Asignación de probabilidades

Ya estás en condiciones de distinguir los distintos tipos de eventos. En esta lectura definiremos algunos eventos más: los independientes y los dependientes, y los relacionaremos con aquellos estudiados en la lectura 1. Luego, a través de ejemplos, calcularemos los **valores de probabilidad de los eventos estudiados**, es decir, **asignaremos valores de probabilidad a los resultados experimentales**. Para hacer esto tendremos que definir algunas reglas matemáticas: **la de la adición y la de la multiplicación**; su aplicación depende del tipo de **evento compuesto** que se trate.

- Regla aditiva
- Otros tipos de eventos
- Probabilidad condicional, conjunta y marginal
- Regla multiplicativa
- Referencias

Regla aditiva

Caso: becas de la Fundación Antares

La Fundación Antares a principios del año 2017 otorgó becas a estudiantes de varias universidades tanto públicas como privadas de todo el país, teniendo en cuenta los datos históricos del año 2016. El alcance de estas becas era para estudiantes de los siguientes niveles 1) pregrado y grado, y 2) estudiantes de posgrado.

Por otra parte, la Fundación Antares se ha asegurado y asesorado por expertos de que cada estudiante tenga la misma posibilidad de ser elegido. Además relevó los datos del 2016, para lo cual ingresó a la web del Sistema Estadístico de Consultas Universitarias, de la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) de la Nación.

Los datos relevados fueron los siguientes:

Al año 2016, Argentina tiene:

- [ ] 1.939.419 estudiantes de carrera de pregrado y grado.
- [ ] 160.672 estudiantes de posgrado.
- [ ] 1.519.797 estudiantes que se forman en instituciones públicas en pregrado y grado.
- [ ] 419.622 estudiantes que se forman en instituciones privadas en pregrado y grado.
- [ ] Las matrículas de los estudiantes de posgrados en instituciones públicas es el 76,27 % del total de estudiantes de ese nivel.
- [ ] Definimos los eventos:

  G ={que sea de pregrado y grado}

  S ={que sea de posgrado}

  U ={que sea de una universidad pública}

  P ={que sea de una universidad privada}

Determina las siguientes probabilidades sobre todos los estudiantes de todos los niveles de ese año. La idea es que estés motivado para ganarla algunos de estos años; todo es cuestión de calcular probabilidades.

Parte 1:

La probabilidad de que el alumno seleccionado al azar:

1. Sea estudiante de posgrado.
2. Sea de pregrado y grado.
3. Sea un estudiante de cualquier nivel de una universidad privada.
4. Sea un estudiante de una universidad privada o sea estudiante de pregrado y grado.
5. Sea estudiante de posgrado en una universidad pública.
6. No sea un estudiante de posgrado.
7. Sea un estudiante de pregrado y grado, sabiendo que es de una universidad pública.

Parte 2: Responde: ¿los eventos **U** y **G** son independientes?

Vamos a ir resolviendo las probabilidades a medida que estudiemos las reglas matemáticas que las rigen.

Aclaración: Este problema puede ser resuelto con un tema que abordaremos en la próxima lectura: tablas de contingencia o tabla de probabilidades conjuntas. Pero si bien, calcular probabilidades desde las tablas de contingencia puede ser más sencillo, a veces se torna muy mecánico el cálculo.

Como lo que se pretende en esta lectura es la aplicación de las reglas para calcular probabilidades, nos parece más didáctico que lo hagamos desde un enfoque más razonado y más adelante introducir las tablas de contingencia.

Como primer paso aconsejamos repasar los axiomas de la probabilidad estudiados en la lectura 1; así también, los valores de probabilidad de los eventos imposibles y seguros.

Planteamos ahora una regla para calcular la probabilidad del evento "A o B", regla que nos permitirá calcular la probabilidad de ocurrencia del evento A, del evento B, o de ambos (A y B).

Recordemos que, en términos de conjuntos, el conjunto "A o B" es la unión de los mismos; esto significa que un evento cualquiera del conjunto unión puede ser de A o de B, o de la intersección entre ambos.

Por lo tanto, las probabilidades se ven aumentadas, ya que nos dan varias posibilidades para que el evento se dé.

Entonces daremos la regla de la adición, pero antes debes preguntarte si los eventos son mutuamente excluyentes o no. Se puede observar que la regla de la adición adopta dos formas distintas.

Aclaración importante: Las probabilidades pueden expresarse como fracción reducida o como número decimal. Por otra parte, es importante que las probabilidades expresadas en decimales tengan cuatro cifras decimales, redondeada la última al valor más próximo. Esto hay que tenerlo en cuenta para la expresión de los resultados, principalmente al resolver las actividades.

Regla de la adición para calcular probabilidades según el tipo de eventos

Para eventos mutuamente excluyentes

Ejemplo 1: en un curso de estadística de 100 alumnos:

1. Evento A: 20 alumnos obtienen una nota menor a 4.
2. Evento B: 50 alumnos obtienen una nota entre 4 y 7 (incluidos).
3. Evento C: 30 alumnos obtienen una nota mayor a 7.

Antes de comenzar definamos los eventos:

A={el alumno que haya obtenido una nota menor a 4}

B={el alumno que haya obtenido una nota entre 4 y 7}

C={el alumno que haya obtenido una nota mayor a 7}

Si elegimos al azar un alumno de los 100, se determinan las siguientes probabilidades:

1) Que el alumno haya obtenido una nota mayor a 7.
   Respuesta: $P(C) = \frac{30}{100} = 0{,}3$ evento simple
2) Que el alumno haya obtenido una nota entre 4 y 7.
   Respuesta: $P(B) = \frac{50}{100} = 0{,}5$ evento simple
3) Que el alumno haya obtenido una nota menor a 4 o mayor a 7.

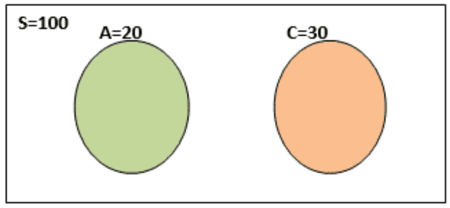
Respuesta: la probabilidad que se solicita es la probabilidad de un evento compuesto. A este evento lo podemos descomponer en dos eventos unidos por la disyunción “o”. En este caso se nos pregunta por la probabilidad del evento compuesto. Esto es lo primero que tienes que observar, pues si fuera una “y”, no se puede aplicar la regla de la adición. Luego, fíjate si los eventos son mutuamente excluyentes o no, pues la regla de la adición se aplica **de distinta manera** cuando los eventos no son mutuamente excluyentes. Para este caso, los eventos son mutuamente excluyentes:

Respuesta: $P(AoC) = P(AUC) = P(A) + P(C) = \frac{20}{100} + \frac{30}{100} = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Conclusión: La probabilidad de que elegido un alumno al azar, este haya tenido una nota menor a 4 o mayor a 7 es de 0,5; un 50 % de posibilidades.

Construyamos los diagramas de Venn para este caso:

Figura 1: Diagrama de Venn para el ejemplo 1

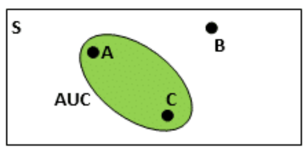


Fuente: elaboración propia

Descripción de la figura 1: representamos el ejemplo 1 a través de un diagrama de Venn. En realidad, solo representamos dos conjuntos que son los que se piden en el ítem 3). Todo lo que está en el Universo (rectángulo) y que no está en A, ni en C, es el conjunto B, que es lo que le falta al conjunto AUB para llegar al número de alumnos del conjunto Universal. Recuerda, esto es solo una representación; también podríamos haber dibujado 3 conjuntos y que en el Universal no queden elementos.

Algunos autores representan los eventos con un punto dentro de un rectángulo que representa el espacio muestral.

Figura 2: Diagrama que representan los eventos del ejemplo 1



Fuente: elaboración propia

Descripción de la figura 2: la figura es otra representación gráfica del espacio muestral y los eventos referidos al ejemplo 1.

En general, la probabilidad de ocurrencia del evento A o B, cuando son mutuamente excluyentes, se puede expresar con la siguiente regla, conocida como regla de la adición:

P (AUB = P(A) + P(B)

Cuando los eventos son mutuamente excluyentes.

Para eventos no mutuamente excluyentes

Ejemplo 2: En un shopping, un cierto día asisten 1500 personas. Se registraron 650 menores de 18 años (evento A). Además, de las personas que asistieron ese día, 500 ingresaron a algún comercio a consultar o comprar (evento I). Y por último, se registraron 85 menores de 18 años que ingresaron a algún comercio (evento A∩I).

Si elegimos al azar una persona de las que asistieron ese día al shopping, se determinan las probabilidades de los siguientes eventos:

1. Que sea menor de 18 años.

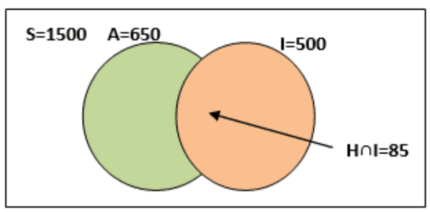
2. Que haya ingresado a algún comercio.
3. Que sea menor y haya ingresado a algún comercio.
4. Que sea menor o que haya ingresado a algún comercio.

Respuestas:

1) $P(A) = \frac{650}{1500} = 0{,}4333$ evento simple.
2) $P(I) = \frac{500}{1500} = 0{,}3333$ evento simple.
3) $P(A \cap I) = \frac{85}{1500} = 0{,}0567$ evento compuesto.

Para responder la pregunta 4) primero analizaremos el diagrama de Venn que se corresponde con este problema:

Figura 3: Diagrama de Venn para el ejemplo 2



Fuente: elaboración propia

Descripción de la figura 3: representamos el ejemplo 2 a través de un diagrama de Venn. En realidad, solo representamos dos conjuntos que son los que nos interesan en el problema. Todo lo que está en el Universo (rectángulo) y que no está en A ni en I es el complemento de AUB, es decir, (AUB)´, que es lo que le falta a AUB para completar el universal: personal mayores de 18 años y personas que no entran a ningún comercio. Ese caso se analizará más adelante en las actividades.

Como podrás ver, los eventos A e I no son mutuamente excluyentes. Si aplicáramos la regla de la adición, como vimos para el ejemplo 1, estaríamos contando dos veces a las personas que están en la intersección. Esto es porque de los 650 menores de 18 años, 85 entraron a algún comercio; y, análogamente, de los 650 que ingresaron a un comercio, 85 son menores de 18 años. Por lo tanto tenemos que restar a la fórmula una vez la intersección para que nos dé toda la parte sombreada:

4) $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) = \frac{650}{1500} + \frac{500}{1500} - \frac{85}{1500} = \frac{1065}{1500} = 0{,}71$

Aclaración: aquí conviene hacer las operaciones que indican los numeradores y luego simplificar o directamente dividir y, en caso de ser necesario, redondear el resultado. Así se trabajará con mayor precisión que redondeando primero y operando después.

Conclusión: la probabilidad de que, elegida una persona al azar, esta haya sido un menor de 18 años o haya ingresado a algún comercio o ambas cosas es de 0,71; un 71 % de posibilidades.

En general, la probabilidad de ocurrencia del evento "A o B", cuando no son mutuamente excluyentes, se puede expresar con la siguiente regla conocida como regla de la adición:

P (AUB = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Cuando los eventos no son mutuamente excluyentes.

Para eventos colectivamente exhaustivos

Como ya vimos en la lectura 1, los eventos colectivamente exhaustivos son aquellos que, colectivamente recorren todas las posibilidades, es decir, tiene que ocurrir alguno de los eventos. Por tanto, se tendrá en cuenta que la unión de todos ellos será el espacio muestral completo. Así, A y B son colectivamente exhaustivos.

P (AUB) = 1

Ejemplo 3: Considere la probabilidad de seleccionar un empleado de su empresa cuyo sueldo es menor a $40.000 o su sueldo está entre $40.000 y $60.000 (incluidos) o que su sueldo sea mayor a $60.000. La cantidad total de empleados es de 2500, y además:

- 500 cobran menos de $40.000 (evento P).
- 1200 cobran entre $40.000 y $60.000, incluidos los extremos (evento Q).
- 800 cobran más de $60.000 (evento R).

Lo que pide el problema es:

$$P(P \cup Q \cup R) = P(P) + P(Q) + P(R) = \frac{500}{2500} + \frac{1200}{2500} + \frac{800}{2500} = \frac{2500}{2500} = 1$$

Se puede observar que los eventos son mutuamente excluyentes por lo tanto no hay intersección entre los mismos, y además la totalidad de las probabilidades que se pueden dar son iguales a 1.

Es obvio que si pretendo que, elegido un empleado al azar, me dé lo mismo que esté en alguna de las categoría de sueldos enunciadas; la posibilidad acierto es del 100 %.

Observación: es evidente que en el caso de los eventos mutuamente excluyentes, como ya vimos en los axiomas de la lectura 1, la intersección es vacía y por lo tanto su probabilidad es de 0. De forma general, puede darse la regla de la probabilidad de la siguiente manera:

P (AUB = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Y si los eventos son mutuamente excluyentes, como el caso de , entonces se quita el último miembro a la expresión y queda:

P (AUB = P(A) + P(B)

Expresión que estudiamos recientemente para este tipo de eventos.

Ya podemos comenzar a resolver el caso para las becas de la Fundación Antares.

En los 3 primero puntos no tendremos problemas porque son probabilidades de eventos simples. La única dificultad será saber interpretar los datos del problema.

Tampoco tendremos problemas con la pregunta 6, pues se trata de la probabilidad entre eventos complementarios que ya estudiamos en la lectura 1.

Se nos pide la probabilidad de que el alumno seleccionado al azar:

1) Sea de pregrado y grado:
   Primero tenemos que calcular el universo de alumnos: nivel 1 + nivel 2 =1.939.419 + 160.672=2.100.091 $P(G) = \frac{1.939.419}{2.100.091} = 0,9235$
2) Sea estudiante de posgrado:

$$P(S) = \frac{160.672}{2.100.091} = 0,0765$$

Sea un estudiante de cualquier nivel de una universidad privada; pero como no tenemos la cantidad de estudiantes de cualquier nivel que se forman en universidades privadas, tenemos que calcular los estudiantes que se forman en instituciones privadas, en pregrado y grado: 419.622:

$$P(P) = \frac{419.622 + (cantdeestdeposgradoenunivpriv.}{2.100.091}$$

Tenemos como dato que los estudiantes de posgrado que estudian en la universidad pública es el 76,27 % de 160.672 = 122545.

Entonces: 160.672 – 122545 = 38127.

Sustituimos en P(P)

$$P(P) = \frac{419.622 + 38.127}{2.100.091} = \frac{457.749}{2.100.091} = 0,218$$

3) un estudiante de una universidad privada o que sea estudiante de pregrado y grado.

En este caso, la probabilidad que se pide es compuesta, ya que se encuentra unida por “o” y son eventos que no son mutuamente excluyentes.

La regla de la adición que se aplica es la siguiente:

P (PUG) = P(P) + P(G) - P(P∩G) (1)

La probabilidad de que el estudiante sea de una universidad privada ya está calculada en el ítem 3) y es de 0,218.

La probabilidad de que el estudiante sea de pregrado y grado fue calculado en el ítem 1) y es de 0,9235.

La probabilidad de ya se dan en parte en los datos del problema: 4**19.622 estudiantes se forman en instituciones privadas en pregrado y grado**, pero tenemos que terminar de calcular la probabilidad dividiendo por el n. º total de estudiantes:

$$P(P \cap G) = \frac{419.622}{2.100.091} = 0{,}1998$$

Nota: No siempre va a resultar así; más adelante estudiaremos cómo calcular si no lo tenemos como dato.

Sustituyendo en (1)

P (PUG) = 0,218 + 0,9235 - 0,1998 = 0,9417

Aún no podemos resolverlo, ya que se trata de una probabilidad conjunta.

4) No sea un estudiante de posgrado.

Ya estudiamos en la lectura 1 que uno de los axiomas de la probabilidad es que la suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es 1. P(S) fue calculado en el ítem 2, entonces:

P (S´) = 1- P(S) = 1 - 0,0765 = 0,9235

Más adelante se completará lo que falta del caso.

...se calcula con la fórmula P(AUB)=P(A)+P(B)

La probabilidad de que, al tirar un moneda, salga cara o

La probabilidad de que una persona tenga menos de 20 o

cruz...

tenga más de 40 años.

La probabilidad de que al sacar una carta al azar, sea un 4 oro o un 5 espadas.

La probabilidad de que al sacar una carta al azar, esta sea un 5 o un 8.

...se calcula con la fórmula P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)

La probabilidad de que al sacar una carta al azar, esta sea un oro o un dos...

Elegir en una convención una persona que es contador o que es fanático del Club

...se calcula con la fórmula P(AUBUC)=P(A)+P(B)+P(C)

Que en una empresa, una persona sea, por su sueldo, de categoría A, B o C...

La probabilidad de que salga en una lotería el 3, el 15 o el 20...

Otros tipos de eventos

Eventos independientes y eventos dependientes

Antes de abordar la regla de la multiplicación necesitamos estudiar algunos conceptos previos, como por ejemplo los **eventos independientes y dependientes**. En este apartado solo los definiremos y más adelante calcularemos las probabilidades.

EVENTOS INDEPENDIENTES	EVENTOS DEPENDIENTES

Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no afecta la ocurrencia del otro.

Ejemplo 4: Si tiramos dos monedas, lo que salga en una moneda no afecta el resultado de la otra. Lo mismo ocurre si tiramos dos o más dados de forma simultánea. Más adelante estudiaremos los experimentos de pasos múltiples, en los que también podremos analizar la independencia estadística. Por ejemplo, si tiramos una moneda dos veces consecutivas, lo que salga la primera vez no afecta el resultado de la segunda tirada.

EVENTOS INDEPENDIENTES	EVENTOS DEPENDIENTES

Dos eventos son dependientes cuando la ocurrencia de uno de ellos afecta la ocurrencia del otro.

Ejemplo 5: Si de un mazo de cartas españolas extraemos las cartas de espada, el evento de que salga un 6 va a estar condicionado al primer evento, “que no sea espada”, por lo que los dos eventos se llaman dependientes.
También podemos ver este tipo de eventos en el caso que tengamos un número en una rifa. A medida que van saliendo los números y no sea el premiado, tenemos más oportunidades de ganar nosotros. En este caso, los eventos “que salga mi número en la primera extracción” y “que salga mi número en la segunda extracción” son eventos dependientes, especialmente si se trata de pocos números en juego.

LECCIÓN 3 de 5

Probabilidad condicional, conjunta y marginal

Hasta aquí, en las lecturas 1 y 2, hemos estudiado los tipos de eventos, también algunos valores de probabilidades de eventos como la regla de la adición para eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes, entre otros.

Ahora estudiaremos otros tipos de probabilidades que involucran eventos independientes y dependientes.

Las probabilidades que estudiaremos a continuación se estudian bajo condiciones de **dependencia estadística** y de **independencia estadística**. Iremos aclarando estos conceptos a medida que se vayan presentando en los ejemplos y en el desarrollo de las siguientes probabilidades:

Probabilidad condicional

Dependencia estadística
Nos podríamos preguntar cómo encontrar ciertas probabilidades si se tuviera conocimiento previo de alguna característica, es decir, si se tiene información previa sobre los eventos involucrados. Tal es el caso de los eventos dependientes.
Cuando se está calculando la probabilidad de un evento A en particular y si se tiene información sobre la ocurrencia de otro evento B, esta probabilidad se conoce como **probabilidad condicional** y se denota de la siguiente manera:

P(A/B) (la probabilidad de ocurrencia de A, si se sabe que ocurre B)

Ejemplo 6:
¿Cuál es la probabilidad que, habiendo obtenido en el lanzamiento de un dado un número mayor o igual a 4, este sea par? Podemos suponer este caso como que tú tiras un dado y tu compañero no lo ve, pero tú le dices: "Salió un número mayor o igual a 4" y luego le preguntas: "¿Qué probabilidad hay de que haya salido un número par?"

Definamos, por ejemplo, los siguientes eventos para resolver el problema:
Evento P: que sea par.
Evento M: que sea un número mayor o igual a 4.
Estos eventos son claramente dependientes.
Si la cara obtenida contiene un número mayor o igual a 4, tendrá que ser el 4, el 5 o el 6. Solo tres casos posibles y de los cuales solo dos de ellos cumplen con la condición de ser par; por lo tanto, si nos ajustamos a la definición clásica de probabilidades, el cálculo sería: (Ver Figura 1)

Fórmula de la probabilidad condicional
Por otra parte, la condición que deben cumplir los casos favorables es la de ser mayor o igual a 4 y además deben cumplir con la condición de ser par, es decir, deben satisfacer simultáneamente M y P. Mientras que los casos posibles estarán dados por los eventos simples que constituyen M: ser mayores o iguales a 4. En referencia al problema del ejemplo 6 que venimos tratando, se puede observar que el resultado es el mismo si se calcula de la siguiente manera: (Ver Figura 2)

En general, la probabilidad de ocurrencia de A según B está dada por el cociente entre la probabilidad de ocurrencia conjunta de A y B sobre la probabilidad de B: (Ver Figura 3)

Nótese que a $P(A \cap B)$ se la llama **probabilidad conjunta.**

Análogamente sería: (Ver Figura 4)

Muchas veces, como hicimos con el caso del ejemplo 6, no es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad condicional, pero en otros problemas es imprescindible que la sepas aplicar.

Hemos estudiado con este ejemplo la probabilidad condicional bajo dependencia estadística. El estudio de la probabilidad condicional bajo independencia estadística será tratado por razones didácticas en el apartado de probabilidad conjunta.

Figura 1

$$P\left(\frac{P}{M}\right) = \frac{nºde\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ posibles} = \frac{2}{3}$$

Figura 2

$$P\left(\frac{P}{M}\right) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)} = \frac{2}{3} \cong 0{,}6667$$

Figura 3

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Figura 4

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidad conjunta

La probabilidad conjunta es aquella referida a un evento compuesto y en la que está involucrada sólo la intersección, es decir, la conjunción "y".
La expresión de la probabilidad condicional nos permite obtener la fórmula de la probabilidad conjunta entre dos eventos.

Obtención de la fórmula de la probabilidad conjunta cuando los eventos son dependientes

La fórmula de la probabilidad condicional es: (Ver Figura 5)

¿Cuáles son las fórmulas de la probabilidad conjunta para eventos dependientes?

Es importante notar que P (A∩B) = P (B∩A)

Si volvemos al ejemplo 6 tenemos que: (Ver Figura 6).

La probabilidad de que al tirar un dado este sea par y mayor o igual a 4 es igual a la probabilidad de que salga un número mayor o igual a 4, dividida la probabilidad de que sea par, y sabiendo que es mayor o igual a 4. Esta última probabilidad ya la habíamos calculado y era de 2/3. Entonces (Ver Figura 7)
Esto es fácilmente comprobable sin fórmulas, ya que en un dado los números pares mayores o iguales que 4 son dos (casos favorables) y los casos probables son 6; por lo tanto, las probabilidades de que en un tiro que salgan las dos condiciones son de 2/6 = 1/3.

Obtención de la fórmula de la probabilidad conjunta cuando los eventos son independientes. Independencia estadística

Para explicar este concepto comenzaremos presentando un ejemplo que nos ayudará a introducir ideas:

- **Ejemplo 7**: Supongamos que se tira una moneda dos veces consecutivas y definiremos los eventos A y B de la siguiente forma:

  A={en la primera tirada sale cara}
  B={en la segunda tirada sale cara}

  Por intuición sabemos que los eventos A y B no están relacionados. Por ejemplo, saber que B ocurre no proporciona información acerca de la ocurrencia de A. Dicho de otra forma, el resultado que se obtenga en la segunda tirada no depende de lo que haya salido en la primera.
  De hecho, el siguiente cálculo lo pone de manifiesto: tomando como nuestro espacio muestral los cuatro resultados igualmente posibles (por cada opción que sale en la primer tirada tengo dos opciones en la segunda tirada), esto se escribe: S={cc, cx, xc, xx}.

  Encontraremos entonces P(A)=2/4=1/2 y P(B)=2/4=1/2.

  Además, la probabilidad de que salga cara en la primera tirada y cara en la segunda tirada va a reducirse porque estamos exigiendo que también salga cara en la segunda. La probabilidad del evento compuesto conjunto en este caso será P(A∩B) = 1/4, pues si observamos el espacio muestral S, que se da en el evento cc (cara en la primera y cara en la segunda) es de 1/4.
  Por lo tanto, (Ver Figura 8) no es un resultado lógico, pues no son eventos dependientes sino independientes. Se puede observar que si no estuviera la condición "sabiendo que B" , no se sabría que P(A)=1/2 que es lo correcto.

Este resultado revela una información importante: el conocimiento previo de alguna condición no influye en la probabilidad buscada.

A esta característica se la denomina **independencia estadística** y se la puede definir de la siguiente manera:

Dos eventos, A y B, son estadísticamente independientes si y solo si P(A/B)=P(A)

En otras palabras, la probabilidad condicional bajo condiciones de independencia estadística es igual a la probabilidad del evento que se quiere determinar sin tener en cuenta la condición.

- Resumiendo, en el ejemplo 7:

P(cara en la 2ªtirada/cara en la 1ª tirada)=P(en la 2ª tirada)= 1/2

- Retomando la fórmula de probabilidad condicional, pero sustituyendo P(A/B) por su igual P(A) y luego despejando la probabilidad conjunta, la formula queda de la siguiente manera: (Ver Figura 9)

¿Cuál es la fórmula para calcular la probabilidad conjunta para eventos independientes?
Cuando dos eventos son independientes, la ocurrencia simultánea de ambos es igual al producto de sus probabilidades.

Figura 5

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Despejando P(A∩B) es:

$$P(A \cap B) = P(B).P\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$P(B \cap A) = P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$$

Figura 6

$P\left(\frac{P}{M}\right) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)}$ y despejando:

$$P(M \cap P) = P(M).P\left(\frac{P}{M}\right)$$

Figura 7

$$P(P \cap M) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Figura 8

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

Figura 9

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Probabilidad marginal

La probabilidad marginal es la probabilidad de eventos simples ya definidos en la lectura 1.

Estas probabilidades tienen distinto tratamiento si se trata de probabilidades bajo independencia estadística o bajo dependencia estadística.

Trataremos ahora el caso de independencia estadística, dejando para la próxima lectura las probabilidades marginales bajo dependencia estadística.

Ejemplo 8: Si lanzamos una moneda que esté perfectamente balanceada, la probabilidad de obtener cara es del 0,5. Esto es cierto para cualquier lanzamiento, no importa cuántas veces se lance la moneda ni cuáles fueron los resultados anteriores. Cada nuevo lanzamiento es único e independiente de los resultados que se hubieren obtenido en lanzamientos anteriores.
La fórmula P(C)=1/2 se trata de la probabilidad de un evento simple.

Regla multiplicativa

La regla de la multiplicación

Como acabamos de estudiar en el apartado anterior, las probabilidades conjuntas se resuelven multiplicando.

- [ ] Dijimos que una probabilidad condicional la podíamos manipular algebraicamente y obteníamos la fórmula siguiente:

$$P(A \cap B) = P(B).P\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$P(B \cap A) = P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$$

Apliquemos esta regla en el caso del ejemplo 6, en el que los eventos son dependientes: ¿cuál es la probabilidad que habiendo obtenido en el lanzamiento de un dado un número mayor o igual a 4, este sea par? Ahora la podemos dar vuelta y preguntar por el evento conjunto: ¿cuál es la probabilidad de que tirado un dado una vez se obtenga en el lanzamiento un número mayor o igual a 4 (evento M) y este sea par (evento P)?

$$P(M \cap P) = P(M).P\left(\frac{P}{M}\right) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333$$

Existe un 33,33 % de posibilidades que se den las dos condiciones: que sea par y que mayor o igual a 4.

- [ ] Por otra parte, del concepto de independencia estadística obtuvimos la siguiente fórmula:

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

Apliquemos esta regla en el caso del ejemplo 7, en el que los eventos son independientes: supongamos que se tira una moneda dos veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos veces salga cara?

$$P(CyC) = P(C).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Existe un 25 % de posibilidades de que salga cara en la primera y cara en la segunda tirada.

P (C y C) significa la probabilidad de que salga cara en la primera tirada y cara en la segunda, y también puede escribirse P(C∩C).

Retomemos el caso de la Fundación Antares, el cual ya estamos en condiciones de completar.

Resolvamos el ítem 5) y 7) que habían quedado pendientes.

4) Sea estudiante de posgrado en una universidad pública.

Se pide una probabilidad conjunta aunque no veamos explícitamente la conjunción "y":

P (S∩U)

Recordemos el ítem 3) en el que tenemos como dato que los estudiantes de posgrado que estudian en la universidad pública es el 76,27 % de 160.672 = 122.545.

Por lo tanto, la fórmula sería:

$$P(S \cap U) = \frac{122.545}{2.100.091} = 0{,}0584$$

Ten en cuenta que el dato del 76,27 % es sobre el total de estudiantes de posgrado y lo que nos da ahora el resultado es sobre el total de estudiantes. Fíjate: los estudiantes que estudian posgrado en la universidad pública representan un 76,27 % del total de alumnos que estudian posgrados, pero es el 5,84 % del total de estudiantes universitarios de todo el país.

Hagamos otro análisis, ¿estará bien calculada la probabilidad conjunta de S y U?, y ¿son los eventos S y U independientes o dependientes? Averigüémoslo:

Apliquemos la regla de la multiplicación para eventos independientes:

$$P(S \cap U) = P(S).P(U) = \frac{160.672}{2.100.091} \times \frac{1.519.797 + 122.545}{2.100.091} = \frac{160.672}{2.100.091} \times \frac{1.642.342}{2.100.091}$$
$$= 0{,}0765 \times 0{,}782 = 0{,}0598$$

Nos da distinto. Aunque aproximemos, las probabilidades nos dan distintas con distintos razonamientos. Si esto ocurre, los eventos no son independientes y estamos aplicando la regla de la multiplicación de forma equivocada.

Ahora supongamos que son dependientes:

$$P(S \cap U) = P(S).P\left(\frac{U}{S}\right) = \frac{160.672}{2.100.091} \times \frac{122.545}{160.672} = 0{,}0584$$

Entonces, los eventos son dependientes y la probabilidad solicitada es de 0,0584 tal como obtuvimos con los cálculos que hicimos la primera vez.

Otra forma de probarlo es con el postulado de la independencia estadística:

Dos eventos A y B son estadísticamente independientes si y solo si P(A/B)=P(A)

Si esto es cierto, entonces los eventos son independientes. Te lo dejo para que tú lo verifiques y analices para ver si llegas a la misma conclusión.

Ahora calculemos el ítem 7):

7) Sea un estudiante de pregrado y grado, sabiendo que es estudiante de una universidad pública.

$$P\left(\frac{G}{U}\right) = \frac{P(G \cap U)}{P(U)} = \frac{\frac{1.519.797}{2.100.091}}{\frac{1.642.342}{2.100.091}} = \frac{1.519.797}{1.642.342} = 0{,}9254$$

La segunda parte del caso ya está resuelta en el ítem 5.

En un bolillero hay 10 bolillas: 4 blancas y 6 rojas. Si se extraen dos bolillas consecutivamente, ¿cuál es la probabilidad de que primero salga una roja y después una blanca si el experimento se realiza sin reposición?

- **P(R∩B)=4/15**
- **P(R∩B)=6/10**
- **P(R∩B)=4/10**
- **P(R∩B)=1/5**

SUBMIT

LECCIÓN 5 de 5

Referencias

Levin, R. y Rubin, D. (2012). Estadística para Administración y Economía (7.ma. ed.). México: Pearson.