $P(x=1)=p$

Teniendo en cuenta que la suma de las probabilidades de ocurrencia de todos los casos posibles es igual a 1, tendremos:

$$P(x = 0) + P(x = 1) = 1$$

que lo podemos expresar como

$$q + p = 1$$

Parte 2: Analicemos el caso de dos tiradas consecutivas: $n=2$ ensayos (el mismo análisis sirve si se tiran dos monedas a la vez).

Tabla 2: Distribución de probabilidad al tirar una moneda dos veces consecutivas

Descripción: En la tabla, se muestran los valores que puede adoptar la variable aleatoria *x* en cada ensayo y su probabilidad *p* (expresada en forma general).

Eventos posibles		Variable x	Probabilidad de ocurrencia P(x)
Tirada 1	Tirada 2		
cruz	*cruz*	0	*q.q*
cruz	*cara*	1	*q.p*
cara	*cruz*	1	*p.q*
cara	*cara*	2	*p.p*

Fuente: elaboración propia.

Recordemos que la probabilidad conjunta, para eventos independientes, es el producto de sus probabilidades.

El análisis efectuado en la tabla 2 pone en evidencia que, en dos lanzamientos (o en el lanzamiento de dos monedas), se pueden obtener: 0, 1 o 2 éxitos. Si resumimos la tabla 2 nos queda:

Tabla 3: Resumen de distribución de probabilidades para el lanzamiento de una moneda dos veces consecutivas

Descripción de la tabla 3: Se resumen los resultados de la tabla dos para cada variable aleatoria.

x	P(x)

x	P(x)
0	q^2
1	2.q.p
2	p^2

Fuente: elaboración propia.

Que se lee: $P(x=0)=q^2$ $P(x=1)=2qp$ $P(x=2)=p^2$

Como la suma de todas las probabilidades de la distribución es igual a 1, nos queda:

$P(x=0)+ P(x=1)+P(x=2)=1$

O bien:

$q^2+ 2qp + p^2= 1$

El primer miembro es el desarrollo del cuadrado del binomio. Entonces nos queda:

$(q+p)^2=1$

Además, ya demostramos que $q + p = 1$, su cuadrado, también lo es.

Parte 3: Análogamente, si analizamos el caso de tres tiradas consecutivas: n= 3 ensayos (el mismo análisis sirve si se tiran 3 monedas a la vez), puedes comprobar:

$P(x=0) = q^3$

$P(x = 1) = 3\ q^2.p$

$P(x = 2) = 3\ q.p^2$

$P(x = 3) = p^3$

Entonces:

$P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 1\ q^3 + 3\ q^2.p + 3\ q.p^2 + p^3 = 1$

Observamos que el primer miembro de la igualdad responde al desarrollo del cubo del binomio (p + q), entonces: $(q+p)^3=1$

Y así sucesivamente según el número de ensayos *n*. Podemos sacar como conclusión:

Las probabilidades del número posible de aciertos en n ensayos están dadas por los términos del desarrollo de la potencia del binomio (q + p) y en donde el exponente está dado por el número de ensayos,

$(q+p)^n$

Por eso el nombre de binomial a la distribución responde a las *n* potencias de un binomio.

Expresión general:

El desarrollo de la potencia del binomio se expresa en forma general como:

$(q+p)^n=a0q^np^0+a_1q^{n-1}p^1+a_2q^{n-2}p^2+...+a_xq^{n-x}p^xa_nq^0p^n$

Los coeficientes a_0; a_1; a_2;...;a_x;...;a_n surgen de las *combinaciones* de *n* elementos tomados de *x* en *x*: $C_{n,x}$

De esta manera, la probabilidad que en n ensayos se tengan x aciertos está dada por la expresión que es uno de los términos del desarrollo de las potencias de un binomio:

$P_x=C_{n,x}.p^x.q^{n-x}$

Esta es la fórmula de la distribución de probabilidad binomial para una variable aleatoria x.

Resolución de los ejemplos con la fórmula

Resolución del caso del ejemplo 1: cuatro lanzamientos de una moneda

¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro veces salga cara suponiendo que la moneda está perfectamente balanceada?

Datos:

n=4; p=0,5; q=0,5

x=4 (pues queremos cuatro aciertos. El acierto es que salga cara)

$$P(x=4)=C_{4,4}.p^4.q^{4-4}=1\times 0{,}5^4\times 0{,}5^0=\mathbf{0,0625}$$

Es lo cierto, pues por cálculo de probabilidades sabemos que es $\left(\frac{1}{2}\right)^4$=0,0625

Aclaraciones:

- Recuerda que las combinaciones son conjuntos que pueden formarse con *n* elementos tomados de la *x*. Las calculadoras científicas simples tienen esta función. Es la tecla *nCr*, por ejemplo, si deseas calcular cuántos grupos de 6 personas puedes formar tomadas de a 3, el cálculo es $C_{6,3}$, por calculadora, 6 *nCr* 3 =20.
- Otra opción es calcular las combinaciones mediante su desarrollo por factoriales:

$$C_{n,x} = \frac{n!}{(n-x)!.\,x!}$$

- En los próximos ejemplos, utilizaremos esta última expresión, pero, al finalizar, verás que existen tablas para calcular probabilidades. Cualquier opción es válida.
- En los próximos ejemplos verás más aplicaciones, diferentes a este ejemplo y aprenderás más sobre las características de la distribución binomial.

Resolución del ejemplo 2: caso de los pernos defectuosos

Retomemos el ejemplo 2 y resolvámoslo:

Supongamos que contamos con una partida de 3000 pernos de pistón, la aceptación de esta está sujeta a que, en una muestra de 10 pernos elegidos azarosamente, no se encuentre ninguno defectuoso. Si el productor de pernos indica que el 1 % de los pernos producidos salen defectuosos, indique la probabilidad existente en que la partida sea aceptada.

- Ya habíamos probado que cumple con todas las condiciones de un experimento binomial. Los 3000 pernos son un dato que no utilizamos. De la población, solo importa la probabilidad del evento. En este caso, la probabilidad de acierto es que sea defectuoso. A veces se da este dato para compararlo con la muestra. Si n<5 %N, se aplica binomial, pues la población se considera muy grande frente a la muestra.

- Datos: *n=10; p=0,01* (defectuosos)
- La partida se acepta si no hay ninguno defectuoso; por eso, se debe calcular *P(x=0)*. Se pregunta por 0 defecto (*x* y *p* tienen que referirse a la misma distribución, en este caso, los defectuosos).

Resolución:

$$P(x=0)=C_{10,0}.\,0{,}01^{0}.\,0{,}99^{10}$$

Aplicamos la definición de combinación: (recuerda que 0! = 1)

$$C_{10,0}=\frac{10!}{(10-0)!\,.0!}=\frac{10!}{10!}=1$$

Pueden simplificarse las factoriales del mismo número porque 10! = 10×9×8×7×6×5×4×3×2×1 es el producto de los diez primeros números naturales.

Retomando el cálculo de la probabilidad:

$$P(x=0)=1.1.\,0{,}99^{10}=\mathbf{0{,}9044}$$

La probabilidad de que la partida sea aceptada es 0,9044 es decir es de un 90,44 %.

Resolución del caso empresa Cuidado Integra

El ítem 1) ya lo habíamos respondido y este caso puede resolverse con una distribución binomial. Los datos son *n*=10 y *p*=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

Tenemos que calcular:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que solo una familia acceda al Plan Premium?

$P(x=1)=C_{10,1}.0{,}15^{1}.0{,}85^{9}=10\times0{,}15\times0{,}2316=0{,}3474$

La probabilidad es de 0,3474.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las familias seleccionadas acceda al Plan Premium?

$P(x=0)=C_{10,0}.0,15^{0}.0,85^{10}=1\times1\times0,1969=0,1969$

La probabilidad es de 0,1969.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos cinco familias accedan al plan?

$Px\geq5=Px=5+Px=6+Px=7+Px=8+Px=9+P(x=10)$

$Px=5=C_{10,5}.0,15^{5}.0,85^{5}=252\times7,6\times10^{-5}\times0,4437=0,0085$

Nota: Para no tener que trabajar con notación científica, es más exacto hacer todas las cuentas de una sola vez con una calculadora.

$P(x=6)=C_{10,6}.0,15^{6}.0,85^{4}=0,0012$

$P(x=7)=C_{10,7}.0,15^{7}.0,853=0,0001$

$P(x=8)=C_{10,8}.0,15^{8}.0,85^{2}=8,3\times10^{-6}=0$

$P(x=9)=C_{10,9}.0,15^{9}.0,85^{1}=3,3\times10^{-7}=0$

$P(x=10)=C_{10,10}.0,15^{10}.0,85^{0}=5.8\times10^{-9}=0$

Cuando da una de las probabilidades es un número menor a 10^{-4}, directamente ponemos cero.

Entonces: $P(x\geq5)=0,0012+0,0001+0+0+0=$**0,0013**

Importante: También podemos hacerlo por complemento, si es que nos conviene para no sacar tantas probabilidades, porque la fórmula no es acumulada, sino que son probabilidades puntuales. Podemos pensarlo así:

Si la suma de todas las probabilidades de la distribución de variable aleatoria, discreta en este caso, es igual a 1:

Tendremos:

$P(x=0)+Px=1+Px=2+...+Px=5+...+Px=10=1$

Despejando $P(x \geq 5)$:

$P(x=5)+Px=6+...+Px=10=1-(Px=0+...+Px=4)$

O lo que es lo mismo:

$P(x \geq 5)=1-(Px=0+Px=1+Px=2+Px=3+Px=4)$

De esta forma, tendríamos que hacer una probabilidad menos. No es mucho ahorro de cálculos, pero te aconsejo que tengas presente esta relación porque te aliviará las cuentas en muchos casos. Lo dejo para que practiques, pero te tiene que dar la misma respuesta.

La probabilidad de que al menos 5 familias accedan al plan Premium es de 0,0013, un 0,13 %.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que más de dos familias accedan al plan?

$P(x>2)=P(x=3)+P(x=4)+...+P(x=10)$

Acá sí conviene hacerlo por el complemento:

$P(x>2)=1-(P(x=0)+P(x=1)+P(x=2))$

Entonces:

$P(x=0)=C_{10,0}.0{,}15^{0}.0{,}85^{10}=0{,}1969$

$P(x=1)=C_{10,1}.0{,}15^{1}.0{,}85^{9}=0{,}3474$

$P(x=2)=C_{10,2}.0{,}15^{2}.0{,}85^{8}=0{,}2759$

$P(x>2)=1-(0{,}1969+0{,}3474+0{,}2759)$

$P(x>2)=1-0{,}8202=0{,}1798$

La probabilidad de que más de dos familias accedan al plan es de 0,1798.

Ahora te proponemos realizar la siguiente actividad:

Las características que definen a una distribución binomial son las siguientes.

- [ ] El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.
- [ ] En cada ensayo, hay dos resultados posibles: uno se le llama éxito y el otro fracaso.
- [ ] La probabilidad de éxito no cambia de un ensayo a otro; se mantiene constante.
- [ ] Los ensayos son independientes.
- [ ] La probabilidad de éxito es constante, pero la probabilidad de fracaso varía de un ensayo a otro.

SUBMIT

Representaciones gráficas de la distribución binomial

Para el ejemplo 1, el ejemplo 2 y el caso de la empresa Cuidado Integral, mostramos las tablas de probabilidades con todos los resultados posibles de la variable y sus correspondientes probabilidades calculadas mediante la fórmula de la distribución binomial. Observa que cada tabla es una distribución de probabilidades, ya que la sumatoria de todas ellas es igual a 1.

Ejemplo 1

Tabla 4: Distribución de probabilidades de la variable cara en 4 lanzamientos consecutivos.

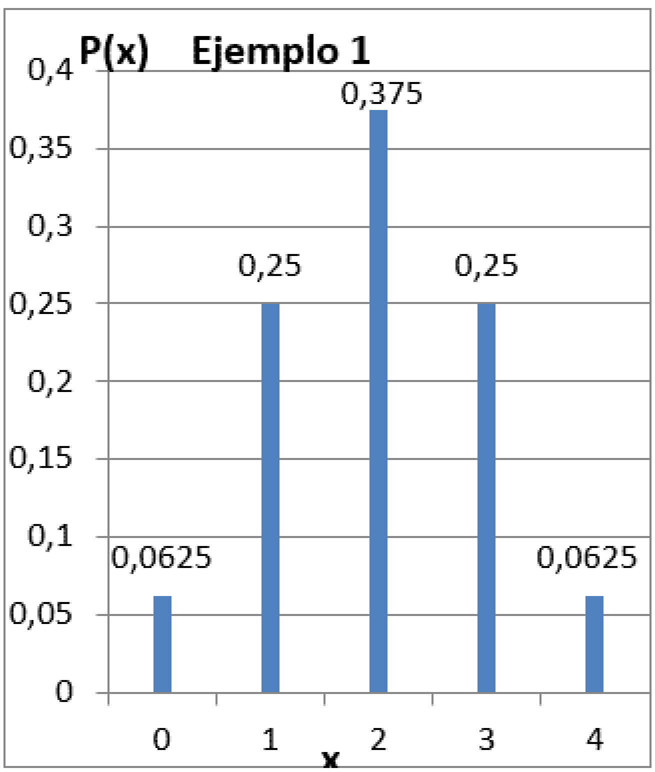
Descripción de la tabla 4: La tabla muestra todos los resultados de la variable aleatoria *que salga cara* en cuatro lanzamientos consecutivos de una moneda perfectamente equilibrada.

x: cantidad de veces que sale cara	Probabilidades
0	0,0625
1	0,25
2	0,375

x: cantidad de veces que sale cara	Probabilidades
3	0,25
4	0,0625
Sumatoria	**1**

Fuente: elaboración propia.

Figura 1: Diagrama de bastones que muestra la distribución de probabilidades de la variable cara en cuatro lanzamientos consecutivos



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 2

Tabla 5: Diagrama de bastones que muestra la distribución de probabilidades de la variable aleatoria: *cantidad de pernos defectuosos*

Descripción de la tabla 5: La tabla muestra todos los resultados de la variable aleatoria *que el perno sea defectuoso*, en una partida de pernos para ser o no aceptada.

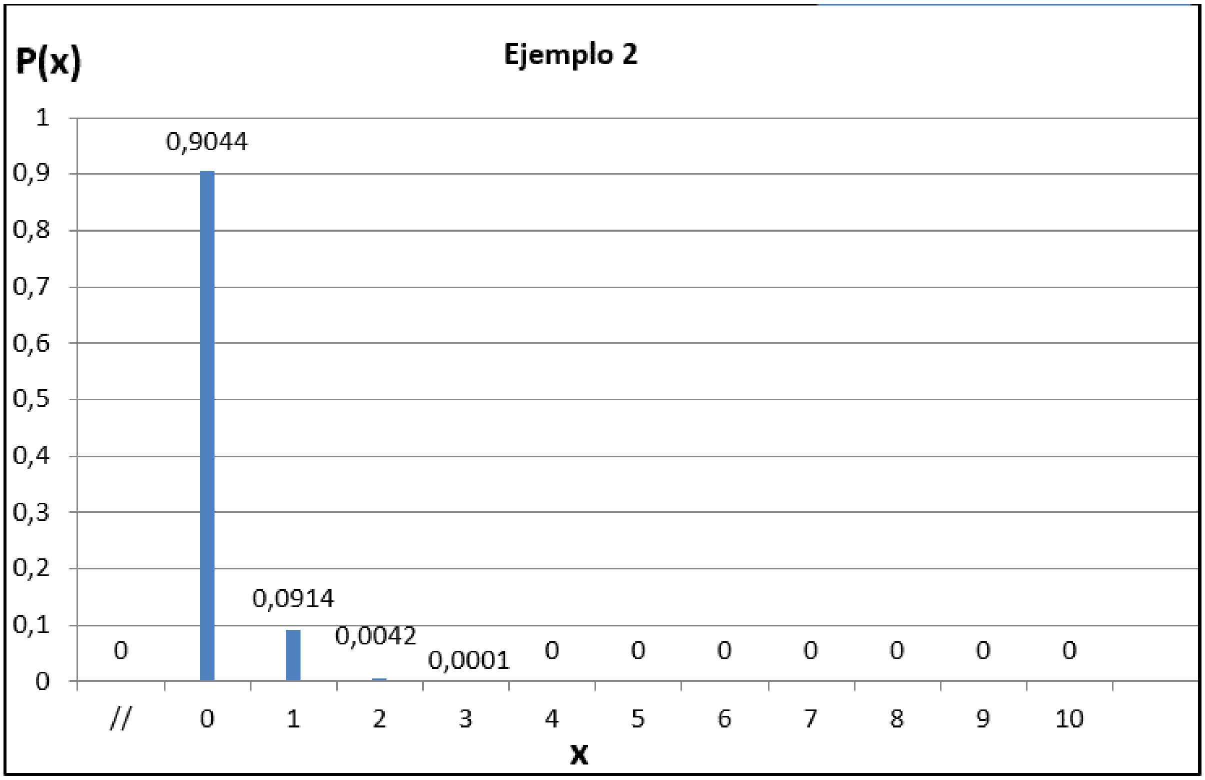
x	P(x)
0	0,9044
1	0,0914
2	0,0042
3	0,0001
4	1,977E-06
5	2,396E-08
6	2,017E-10
7	1,164E-12
8	4,410E-15

x	P(x)
9	9,900E-18
10	1,000E-20
Sumatoria	**1**

Fuente: elaboración propia.

Figura 2: Diagrama de bastones que muestra la distribución de probabilidades de la variable: *n.º de pernos defectuosos*

Descripción del gráfico 2: El gráfico muestra el valor de probabilidad de cada variable aleatoria *n.º de pernos defectuosos*, en una prueba de calidad para que sea aceptada la partida.



Fuente: elaboración propia.

Caso empresa Cuidado Integral

Tabla 6: Diagrama de bastones que muestra la distribución de probabilidades de la variable aleatoria c*antidad de familias que acceden al Plan Premium*

Descripción de la tabla 6: La tabla muestra todos los resultados de la variable aleatoria *cantidad de familias que accedieron al Plan Premium*, con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

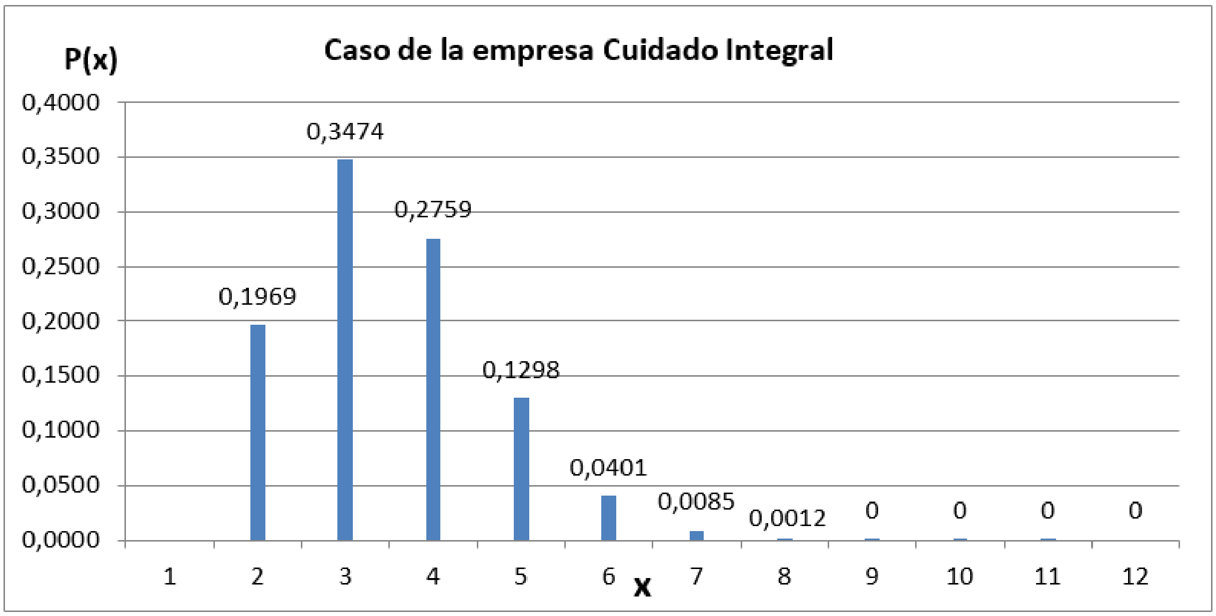
N.o de familias que accedieron al Plan Premium	P(x)

N.o de familias que accedieron al Plan Premium	**P(x)**
0	0,1969
1	0,3474
2	0,2759
3	0,1298
4	0,0401
5	0,0085
6	0,0012
7	0,0001
8	8,3E-06
9	3,3E-07
10	5,8E-09
Sumatoria	**1,0000**

Fuente: elaboración propia.

Figura 3: Diagrama de bastones que muestra la distribución de probabilidades de la variable *n.o de familias que accedieron al Plan Premium*

Descripción de la figura 3: El gráfico muestra el valor de probabilidad de cada variable aleatoria *n.º de familias que accedieron al Plan Premium, en una entrevista a diez familias asociadas a la empresa de salud.*



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones sobre los gráficos de la distribución binomial

Después de ver cada gráfico, podremos hacer las siguientes generalizaciones:

1. Cuando p es pequeño, la distribución binomial está sesgada hacia la derecha (asimetría positiva). Es el caso del ejemplo 2 (p=0,01) y el caso de la empresa de salud (p=0,15).
2. Cuando p = 0,5, la distribución binomial es simétrica. Es el caso del ejemplo 1 (p=0,5).
3. Cuando p es mayor que 0,5, la distribución está sesgada hacia la izquierda (asimetría negativa).

4. ¿Qué sucedería cuando n aumenta y p permanece constante? La distribución tendría la misma forma, pero a medida que aumenta n, las líneas verticales estarían cada vez más juntas y asumirían la forma de campana en las distribuciones simétricas. Y, en el resto de los casos, se suavizarían los rectángulos y adoptarían forma curva con sesgo a la izquierda o a la derecha, tal cual vimos en el módulo 1.

Uso de la tabla de probabilidades binomiales

Muchas veces resulta tedioso calcular las probabilidades mediante la fórmula, especialmente, cuando n es grande. Por eso existen tablas para buscar estas probabilidades.

Ahora resolveremos los mismos problemas, pero usando las tablas de distribución de probabilidad binomial. Estas se encuentran en el anexo de este módulo. Es conveniente que las imprimas para manejarlas con más facilidad y para cuando vayas a rendir los exámenes. ¡No olvides llevarlas!

Para las distribuciones de probabilidad discreta, existen dos tipos de tablas:

1. Tabla de distribuciones puntuales
2. Tabla de distribuciones acumuladas

Puedes utilizar cualquiera de las dos tablas, todo depende de ti, de la que te resulte más práctica. Pero ten en cuenta que hay una diferencia en su manejo. En el anexo se presentan para descargar las tablas puntuales y acumuladas. A continuación, estudiarás cómo se utilizan.

Tabla de distribuciones puntuales para la binomial

Estas tablas sirven para buscar una probabilidad puntual, por ejemplo, el caso en que la variable aleatoria toma un solo valor. Por ejemplo, para $x=7$, si se busca $x<7$, tendrás que sumar todas las probabilidades que están por debajo de 7 o utilizar la tabla acumulada, que también te mostramos como se maneja.

En la lectura siguiente se explica cómo buscar los parámetros en una tabla.

Lectura obligatoria: Tabulación de la binomial

Este artículo explica cómo manejar la tabla de la distribución binomial de probabilidades. Hay que aclarar que es puntual, no acumulada.

Fuente: Tabulación de la binomial. (s. f.). Recuperado de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/EstadisticaProbabilidadInferencia/VAdiscreta/3_2ParametrosasociadoDistribucionBinomial/index.html

M3_L2 Tabulación de la binomial.pdf
735.4 KB

Tabla de distribuciones acumuladas para la binomial

Lectura obligatoria: Taules

Este artículo explica cómo manejar la tabla de la distribución binomial de probabilidades acumuladas y lleva a reflexionar sobre algunos casos extremos en los cuales no se encuentra la probabilidad directa. Se recomienda la lectura de las páginas 1 a 3.

Fuente: ¿Cómo utilizar la tabla de tabulación binomial? (s. f.). Recuperado de http://www-eio.upc.edu/teaching/estad/MC/taules/com-usar-taules.pdf

M3_L2 Taules.pdf
46.2 KB

Resolución de los ejemplos 1 y 2, y del caso de la empresa de salud mediante una tabla

Ejemplo 1

Caso de las cuatro tiradas de una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro veces salga cara?

Datos: n=4; p=0,5; q=0,5

- Por fórmula: $Px=4=C_{4,4}.p^{4}.q^{4-4}$=1×0,540,50=**0,0625**
- Por tabla: (nos conviene buscar en la tabla de probabilidades puntuales).

Figura 2: Tabla de la distribución binomial puntual para resolver el ejemplo 1

Descripción de la figura 2: Se muestra una parte de la tabla de la distribución binomial, para ver cómo se busca una probabilidad, dados n y p, y la probabilidad de la variable aleatoria que se pide en el ejemplo 1.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4449	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1		0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4442	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2		0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1109	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2967	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1		0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2		0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2219	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3		0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0369	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1979	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1		0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3953	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2		0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2960	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3		0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0985	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1320	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313

Fuente: Tabulación de la binomial, s. f., https://bit.ly/3f0pJ7o

Ejemplo 2

Datos: n=10; p=0,01 (Defectuosos)

La partida se acepta si no hay pernos defectuosos, es decir: x=0 defectos

- Por fórmula: $P(x=0)=1.1.0,99^{10}=0,9044$
- Por tabla: No se puede hacer porque p comienza con un valor de 0,05. En este caso, es fácil resolverlo por fórmula, pero, en el caso de tener que realizar muchos cálculos, este modelo puede resolverse mediante aproximación por el modelo de Poisson que veremos en la próxima lectura.

Empresa Cuidado Integral

En este ejercicio trabajaremos con las tablas acumuladas, nosotros te advertimos como se manejan, pero tú puedes elegir otra tabla binomial si lo deseas.

Los datos son n=10 y p=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

Tenemos que calcular:

2.¿Cuál es la probabilidad de que solo una familia acceda al Plan Premium?

- Por fórmula: Px=1=0,3474
- Por tabla: Esta tabla acumula las probabilidades. Fíjate que, para un valor de p y un valor de n, las probabilidades aumentan en sentido vertical y ascendente de la variable x. Por lo tanto, el valor de probabilidad que encontramos en la tabla surge de acumular la P(0)+P(1)+...P(n). Vamos a nuestro ejemplo:

Figura 3: Ejemplo de distribución binomial

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	p 0.50	0.55
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.001
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	[illegible]	[illegible]	0.1064	0.0632	0.0352	0.018
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	[illegible]	[illegible]	0.3154	0.2201	0.1445	0.088
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	[illegible]	[illegible]	0.5941	0.4770	0.3633	0.260
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.523
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9115	0.8555	0.779
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9819	0.9648	0.936
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9983	0.9961	0.991
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.000
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.009
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.049
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.165
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5000	0.378
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7461	0.638
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9102	0.850
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9805	0.961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.995
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.000
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.004
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.027
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.102
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.261
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.495
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.734
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.900
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.976
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.997

P(x=0)

P(x=0)+P(x=1)

P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)

Fuente: Tabulación de la binomial, s. f., https://bit.ly/3f0pJ7o

Para p=015 y n=10, buscamos x=1 y la probabilidad que encontramos no es la P(x=1) exacta, sino que es la P(x=0)+P(x=1)=0,5443.

Es decir que la tabla nos da la probabilidad de P(x ≤ 1); por lo tanto, si queremos solo la P(x=1) exacta, tendremos que restarle a 0,5443 la P(x=0). Entonces 0,5443-0,1969=**0,3474**, que es lo que nos había dado por fórmula. Esta tabla es muy útil cuando se nos pide un intervalo de la variable aleatoria discreta.

Figura 4: Intervalo de la variable aleatoria discreta

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	p 0.50	0.55
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633	0.2604
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.0045
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.0274
P(x<=5)	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.1020
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.2616
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.4956
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9004

Fuente: Tabulación de la binomial, s. f., https://bit.ly/3f0pJ7o

3. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las familias seleccionadas acceda al Plan Premium?

- Por fórmula: P(x=0)=**0,1969**
- Por tabla: Observa la tabla del ítem 2) para p=0,15 y n=10. Buscamos x=0 y directamente nos da la probabilidad. P(x=0)=**0,1969**

4. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos cinco familias accedan al plan?

- Por fórmula: P(x≥5)=**0,0013**
- Por tabla:

La tabla, como es acumulada, muestra la P(x≤5)=0,9986. De hecho, como es menor o igual, y no menor solamente, la probabilidad que nos va a interesar es la anterior que es P(x≤4)=0,9901. Ahora bien, la suma de todas las probabilidades para n=10 y p=0,15 es igual a 1. Podemos decir:

$P(x \geq 5)+P(x<5)=1$

Si se nos pide $P(x \geq 5)$, tendremos que hacer $P(x \geq 5)=1-P(x \leq 4)$. En este caso le tenemos que restar la probabilidad acumulada anterior, es decir, la de 4.

Si observamos la tabla $P(x \leq 4)=0,9901$, luego, 1 - 0,9901 = 0,0099, que es aproximadamente igual a 0,001. La diferencia es por los decimales con los que se trabaja tanto en la fórmula como en la tabla, pero podemos considerarlos iguales a los dos resultados.

Aclaraciones: Si prefieres trabajar con tablas puntuales, es este ejemplo. Tendrías que sumar todas las probabilidades desde x=5 hasta x=10. Te sugiero que lo hagas y verifiques este resultado.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 2 familias accedan al plan?

- Por fórmula: $P(x>2)=1-0,8202=$**0,1798**
- Por tabla: Observa en la tabla del ítem 4.

Como: $P(x>2)+P(x \leq 2)=1$

entonces: $P(x>2)=1-P(x \leq 2)=1-0,8202=$**0,1798**

Aclaraciones: Si prefieres trabajar con tablas puntuales, es este ejemplo. Tendrías que sumar todas las probabilidades desde x=3 hasta x=10, o hacerlo por complemento. Te sugiero que lo hagas y verifiques este resultado.

Esperanza y varianza de una distribución binomia

Tomando como punto de partida la definición de esperanza matemática o valor esperado de una variable aleatoria:

$$E(x) = \mu = \sum x.f(x)$$

Y tomando que las probabilidades para el experimento binomial se obtienen mediante el modelo matemático visto anteriormente y se llega a la siguiente expresión para su cálculo (si tienes interés en ver el desarrollo de esta ecuación te remitimos al siguiente enlace: http://reyesestadistica.blogspot.com/2017/03/demostracion-del-valor-esperado-de-una.html). Entonces:

$Ex=\mu=n.p$

Calculemos ahora la esperanza matemática para los ejemplos mencionados anteriormente.

- *Ejemplo 1:* Datos: n=4; p=0,5; q=0,5

$E(x)=4\times0,5=2$

Significa que el valor que se espera obtener en promedio, si repetimos el ensayo muchas veces, es de 2 caras.

- *Ejemplo 2***:** Datos: n=10; p=0,01 (Defectuosos)

$E(x)=10\times0,01=0,1$

Significa que el valor que se espera obtener, en promedio, si repetimos el ensayo muchas veces es de 0,1 defectos.

- *Caso empresa Cuidado Integral:* Los datos son n=10 y p=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

$E(x)=10\times0,15=1,5$

Significa que el valor que se espera obtener, en promedio, si repetimos el ensayo muchas veces, es de 1,5 familias que acceden al Plan Premium.

Varianza y desviación estándar de una distribución binomial

Deduciendo del mismo modo para la varianza, se obtiene:

Var(x)=n.p.q

Entonces la desviación estándar será:

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

Calculemos ahora estos valores para los ejemplos mencionados anteriormente.

- *Ejemplo 1:*

Datos: *n=4; p=0,5; q=0,5*

$$Var(x) = 4 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

$$CV = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

La varianza de la distribución y la desviación estándar son iguales a 1. La variabilidad es de 0,5, un 50 %, es una variabilidad de datos considerable, en este experimento.

- *Ejemplo 2:*

Datos: n=10; p=0,01 (Defectuosos)

$$Var(x) = 10 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 0{,}099$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}099} = 0{,}3146$$

$$CV = \frac{0{,}3146}{0{,}1} = 3{,}146$$

La varianza de la distribución es 0,099 (casi un 10 %) y la desviación estándar 0,3146. La variabilidad es de 3,146. Hay una gran variabilidad en la distribución de probabilidades de este experimento.

- Caso empresa Cuidado Integral

Los datos son n=10 y p=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

$$Var(x) = 10 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 1{,}275$$

$$\sigma = \sqrt{1{,}275} = 1{,}129$$

$$CV = \frac{1{,}129}{1{,}5} = 0{,}7527$$

La varianza de la distribución es 1,275 y la desviación estándar 1,129. La variabilidad es de 0,7527. Hay mucha variabilidad (75,27 %) en la distribución de probabilidades de este experimento, pero mucho menor que el caso del ejemplo 2.

Con estos cálculos de la esperanza y la varianza completamos la resolución del caso de la EMPRESA Cuidado Integral.

En una Ciudad, el 30 % de los trabajadores utiliza el transporte público. Si se toma una muestra de ocho trabajadores. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren en la muestra como máximo tres trabajadores que utilicen el transporte público?, ¿cuántas personas se espera que utilicen dicho transporte?

- ◯ $P(x \leq 3)=0{,}8059$ y se espera que utilicen el transporte público 2,4 personas.
- ◯ $P(x<3)=0{,}5518$ y se espera que utilicen el transporte público 2,4 personas.
- ◯ $P(x \leq 3)=0{,}1941$ y se espera que utilicen el transporte público 2 personas.

$P(x \leq 3)=0,4482$ y se espera que utilicen el transporte público 2 personas.

SUBMIT

Lectura obligatoria: Probabilidades binomiales

Te facilitamos las tablas de probabilidades puntuales de la distribución binomial. Te serán de utilidad para rendir los exámenes. Puedes bajarlas y fotocopiarlas.

Fuente: Levin, R. y Rubín, D. (2012). Probabilidades binomiales. AT3-AT11 (Apéndice Tablas). En Estadística para Administración y Economía. Ciudad de México, MX: Pearson.

PDF

M3_L2 Probabilidades binomiales.pdf

5.6 MB

Lectura obligatoria: Tablas de la función de distribución binomial acumulada

Aquí te facilitamos las tablas de probabilidades acumuladas de las distribuciones de probabilidades binomiales. Te serán de utilidad para rendir los exámenes. Puedes bajarlas y fotocopiarlas.

Fuente: Cátedra: Probabilidad y estadística. Facultad Regional de Mendoza. UTN. Tabla D-2 Distribución binomial. Recuperado de http://www.um.edu.ar/math/estadis/TD2_BinomialAcumulada.pdf

M3_L2 Tablas de la función de distribución binomial acumulada.pdf

27.7 KB

Resolución de los ejemplos 1 y 2

Resolución de los ejemplos 1 y 2, y del caso de la empresa de salud mediante una tabla

Ejemplo 1

Caso de las cuatro tiradas de una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro veces salga cara?

Datos: $n=4$; $p=0,5$; $q=0,5$

- Por fórmula: $Px=4=C_{4,4}.p^{4}.q^{4-4}=1\times 0,540,50=$**0,0625**
- Por tabla: (nos conviene buscar en la tabla de probabilidades puntuales).

Figura 2: Tabla de la distribución binomial puntual para resolver el ejemplo 1

Descripción de la figura 2: Se muestra una parte de la tabla de la distribución binomial, para ver cómo se busca una probabilidad, dados n y p, y la probabilidad de la variable aleatoria que se pide en el ejemplo 1.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4449	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1		0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4442	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2		0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1109	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2967	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1		0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2		0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2219	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3		0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0369	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1979	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1		0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3953	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2		0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2960	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3		0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0985	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1320	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313

Fuente: Tabulación de la binomial, s. f., https://bit.ly/3f0pJ7o

Ejemplo 2

Datos: n=10; p=0,01 (Defectuosos)

La partida se acepta si no hay pernos defectuosos, es decir: x=0 defectos

- Por fórmula: $P(x=0)=1.1.0{,}99^{10}=0{,}9044$
- Por tabla: No se puede hacer porque p comienza con un valor de 0,05. En este caso, es fácil resolverlo por fórmula, pero, en el caso de tener que realizar muchos cálculos, este modelo puede resolverse mediante aproximación por el modelo de Poisson que veremos en la próxima lectura.

Empresa Cuidado Integral

En este ejercicio trabajaremos con las tablas acumuladas, nosotros te advertimos como se manejan, pero tú puedes elegir otra tabla binomial si lo deseas.

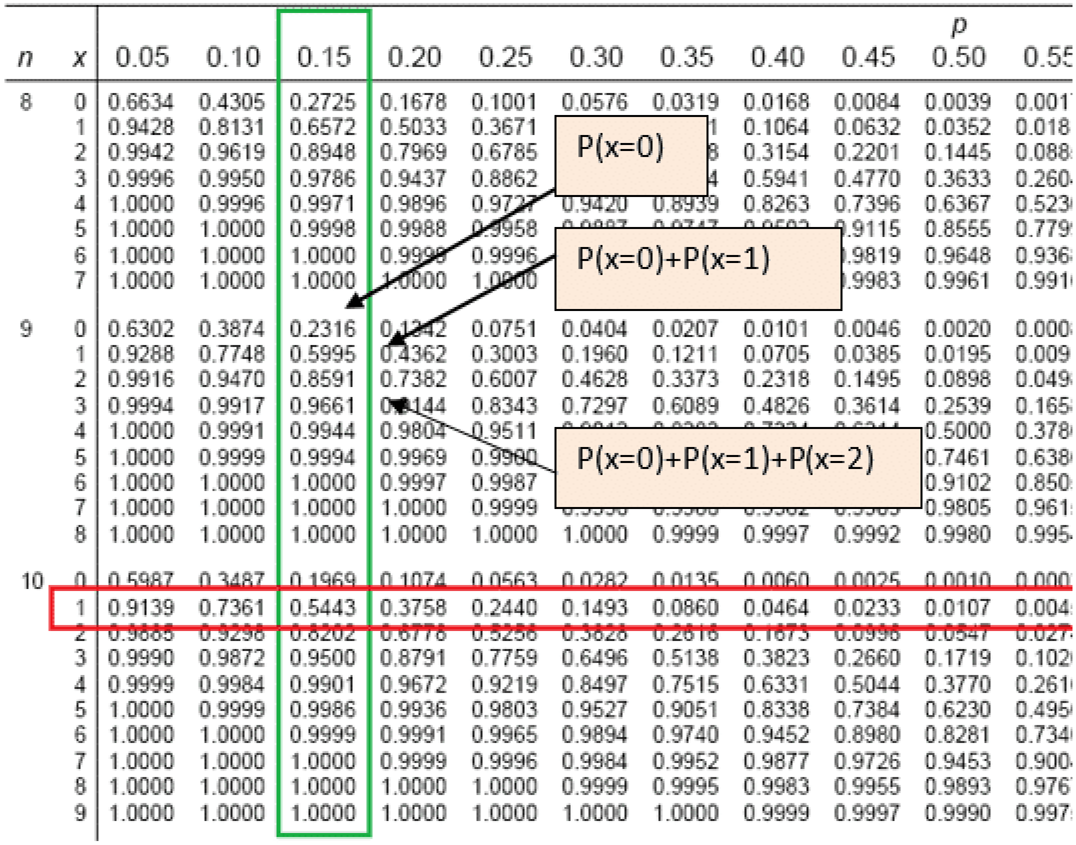
Los datos son n=10 y p=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

Tenemos que calcular:

2.¿Cuál es la probabilidad de que solo una familia acceda al Plan Premium?

- Por fórmula: Px=1=0,3474
- Por tabla: Esta tabla acumula las probabilidades. Fíjate que, para un valor de p y un valor de n, las probabilidades aumentan en sentido vertical y ascendente de la variable x. Por lo tanto, el valor de probabilidad que encontramos en la tabla surge de acumular la P(0)+P(1)+...P(n). Vamos a nuestro ejemplo:

Figura 3: Ejemplo de distribución binomial



n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.001
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	[illegible]	[illegible]	0.1064	0.0632	0.0352	0.018
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	[illegible]	[illegible]	0.3154	0.2201	0.1445	0.088
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	[illegible]	[illegible]	0.5941	0.4770	0.3633	0.260
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.523
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9115	0.8555	0.779
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9819	0.9648	0.936
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9983	0.9961	0.991
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.000
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.009
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.049
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.165
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5000	0.378
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7461	0.638
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9102	0.850
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9805	0.961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.995
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.000
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.004
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.027
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.102
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.261
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.495
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.734
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.900
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.976
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.997

Fuente: Tabulación de la binomial, s. f., https://bit.ly/3f0pJ7o

Para p=015 y n=10, buscamos x=1 y la probabilidad que encontramos no es la P(x=1) exacta, sino que es la P(x=0)+P(x=1)=0,5443.

Es decir que la tabla nos da la probabilidad de P(x ≤ 1); por lo tanto, si queremos solo la P(x=1) exacta, tendremos que restarle a 0,5443 la P(x=0). Entonces 0,5443-0,1969=**0,3474**, que es lo que nos había dado por fórmula. Esta tabla es muy útil cuando se nos pide un intervalo de la variable aleatoria discreta.

Figura 4: Intervalo de la variable aleatoria discreta

P(x<=5)

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	p 0.50	0.55
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633	0.2604
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.0045
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.0274
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.1020
	4	[illegible]	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.2616
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.4956
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9004

Fuente: Tabulación de la binomial, s. f., https://bit.ly/3f0pJ7o

3. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las familias seleccionadas acceda al Plan Premium?

- Por fórmula: P(x=0)=**0,1969**
- Por tabla: Observa la tabla del ítem 2) para p=0,15 y n=10. Buscamos x=0 y directamente nos da la probabilidad. P(x=0)=**0,1969**

4. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos cinco familias accedan al plan?

- Por fórmula: P(x≥5)=**0,0013**
- Por tabla:

La tabla, como es acumulada, muestra la P(x≤5)=0,9986. De hecho, como es menor o igual, y no menor solamente, la probabilidad que nos va a interesar es la anterior que es P(x≤4)=0,9901. Ahora bien, la suma de todas las probabilidades para n=10 y p=0,15 es igual a 1. Podemos decir:

$P(x \geq 5) + P(x < 5) = 1$

Si se nos pide $P(x \geq 5)$, tendremos que hacer $P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 4)$. En este caso le tenemos que restar la probabilidad acumulada anterior, es decir, la de 4.

Si observamos la tabla $P(x \leq 4) = 0{,}9901$, luego, 1 - 0,9901 = 0,0099, que es aproximadamente igual a 0,001. La diferencia es por los decimales con los que se trabaja tanto en la fórmula como en la tabla, pero podemos considerarlos iguales a los dos resultados.

Aclaraciones: Si prefieres trabajar con tablas puntuales, es este ejemplo. Tendrías que sumar todas las probabilidades desde x=5 hasta x=10. Te sugiero que lo hagas y verifiques este resultado.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 2 familias accedan al plan?

- Por fórmula: $P(x>2)=1-0{,}8202=$**0,1798**
- Por tabla: Observa en la tabla del ítem 4.

Como: $P(x>2)+P(x \leq 2)=1$

entonces: $P(x>2)=1-P(x \leq 2)=1-0{,}8202=$**0,1798**

Aclaraciones: Si prefieres trabajar con tablas puntuales, es este ejemplo. Tendrías que sumar todas las probabilidades desde x=3 hasta x=10, o hacerlo por complemento. Te sugiero que lo hagas y verifiques este resultado.

Esperanza y varianza de una distribución binomia

Tomando como punto de partida la definición de esperanza matemática o valor esperado de una variable aleatoria:

$$E(x) = \mu = \sum x.f(x)$$

Y tomando que las probabilidades para el experimento binomial se obtienen mediante el modelo matemático visto anteriormente y se llega a la siguiente expresión para su cálculo (si tienes interés en ver el desarrollo de esta ecuación te remitimos al siguiente enlace: http://reyesestadistica.blogspot.com/2017/03/demostracion-del-valor-esperado-de-una.html). Entonces:

Ex=μ=n.p

Calculemos ahora la esperanza matemática para los ejemplos mencionados anteriormente.

- *Ejemplo 1:* Datos: n=4; p=0,5; q=0,5

E(x)=4×0,5=2

Significa que el valor que se espera obtener en promedio, si repetimos el ensayo muchas veces, es de 2 caras.

- *Ejemplo 2***:** Datos: n=10; p=0,01 (Defectuosos)

E(x)=10×0,01=0,1

Significa que el valor que se espera obtener, en promedio, si repetimos el ensayo muchas veces es de 0,1 defectos.

- *Caso empresa Cuidado Integral:* Los datos son n=10 y p=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

E(x)=10×0,15=1,5

Significa que el valor que se espera obtener, en promedio, si repetimos el ensayo muchas veces, es de 1,5 familias que acceden al Plan Premium.

Varianza y desviación estándar de una distribución binomial

Deduciendo del mismo modo para la varianza, se obtiene:

Var(x)=n.p.q

Entonces la desviación estándar será:

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

Calculemos ahora estos valores para los ejemplos mencionados anteriormente.

- *Ejemplo 1:*

Datos: *n=4; p=0,5; q=0,5*

$$Var(x) = 4 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

$$CV = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

La varianza de la distribución y la desviación estándar son iguales a 1. La variabilidad es de 0,5, un 50 %, es una variabilidad de datos considerable, en este experimento.

- *Ejemplo 2:*

Datos: n=10; p=0,01 (Defectuosos)

$$Var(x) = 10 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 0{,}099$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}099} = 0{,}3146$$

$$CV = \frac{0{,}3146}{0{,}1} = 3{,}146$$

La varianza de la distribución es 0,099 (casi un 10 %) y la desviación estándar 0,3146. La variabilidad es de 3,146. Hay una gran variabilidad en la distribución de probabilidades de este experimento.

- Caso empresa Cuidado Integral

Los datos son n=10 y p=0,15 (los que acceden al Plan Premium).

$$Var(x) = 10 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 1{,}275$$

$$\sigma = \sqrt{1{,}275} = 1{,}129$$

$$CV = \frac{1{,}129}{1{,}5} = 0{,}7527$$

La varianza de la distribución es 1,275 y la desviación estándar 1,129. La variabilidad es de 0,7527. Hay mucha variabilidad (75,27 %) en la distribución de probabilidades de este experimento, pero mucho menor que el caso del ejemplo 2.

Con estos cálculos de la esperanza y la varianza completamos la resolución del caso de la EMPRESA Cuidado Integral.

En una Ciudad, el 30 % de los trabajadores utiliza el transporte público. Si se toma una muestra de ocho trabajadores. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren en la muestra como máximo tres trabajadores que utilicen el transporte público?, ¿cuántas personas se espera que utilicen dicho transporte?

- $P(x \leq 3)=0{,}8059$ y se espera que utilicen el transporte público 2,4 personas.
- $P(x<3)=0{,}5518$ y se espera que utilicen el transporte público 2,4 personas.
- $P(x \leq 3)=0{,}1941$ y se espera que utilicen el transporte público 2 personas.

P(x≤3)=0,4482 y se espera que utilicen el transporte público 2 personas.

SUBMIT

Lectura obligatoria: Probabilidades binomiales

Indicaciones sobre la lectura: Te facilitamos las tablas de probabilidades puntuales de la distribución binomial. Te serán de utilidad para rendir los exámenes. Puedes bajarlas y fotocopiarlas.

Fuente: Levin, R. y Rubín, D. (2012). Probabilidades binomiales. AT3-AT11 (Apéndice Tablas). En Estadística para Administración y Economía. Ciudad de México, MX: Pearson.

PDF **M3_L2 Probabilidades binomiales.pdf**
5.6 MB

Lectura obligatoria: Tablas de la función de distribución binomial acumulada

Indicaciones sobre la lectura: Aquí te facilitamos las tablas de probabilidades acumuladas de las distribuciones de probabilidades binomiales. Te serán de utilidad para rendir los exámenes. Puedes bajarlas y fotocopiarlas.

Fuente: Cátedra: Probabilidad y estadística. Facultad Regional de Mendoza. UTN. Tabla D-2 Distribución binomial. Recuperado de http://www.um.edu.ar/math/estadis/TD2_BinomialAcumulada.pdf

PDF

M3_L2 Tablas de la función de distribución binomial acumulada.pdf

27.7 KB

Referencias

Anderson, D. R., Sweeney, D. J. y Williams, T. A. (2008). *Estadística para Administración y Economía.* Ciudad de México, MX: Ed. Cengage Learning Editores, S.A.

Cátedra: Probabilidad y estadística. Facultad Regional de Mendoza. UTN. Tabla D-2 Distribución Binomial. Recuperado de http://www.um.edu.ar/math/estadis/TD2_BinomialAcumulada.pdf

Levin, R. y Rubin, D. (2012). *Estadística para Administración y Economía.* Ciudad de México, MX: Pearson.

Red Digital Descartes (s. f.). Tabulación de la binomial. Recuperado de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/EstadisticaProbabilidadInferencia/VAdiscreta/3_2ParametrosasociadoDistribucionBinomial/index.html

Universidad Politécnica de Catalunia (s. f.). ¿Cómo utilizar la tabla de tabulación binomial? Recuperado de http://www-eio.upc.edu/teaching/estad/MC/taules/com-usar-taules.pdf