Lógica para la Computación

III) Lógicas Modales y Multimodales

Alfredo Burrieza Muñiz

Inmaculada Fortes Rúiz

Inmaculada Pérez de Guzmán Molina
Agustín Valverde Ramos

I

No te olvides de que existen otros mundos
en los que también se puede cantar

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Recordando la Lógica clásica

Vamos a recordar lo que decíamos en el capítulo 2 de nuestro estudio de la lógica clásica proposicional [1]:

> *Si pretendemos mecanizar tareas* inteligentes*, tareas en las que interviene de forma destacable la capacidad deductiva del hombre, se requiere:*
>
> - *Tener conocimiento sobre el dominio.*
> - *Razonar con tal conocimiento.*
> - *Conocer cómo dirigir o guiar el razonamiento*
>
> *y para todo ello es preciso definir y analizar, con claridad y precisión, los procesos inferenciales que el hombre ejercita de modo natural. Éste es el objetivo de la lógica.*

Son muchas las definiciones posibles para la lógica. Quizás la más estándar es la siguiente:

> ... la lógica es la ciencia que tiene como objetivo el análisis de los métodos de razonamiento ...

Desde su papel crucial en computación, encontramos nuevas definiciones que reflejan nuestro interés. Recogemos la de Johan van Benthem (junto con otros autores) en su texto *Logic in Action* [2] :

> *La lógica es una teoría de tareas claves de información, ejecutadas por actores cognitivos que razonan, aprenden, actúan e interactúan con otros de modo inteligente*

Entre las diversas lógicas, y como referencia y fundamento de todas las demás, se encuentra la `lógica clásica` o *estándar*, la más ampliamente estudiada desde que George Boole expusiera sus *Leyes de la Verdad* en 1854 y a la que en síntesis podemos describir como sigue:

- considera únicamente frases declarativas del lenguaje natural, las cuales consideramos que solo admiten dos posibles valores de verdad: o son verdaderas o son falsas (es decir, la lógica clásica es *bivaluada*).

---

[1] En el libro Lógica Clásica Proposicional I

[2] van Benthem, J; van Ditmarsch, H; van Eijck, J and Jaspars, J.", *Logic in Action.* Springer-Verlag. 1980.

- considera que podemos pronunciarnos acerca del valor de verdad de una frase declarativa de un modo absoluto, sin recurrir a consideraciones de *contexto* alguno. Nos pronunciamos sobre su valor de verdad sin tener en cuenta en qué momento se declaran, ni en qué lugar, ni cuál es nuestro grado de conocimiento previo, ... (es decir, la lógica clásica es *asertórica*).
- contempla la verdad composicionalmente, es decir, el valor de verdad de una frase compuesta queda totalmente determinado por la verdad de las frases simples componentes (es decir, la lógica clásica es *veritativo-funcional o extensional*).
- no modifica las conclusiones a la vista de nueva información (es decir, la lógica clásica es es *monótona*).
- el estudio sobre las construcciones se realiza en dos niveles de análisis estructural, según se contemplen únicamente construcciones declarativas simples y compuestas o bien, en cada afirmación simple se distinga además qué se declara y de qué o quién se declara. Estos dos niveles dan lugar a la *lógica clásica proposicional* y a la *lógica clásica de predicados de primer orden*, respectivamente.

1.2. Necesidad de lógicas no clásicas

El término `lógica no clásica`, es un término genérico usado para referir a cualquier lógica diferente a la lógica proposicional y a la lógica de predicados y que poseen las características que acabamos de señalar. Por lo tanto, será no clásica cualquier lógica que, al analizar la corrección de los razonamientos, permita considerar contextos (temporales, de creencia, de necesidad y posibilidad, ...); no se limite a contemplar frases declarativas; no se limite a contemplar como valores de verdad únicamente el 0 y el 1; no sea veritativo-funcional; no sea monótona; ...

La lógica clásica es insustituible como herramienta para razonar sobre aspectos del mundo real que son contemplados como “atemporales”, “objetivos”, “estables”, ...

Sin embargo, cuando se desea representar el conocimiento y diseñar modos de razonamiento sobre aspectos dinámicos del mundo real, y ésto es lo habitual en las aplicaciones en las que las Ciencias de la Computación está interesada, hay ocasiones en las que *“la verdad de un enunciado no depende solo de la relación entre las palabras del lenguaje y los objetos del mundo, sino también del estado del mundo y el conocimiento de este estado”*. Es decir, con frecuencia se requiere que, para pronunciarnos sobre la verdad de los enunciados, sea preciso evaluar algunas de las circunstancias que los rodean y, en consecuencia, necesitemos herramientas para representar y razonar tomando en consideración estas circunstancias.

Aunque las lógicas no clásicas han adquirido mayor protagonismo por su papel en las Ciencias de la Computación, surgieron antes de la existencia de los ordenadores. Los filósofos griegos ya cuestionaban el etiquetar los enunciados de *verdaderos* sin contemplar la `verdad por necesidad` o la `verdad por posibilidad` o sin contemplar que existen enunciados cuya verdad es temporal, o que el razonamiento humano es, por esencia, *“revisable”* ... Smullyan afirma sobre la necesidad de las lógicas no clásicas:

> *... no es que la lógica clásica no dé respuestas incorrectas a ciertas cuestiones, sino que ciertas cuestiones no pueden ser expresadas en ella fácilmente, de modo natural o en un modo computacionalmente eficiente ...*

En efecto, el lenguaje de la lógica clásica proposicional, $\mathcal{L}_{prop}$ es muy poco expresivo, aunque como hemos visto tiene buenas propiedades computacionales. Por su parte, la expresividad de la lógica clásica de primer orden, $\mathcal{L}_1$, es mucho mayor. De hecho, casi todo lo que podemos desear expresar respecto a los razonamientos de un sistema inteligente, puede ser expresado en $\mathcal{L}_1$. Como contrapartida, sus propiedades computacionales no son tan buenas como desearíamos. Así que la situación nos conduce a preguntarnos: `para razonar con enunciados cuya verdad es temporal o tan solo` *`posible`*`, o con enunciados para los que su valor de verdad se modifica ante nuevas informaciones, ...¿es posible que no sea necesario todo el poder expresivo de` $\mathcal{L}_1$? Contestar, entre otras, a esta pregunta nos conduce a considerar las lógicas no clásicas.

Hoy día es una cuestión abierta conseguir una rigurosa clasificación de las lógicas no clásicas. Siguiendo a Susan Haak, [3] la mayoría de las lógicas no clásicas, son:

- `Extensiones de la lógica clásica:` Pueden hablar y analizar razonamientos que la lógica clásica no puede, extendiendo el vocabulario básico de ésta, es decir, complementan a la lógica clásica tanto en el lenguaje como en los teoremas o fórmulas válidas.

  Ejemplos de este tipo de lógicas son aquellas en las que, para el análisis de los razonamientos, se consideran "contextos". Estas lógicas están englobadas bajo la denominación de lógicas `modales` y son las que estudiamos en este texto. Entre ellas se encuentra las lógicas de conocimiento (lógicas `epistémicas`), de creencia (lógicas `doxásticas`), `temporales`, etc.

- `Desviaciones o rivales de la lógica clásica:` Utilizan el mismo vocabulario que la lógica clásica, pero no mantienen algunas de las leyes de ésta. Es decir, no refrendan como tales algunos de sus teoremas o fórmulas válidas. Por ejemplo, en general, esta lógicas no contemplan como ley la *ley del tercero excluido* ($A \vee \neg A$ siempre es verdadera).

  Un ejemplo significativo de lógica rival es el de la lógica *Intuicionista* o *Constructivista*, Esta lógica fue introducida por Brouwer. Para un intuicionista, A es verdadero solo si es posible dar "constructivamente" una realización de A o probar "constructivamente" la existencia de A. Otras lógicas de este tipo son las lógicas *difusas*, *abductivas*, *paraconsistentes*, *probabilísticas*, *la lógica cuántica*, etc.

1.3. La lógica modal

La `lógica modal` que vamos a estudiar, surgió para tratar las nociones de necesidad y posibilidad. La primera referencia a ella es el *Organon* de Aristóteles y los primeros trabajos modernos sobre dicha lógica se deben a Lewis en 1918, con el objetivo de clarificar la relación entre implicación material y relación de consecuencia. En síntesis, podemos afirmar que la lógica modal es una extensión de la lógica clásica para incorporar los llamados modos o contextos `aléticos` de necesidad y posibilidad. ¿Qué decir sobre estos modos? Para responder a esta pregunta podemos recordar la concepción sobre ellos establecida por Leibnitz:

Entre los enunciados verdaderos, podemos distinguir entre

- los que son verdaderos, pero podrían ser falsos, y

---

[3] Susan Haak. *Philosofhy of Logics.* Cambridge University Press, 1978.

- los que tienen que ser verdaderos, es decir, enunciados que no podrían ser falsos.

Análoga distinción podemos hacer entre los enunciados falsos, es decir, distinguir entre aquellos que son falsos (pero podrían ser verdaderos) y aquellos que tienen que ser falsos (que no podrían ser verdaderos).

Podemos denominar enunciado `necesariamente verdadero` [4] a todo enunciado que tiene que ser verdadero; enunciado `imposible` a todo enunciado que tiene que ser falso, y enunciado `contingente` a todo enunciado que no es necesario ni imposible. Cualquier enunciado que no es imposible se denomina `posible` o posiblemente verdadero.

Cuando decimos que "un enunciado es necesario", queremos significar que dicho enunciado no podría dejar de ser verdadero en cualquier otro estado de cosas o situación concebible y diferente a aquella en la que se formula. Los enunciados *"no existen cuadrados redondos"* y *"o es domingo o no es domingo"* los entendemos como verdades necesarias, mientras que el enunciado *"si Elena estuviera aquí, estaría de acuerdo conmigo"*, la contemplamos como una verdad que no es necesaria pero sí posible.

Las cuatro nociones - *necesidad, imposibilidad, contingencia y posibilidad* - se dice que son nociones modales o aléticas. Es evidente que dichas nociones están íntimamente relacionadas entre sí, en realidad podríamos expresar tres cualesquiera de ellas en función de la cuarta. Así, en el sentido que detallaremos en nuestro desarrollo formal,

> `decir que un enunciado es necesariamente verdadero equivale a decir que no es posible que el enunciado sea falso;`
>
> `decir que un enunciado es posible equivale a decir que no es una verdad necesaria que sea falso.`

En la actualidad, como ya hemos indicado y tendremos ocasión de mostrar, la lógica modal engloba una larga familia de sistemas lógicos que se asocian a diferentes lecturas de las modalidades. Estas lecturas incluyen, además de las de necesidad/ posibilidad, las lecturas:

> *después de toda acción/después de alguna acción,*
>
> *saber que/no saber que no,*
>
> *creer que/no creer que no,*
>
> *siempre en el futuro/alguna vez en el futuro, etc.*

Cada una de ellas requiere un tratamiento diferente. Así, por ejemplo, conocimiento y creencia difieren en que es aceptable contemplar que *"lo que se conoce ha de ser cierto"*; pero no es aceptable contemplar que *"lo que se cree ha de ser cierto"*. Por su parte, si contemplamos la lectura de necesidad en el tiempo, tendremos que tener en cuenta que el tiempo puede ser considerado como discreto o continuo, como lineal o ramificado, ... Tendremos ocasión de estudiar cada una de ellas y analizar su interés desde el punto de vista computacional.

---

[4] A los que en adelante, por brevedad llamaremos `necesarios`.

Capítulo 2

Lenguaje y Semántica de la Lógica Modal Proposicional

Para quien haya leído los dos primeros libros en los que estudiamos la lógica clásica [1], ya conoce de antemano cual será el guión que seguiremos en nuestro estudio: Una vez motivada la necesidad de la lógica modal, describiremos su lenguaje, después su semántica, su teoría de la demostración y, finalmente, nuestro objetivo esencial: la posibilidad o no de automatizar el razonamiento.

En este capítulo presentamos:

- *el lenguaje de la lógica modal proposicional y*
- *la semántica de la lógica modal proposicional.*

2.1. Lenguaje LM de la Lógica de Modal Proposicional

Recordemos que un lenguaje lógico viene dado mediante un alfabeto de símbolos y la definición de un conjunto de cadenas de símbolos de dicho alfabeto llamadas *fórmulas bien formadas* (abreviadamente, fbfs) o *palabras* del lenguaje.

Como hemos comentado en el capítulo anterior, la lógica modal proposicional es una extensión de la lógica clásica proposicional. Concretamente, la lógica modal *añade* a la expresividad de la lógica clásica proposicional la posibilidad de:

- dado un enunciado cualquiera, $\mathcal{E}$, formar el nuevo enunciado: *"es necesario que $\mathcal{E}$"*. Por lo tanto, necesitamos una conectiva monaria, a la que denotaremos por $\Box$, para expresar la "necesidad" de un enunciado: $\Box A$ se leerá *"es necesario que A"*.
- dado un enunciado cualquiera $\mathcal{E}$, formar el nuevo enunciado: *"es posible que $\mathcal{E}$"*. Por lo tanto, necesitamos una conectiva monaria, a la que denotaremos por $\Diamond$, para expresar la "posibilidad" de un enunciado: $\Diamond A$ se leerá *"es posible que A"*.

---

[1] Lógica para la Computación I. Lógica Clásica Proposicional y Lógica para la Computación II. Lógica Clásica de Primer Orden

Las conectivas $\Box$ ("es necesario que") y $\Diamond$ ("es posible que") se denominan `conectivas modales`.

Las conectivas $\Box$ y $\Diamond$ admiten (como hemos indicamos) diferentes lecturas a la que nos iremos refiriendo a lo largo del texto. La siguiente tabla muestra algunas de las lecturas más usuales, indicando el adjetivo utilizado para cada lectura:

$\Box A$	$\Diamond A$	Lectura
Es necesario que A	Es posible que A	Alética
Es obligatorio que A	Es permitido que A	Deóntica
Será cierto siempre que A	Será cierto alguna vez que A	Temporal
El agente i sabe que A	El agente i no sabe que no A	Epistémica
El agente i cree que A	El agente i no se cree que no A	Doxástica
Toda ejecución del programa finaliza afirmando que A	Hay una ejecución del programa que finaliza afirmando que A	Dinámica

Definición 2.1 [**Lenguaje**] *El lenguaje LM de la lógica modal proposicional se define como sigue:*

Alfabeto:

El alfabeto, $\mathfrak{a}_{LM}$, de LM se obtiene añadiendo los símbolos de conectivas modales $\Box$ y $\Diamond$ al alfabeto, $\mathfrak{a}_{prop}$ de un lenguaje proposicional de la lógica clásica. Es decir,

$$\mathfrak{a}_{LM} = \mathfrak{a}_{prop} \cup \{\Box, \Diamond\}$$

Por lo tanto, consta de los siguientes símbolos:

- *Un conjunto numerable de* `símbolos o variables proposicionales`

$$\mathcal{V}_{prop} = \{p, q, r, \ldots, p_1, q_2, r_3, \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots\}$$

- *Los símbolos de constante, $\top$ ("verdad") y $\bot$ ("falsedad").*
- *Los símbolos de conectivas booleanas $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.*
- *Las conectivas modales $\Box$ (de necesidad) y $\Diamond$ (de posibilidad)*
- *Los símbolos de puntuación "(" y ")".*

Fórmulas bien formadas:

El lenguaje LM es la clausura inductiva del conjunto $\mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\}$ para los constructores $C_\neg, C_\wedge, C_\vee, C_\rightarrow$, $C_\leftrightarrow$, $C_\Box$ y $C_\Diamond$ definidos como sigue:

Para dos cadenas cualesquiera, $X, Y \in \mathfrak{a}_{LM}$*,*

$$\begin{array}{rcl} C_{\neg}(X) & = & \neg X \\ C_{\wedge}(X,Y) & = & (X \wedge Y) \\ C_{\vee}(X,Y) & = & (X \vee Y) \\ C_{\rightarrow}(X,Y) & = & (X \rightarrow Y) \\ C_{\leftrightarrow}(X,Y) & = & (X \leftrightarrow Y) \\ C_{\Box}(X) & = & \Box X \\ C_{\Diamond}(X) & = & \Diamond X \end{array}$$

Usualmente, la definición de las fbfs de LM se presenta en términos menos formales como sigue:

El conjunto de las fbfs es el conjunto de cadenas sobre el alfabeto dado, determinado por las siguientes reglas:

1. los símbolos proposicionales (elementos de $\mathcal{V}_{prop}$) son fbfs, llamadas *atómicas.*

2. $\top$ y $\bot$ son fbfs.

3. si A es una fbf entonces $\neg A$, $\Box A$ y $\Diamond A$ son fbfs.

4. si A y B son fbfs entonces $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$ son fbfs.

5. solo las cadenas obtenidas aplicando las reglas anteriores son fbfs.

Como en la lógica clásica, en adelante, omitiremos los paréntesis inicial y final en las fbfs.

Veamos unos cuantos ejemplos de la capacidad del lenguaje LM para simbolizar frases del lenguaje coloquial:

Ejemplo 2.1

- La frase *"es posible que esté lloviendo en Málaga, pero no es necesario"*, se puede expresar en LM mediante la fbf: $\Diamond p \wedge \neg\Box p$, donde p simboliza "está lloviendo en Málaga".

- La frase *"si está lloviendo en Málaga, es posible que esté cerrado el bar Pacífico"*, se puede expresar en LM mediante la fbf: $p \rightarrow \Diamond\neg q$, donde p simboliza "está lloviendo en Málaga" y q simboliza "el bar Pacífico está abierto".

- La frase *"Es posible que esté lloviendo en Málaga y posiblemente es necesario que sea así*, se puede expresar en LM mediante la fbf: $\Diamond p \wedge \Diamond\Box p$, donde p simboliza "está lloviendo en Málaga"

👀 Por el *Principio de Inducción Estructural* [2], para demostrar que todas las fbfs tienen la propiedad $\mathbb{P}$, basta demostrar que:

1. Caso base: toda fbf $A \in \mathcal{V}_{prop} \cup \{\top, \bot\}$ tiene la propiedad $\mathbb{P}$.
2. Pasos inductivos:
   a) si las fbfs A y B tienen la propiedad $\mathbb{P}$, entonces $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ y $A \leftrightarrow B$ tienen la propiedad $\mathbb{P}$.
   b) si la fbf A tiene la propiedad $\mathbb{P}$, entonces $\neg A$, $\Box A$ y $\Diamond A$ tienen la propiedad $\mathbb{P}$.

Definición 2.2

1. *La función* `grado`*,* $gr : LM \to \mathbb{N}$*, que asigna a cada fbf, A, el número total de conectivas (booleanas y modales) que intervienen en A,* $gr(A)$*, se define recursivamente como sigue:*

$$\begin{array}{lcl} gr(A) & = & 0 \quad si\ A \in \mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\} \\ gr(\sharp A) & = & 1 + gr(A) \quad si\ \sharp \in \{\neg, \Box, \Diamond\} \\ gr(A * B) & = & 1 + gr(A) + gr(B) \quad si\ * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \end{array}$$

2. *La función* `subfórmula`*,* $Sub : LM \to 2^{LM}$*, que asigna a cada fbf, A, el conjunto* $Sub(A)$ *de todas sus subfórmulas, se define recursivamente como sigue:*

$$\begin{array}{lcl} Sub(A) & = & \{A\} \quad si\ A \in \mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\} \\ Sub(\sharp A) & = & Sub(A) \cup \{\sharp A\} \quad si\ \sharp \in \{\neg, \Box, \Diamond\} \\ Sub(A * B) & = & Sub(A) \cup Sub(B) \cup \{A * B\} \quad si\ * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \end{array}$$

Grado modal

Además de la definición de *grado* de una fbf, podemos asociar a cada fbf un concepto de grado más específico:

Definición 2.3 *La función* `grado modal o profundidad modal`*,* $gr_m : LM \to \mathbb{N}$*, que asigna a cada fbf, A, el número máximo de conectivas modales iteradas que ocurren en A, se define recursivamente como sigue:*

$$\begin{array}{lcl} gr_m(A) & = & 0 \quad si\ A \in \mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\} \\ gr_m(\neg A) & = & gr_m(A) \\ gr_m(A * B) & = & max\,\{gr_m(A), gr_m(B)\} \quad si\ * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \\ gr_m(\Box\, A) & = & 1 + gr_m(A) \\ gr_m(\Diamond\, A) & = & 1 + gr_m(A) \end{array}$$

Ejemplo 2.2 Dada la fbf $A = \Box(p \vee \neg q) \to \Diamond\Box r,$ tenemos que $gr(A) = 6$, $gr_m(A) = 2$ y

$$Sub(A) = \{\Box(p \vee \neg q) \to \Diamond\Box r,\ \Box(p \vee \neg q),\ \Diamond\Box r,\ p \vee \neg q,\ \Box r,\ \neg q,\ p,\ q,\ r\}$$

---

[2] Remitimos al lector al libro de Lógica Clásica Proposicional, para recordar este principio.

Dada la fbf $B = \Diamond\Box(p \vee \Diamond r) \to \Box t$, tenemos que $gr(B) = 6$, $gr_m(B) = 3$ y

$$Sub(B) = \{\Diamond\Box(p \vee \Diamond r) \to \Box t,\ \Diamond\Box(p \vee \Diamond r), \Box t,\ \Box(p \vee \Diamond r),\ p \vee \Diamond r,\ \Diamond r,\ p,\ t, r\}$$

Inducción sobre el grado

Además de la inducción sobre la estructura de la fbf, podemos realizar la inducción sobre el *grado*:

Todas las fbfs de LM tienen la propiedad $\mathbb{P}$ con tal de que se cumpla:

1. Toda fbf $A \in \mathcal{V}_{prop} \cup \{\top, \bot\}$ tiene la propiedad $\mathbb{P}$.
2. Si todas las fbfs de grado menor que A tienen la propiedad $\mathbb{P}$, entonces $\neg A$, $\Box A$ y $\Diamond A$ tiene la propiedad $\mathbb{P}$.
3. Si todas las fbfs de grado menor que $A * B$, con $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, tienen la propiedad $\mathbb{P}$, entonces $A * B$ tiene la propiedad $\mathbb{P}$.

Finalmente, como en lógica clásica, introducimos el concepto de "sustitución uniforme".

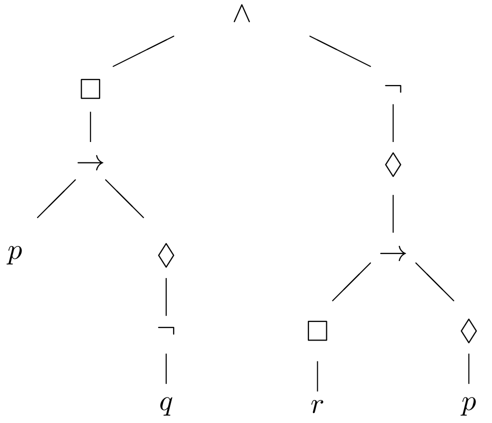
Definición 2.4 *$A[B]$ denota que B es una subfórmula de A y $A[B/C]$ denota que en A se ha sustituido al menos una de las ocurrencias de B por C. Si se sustituyen por C todas las ocurrencias de B, el proceso se denomina de* `‘‘sustitución uniforme’’`*.*

Árbol Sintáctico

Definición 2.5 *El* `árbol sintáctico` *para una fbf, A, de LM, denotado T_A, es el $\mathfrak{a}_{LM}$-árbol (donde $\mathfrak{a}_{LM}$ es el alfabeto para LM) definido recursivamente como sigue:*

1. *T_A es A, si $A \in \mathcal{V}_{prop} \cup \{\top, \bot\}$*
2. *T_{*A} (donde $* \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$) es* $\begin{array}{c} * \\ | \\ T_A \end{array}$
3. *T_{A*B} (donde $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$) es* $\begin{array}{ccc} & * & \\ \diagup & & \diagdown \\ T_A & & T_B \end{array}$

Ejemplo 2.3 El árbol sintáctico de la fbf $\Box(p \to \Diamond\neg q) \wedge \neg\Diamond(\Box r \to \Diamond p)$ es



En términos de árboles sintácticos podemos definir:

- B `es una subfórmula de` A `si y solo si` T_B `es un subárbol de` T_A.
- `El grado de una fbf es el número de nodos no hoja de su árbol sintáctico.`
- `El grado modal de una fbf es el número máximo de conectivas modales existentes en una rama del árbol sintáctico.`

2.2. Semántica para LM

Como ya sabemos, definir la semántica requiere definir una terna $(S, D, \mathcal{I})$, donde S es el conjunto de valores semánticos, $D \subseteq S$ es el conjunto de valores semánticos destacados e $\mathcal{I}$ es el conjunto de interpretaciones.

La lógica modal proposicional, es bivaluada, es decir $S = \{0, 1\}$ y el conjunto de valores semánticos destacados es $D = \{1\}$. La mayor dificultad se encuentra en definir el conjunto de interpretaciones, $\mathcal{I}$, es decir, en establecer cuándo una fbf es verdadera o falsa. Esta dificultad explica que la tarea de dotar de una semántica apropiada a la lógica modal fuera una tarea abierta durante años y de que existan diversas alternativas para su descripción. De entre estas alternativas, estudiaremos `la semántica relacional`.

Toda semántica para la lógica modal ha de clarificar el significado deseado para las fbfs $\Box A$ y $\Diamond A$ de modo que tal significado refleje que:

- si en nuestra circunstancia actual afirmamos que $\Box A$ es verdadera, queremos decir que A es verdadera "en cualquier estado concebible de cosas ", "en cualquier situación alternativa a la actual", "en cualquier mundo accesible";
- si en nuestra circunstancia actual afirmamos que $\Diamond A$ es verdadera, queremos decir que A es verdadera "en algún estado concebible de cosas", "en alguna situación alternativa a la actual", "en algún mundo accesible";

pudiendo admitir que ese estado/situación alternativa/mundo accesible sea justamente el propio estado/situación/mundo accesible en el que afirmamos (es decir, que sea el actual).

Los estados, situaciones, alternativas o mundos posibles,[3] se representan habitualmente mediante puntos o mediante círculos.

¿Cómo formalizar que dado dos estados, s y s', el estado s' es "accesible" desde s, o bien que dado dos mundos, w y w', el mundo w' es "accesible desde w? Para ello, disponemos de una herramienta natural, disponemos del concepto de "relación binaria". Por esta razón se conoce a esta semántica como `semántica relacional`.

La semántica relacional para las modalidades aléticas la introdujo Carnap, y para las modalidades temporales Prior y, tal como la formulamos en la actualidad, la introdujeron (independientemente uno de otro) Kripke, Hintikka y Kanger, aunque el tratamiento de Kripke es el más general en computación, y por ello usaremos su terminología. [4]

---

[3] Habitualmente, en el ámbito filosófico se les denomina "mundos posibles" y en el ámbito computacional se les denomina *estados*.

[4] Podríamos decir que la semántica relacional se desarrolla, básicamente, entre 1963 y 1977.

En esta semántica, una fórmula se evalúa en un "universo" constituido por diversos "mundos posibles" (que podemos contemplar como estados de la mente, estados de un sistema, situaciones, instantes temporales, etc) conectados entre sí por una relación binaria llamada relación de "accesibilidad". Esta relación pretende plasmar que es factible pasar de un mundo a otro (de un estado a otro, de una situación a otra, de un instante a otro, etc). El valor de verdad o falsedad de cada variable proposicional en LM se vincula a un "mundo", es decir, una variable proposicional p puede ser verdadera o falsa en cada mundo.

2.2.1. Semántica de Kripke

Definición 2.6 *Una* `estructura de Kripke o estructura relacional` *es un par* $E = (W, R)$ *donde* $W = \{w_i \mid i \in \Lambda\}$ *es un conjunto no vacío, denominado* `conjunto de mundos posibles`*, y* R *una relación binaria en* W *(es decir,* $R \subseteq W \times W$*), llamada* `relación de accesibilidad`*.* [5] *Si* $w_1 R w_2$*, se dice que* w_2 *es accesible desde* w_1*.*

En adelante denotaremos por $R(w)$ el conjunto de los mundos accesibles desde w, es decir, $R(w) = \{w' \in W \mid wRw'\}$.

👀 Advirtamos que en la definición exigimos que $W \neq \varnothing$, pero admitimos que $R = \varnothing$, es decir, admitimos que ninguno de los mundos se relacione con ninguno.

Podemos pensar que W es un conjunto de estados, R una relación de transición y h una función que establece qué propiedades son ciertas en cada estado.

Definición 2.7 *Un* `modelo de Kripke o modelo relacional para LM` *(en adelante, simplemente "modelo para LM")* [6] *es una terna* $M = (W, R, h)$ *donde* (W, R) *es una estructura de Kripke y* h *una función, llamada* `función de evaluación`*,* $h : LM \longrightarrow 2^W$ *(que asocia a cada fbf de LM el conjunto de mundos donde es verdadera) y que satisface las condiciones siguientes:*

1. $h(\top) = W$ *y* $h(\bot) = \varnothing$.
2. $h(\neg A) = h(A)^c$, *donde* $h(A)^c$ *es el complementario de* $h(A)$*, es decir,* $h(A)^c = W \setminus h(A)$. [7]
3. $h(A \wedge B) = h(A) \cap h(B)$.
4. $h(A \vee B) = h(A) \cup h(B)$.
5. $h(A \rightarrow B) = h(A)^c \cup h(B)$. [8]
6. $h(A \leftrightarrow B) = h(A \rightarrow B) \cap h(B \rightarrow A)$.
7. $h(\Box A) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\}$. [9]
8. $h(\Diamond A) = \{w \in W \mid R(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$. [10]

---

[5] Es decir, una estructura de Kripke es un grafo dirigido.

[6] A veces se utilizan los `modelos ‘‘punteados’’`, que son modelos en los que existe un mundo "destacado", $w_0 \in W$, que puede ser contemplado como el mundo "real" o de partida.

[7] es decir, $\neg A$ es verdadera en los mundos en los que A es falsa

[8] es decir, $A \rightarrow B$ es verdadera en los mundos en los que o bien A es falsa o bien B es verdadera.

[9] Es decir, $\Box A$ es verdadera en w si A es verdadera en "todos" los mundos accesibles desde w.

[10] es decir, $\Diamond A$ es verdadera en w si A es verdadera en "algún" mundo accesible desde w.

Denotaremos por $\mathcal{M}_{LM}$ *el conjunto de modelos de Kripke para LM.*

Dado un modelo $M = (W, R, h)$, es frecuente referirse a dicho modelo como un modelo sobre la estructura (W, R).

◉◉ Conviene destacar que:

- en la lógica clásica proposicional el término "modelo" de una fbf se utiliza para denominar a una interpretación que satisface a tal fbf;
- en lógica modal, se denomina "modelo" a la terna, (W, R, h), sin hacer referencia a la satisfacibilidad o no de las fbfs.

◉◉ Puesto que LM ha sido definido como la clausura inductiva del conjunto $\mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\}$ para los constructores $C_\neg, C_\wedge, C_\vee, C_\rightarrow$, $C_\leftrightarrow$, $C_\Box$ y $C_\Diamond$, se tiene que la función de evaluación, h, queda determinada cuando conocemos sus imágenes sobre $\mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\}$. En definitiva, nos basta conocer, para cada variable proposicional, p, el conjunto de mundos en los que p es verdadera.

Vemos pues que, dado un modelo $M = (W, R, h)$, cada fbf es verdadera o falsa en cada mundo. Sin embargo, esta asignación de los valores de verdad 1 y 0 queda oculta en la definición dada. Podemos dar una definición equivalente alternativa en la que hacer explícitos los valores de verdad:

Definición 2.8 *Un* modelo de Kripke para LM *es una terna* $M = (W, R, V)$ *donde* (W, R) *es una estructura de Kripke y* V *una* función de evaluación, $V : LM \times W \longrightarrow \{0, 1\}$, *que asocia a cada par* $(A, w) \in LM \times W$ *el valor* 0 *o* 1 *y que satisface, para todo* $w \in W$*:*

1. $V(\top, w) = 1$ *y* $h(\bot, w) = 0$.
2. $V(\neg A, w) = 1$ *si y solo si* $V(A, w) = 1$.
3. $V(A \wedge B, w) = min\,\{V(A, w), V(B, w)\}$.
4. $V(A \vee B, w) = max\,\{V(A, w), V(B, w)\}$.
5. $V(A \rightarrow B) = max\,\{1 - V(A, w), V(B, w)\}$.
6. $V(A \leftrightarrow B, w) = 1$ *si y solo si* $V(A, w) = V(B, w)$.
7. $V(\Box A, w) = 1$ *si y solo si* $V(A, w') = 1$ *para todo* $w' \in R(w)$.
8. $V(\Diamond A, w) = 1$ *si y solo si* $V(A, w') = 1$ *para algún* $w' \in R(w)$.

Claramente, h y V se determinan mutuamente de forma única, ya que dada h podemos definir

$$V(A, w) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad w \in h(A)$$

Inversamente, dada V, podemos definir

$$h(A) = \{w \in W \mid V(A, w) = 1\}$$

👀 Destaquemos que, de nuevo, nos basta conocer el valor de V para cada variable proposicional, es decir, la restricción de V a $(\mathcal{V}_{prop} \cup \{\top, \bot\}) \times W$.

2.2.2. Clasificación semántica de las fbfs: Satisfacibilidad, Verdad y Validez

Podemos ya dar los conceptos semánticos básicos en LM.

Definición 2.9 *Una fbf $A \in LM$ se dice* `modelizable` *o* `satisfacible`*, si existe un modelo $M = (W, R, h)$ y un mundo $w \in W$ tal que $w \in h(A)$. En este caso, se dice que el modelo M es un modelo de A o (si se desea concretar más) que M satisface A en el mundo w o que A* `es verdadera en el mundo` w `de` *M y se denota por $M, w \models A$. Denotaremos por $\mathcal{M}od(A)$ el conjunto de modelos de A, es decir:*

$$\mathcal{M}od(A) = \{M = (W, R, h) \mid M, w \models A \text{ para algún } w \in W\}$$

La definición inductiva de `fbf verdadera en un mundo de un modelo` *es la siguiente: Dado un modelo $M = (W, R, h)$ y un mundo $w \in W$:*

- $M, w \models \top \quad y \quad M, w \not\models \bot$
- $M, w \models p$ *si y solo si* $w \in h(p)$ *para* $p \in \mathcal{V}_{prop}$,
- $M, w \models \neg A$ *si y solo si* $w \notin h(A)$,
- $M, w \models A \wedge B$ *si y solo si* $M, w \models A$ *y* $M, w \models B$
- $M, w \models A \vee B$ *si y solo si* $M, w \models A$ *o* $M, w \models B$
- $M, w \models A \to B$ *si y solo si* $M, w \not\models A$ *o* $M, w \models B$
- $M, w \models A \leftrightarrow B$ *si y solo si* $[[\, M, w \models A$ *si y solo si* $M, w \models B\,]]$
- $M, w \models \Box A$ *si y solo si* $M, w' \models A$ *para todo* $w' \in R(w)$
- $M, w \models \Diamond A$ *si y solo si* $M, w' \models A$ *para algún* $w' \in R(w)$

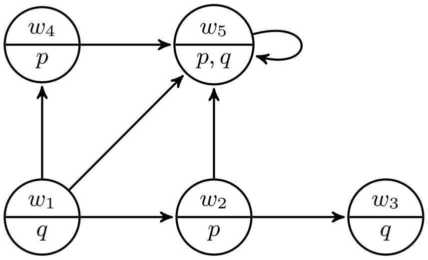
👀 La definición dada pone de relieve que, a diferencia de las conectivas de la lógica clásica, `las conectivas modales` $\Box$ `y` $\Diamond$ `no son veritativo-funcionales`, es decir, dado un modelo, $M = (W, R, h)$, si sabemos que una fbf A es verdadera en un mundo $w \in W$ (es decir, si $w \in h(A)$), nada podemos concluir sobre la verdad o falsedad de $\Box A$ o de $\Diamond A$ en w.

Como es habitual, representaremos los modelos gráficamente mediante diagramas. Cada mundo será representado por un punto o un círculo. Si $w' \in R(w)$, dirigiremos una flecha de w a w' y junto a cada punto (o en el interior del círculo) escribiremos las variables proposicionales que son verdaderas en el mundo que tal punto o círculo representa. En general,

- entenderemos que las variables proposicionales no escritas junto a un mundo son falsas en dicho mundo (aunque en ocasiones, para mayor claridad, también detallaremos que en un mundo se satisface $\neg p$, con $p \in \mathcal{V}_{prop}$).

- en los gráficos, anotaremos únicamente las variables proposicionales que intervienen en la fbf cuya semántica deseamos analizar, entendiendo que el valor de la función de evaluación sobre el resto de las variables proposicionales, no es significativa.

Ejemplo 2.4 Consideremos el modelo



En la tabla que sigue indicamos con 1 los mundos en el que las fbfs de la columna izquierda son verdaderas y con 0 en los que son falsas:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
$\Box p$	1	0	1	1	1
$\Diamond p$	1	1	0	1	1
$\Box q$	0	1	1	1	1
$\Diamond q$	1	1	0	1	1
$\Box\Diamond p$	1	0	1	1	1
$\Box\Diamond q$	1	0	1	1	1
$\Diamond\Box p$	1	1	0	1	1
$\Diamond\Box q$	1	1	0	1	1
$\Box\Box p$	0	1	1	1	1
$\Box\Box q$	1	1	1	1	1
$\Diamond\Diamond p$	1	1	0	1	1
$\Diamond\Diamond q$	1	1	0	1	1
$p \to \Diamond q$	1	1	1	1	1
$\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$	0	1	0	0	0
$\Diamond q \wedge \Diamond\neg q$	1	0	0	0	0
$\Box(p \wedge \neg p)$	0	0	1	0	0

◔◔ En el ejemplo anterior, quizás sorprendan algunas de las afirmaciones recogidas en la tabla. Por ejemplo:

- $\Box p$ y $\Box\Box p$ son verdaderas en w_3. Veamos que la afirmación es correcta. Si denotamos por R la relación de accesibilidad representada en el diagrama, vemos que $R(w_3) = \varnothing$. A un mundo tal se le llama `mundo letal` o `final`. Recordando que, dada una fbf A se tiene que $\Box A$ es verdadera en aquellos mundos, w, en los que $R(w) \subseteq h(A)$, en el caso de w_3 tenemos que $R(w_3) = \varnothing \subseteq h(A)$ y en consecuencia, $w_3 \in h(\Box A)$ para toda fbf A. Es decir:

  > En un mundo final son verdaderas todas las fbfs de la forma $\Box A$ y son falsas todas las fbfs de la forma $\Diamond A$.

  En consecuencia, si w es un mundo final en un modelo M, se tiene que $M, w \models \Box\bot$ y $M, w \not\models \Diamond\top$.

- $\Box p$ es verdadera en w_3, pero $\Diamond p$ es falsa en w_3. También esta afirmación es correcta. En efecto, ya hemos razonado que $\Box p$ es verdadera en w_3, sin embargo, $\Diamond p$ no lo es ya que, puesto que w_3 es un mundo letal, desde él no podemos acceder a ningún otro mundo en el que p sea verdadera y, en consecuencia, p no es posible en w_3.

Definición 2.10

- *Una fbf $A \in LM$ se dice que es* `válida`*, denotado $\models A$, si para todo modelo, $M = (W, R, h)$, se tiene que $h(A) = W$, es decir, $M, w \models A$ para todo $w \in W$ o, equivalentemente, $\mathcal{M}od(A) = \mathcal{M}_{LM}$.*
- *Una fbf $A \in LM$ se dice* `insatisfacible` *si para todo modelo, $M = (W, R, h)$, se tiene que $h(A) = \varnothing$, es decir, $M, w \not\models A$ para todo $w \in W$ o, equivalentemente, $\mathcal{M}od(A) = \varnothing$.*

👀 Una fbf válida se satisface en todo mundo de todo conjunto de mundos posibles, W, sea cual sea la relación de accesibilidad, R, y sea cual sea función de evaluación, h.

Obviamente, se tiene el resultado siguiente.

Proposición 2.1

1. *$\top$ es válida y $\bot$ es insatisfacible.*
2. *A es válida si y solo si $\neg A$ es insatisfacible.*
3. *Si A es válida, entonces también lo es $\Box A$.*
4. *$\models A \to B$ si y solo si para todo modelo $M = (W, R, h)$ se tiene que $h(A) \subseteq h(B)$.*
5. *Si $A \in LM$ es una fbf en la que no ocurren ni $\Box$ ni $\Diamond$, entonces A es una fbf válida de la lógica clásica proposicional (tautología) si y solo si A es válida en LM.* [11]

DEMOSTRACIÓN: Demostramos los ítemes 3, 4 y 5. Los restantes son triviales y su demostración se deja al lector.

3) Si $\models A$, para todo modelo $M = (W, R, h)$ se tiene que $h(A) = W$. Por lo tanto, $R(w) \subseteq h(A)$ para todo $w \in W$. En consecuencia, $h(\Box A) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\} = W$, es decir, $\models \Box A$.

4) $\models A \to B$ si y solo si $h(A \to B) = h(\neg A \vee B) = h(A)^c \cup h(B) = W$ si y solo si $h(A) \subseteq h(B)$.

5) Sea $A \in LM$ una fbf en la que no intervienen $\Box$, ni $\Diamond$ (es decir, $A \in L_{prop} \subset LM$). Sea $M = (W, R, h)$ un modelo y $w \in W$. Definimos una interpretación booleana, $I_w : L_{prop} \longrightarrow \{0, 1\}$, del modo siguiente

$$I_w(p) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad w \in h(p)$$

Por inducción sobre el grado, es inmediato comprobar que, para toda fbf $B \in L_{prop}$, se tiene que

$$I_w(B) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad w \in h(B)$$

---

[11] Recordemos que $L_{prop} \subset LM$.

Puesto que por hipótesis A es una tautología, se tiene que $I_w(A) = 1$ y, en consecuencia $w \in h(A)$ y, puesto que w es un mundo cualquiera, hemos probado que $h(A) = W$, es decir, A es una fbf válida de LM.

Inversamente, sea A válida en LM y sea $I : \mathcal{V}_{prop} \longrightarrow \{0, 1\}$ una interpretación booleana cualquiera. Tenemos que probar que $I(A) = 1$. Consideremos el modelo $M_w = (\{w\}, \varnothing, h)$ donde, para toda $p \in \mathcal{V}_{prop}$, $h(p) = \{w\}$ si y solo si $I(p) = 1$. Por inducción sobre el grado, es inmediato comprobar que, para toda fbf $B \in L_{prop}$, se tiene que $h(B) = \{w\}$ si y solo si $I(B) = 1$. Puesto que A es válida en LM, se tiene que $h(A) = \{w\}$ y, por lo tanto, $I(A) = 1$ y la demostración está terminada. ■

Nuestro siguiente paso será extender la noción de satisfacibilidad a un conjunto de fbfs.

Definición 2.11 *Sea* $\Omega \subseteq LM$*.*

- Ω *se dice* `consistente, modelizable` *o* `satisfacible`*, si existe algún modelo,* $M = (W, R, h)$ *y un mundo* $w \in W$*, tal que*

  $$M, w \models A_i \text{ para toda } A_i \in \Omega$$

  En este caso, se dice que M *satisface* Ω *en* w*, o bien que* M `es un modelo para` Ω*.*

- Ω *se dice* `finitamente satisfacible` *si todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles.*

- Ω *se dice* `insatisfacible` *si no es satisfacible, es decir, si no existe ningún modelo en el que exista un mundo tal que todas las fbfs de* Ω *son simultáneamente verdaderas en él.*

En particular, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *Si* $\Omega = \{A_1, \cdots, A_n\}$:

$$\mathcal{M}od(\Omega) = \bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{M}od(A_i)$$

es decir, Ω *es satisfacible si y solo si* $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ *es satisfacible.*

2.2.3. Relación de igualdad semántica: Equivalencia Lógica

Deseamos establecer una relación entre las fbfs de LM que transmiten la misma información, que `son iguales semánticamente`, es decir, deseamos definir la noción de equivalencia semántica.

Definición 2.12 *Dos fbfs* A *y* B *de LM se dice que son* `semánticamente equivalentes`*, denotado* $A \equiv B$*, si para todo modelo,* $M = (W, R, h)$ *se tiene que* $h(A) = h(B)$*.*

Es inmediato que $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre LM. Como consecuencia inmediata de la definición, tenemos que:

Lema 2.1

1. *Dadas dos fbfs válidas arbitrarias, A y B, se tiene que $A \equiv B$.*
2. *Dadas dos fbfs insatisfacibles arbitrarias, A y B, se tiene que $A \equiv B$.*

Como en la lógica clásica disponemos del siguiente resultado:

Teorema 2.1 (de equivalencia) *Si B es subfórmula de A y $B \equiv C$, entonces $A \equiv A[B/C]$.*

El paso de A a $A[B/C]$ es lo que se llama una `transformación de equivalencia`. Si en lugar de cambiar todas las ocurrencias de B por C intercambiamos solo algunas, el teorema 2.1 sigue siendo cierto.

La traducción del teorema de equivalencia en términos de árboles sintácticos, es directa:

> `Si` B `es una subfórmula de` A `y` $B \equiv C$`, entonces al sustituir en` T_A `los subárboles` T_B `por el árbol` T_C`, se obtiene el árbol sintáctico de una fbf equivalente a` A.

Conectivas primitivas y conectivas definidas

En la lógica clásica comprobamos que los conjuntos de conectivas $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ son conjuntos completos de conectivas, es decir, nos bastan para expresar cualquier otra conectiva booleana que nos sea reclamada por las aplicaciones. Por lo tanto, $\{\neg, \wedge, \Box, \Diamond\}$, $\{\neg, \vee, \Box, \Diamond\}$, $\{\neg, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ son conjuntos completos de conectivas para LM. ¿Podemos reducir aún más estos conjuntos? ¿Necesitamos tanto $\Box$ como $\Diamond$? La respuesta, como nos detalla la proposición siguiente, es que NO necesitamos las dos, que basta una de ellas:

Proposición 2.3 *En LM se tiene que, para toda fbf, A:*

$$\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A \quad y \quad \Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que probar que, para todo modelo, $M = (W, R, h)$, se tiene que

1. $h(\Box A) = h(\neg\Diamond\neg A)$, y
2. $h(\Diamond A) = h(\neg\Box\neg A)$

Demostramos el ítem 1, la demostración del ítem 2 es similar.

$$h(\Box A) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\} = \{w \in W \mid R(w) \cap h(A)^c = \varnothing\}\ ^{12} =$$
$$\{w \in W \mid R(w) \cap h(\neg A) = \varnothing\} = \{w \in W \mid R(w) \cap h(\neg A) \neq \varnothing\}^c =$$
$$h(\Diamond\neg A)^c = h(\neg\Diamond\neg A).$$

■

Como consecuencia de este resultado, podemos elegir como primitiva, indistintamente, $\Box$ o $\Diamond$ e introducir la otra como definida, tal como nos indica la proposición anterior.

---

[12] Donde hemos hecho uso de la propiedad elemental: Si X e Y son subconjunto de U, entonces

$$X \subseteq Y \quad \text{si y solo si} \quad X \cap Y^c = \varnothing$$

2.2.4. Leyes de la Lógica Modal Proposicional

Damos a continuación una lista de esquemas de equivalencias básicas. [13] Comenzamos con dos consecuencias inmediatas de las equivalencias $\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$ y $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$:

1. $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A \quad$ y $\quad \neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$.
2. ***Regla de intercambio***: Si λ representa una secuencia finita de $\Box$ y $\Diamond$ y si $\hat{\lambda}$ representa la secuencia obtenida a partir de λ por intercambio de $\Box$ y $\Diamond$, se tienen las leyes siguientes:

   2.1 $\lambda A \equiv \neg\hat{\lambda}\neg A$; y $\lambda\neg A \equiv \neg\hat{\lambda}A$

   2.2 $\neg\lambda A \equiv \hat{\lambda}\neg A$; y $\neg\lambda\neg A \equiv \hat{\lambda}A$

Ejemplos concretos de aplicación de dicha regla son:

$$\Box\Box\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond\Diamond A; \qquad \Diamond\Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box\Box A$$
$$\Box\Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond\Box A; \qquad \Diamond\Box\neg A \leftrightarrow \neg\Box\Diamond A$$

Ahora enumeramos las leyes que nos detallan la interacción entre las restantes conectivas:

Teorema 2.2 *En LM disponemos de las siguientes leyes:*

1. *Todas las leyes de la lógica clásica proposicional*
2. $\Box\top \equiv \top \quad$ *y* $\quad \Diamond\bot \equiv \bot$.
3. $\Box(A \wedge B) \equiv \Box A \wedge \Box B$
4. $\models (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$
5. $\Diamond(A \vee B) \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$
6. $\models \Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
7. $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ [14] *conocido como* **esquema** (K)
8. $\models \Box(A \leftrightarrow B) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$

DEMOSTRACIÓN: Demostramos los ítemes 3 y 7. El resto se deja como ejercicio al lector.

3) Veamos que $\Box(A \wedge B) \equiv (\Box A \wedge \Box B)$, es decir, para todo modelo $M = (W, R, h)$ se tiene que $h(\Box(A \wedge B)) = h(\Box A \wedge \Box B)$:

$$\begin{aligned} h(\Box(A \wedge B)) = {} & \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A \wedge B)\} = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A) \cap h(B)\} = \\ & \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A) \text{ y } R(w) \subseteq h(B)\} = \\ & \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\} \cap \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(B)\} = h(\Box A) \cap h(\Box B) = \\ & h(\Box A \wedge \Box B) \end{aligned}$$

---

[13] Recordemos que un esquema representa a un conjunto de fbfs que tienen todas la misma forma. Así, el esquema $\Box A \to A$ representa el conjunto de fbfs: $\{\Box A \to A \mid A \in LM\}$.

Entendemos que un esquema es válido si y solo si lo son todas sus instancias.

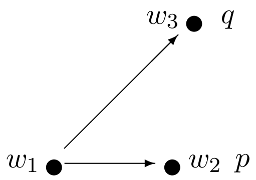
[14] O, equivalentemente, $\big(\Box A \wedge \Box(A \to B)\big) \to \Box B$.

7) Veamos que $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, es decir, para todo modelo $M = (W, R, h)$ se tiene que $h(\Box(A \to B)) \subseteq h(\Box A \to \Box B)$:

$$\begin{aligned}
h(\Box(A \to B)) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A \to B)\} = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)^c \cup h(B)\} \overset{(\dagger)}{\subseteq} \\
\{w \in W \mid R(w) \cap h(A)^c \neq \varnothing\} \cup \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(B)\} = \\
\{w \in W \mid R(w) \cap h(\neg A) \neq \varnothing\} \cup \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(B)\} = \\
h(\Diamond \neg A) \cup h(\Box B) = h(\neg \Box A \vee \Box B) = h(\Box A \to \Box B)
\end{aligned}$$

donde en (†) hemos hecho uso de la propiedad siguiente: Dados tres subconjuntos de un conjunto U: $X, Y, Z \subseteq U$: Si $X \subseteq Y^c \cup Z$ entonces, o bien $X \cap Y^c \neq \varnothing$ o bien $X \subseteq Z$. ■

Ejemplo 2.5 Veamos que $\not\models (\Box A \to \Box B) \to \Box(A \to B)$. Para ello, basta mostrar un modelo y un mundo en el cual la fbf no es verdadera:



En efecto, $w_1 \in h(\Box p \to \Box q)$, pero $w_1 \notin h(\Box(p \to q))$, ya que $w_2 \in R(w_1)$ y $w_2 \notin h(p \to q)$

2.2.4.1. Dualidad

Como acabamos de ver, $\Diamond$ y $\Box$ son conectivas duales, es decir, la relación entre ellas es análoga a la que existe entre los cuantificadores existencial ($\exists$) y universal ($\forall$) de la lógica clásica de predicados. En esta sección extendemos el concepto de dualidad visto en la lógica clásica.

Definición 2.13 *Sea A una fbf que solo contiene las conectivas $\neg, \wedge, \vee, \Box$ y $\Diamond$. La fbf* `dual` *de A se define recursivamente como sigue:*

$$\begin{aligned}
dual(p) &= p, \quad \textit{para toda } p \in \mathcal{V}_{prop} \\
dual(\top) &= \bot \\
dual(\bot) &= \top \\
dual(\neg A) &= \neg dual(A) \\
dual(A \wedge B) &= dual(A) \vee dual(B) \\
dual(A \vee B) &= dual(A) \wedge dual(B) \\
dual(\Box A) &= \Diamond\, dual(A) \\
dual(\Diamond A) &= \Box\, dual(A)
\end{aligned}$$

En definitiva: Si $A \in \{\top, \bot\}$ entonces la fbf `dual` *de A es $\neg A$. En caso contrario, la fórmula* `dual` *de A resulta de intercambiar en A todas las apariciones de $\wedge$ y $\vee$ e intercambiar todas las apariciones de $\Box$ y $\Diamond$.*

En particular, se tiene que el operador *dual* es idempotente, es decir, $dual(dual(A)) = A$ y satisface el siguiente resultado:

Teorema 2.3 *(Principio de dualidad) Sean A, B fbfs que solo contienen las conectivas $\neg, \wedge, \vee, \Box$ y $\Diamond$. Entonces:*

$$A \equiv B \quad \textit{si y solo si} \quad dual(A) \equiv dual(B)$$

El lector puede comprobar que el teorema anterior nos permite reducir a la mitad las leyes que acabamos de listar (la otra mitad se obtiene por dualidad).

Ejemplo 2.6 la fbf dual de $\Diamond(\neg p \wedge (\Box q \vee \neg\Diamond p))$ es $\Box(\neg p \vee (\Diamond q \wedge \neg\Box p))$. En efecto:

$$\begin{array}{lclc}
dual\big(\Diamond(\neg p \wedge (\Box q \vee \neg\Diamond p))\big) & = & \Box\, dual\big(\neg p \wedge (\Box q \vee \neg\Diamond p)\big) & = \\
\Box\big(dual(\neg p) \vee dual\big(\Box q \vee \neg\Diamond p\big)\big) & = & \Box(\neg dual(p) \vee (dual(\Box q) \wedge dual(\neg\Diamond p))) & = \\
\Box(\neg dual(p) \vee (\Diamond\, dual(q) \wedge \neg dual(\Diamond p))) & = & \Box(\neg dual(p) \vee (\Diamond\, dual(q) \wedge \neg\Box\, dual(p))) & = \\
\Box(\neg p \vee (\Diamond\, q \wedge \neg\Box p)) & & &
\end{array}$$

2.2.4.2. Forma Normal Negativa Modal

Hemos definido en LM la relación de equivalencia semántica, $\equiv$. Esto nos permite trabajar con el conjunto cociente $LM/_{\equiv}$. Cada fbf en LM pertenecerá a una y solo una clase de equivalencia.

Como siempre que trabajamos en un conjunto cociente, deseamos tener un `representante canónico` para cada clase de equivalencia, es decir, de un tipo de *fbf*, lo más simple posible, tal que cualquier fbf sea expresable (de forma semánticamente equivalente) por una de dicho tipo.

En la lógica clásica proposicional hemos introducido la forma normal negativa, la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva. En lógica modal no se dispone de una generalización de las formas normales conjuntivas y disyuntivas, entre otras razones, porque, como sabemos, $\Box(A \vee B) \not\equiv \Box A \vee \Box B$ y $\Diamond(A \wedge B) \not\equiv \Diamond A \wedge \Diamond B$ (volveremos más adelante sobre esta cuestión); pero sí podemos definir una forma normal negativa modal:

Definición 2.14 *Sea $A \in LM$. Decimos que A está en* `forma normal negativa modal` *(abreviadamente, que es una* `fnnm`*), si satisface las siguientes condiciones:*

- *En A no intervienen $\rightarrow$ ni $\leftrightarrow$.*
- *El ámbito de las negaciones en A se reduce a los símbolos proposicionales (en términos de su árbol sintáctico, en T_A los nodos $\neg$ tan solo ocurren como ascendientes directos de símbolos proposicionales).*
- *Cada subfórmula $\Box B$ es tal que B no es de la forma $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$, es decir, en T_A ningún nodo $\Box$ tiene a $\wedge$ como descendiente inmediato.*
- *Cada subfórmula $\Diamond B$ es tal que B no es de la forma $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$, es decir, en T_A ningún nodo $\Diamond$ tiene a $\vee$ como descendiente inmediato.*

Teorema 2.4 *Toda fbf, $A \in LM$ es equivalente a una fbf en forma normal negativa modal.*

DEMOSTRACIÓN: El proceso de conversión para obtener la forma normal negativa equivalente consiste en la aplicación de las siguientes leyes:

1. Con las equivalencias:

$$\begin{array}{rlrl} A \leftrightarrow B & \equiv (A \to B) \wedge (B \to A), & & \\ A \to B & \equiv \neg A \vee B, & \neg(A \to B) & \equiv A \wedge \neg B, \\ \neg(A \wedge B) & \equiv \neg A \vee \neg B, & \neg(A \vee B) & \equiv \neg A \wedge \neg B, \\ \neg\Box A & \equiv \Diamond\neg A, & \neg\Diamond A & \equiv \Box\neg A, \end{array}$$

   eliminamos $\leftrightarrow$ y $\to$ y trasladamos la negación hasta las variables proposicionales.

2. La equivalencia $\neg\neg A \equiv A$ simplifica las concatenaciones de negaciones y la asociatividad de $\wedge$ y $\vee$, permite agruparlas.

3. Las equivalencias $\Box(\bigwedge A_i) \equiv \bigwedge A_i$ y $\Diamond(\bigvee A_i) \equiv \bigvee A_i$ permite disminuir el ámbito de $\Box$ y $\Diamond$ respectivamente.

4. Finalmente, si es posible, aplicamos las siguientes equivalencias, para todo $A \in LM$:

$$\begin{array}{llll} A \wedge A \equiv A, & \neg A \wedge A \equiv \bot, & \top \wedge A \equiv A, & \bot \wedge A \equiv \bot, \\ A \vee A \equiv A, & \neg A \vee A \equiv \top, & \bot \vee A \equiv A, & \top \vee A \equiv \top, \end{array}$$

■

2.2.5. Consecuencia Lógica

Definición 2.15 *Sea un conjunto de fbfs, $\Omega \subseteq LM$, y una fbf, $C \in LM$. Se dice que C* `es consecuencia, se infiere` *o* `se deriva semánticamente` *de Ω, denotado $\Omega \models C$, si para todo modelo $M = (W, R, h)$ y todo mundo $w \in W$ se tiene que,*

si $M, w \models A_i$ para toda fbf $A_i \in \Omega$, entonces también se tiene que $M, w \models C$. [15]

En definitiva, no es posible que todas las fbfs de Ω sean verdaderas en w y C sea falsa en w.

Si $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, es costumbre expresarlo:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models C \text{ en lugar de } \Omega \models C$$

y denominar a las fbfs A_i `premisas o hipótesis` y a la fbf C `conclusión`. El siguiente resultado destaca algunas propiedades que son consecuencias inmediatas de la definición.

Teorema 2.5

1. *Si Ω es insatisfacible, entonces se tiene que $\Omega \models A$ para toda fbf A.*

2. *Ω es insatisfacible si y solo si $\Omega \models \bot$.*

3. *Si A es una fbf válida, entonces se tiene que $\Omega \models A$ para todo conjunto de fbfs Ω.* [16]

---

[15] Habitualmente, a este concepto de consecuencia semántica se le denomina `consecuencia lógica local`, por referirse, para cada mundo, a la verdad de las hipótesis.

[16] En consecuencia, nuestro interés estará en las conclusiones no válidas.

4. *Si* Ω *es un conjunto de fbfs válidas* [17] *y* $\Omega \models C$*, entonces* C *es una fbf válida.*

5. $\Omega \models C$ *si y solo si* $\Omega \cup \{\neg C\}$ *es insatisfacible.*

6. *Supongamos que* Ω *es finito,* $\Omega = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$*. Entonces:*

   6.1 $H_1, H_2, \ldots, H_n \models C$ *si y solo si* $\models (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$.
   6.2 $H_1, H_2, \ldots, H_n \models C$ *si y solo si* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \cup \{\neg C\}$ *es insatisfacible.*

7. *Si* $\Omega \models A$ *y* $\Omega \models A \rightarrow B$*, entonces* $\Omega \models B$.

8. `Propiedad reflexiva:` *Si* $A \in \Omega$*, entonces* $\Omega \models A$.

9. `Propiedad de monotonía:` *Si* $\Omega \models C$ *y* $\Omega \subseteq \Omega'$*, entonces* $\Omega' \models C$.

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa de las definiciones y se deja al lector. ■

Por último, es inmediato comprobar el siguiente teorema:

Teorema 2.6 *Las fbfs* A *y* B *son lógicamente equivalentes si y solo si* $A \models B$ *y* $B \models A$

Finalmente, en LM tenemos el siguiente resultado, cuya demostración daremos más adelante:

Teorema 2.7 (Compacidad) *Sean* $\Omega \subseteq LM$*. Entonces,*

Ω *es satisfacible si y solo si* Ω *es finitamente satisfacible.* [18]

2.3. Estructurando el conjunto de modelos, $\mathcal{M}_{LM}$

Como sabemos, las conectivas booleanas son `extensionales`, es decir, el significado de una expresión compuesta queda totalmente determinado por el significado de sus componentes. Por el contrario, como venimos reiterando, las conectivas modales, son `intensionales`, es decir el significado de $\Box A$ o $\Diamond A$ no queda unívocamente determinado por el significado de A. Así, cuándo una fbf de LM es satisfacible depende de en qué mundo es evaluada. Por esta razón, es crucial conocer a fondo cómo trabajar con modelos.

Es hora pues de plantearnos una pregunta `¿cuándo dos modelos,` $M, M' \in \mathcal{M}_{LM}$`, contienen la misma información?`

Podemos empezar contestando en la forma habitual en matemáticas, es decir, introduciendo el concepto de modelos isomorfos.

Definición 2.16 *Sean* $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$, $M_2 = (W_2, R_2, h_2) \in \mathcal{M}_{LM}$*, y sea* $f : W_1 \longrightarrow W_2$ *una aplicación. Decimos que* f *es un* `homomorfismo entre los modelos` (W_1, R_1, h_1) `y` (W_2, R_2, h_2) *si se satisfacen las tres propiedades siguientes:*

1. *Para todo* $w_1, v_1 \in W_1$*: si* $v_1 \in R_1(w_1)$ *entonces* $f(v_1) \in R_2(f(w_1))$.

2. *(***condición zag***:)* $R_2 \circ f \subseteq f \circ R_1$*, es decir, para todo* $w_1 \in W_1$ *se tiene que,*

   si $v_2 \in R_2(f(w_1))$*, entonces existe* $v_1 \in W_1$ *tal que* $f(v_1) = v_2$ *y* $v_1 \in R_1(w_1)$

---

[17] En la bibliografía, se denomina *conjunto universalemente válido* a estos conjuntos de fbfs válidas.

[18] Recordemos que Ω se dice finitamente satisfacible si todo subconjunto finito de Ω es satisfacible.

3. para todo $w_1 \in W_1$ *y toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$ *se tiene que:* $w_1 \in h_1(p)$ *si y solo si* $f(w_1) \in h_2(p)$.

Si f *es biyectiva, decimos que la aplicación* f *es un* `isomorfismo` *entre los modelos* M_1 *y* M_2*. En tal caso, para todo* $w_1, v_1 \in W_1$*, se tiene que* $v_1 \in R_1(w_1)$ *si y solo si* $f(v_1) \in R_2(f(w_1))$.

Es obvio que si dos modelos son isomorfos, ambos contienen idéntica información semántica y, en consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.8 *Si* f *es un isomorfismo entre dos modelos* $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$ *y* $M_2 = (W_2, R_2, h_2)$*, entonces para toda* $A \in LM$ *y todo* $w_1 \in W_1$ *se tiene que*

$$M_1, w_1 \models A \quad \textit{si y solo si} \quad M_2, f(w_1) \models A$$

Es decir, si f *es un isomorfismo entre los modelos* M_1 *y* M_2*, entonces se tiene que "una fbf,* A*, es verdadera en un mundo de* W_1 *si y solo si es verdadera en el mundo imagen por* f *en* W_2*.*

Demostración: Es inmediata por inducción estructural. ■

Describimos ahora dos construcciones básicas en $\mathcal{M}_{LM}$: la de submodelo y la unión disjunta de modelos.

Definición 2.17 [Submodelo] *Dados* $M, M' \in \mathcal{M}_{LM}$*, se dice que* $M' = (W', R', h')$ *es un* `submodelo` *de* $M = (W, R, h)$*, si satisface las tres condiciones siguientes:*

1. $W' \subseteq W$;
2. $R' = R \cap (W' \times W')$;
3. $h'(p) = h(p) \cap W'$*, para toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$.

El siguiente resultado es de comprobación inmediata a partir de las definiciones.

Proposición 2.4 *Si* $M' = (W', R', h')$ *es un submodelo de* $M = (W, R, h)$*, entonces, si* $w' \in W'$ *y* $A \in LM$*, se tiene que*

$$M', w' \models A \quad \textit{si y solo si} \quad M, w' \models A$$

Definición 2.18 [Submodelo generado] *Dados los modelos* $M = (W, R, h)$ *y* $M' = (W', R', h')$*, se dice que* M' *es un* `submodelo generado` *de* M*, si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

- M' *es un submodelo de* M*,*
- W' *es* R*-cerrado, es decir, para todo mundo* $w' \in W'$ *se tiene que* $R'(w') = R(w')$ *(todos los mundos accesibles desde* w' *por* R *pertenecen a* W'*).*

Definición 2.19 *Sea* $M' = (W', R', h')$ *un submodelo generado de* $M = (W, R, h)$ *y sea* $S \subseteq W'$ *tal que todo mundo en* W' *es accesible desde algún mundo en* S*, es decir, para todo* $w' \in W'$ *existe* $s \in S$ *tal que* $w' \in R(s)$*. En definitiva,* $S \subseteq W'$ *es tal que* $W' \subseteq R(S)$*. Entonces, decimos que* M' *es el* `submodelo de` M `generado por` S*. Si* S *es unitario,* $S = \{w_0\}$*, decimos que* M' *es el submodelo de* M *generado por* w_0 *y a* w_0 *se le denomina* `mundo generador o raíz de` W'*.*

Definición 2.20 [Unión disjunta] *Dados* $M_1 = (W_1, R_1, h_1), M_2 = (W_2, R_2, h_2) \in \mathcal{M}_{LM}$ *tales que* $W_1 \cap W_2 = \varnothing$*, llamamos* `unión disjunta de` M_1 `y` M_2*, al modelo denotado por* $M_1 \uplus M_2 = (W, R, h)$ *y definido como sigue:*

- $W = W_1 \cup W_2$
- $R = R_1 \cup R_2$
- $h = h_1 \uplus h_2$, *donde* $(h_1 \uplus h_2)(p) = h_1(p) \cup h_2(p)$ *para toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$

Así pues, en la unión disjunta de dos modelos, "reunimos" la información de los dos. Si $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$, definimos la unión disjunta de M_1 y M_2 como la unión disjunta de dos copias disjuntas e isomorfas de M_1 y M_2.

Podemos extender esta definición a un número arbitrario de modelos:

Definición 2.21 *Dado un conjunto de modelos disjuntos dos a dos* $\{M_i = (W_i, R_i, h_i) \mid i \in \Lambda\}$*, llamamos* `unión disjunta` *de los modelos* M_i*, al modelo denotado* $\biguplus_{i\in\Lambda} M_i = (W, R, h)$ *y definido como sigue:*

- $W = \bigcup_{i\in\Lambda} W_i$
- $R = \bigcup_{i\in\Lambda} R_i$
- $h = \biguplus_{i\in\Lambda} h_i$ *donde* $h(p) = \bigcup_{i\in\Lambda} h_i(p)$ *para toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$

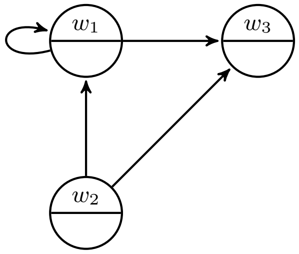
Como en el caso de dos modelos, si los modelos no son disjuntos primero obtenemos copias isomorfas disjuntas dos a dos y despues hallamos la unión disjunta de las copias.

Proposición 2.5 *Dados* $\{M_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{M}_{LM}$ *y* $A \in LM$*, se tiene que, para cada* $w \in W_i$*:*

$$M_i, w \models A \quad \textit{si y solo si} \quad \biguplus_{i\in\Lambda} M_i,\, w \models A$$

2.4. Expresividad de la lógica modal proposicional

En esta sección destacamos una agradable propiedad de los lenguajes modales: su `capacidad para ''hablar'' sobre estructuras relacionales`. Consideremos, por ejemplo, la estructura, $E = (W, R)$, siguiente



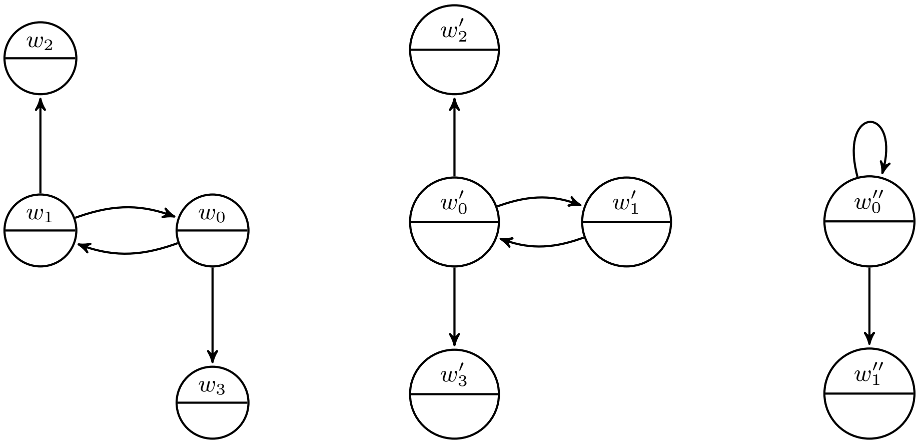
Veamos que podemos describir (unívocamente) cada mundo $w \in W$ mediante una fbf $A \in LM$, de modo que dado cualquier modelo sobre E, se tiene que A solo es verdadera en w: En efecto, para todo modelo M sobre E, se tiene que:

w_1 es el único mundo tal que $M, w_1 \models \Diamond(\Diamond\Box\bot \wedge \Box\Box\top)$

w_2 es el único mundo tal que $M, w_2 \models \Diamond\Diamond\top \wedge \neg\Diamond(\Diamond\Box\bot \wedge \Box\Box\bot)$

w_3 es el único mundo tal que $M, w_3 \models \Box\bot$.

Ejemplo 2.7 Consideremos las tres estructuras E, E' y E'' siguientes, con mundos destacados w_0, w'_0 y w''_0 respectivamente:



Si consideramos la fbf $A = \Box(\Box\bot \vee \Diamond\Box\bot)$ ¿qué par de estados de $\{w_0, w'_0, w''_0\}$ pueden ser distinguibles por A? El lector puede comprobar que:

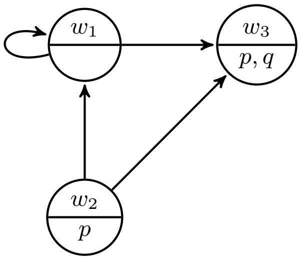
- w_0 y w'_0 son distinguibles por A, ya que, para cualesquiera modelos sobre E y E', A es verdadera en w_0, pero es falsa en w'_0.
- w_0 y w''_0 no son distinguibles por A, ya que, para cualesquiera modelos sobre E y E'', A es verdadera tanto en w_0, como en w''_0.

2.5. Evaluación de fbfs en modelos

Si consideramos modelos finitos (es decir, con un número finito de mundos), es posible diseñar un algoritmo para analizar la satisfacibilidad de una fbf, A, es decir, un algoritmo para contestar a la pregunta ¿existe w tal que $M, w \models A$? [19]

El algoritmo procede analizando la satisfacibilidad de las subfórmulas de A, realizando un recorrido de las hojas a la raíz en el árbol sintáctico y `etiquetando` cada mundo con las subfórmulas que son verdaderas en él. Por está razón se le denomina `algoritmo de etiquetado`.

Así, por ejemplo, en el modelo



---

[19] Este algoritmo es conocido como `the labelling algorithm` en la bibliografía inglesa.

el etiquetado va añadiendo fbfs en los mundos, teniendo en cuenta que: $h(p) = \{w_2, w_3\}$; $h(q) = \{w_3\}$; $h(\Diamond p) = \{w_1, w_2\}$; $h(\Diamond q) = \{w_1, w_2\}$; $h(\Box p) = \{w_3\}$; $h(\Box q) = \{w_3\}$; $h(\Diamond\Box p) = \{w_1, w_2\}$; $h(\Diamond\Box q) = \{w_1, w_2\}$; ...

También podemos plantear el problema como sigue:

`Dado un modelo finito,` $M = (W, R, h)$`, ¿cuál es` $h(A)$`?`

Veamos cómo trabaja el algoritmo en este último caso, que es el más habitual en computación.

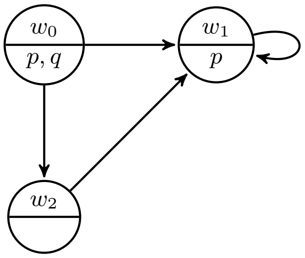
Sea $B \in Sub(A)$ y $w \in W$. Entonces:

- Si $B = p \in \mathcal{V}_{prop}$, etiqueta w con p si p es verdadero en w.
- Si $B = \neg B_1$, etiqueta w con $\neg B_1$ si w no está etiquetado previamente con B_1.
- Si $B = B_1 \wedge B_2$, etiqueta w con $B_1 \wedge B_2$ si w esta previamente etiquetado con B_1 y con B_2.
- Si $B = B_1 \vee B_2$, etiqueta w con $B_1 \vee B_2$ si w esta previamente etiquetado con B_1 o con B_2.
- Si $B = \Diamond B_1$, etiqueta w con $\Diamond B_1$ si algún $w' \in R(w)$ está ya etiquetado con B_1.
- Si $B = \Box B_1$, etiqueta w con $\Box B_1$ si todo $w' \in R(w)$ está ya etiquetado con B_1.

Ejemplo 2.8 Consideremos la fbf $A = \Box(p \vee \Diamond q)$ y el modelo $M = (W, R, h)$ donde

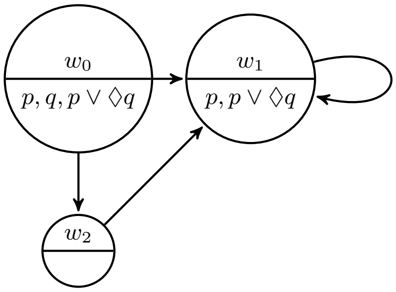
- $W = \{w_0, w_1, w_2\}$;
- $R = \{(w_0, w_1), (w_0, w_2), (w_1, w_1), (w_2, w_1)\}$;
- $h(p) = \{w_0, w_1\}$ y $h(q) = \{w_0\}$.

Tenemos que $Sub(A) = \{\Box(p \vee \Diamond q),\ p \vee \Diamond q,\ \Diamond q,\ p, q\}$ y para las variables proposicionales, obtenemos:

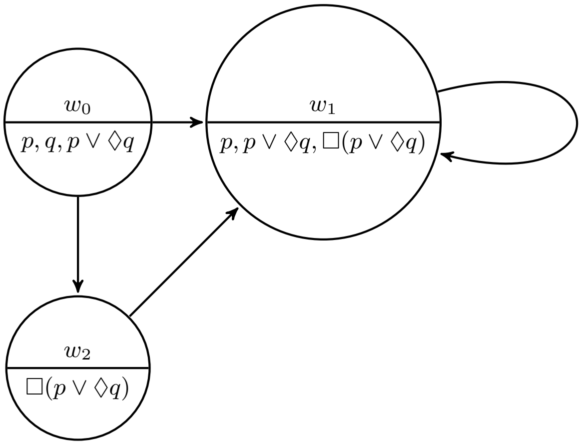


Para la subfórmula $\Diamond q$, se tiene que $h(\Diamond q) = \varnothing$ y por tanto no es preciso añadir ninguna etiqueta.

Para la subfórmula $p \vee \Diamond q$, se tiene que $h(p \vee \Diamond q) = \{w_0, w_1\}$ y por tanto obtenemos:



Para la subfórmula $\Box(p \lor \Diamond q)$, se tiene que $h(\Box(p \lor \Diamond q)) = \{w_1, w_2\}$ y por tanto obtenemos:



El algoritmo termina y ya tenemos la respuesta: $h(\Box(p \lor \Diamond q)) = \{w_1, w_2\}$.

El algoritmo ejecuta en tiempo polinómico respecto al tamaño de la fórmula de entrada y el tamaño del modelo. Concretamente, su complejidad es

$$gr(A) \times |W| \times |W|$$

2.6. ¿Necesitamos la lógica modal?

Hasta la primera década del siglo XX, no eran pocos los lógicos que negaban la legitimidad de la existencia de una lógica modal independiente. Con lo expuesto hasta aquí, tenemos todos los elementos necesarios para referirnos a este hecho.

La justificación para este rechazo era, primordialmente, que a las expresiones modales les basta la lógica clásica de primer orden. En efecto, si nos referimos a la lógica modal proposicional y, por ejemplo, deseamos hablar sobre un modelo (W, R, h), basta usar el lenguaje de primer orden con signatura $(\varnothing, \varnothing, \mathcal{P})$, [20] donde el conjunto de símbolos de predicado, $\mathcal{P}$, consta de

- un símbolo de predicados binario, R, y
- para cada variable proposicional $p \in \mathcal{V}_{prop}$, un símbolo de predicado monario, P. [21]

---

[20] Es decir, sin símbolos de constantes y sin símbolos de función

[21] A este lenguaje de primer orden se le suele denominar *el lenguaje de primer orden de las correspondencias*
Recordemos que en LM, dado un modelo $M = (W, R, h)$, la función de evaluación h asocia a cada $p \in \mathcal{V}_{prop}$, un subconjunto $h(p) \subseteq W$, es decir, una relación unaria en W.

Definir una función de traducción de toda fbf de LM a una fbf de este lenguaje de primer orden es inmediato y la mostramos en la definición siguiente:

Definición 2.22 *Para cada símbolo de variable individual,* $x \in \mathcal{V}ar$*, en* $L_1(\varnothing, \varnothing, \mathcal{P})$*, se define la función de traducción,* $Tr_x : LM \longrightarrow L_1(\varnothing, \varnothing, \mathcal{P})$*, como sigue:*

- $Tr_x(p) = P(x)$*, para toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$*,*
- $Tr_x(\bot) = \bot$ *y* $Tr_x(\top) = \top$*,*
- $Tr_x(\neg A) = \neg Tr_x(A)$*,*
- $Tr_x(A * B) = Tr_x(A) * Tr_x(B)$*, si* $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*,*
- $Tr_x(\Diamond A) = (\exists y)(R(x, y) \wedge Tr_y(A))$*,*
- $Tr_x(\Box A) = (\forall y)(R(x, y) \rightarrow Tr_y(A))$*.*

donde la variable y *usada en la traducción de* $\Box$ *y* $\Diamond$ *ha de ser "nueva", es decir, no usada previamente en el proceso de traducción.*

La función de traducción, Tr_x, es inyectiva, pero no es sobreyectiva

👀 En la traducción $Tr_x(A)$ existe siempre una y solo una variable libre, la variable x (que aparece destacada en el subíndice). De esta forma, asignar un valor a esta variable coincide con evaluar la fbf modal en un mundo de un modelo.

Ejemplo 2.9

$$\begin{aligned} Tr_x(p \rightarrow \Diamond p) &= Tr_x(p) \rightarrow Tr_x(\Diamond p) \\ &= P(x) \rightarrow Tr_x(\Diamond p) \\ &= P(x) \rightarrow (\exists y)(R(x, y) \wedge Tr_y(p)) \\ &= P(x) \rightarrow (\exists y)(R(x, y) \wedge P(y) \end{aligned}$$

La bondad de esta traducción queda reflejada en el siguiente resultado:

Proposición 2.6 *Sean* $A \in LM$*,* $M = (W, R, h)$ *y* $w \in W$*. Entonces,*

$$M, w \models_{LM} A \quad \text{si y solo si } M \models_{\mathcal{L}_1} Tr_x(A)\,[x/w]$$

Si las lógicas modales son traducibles a primer orden ¿para qué sirven? Existe una extensa bibliografía en la que encontrar argumentos para responder a esta pregunta. En ella, encontramos argumentos que admiten que las lógicas modales son eludibles desde el punto de vista teórico y argumentos que ponen de manifiesto no pocos problemas en esta traducción. No entraremos aquí en esta discusión, porque tanto los lógicos que defienden la primera postura, como los que defienden la segunda, no dudan en señalar las ventajas de la lógica modal, sobre todo desde el punto de vista computacional. Resaltemos tres aspectos positivos sobre el uso de la lógica modal y que se destacan habitualmente:

- el lenguaje modal proposicional es más simple, debido a que no requiere el uso de variables libres.

- al utilizar la simbolización de la lógica modal, los métodos de deducción son más sencillos de diseñar, entender e implementar.
- si nos limitamos al caso proposicional, la lógica modal es decidible, ya que, como destacamos al estudiar la lógica clásica de primer orden, $\mathcal{L}_1$, existen fragmentos de $\mathcal{L}_1$ que son decidibles y la lógica modal proposicional permite recoger uno de ellos (volveremos a esta cuestión al final de la sección).

Por otra parte, saber que estamos trabajando en una lógica particular de primer orden, nos proporciona ventajas teóricas a las que no hay que renunciar. Por ejemplo, podemos asegurar que en LM disponemos de la `propiedad de compacidad`. Recordemos que enunciamos esta propiedad de LM en el teorema 2.7. Ahora lo demostramos haciendo uso de la traducción de LM en $\mathcal{L}_1$:

Teorema 2.9 (De Compacidad) *Si todo subconjunto finito $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq LM$ es satisfacible, entonces Ω es satisfacible.*

Demostración: Supongamos que todo subconjunto finito de Ω es satisfacible y demostremos que Ω es satisfacible.

Por la proposición 2.6, Ω_0 es satisfacible si y solo si lo es $Tr_x(\Omega_0) = \{Tr_x(A) \mid A \in \Omega_0\}$. Por lo tanto, si todo $\Omega_0 \subseteq \Omega$ finito es satisfacible, todo $Tr_x(\Omega_0)$ lo es y por lo tanto, por la propiedad de compacidad en $\mathcal{L}_1$, $Tr_x(\Omega) = \{Tr_x(A) \mid A \in \Omega)\}$ es satisfacible. Ahora, de nuevo la proposición 2.6, nos asegura que Ω es satisfacible. ■

Igualmente, podemos asegurar que disponemos de la *propiedad de Löwenheim-Skolem*, que es fundamental desde el punto de vista computacional:

Teorema 2.10 (De Löwenheim-Skolem) *Si $\Omega \subseteq LM$ es satisfacible, entonces Ω es satisfacible en algún modelo numerable.*

Para finalizar nuestro estudio sobre la necesidad de la lógica modal, veamos que podemos considerar una traducción que tan solo utiliza dos variables y a la que denotaremos Tr_2.

Recordemos que en $Tr_x(\Diamond A) = (\exists y)(R(x,y) \wedge Tr_y(A))$, la variable y usada ha de ser "nueva". Ahora bien, en $Tr_y(A)$ no vuelve a aparecer x (ni libre ni ligada). Con lo cual, es correcto definir $Tr_y(\Diamond A) = (\exists x)(R(y,x) \wedge Tr_x(A))$, es decir, podemos definir Tr de forma que solo use dos variables. ¿Qué interés tiene esta nueva traducción? Para contestar a esta pregunta, basta que destaquemos que

> `el fragmento de fbfs de la lógica clásica de primer con a lo sumo 2 variables (es decir, en las que pueden aparecer a lo sumo` x `e` y`), denotado` LPO^2`, es decidible`

Y, como acabamos de ver: la lógica modal proposicional básica (sin restricción alguna a la relación de accesibilidad, R [22]), puede ser contemplada como un fragmento de la lógica clásica de primer orden con dos variables, concretamente, como el fragmento LPO^2. Podemos pues destacar el siguiente resultado que no demostramos, pero que consideramos que el lector debe conocer.

---

[22] Más adelante no referiremos a la decidibilidad con más detalle.

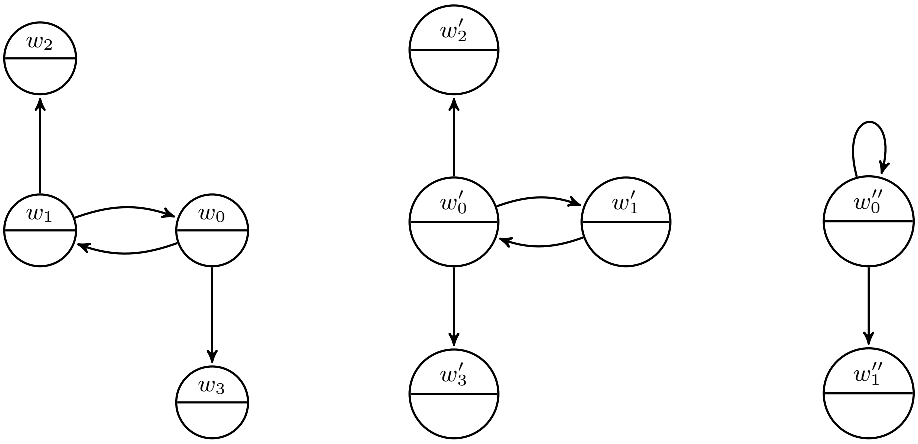
Teorema 2.11 *$A \in LM$ es válida si y sólo si $(\forall x)Tr\text{-}2_x(A) \in LPO^2$ es válida.*

El resultado anterior no tiene en cuenta las propiedades de la relación de accesibilidad de los modelos de Kripke, como ya hemos señalado. Por lo tanto posee un alcance limitado. La lógica modal juega con la validez en distintas clases de estructuras o modelos según las propiedades que posea dicha relación (como veremos más adelante) y, en ese caso, necesitaremos movernos fuera de LPO^2 en muchas ocasiones.

2.7. Bisimulación

Como hemos destacado en la sección 2.4, LM puede distinguir entre estructuras.

Ejemplo 2.10 Consideremos de nuevo las tres estructuras del ejemplo 2.7



Las dos primeras son estructuras irreflexivas y hemos analizando que son modalmente distinguibles por la fbf $A = \Box(\Box\bot \vee \Diamond\Box\bot)$. [23] Por su parte, la primera y la tercera, no son distinguibles por A. Sin embargo, si usamos la lógica clásica de primer orden es fácil distinguirlos, ya que todos los mundos de la primera estructura son irreflexivos, pero w''_0 es reflexivo.[24]

Profundizar en la cuestión de cuándo dos modelos son modalmente idénticos será nuestro objetivo en esta sección.

En la sección 2.3, hemos introducido la noción de modelos isomorfos y, como era de esperar, hemos probado que si dos modelos son isomorfos, ambos contienen idéntica información semántica. [25]

> `¿Pero es ésta la única situación en la que podemos afirmar dos modelos contienen la misma información?.`

La respuesta es NO. Disponemos de otro concepto menos restrictivo, que nos permite identificar modelos en los aspectos relevantes para su uso en la lógica modal. En esencia, como veremos,

---

[23] A es verdadera en w_0, pero es falsa en w'_0.

[24] El lector puede construir ejemplos similares para la propiedades de intransitividad, antisimetría y asimetría.

[25] El lector conoce de otros ámbitos de las matemáticas, que la noción de isomorfismo establece una `total` identificación entre las estructuras (no importa cuál) entre las que se define. En esencia, establece que ambas son idénticas salvo la simbolización elegida para cada una de ellas.

el nuevo concepto denominado *"Bisimulación"* relaja la condición de que exista una "buena" aplicación, f, entre los dos modelos, por la condición de que exista una "buena" relación entre los dos modelos.

Definición 2.23 [Bisimulación] *Una* `bisimulación` *entre dos estructuras* $E = (W, R)$ *and* $E' = (W', R')$ *es una relación* B *de* W *en* W' $(B \subseteq W \times W')$*, tal que*

$$B \circ R = R' \circ B$$

es decir, si $w' \in B(w)$*, se satisfacen las dos propiedades siguientes:*

- [**Condición Zig**]*: si* $v \in R(w)$*, existe* $v' \in W'$ *tal que* $v' \in B(v)$ *y* $v' \in R'(w')$*;*
- [**Condición Zag**]*: si* $v' \in R'(w')$*, entonces existe* $v \in W$ *tal que* $v' \in B(v)$ *y* $v \in R(w)$*.*

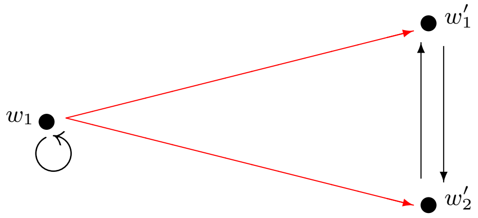
$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "B"] \arrow[d, "R"'] & w' \arrow[d, "R'"] \\
v \arrow[r, "B"'] & v'
\end{tikzcd}$$

Si existe una bisimulación entre dos estructuras E *y* E'*, decimos que* E `y` E' `son bisimilares`*.*

Ejemplo 2.11 Consideremos las estructuras

$$E = (W, R) = (\{w_1\}, \{(w_1, w_1\}) \quad \text{y } E' = (W', R') = (\{w'_1, w'_2\}, \{(w'_1, w'_2), (w'_2, w'_1)\})$$

La relación binaria, $B = \{(w_1, w'_1), (w_1, w'_2)\}$, representada en la figura por flechas rojas:



es una bisimulación entre E y E', ya que:

$(B \circ R)(w_1) = B(w_1) = \{w'_1, w'_2\}$, y

$(R' \circ B)(w_1) = R'(\{w'_1, w'_2\}) = \{w'_1, w'_2\}$

Extendemos esta definición a modelos:

Definición 2.24 *Una* `bisimulación entre dos modelos`*,* $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$ *y* $M_2 = (W_2, R_2, h_2)$*, es una bisimulación entre las estructuras* $E_1 = (W_1, R_1)$ *y* $E_2 = (W_2, R_2)$ *que respeta la asignación de las variables atómicas, es decir: para toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$ *y* $w_1 \in W_1$*, se tiene que*

$$w_1 \in h_1(p) \quad \textit{si y solo si} \quad B(w_1) \subseteq h_2(p)$$

o, equivalentemente,

$$\textit{si } w_2 \in B(w_1), \quad \textit{entonces } M_1, w_1 \models p \;\; \textit{si y solo si} \;\; M_2, w_2 \models p$$

Si dos mundos $w_1 \in W_1$ *y* $w_2 \in W_2$ *están relacionados por una bisimulación,* B*, es decir, si* $w_2 \in B(w_1)$ *decimos que* w_1 *y* w_2 *son bisimilares y se denota* $(M_1, w_1) \overset{B}{\leftrightarrows} (M_2, w_2)$*.*
Si $M_1 = M_2$ *hablaremos de* `autobisimulación`*.*

Definición 2.25 *Sea* B *una bisimulación entre dos modelos* $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$ *y* $M_2 = (W_2, R_2, h_2)$*. Decimos que* B *es una bisimulación* `semánticamente invariante` *entre* M_1 *y* M_2*, denotado* $M_1 \overset{B}{\leftrightsquigarrow} M_2$ *si, para toda fbf,* $A \in LM$ *y todo mundo,* $w_1 \in W_1$*, se tiene que*

$$w_1 \in h_1(A) \quad \textit{si y solo si} \quad B(w_1) \subseteq h_2(A)$$

o, equivalentemente,

$$\textit{si } w_2 \in B(w_1), \quad \textit{entonces } M, w_1 \models A \ \ \textit{si y solo si} \ \ M_2, w_2 \models A$$

es decir, en w_1 *y en cada uno de los mundos* $w_2 \in B(w_1)$ *se satisfacen las mismas fbfs.*

El siguiente resultado recoge la propiedad deseada:

Teorema 2.12 (Invariancia de la Bisimulación) *Si* B *es una bisimulación entre los modelos* $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$ *y* $M_2 = (W_1, R_2, h_2)$*, entonces* B *es invariante semánticamente.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre el grado de A:

Si $A \in \{\top, \bot\} \cup \mathcal{V}_{prop}$ es cierto por definición de bisimulación entre modelos.

Si la conectiva principal de A es booleana, el resultado es trivial.

Supongamos que $A = \Box B$ (la demostración para $A = \Diamond B$ es similar). Deseamos demostrar que

$$w_1 \in h(\Box A) \quad \text{si y solo si} \quad B(w_1) \subseteq h_2(\Box A)$$

Sea $w_1 \in h_1(\Box A)$, es decir, $R_1(w_1) \subseteq h_1(A)$. Sea $w_2 \in B(w_1)$; por la definición de bisimulación, $B \circ R_1 = R_2 \circ B$, por lo tanto, para cada $v_1 \in R_1(w_1)$ ha de existir $v_2 \in W_2$ tal que $v_2 \in B(v_1)$ y $v_2 \in R_2(w_2)$. Por hipótesis de inducción,

$$v_1 \in h(A) \quad \text{si y solo si} \quad B(v_1) \subseteq h_2(A)$$

por lo tanto, $(B \circ R_1)(w_1) \in h_2(A)$ y, en consecuencia $B(w_1) \in h_2(\Box A)$ y la demostración está completada.

La afirmación inversa se demuestra análogamente, sin más que utilizar la condición Zag en lugar de la condición Zig. ■

El resultado anterior nos destaca algo que esperabamos: Como nos asegura la fbf $A = \Box\bot$, `ningún mundo final es bisimilar con un mundo no final`.

El resultado inverso del asegurado por el teorema 2.12 es cierto bajo ciertas condiciones:

Teorema 2.13 (De Hennessy-Milner) *Si* $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$ *y* $M_2 = (W_2, R_2, h_2)$ *son modelos tales que* R_1 *y* R_2 *tienen imágenes finitas, entonces*

Si M_1 *y* M_2 *son invariantes semánticamente, entonces son bisimilares*

Demostración: Basta definir

$$B = \{(w_1, w_2) \mid \text{ para todo } A \in LM \text{ se tiene que } M_1, w_1 \models A \text{ si y solo si } M_2, w_2 \models A\}$$

dejamos al lector comprobar que B es una bisimulación. ■

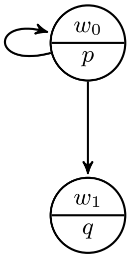
El interés de las bisimulaciones se debe, entre otras muchas razones, a que nos permiten eliminar modelos que son redundantes (en cuanto a la información que aportan) y eliminar simetrías innecesarias. Por ejemplo, dispondríamos de una herramienta para determinar cuándo dos diagramas de transición de estados representan el mimo proceso.

Veamos otro utilidad destacada de las bisimulaciones: la posibilidad de construir modelos más pequeños, o bien expandir modelos.

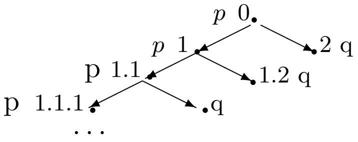
Definición 2.26 [Desarrollo en árbol] *Todo modelo punteado* (W, R, h, w_0) *tiene una bisimulación,* B*, con un árbol con raíz, al que denotamos* $(\mathcal{T}, 0)$*, tal que* $B(w_0) = 0$*. El árbol* $(\mathcal{T}, 0)$ *se construye como sigue: Si* $w \in W$*, cada nodo* $\lambda \in B(w)$ *en* $\mathcal{T}$*, tiene tantos descendientes como elementos tiene* $R(w)$*. La función de evaluación sobre los caminos en* $\mathcal{T}$ *es la copia de la correspondiente evaluación en* M*.*

Los árboles pueden ser contemplados como una "forma normal" para los modelos modales.

Ejemplo 2.12 El desarrollo en árbol de



es:



◑◐ En el ejemplo anterior hemos hecho uso de la notación de árbol debida a Gorn. Utilizamos, 0 para denotar la raíz y, para denotar el resto de los nodos, utilizamos el conjunto de secuencias finitas de números naturales $\Lambda = \{n_1 \cdot n_2 . \ldots . \cdot n_k \mid n_i \in \mathbb{N}\}$ de tal modo que los elementos de Λ usados satisfacen las propiedades siguientes:

1. Para toda secuencia $\eta \in \Lambda$, todo prefijo de η pertenece a Λ.
2. Para todo $\eta \in \Lambda$ tal que $\eta \cdot n_i \in \Lambda$, se tiene que $\eta \cdot n_j \in \Lambda$ para todo n_j tal que $n_j < n_i$.

Vamos a centrarnos ahora en la posibilidad de *reducir* modelos. En primer lugar, destaquemos que, como consecuencia directa de la definición:

- todo modelo $M = (W, R, h)$ tiene una autobisimulación, la relación identidad $\mathcal{I}d_W = \{(w, w) \mid w \in W\}$.
- Si B es una autobisimulación entre $M = (W, R, h)$, entonces la relación $\overset{B}{\leftrightarrows}$ es una relación de equivalencia en W.
- La unión arbitraria de bisimulaciones entre dos modelos M y M' es una bisimulación entre M y M'. Así pues, la unión de todas las bisimulaciones entre dos modelos es una bisimulación maximal entre ellos.

En consecuencia, podemos, dado un modelo, $M = (W, R, h)$, considerar la unión de todas las autobisimulaciones de M y obtener así la autobisimulación máxima. Denotemos a esta autobisimulación por $\mathfrak{B}_M$. Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida en W como sigue:

$$w \sim w' \quad \text{si y solo si} \quad (M, w) \overset{\mathfrak{B}_M}{\leftrightarrows} (M, w')$$

si consideramos el conjunto cociente $W_{/\sim}$, de forma natural, podemos definir la relación de proyección $\pi : W \longrightarrow W_{/\sim}$ (es decir, la aplicación que asocia a cada mundo la clase de equivalencia a la que pertenece: $\pi(w) = [w]$).

Es inmediato comprobar que π es una bisimulación entre W y $W/\sim$ a la que denominamos `bisimulación de contracción` y al modelo definido sobre $W/\sim$:

- $R_\sim([w]) = \{[v] \mid v \in R(w)\}$.
- $h(p) = \{[w] \mid w \in h(p)\}$

se le denomina `contracción de` M `por bisimulación`. Su interés, debe haber quedado claro para el lector: `La contracción de` M `por bisimulación es un modelo bisimilar a` M `de cardinalidad mínima`.

> `La bisimulaciones eliminan todas las redundancias en la representación.` [26]

Proposición 2.7

1. *Dado un conjunto de modelos disjuntos dos a dos $\{M_i = (W_i, R_i, h_i) \mid i \in \Lambda\}$, se tiene que, para cada $i \in \Lambda$, la inyección de cada M_i en la unión disjunta $\biguplus_{i \in \Lambda} M_i$ es una bisimulación.*
2. *Si M' es un submodelo generado de M, la inyección de M' en M es una bisimulación.*

---

[26] Es decir, son las representaciones más compactas de los procesos desde el punto de vista modal.

Demostración: la demostración es inmediata desde las definiciones y se deja al lector. ■

Terminamos esta sección con un destacado resultado para los modelos finitos: En el caso de modelos finitos es cierto el inverso del teorema de invariancia:

Teorema 2.14 *Sean $M_1 = (W_1, R_1, h_1)$ y $M_2 = (W_2, R_2, h_2)$ dos modelos finitos y sean $w_1^0 \in W_1$, $w_2^0 \in W_2$ tales que, para toda $A \in LM$ se tiene que $w_1^0 \in h_1(A)$ si y solo si $w_2^0 \in h_2(A)$. Entonces, existe una bisimulación, B, entre M_1 y M_2 que es invariante semánticamente y satisface que $w_2^0 \in B(w_1^0)$.*

Demostración: Veamos que basta considerar B definida como sigue: para todo $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$:

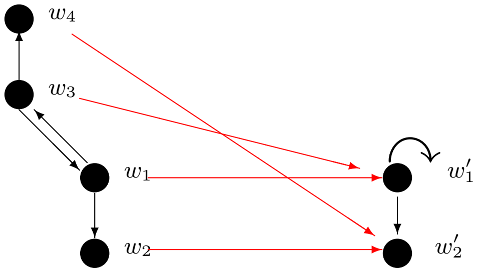
$$w_2 \in B(w_1) \quad \text{si y solo si, para toda } A \in LM, \text{ se tiene } \quad w_1^0 \in h_1(A) \text{ si y solo si } w_2^0 \in h_2(A) \qquad (\dagger)$$

que, obviamente, satisface que $w_2^0 \in B(w_1^0)$ y también respeta la evaluación de las variables proposicionales. Veamos que es una bisimulación entre M_1 y M_2.

Condición Zig: Sea $w_2 \in B(w_1)$ y $v_1 \in R(w_1)$, tenemos que comprobar que existe $v_2 \in W_2$ tal que $v_2 \in B(v_1)$ y $v_2 \in R_2(w_2)$. Por reducción al absurdo, supongamos que no existe tal v_2, es decir, en todos los mundos $v_2 \in R_2(w_2)$, se tiene que $v_2 \notin B(v_1)$, o lo que es igual (por (†)), $h_2(v_2) \neq h_1(v_1)$. Por lo tanto, para cada uno de esos mundos, v_2, existe una fbf, A_{v2} tal que $W_2, v_2 \not\models A_{v_2}$ pero $W_1, v_1 \models A_{v_2}$. Puesto que $R_2(w_2)$ es finito, podemos considerar la fbf $A = \bigwedge_{v_2 \in R_2(w_2)} A_{v_2}$. Es claro entonces que $W_1, v_1 \models A$ y, sin embargo, para cualquiera de los mundos v_2 tenemos que $W_2, v_2 \not\models A$. Ahora, puesto que $v_1 \in R_1(w_1)$, obtenemos que $W_1, w_1 \models \Diamond A$ y por la definición de B, se tiene que $W_2, w_2 \models \Diamond A$, lo cual asegura que $R_2(w_2) \cap h_2(A) \neq \varnothing$, en contradicción con la construcción de A.

La demostración de la "Condición Zag" es análoga y se deja al lector. ■

Ejemplo 2.13 [De P. Blackburn and J. van Benthem] Consideremos las dos estructuras E_1, E_2 siguientes:



la relación, B, de W_1 en W_2 descritas por la flechas coloreadas en rojo es una bisimulación entre E_1 y E_2, ya que:

$$(B \circ R)(w_1) = B(\{w_2, w_3\}) = \{w_1', w_2'\}, \text{ y } (R' \circ B)(w_1) = R'(\{w_1'\}) = \{w_1', w_2'\}$$

$$(B \circ R)(w_2) = B(\varnothing) = \varnothing, \text{ y } (R' \circ B)(w_2) = R'(\{w_2'\}) = \varnothing$$

$$(B \circ R)(w_3) = B(\{w_1, w_4\}) = \{w_1', w_2'\}, \text{ y } (R' \circ B)(w_3) = R'(\{w_1'\}) = \{w_1', w_2'\}$$

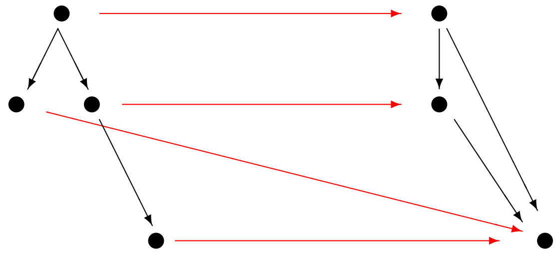
$$(B \circ R)(w_4) = B(\varnothing) = \varnothing, \text{ y } (R' \circ B)(w_4) = R'(\{w_2'\}) = \varnothing$$

En consecuencia, E_1 es redundante, ya que E_2 contiene la misma información modal (es modalmente indistinguible de E_1) y es más simple.

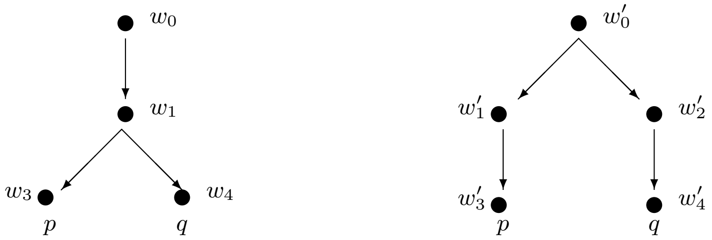
Ahora tenemos todos los elementos necesarios para situar a la lógica modal proposicional en el marco de la lógica de primer orden:

Teorema 2.15 (De Van Benthem) *La lógica modal proposicional es el fragmento de la lógica de primer orden que es invariante por bisimulación. Es decir, si $A(x)$ es invariante por bisimulación, se tiene que $A(x)$ es equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal proposicional.*

Ejemplo 2.14 [Van Benthem] En la figura siguiente, los vectores rojos representan una bisimulación:



Sin embargo, el lector puede comprobar que no existe ninguna bisimulación, B, entre los dos modelos siguientes, de modo que $B(w_0) = w'_0$



2.8. Semántica respecto a modelos y estructuras

Hemos realizado el estudio semántico de la lógica modal proposicional LM como la extensión natural del correspondiente estudio en la lógica clásica proposicional. Como hemos señalado,

> *Si $A \in LM$, decimos que A es válida si es verdadera en todo mundo de todo conjunto de mundos posibles, W (sea cual sea la relación de accesibilidad, R, y sea cual sea función de evaluación, h).*

Esta definición es local, realiza afirmaciones mundo a mundo. Sin embargo, de cara a las aplicaciones, interesa plantearnos las siguientes preguntas globales:

- Dado un modelo $M = (W, R, h)$, ¿cuáles son las fbfs, $A \in LM$ tales que $h(A) = W$?
- Dada una estructura $E = (W, R)$, ¿cuáles son las fbfs tales que, dado un modelo arbitrario $M = (W, R, h)$ sobre la estructura E, se tiene que $h(A) = W$?

Abordamos este estudio en esta sección

Definición 2.27 *Sea $A \in LM$:*

- *Decimos que A es* `válida en el modelo` $M = (W, R, h)$*, denotado* $\models_M A$*, si* $M, w \models A$ *para todo* $w \in W$*, es decir,* $h(A) = W$.
- *Decimos que A es* `válida en la estructura` $E = (W, R)$*, denotado* $\models_E A$*, si es válida en todo modelo sobre* E*, es decir, si* $\models_M A$ *para todo modelo* M *sobre* E.
- *Decimos que A es* `válida en una clase` $\mathfrak{E}$ `de estructuras, denotado` $\models_{\mathfrak{E}} A$*, si es válida en toda estructura* $E \in \mathfrak{E}$.
- *Decimos que A es* `válida en una clase` $\mathcal{C}$ `de modelos, denotado` $\models_{\mathcal{C}} A$*, si es válida en todo modelo* $M \in \mathcal{C}$.

Análogamente, particularizamos las nociones de equivalencia y consecuencia semántica:

- *Dos fbfs* $A, B \in LM$ *son* `lógicamente equivalentes` *en un modelo* M*, una estructura* E*, una clase* $\mathfrak{E}$ *de estructuras o una clase* $\mathcal{C}$ *de modelos, denotado* $A \equiv_X B$*, si* $A \leftrightarrow B$ *es válida en* $X = M$*,* E*,* $\mathfrak{E}$ *o* $\mathcal{C}$*, respectivamente.*
- *Dado un conjunto de fbfs* Ω *y una fbf* A *se dice que es:*
    - C *es* `consecuencia lógica de` Ω `en el modelo` $M = (W, R, h)$*, denotado* $\Omega \models_M A$*, si para todo* $w \in W$ *tal que* $w \in h(A_i)$ *para toda fbf* $A_i \in \Omega$*, se tiene que* $w \in h(C)$
    - C *es* `consecuencia lógica de` Ω `en la estructura` $E = (W, R)$*, denotado* $\Omega \models_E C$*, si* $\Omega \models_M C$ *para todo modelo* M *sobre la estructura* E.
    - *La fbf* C *es* `consecuencia lógica de` Ω `en la clase de estructuras` $\mathfrak{E}$*, denotado* $\Omega \models_{\mathfrak{E}} C$*, si* $\Omega \models_E C$ *para toda estructura* $E \in \mathfrak{E}$.
    - *La fbf* C *es* `consecuencia lógica de` Ω `en la clase de modelos` $\mathcal{C}$*, denotado* $\Omega \models_{\mathcal{C}} C$*, si* $\Omega \models_M C$ *para todo modelos* $C \in \mathcal{C}$.

Obviamente, si A es una fbf válida, entonces $\models_M A$, $\models_E A$, $\models_{\mathfrak{E}} A$ y $\models_{\mathcal{C}} A$, para todo modelo, M, para toda estructura, E, para toda clase de estructuras, $\mathfrak{E}$, para toda clase de modelos, $\mathcal{C}$, respectivamente.

Si $\Omega = \{A_1, \ldots, A_n\}$, se denota $A_1, \ldots, A_n \models_X A$ donde X representa M, E, $\mathfrak{E}$ o $\mathcal{C}$ y se tiene

$$A_1, \ldots, A_n \models_X A \quad \text{si y solo si} \quad \models_X (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$$

Para cada uno de los conceptos de validez considerados, $\models_X$ con $X \in \{M, E, \mathfrak{E}, \mathcal{C}\}$ definimos:

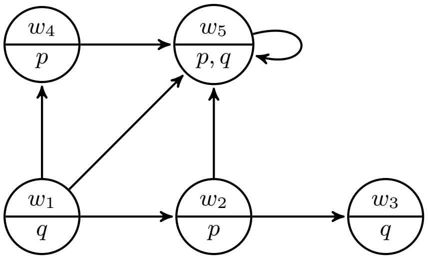
Al igual que para $\models$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8

1. *Sea* $X \in \{M, E, \mathfrak{E}, \mathcal{C}\}$*. Para toda fbf,* A*, se tiene que: Si* $\models_X A$*, entonces* $\models_X \Box A$.
2. *Sean* $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$ *dos clases de modelos tales que* $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$*. Para toda fbf,* A*, se tiene que si* $\models_{\mathcal{C}_2} A$ *entonces* $\models_{\mathcal{C}_1} A$.
3. $\models_M A \to B$ *si y solo si* $h(A) \subseteq h(B)$.

Ejemplo 2.15

1. Consideremos de nuevo el modelo del ejemplo 2.4



1.1 Veamos que: $\models_M \Box\Box q$; $\models_M p \to \Diamond q$; $\models_M \Diamond p \to \Box\Box q$

- $h(\Box\Box q) = \{w_i \mid 1 \leq i \leq 5 \text{ y } R^2(w_i) \subseteq h(q)\}$ y puesto que

$$\begin{aligned}
&R^2(w_1) = \textstyle\bigcup_{w \in R(w_1)} R(w) = R(w_2) \cup R(w_4) \cup R(w_5) = \{w_3, w_5\} \subseteq h(q),\\
&R^2(w_2) = \textstyle\bigcup_{w \in R(w_2)} R(w) = R(w_3) \cup R(w_5) = \{w_5\} \subseteq h(q),\\
&R^2(w_3) = \textstyle\bigcup_{w \in R(w_3)} R(w) = \varnothing \subseteq h(q),\\
&R^2(w_4) = \textstyle\bigcup_{w \in R(w_4)} R(w) = R(w_5) = \{w_5\} \subseteq h(q)\\
&R^2(w_5) = \textstyle\bigcup_{w \in R(w_5)} R(w) = R(w_5) = \{w_5\} \subseteq h(q)
\end{aligned}$$

se tiene que $h(\Box\Box q) = W$

- $h(p \to \Diamond q) = h(p)^c \cup h(\Diamond q) = \{w_1, w_3\} \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq 5 \text{ y } R(w_i) \cap h(q) \neq \varnothing\}$ y puesto que

$$\begin{aligned}
&R(w_1) \cap h(q) = \{w_2, w_4, w_5\} \cap \{w_1, w_3, w_5\} \neq \varnothing,\\
&R(w_2) \cap h(q) = \{w_3, w_5\} \cap \{w_1, w_3, w_5\} \neq \varnothing,\\
&R(w_3) \cap h(q) = \varnothing \cap \{w_1, w_3, w_5\} = \varnothing,\\
&R(w_4) \cap h(q) = \{w_5\} \cap \{w_1, w_3, w_5\} \neq \varnothing \text{ y}\\
&R(w_5) \cap h(q) = \{w_5\} \cap \{w_1, w_3, w_5\} \neq \varnothing,
\end{aligned}$$

se tiene que $h(p \to \Diamond q) = \{w_1, w_3\} \cup \{w_1, w_2, w_4, w_5\} = W$

- $\Diamond p \to \Box\Box q$ es válida en M ya que, como acabamos de probar, $\models_M \Box\Box q$

1.2 Veamos que $\not\models_M \Box q$; $\not\models_M q \to \Diamond p$; $\not\models_M \Diamond p \to \Box\Diamond q$; $\not\models_M \Box p \to \Diamond p$:

- $\not\models_M \Box q$ ya que $h(\Box q) = \{w_2, w_3, w_4, w_5\} \neq W$
- $\not\models_M q \to \Diamond p$ ya que $h(q \to \Diamond p) = \{w_1, w_2, w_4, w_5\} \neq W$
- $\not\models_M \Diamond p \to \Box\Diamond q$ ya que $h(\Diamond p \to \Box\Diamond q) = \{w_1, w_3, w_4, w_5\} \neq W$
- $\not\models_M \Box p \to \Diamond p$ ya que $h(\Box p \to \Diamond p) = \{w_1, w_2, w_4, w_5\} \neq W$

2. Si consideramos la estructura $E = (\{w\}, \varnothing)$, se tiene que $\models_E \Box A$ para toda fbf $A \in LM$.

Dada una estructura $E = (W, R)$, cada función de evaluación, $h : LM \longrightarrow 2^W$, determina un modelo $M = (W, R, h)$. Si se consideran todas las funciones de evaluación posibles, cada estructura determina un conjunto de modelos. Vamos a centrarnos ahora en el estudio estudio de las fbfs válidas sobre una clase de estructuras:

$$\mathfrak{E} = \{E = (W, R) \mid R \text{ tiene la propiedad } \mathbb{P}\}$$

Vamos pues a considerar restricciones sobre el tipo de las relaciones de accesibilidad consideradas. Pero ¿cuáles son las restricciones más adecuadas? La respuesta a esta pregunta tendrá que venir determinada por el ámbito en el que deseemos aplicar la lógica modal, en el ámbito en el que deseemos razonar. En definitiva, la aplicación nos determinará la lectura de las conectivas modales y ésta lectura nos determinará las propiedades a exigir a R.

Conviene pues conocer bien las posibles propiedades de las relaciones binarias. Por esta razón, haremos un breve paréntesis para refrescar nuestros conocimientos sobre las relaciones binarias.

Dados dos conjuntos W y W', una `relación` binaria de W en W' es cualquier subconjunto R de $W \times W'$
Si $W = W'$, una relación de W en W se llama `relación binaria` en W.
Denotaremos por $\mathcal{R}_{Bin}(W)$ el conjunto de relaciones binarias en W.

Operaciones en $\mathcal{R}_{Bin}(W)$

Si $R, S \in \mathcal{R}_{Bin}(W)$, entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ son relaciones binarias en W llamadas `unión` e `intersección` de R y S, respectivamente.

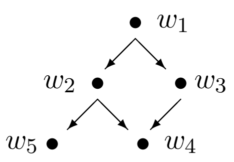
Si $R \in \mathcal{R}_{Bin}(W)$, la `composición` R^2 es la relación binaria $(R \circ R)\,(a) = \bigcup\limits_{b \in R(a)} R(b)$.
Denotaremos por Id_W la relación $\{(w,w) \mid w \in W\}$: $R^0 = Id_W$ y $R^{n+1} = R^n \circ R$

Si $R \in \mathcal{R}_{Bin}(W)$ entonces R^{-1}, denominada `inversa u opuesta` de R, es la relación binaria en A :

$w \in R^{-1}(w')$ si y sólo si $w' \in R(w)$

Si $R \in \mathcal{R}_{Bin}(W)$, la `composición fuerte` $R^2_\bullet$ es la relación binaria $(R \bullet R)(a) = \bigcap\limits_{b \in R(a)} R(b)$

Ejemplo 2.16 Consideremos la estructura:



$$\text{Se tiene que } R(w_1) = \{w_2, w_3\} \text{ y } \quad \begin{cases} R^2(w_1) = R(w_2) \cup R(w_3) = \{w_4, w_5\} \\ R^2_\bullet(w_1) = R(w_2) \cap R(w_3) = \{w_4\} \end{cases}$$

Es decir, $(R \circ R)(a)$ son los elementos de W a los que podemos acceder en dos pasos y $(R \bullet R)(a)$ son los elementos de W a los que podemos acceder en dos pasos, independientemente de cuál haya sido el primer paso.

Propiedades de Relaciones Binarias

- R es **Universal:** si $R = W \times W$
- R es **Reflexiva:** si $a \in R(a)$, para todo $a \in A$ (todo elemento está relacionado consigo mismo).
- R es **Irreflexiva:** $a \notin R(a)$, para todo $a \in A$;
- R es **Serial:** si $R(a) \neq \varnothing$, para todo $a \in A$;
  es decir, todo elemento está relacionado con algún elemento;
- R es **Simétrica:** si $a \in \bigcap\limits_{a' \in R(a)} R(a') = R^2_\bullet(a)$ para todo $a \in A$, (si $b \in R(a)$ entonces $a \in R(b)$).
  en definitiva, si todo primer paso es reversible.
- R es **Antisimétrica**: si $R \cap R^{-1} \subseteq Id_W$, donde $Id_W = \{(w, w) \mid w \in W\}$
  es decir, si aRb y bRa, entonces se tiene que $a = b$;
  en definitiva, ningún elemento está relacionado consigo mismo
- R es **Asimétrica:** si $R^2_\bullet \cap Id_W = \varnothing$, es decir, si $b \in R(a)$, entonces $a \notin R(b)$;
  en definitiva, si un mundo es accesible a uno dado, este último es inaccesible al primero.
- R es **Transitiva:** si $R^2 \subseteq R$, es decir, si $b \in R(a)$ y $c \in R(b)$, entonces $c \in R(a)$.

  en definitiva, cualquier mundo accesible en dos pasos, es accesible en un solo paso.
- R es **Intransitiva:** si $R^2 \subseteq R^c$, es decir, si $b \in R(a)$ y $c \in R(b)$, entonces $c \notin R(a)$.
  En definitiva, cualquier mundo accesible en dos pasos, es inaccesible en un solo paso.
- R es **Densa:** si $R \subseteq R^2$, es decir, para todo $b \in R(a)$, existe $c \in R(a)$ tal que $b \in R(c)$.
- R es **euclídea**: si $R \subseteq R \bullet R$, es decir, $R(a) \subseteq \bigcap\limits_{a' \in R(a)} R(a')$ (si $b, c \in R(a)$ entonces $b \in R(c)$).
  en definitiva, si cualesquiera dos primeros pasos están conectados.
- R es **de Equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva

Definición 2.28 *Sea $\mathbb{P}$ una propiedad de las relaciones binarias. Se dice que una estructura $E = (W, R)$ tiene la propiedad $\mathbb{P}$ si R verifica la propiedad $\mathbb{P}$.*

Dada una relación binaria, R en W, interesa describir en términos de R la mínima relación que contiene a R y que cumple una o varias propiedades. Llamamos

- `Cierre reflexivo` de R a la unión $R^r = R \cup Id_W$.
- `Cierre simétrico` de R a la unión $R^s = R \cup R^{-1}$.
- `Cierre transitivo` de R a la unión $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$.
- `Cierre reflexivo y transitivo` de R a la unión $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$.
- `Cierre de equivalencia` de R a la relación $R^{eq} = ((R^r)^s)^+$.

El siguiente resultado destaca la interrelación entre algunas de las propiedades de relaciones binarias que acabamos de recordar. La demostración se deja al lector.

Lema 2.2 *Sea R una relación binaria en W:*

- *Si R es reflexiva entonces es serial.*

- *Si R es simétrica, entonces R es transitiva si y solo si es euclídea*
- *Si R es simétrica y transitiva, entonces es euclídea*
- *R es simétrica, transitiva y serial si y solo si es reflexiva y euclídea si y solo si es una relación de equivalencia.*

Los siguientes teoremas nos muestran una agradable seña de identidad de la lógica modal: nos permite caracterizar semánticamente de forma simple y elegante ciertas propiedades de las relaciones binarias. El estudio de estas caracterizaciones se denomina `Teoría de la Correspondencia`. Como veremos, esta caracterización no es posible para algunas de las propiedades recogidas en la tabla anterior.

2.9. Propiedades definibles

Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 2.29 *La conectiva modal $\sharp \in \{\Box, \Diamond\}$ se dice:*

- `inflacionaria` *si* $\models_X A \to \sharp\, A$
- `cercanamente inflacionaria` *si* $\models_X \sharp\, A \to \sharp\sharp\, A$.
- `deflacionaria` *si* $\models_X \sharp\, A \to A$
- `cercanamente deflacionaria` *si* $\models_X \sharp\sharp\, A \to \sharp\, A$;

Claramente, toda conectiva deflacionaria es cercanamente deflacionaria y toda conectiva inflacionaria es cercanamente inflacionaria.

Definición 2.30 *Un esquema modal A define una clase de estructuras, $\mathfrak{E}$, si se satisface que*

$$E \in \mathfrak{E} \text{ si y solo si } \models_E A$$

Teorema 2.16 $\Box A \to \Diamond A$ *define la clase de estructuras seriales, es decir, dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf, $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E \Box A \to \Diamond A \quad \text{si y solo si} \quad E \textbf{ es serial}$$

Demostración: Sea $E = (M, R)$ una estructura y $M = (W, R, h)$ un modelo cualquiera sobre E. Deseamos caracterizar a la estructura E de tal modo que tengamos asegurado que:

$$\{w \mid R(w) \subseteq h(A)\} \subseteq \{w \mid R(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$$

Ahora bien, para todo $w \in W$, se tiene que $R(w) \subseteq h(A)$ si y solo si $R(w) \cap h(A) = R(w)$ y por lo tanto, $R(w) \cap h(A) \neq \varnothing$ si y solo si $R(w) \neq \varnothing$. ■

Corolario 2.1 *Dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf, $A \in LM$, se tiene que*

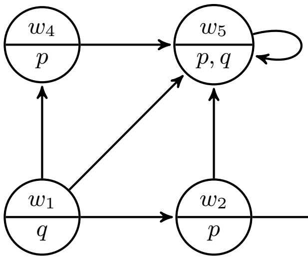
- $\models_E \Diamond A \to A$ *si y solo si* E *es serial*
- $\models_E \Diamond\top$ *si y solo si* E *es serial*

Demostración: Basta tener en cuenta que

$$\Box A \to \Diamond A \;\equiv\; \neg\Box A \vee \Diamond A \;\equiv\; \Diamond\neg A \vee \Diamond A \;\equiv\; \Diamond(\neg A \vee A) \;\equiv\; \Diamond(A \to A) \;\equiv\; \Diamond\top$$

■

◔◔ En el ejemplo 2.15 dimos el siguiente modelo en el que $\not\models_M \Box p \to \Diamond p$.



Si elegimos para $\Box p$, por ejemplo, la lectura "es necesario que p" estaríamos diciendo que *"p es necesario y puede que no sea posible"* y si elegimos para $\Box p$ la lectura "es obligatorio que p" estaríamos diciendo que *p es obligatorio y puede que no sea permitido.* El teorema anterior nos indica que para evitar estas situaciones es preciso considerar estructuras seriales. El modelo del ejemplo no es serial, ya que w_3 es un mundo letal.

El esquema $\Box A \to \Diamond A$ se conoce como `el esquema D`, reflejando que es el reclamado por la lectura que realiza la lógica deóntica, es decir, la lógica modal que trata de lo "obligado" y lo "permitido". En esta lógica se suele utilizar el símbolo $\mathcal{O}$, en lugar de $\Box$ y $\mathcal{P}$ en lugar de $\Diamond$ ($\mathcal{O}\,A$ se lee "es obligatorio que A" y $\mathcal{P}\,A$ se lee "está permitido que A").

Si consideramos la `lógica epistémica o del conocimiento`, se suele utilizar el símbolo K, en lugar de $\Box$ y la fbf $K_i A$ se lee "el agente i sabe que A". Por lo tanto, el esquema $\Box A \to \Diamond A$ nos dice que *si el agente i sabe algo, entonces no sabe lo contrario.* Análogamente, si consideramos la `lógica de la creencia`, en la que se suele utilizar el símbolo B en lugar de $\Box$, la fbf $B_i\, A$ se lee "el agente i cree que A" y el esquema $\Box A \to \Diamond A$ nos dice que *si un agente cree algo, entonces no cree lo contrario.*

Teorema 2.17 *$\Box A \to A$ define la clase de estructuras reflexivas, es decir, dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf, $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E \Box A \to A \quad \textit{si y solo si} \quad E \textbf{ es reflexiva}$$

es decir, $\Box$ es deflacionario si y solo si E es reflexiva.

Demostración: Sea $E = (M, R)$ una estructura. Deseamos caracterizar a la estructura E de tal modo que tengamos asegurada la equivalencia de las condiciones (1) y (2) siguientes:

(1) $\{w \in W \mid w \in R(w)\} = W$. [27]

(2) Para todo modelo $M = (W, R, h)$ sobre E se cumple que:

$$\{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\} \overset{(\dagger)}{\subseteq} h(A) \; ^{28}$$

---

[27] Téngase en cuenta que R es reflexiva si y solo si $\{w \in W \mid w \in R(w)\} = W$.

[28] Nótese que, por el item 4 de la proposición 2.1, afirmar (†) para un modelo dado $M = (W, R, h)$ es equivalente a afirmar $h(\Box A \to A) = W$, o sea, la validez del esquema en el modelo.

Veamos que (1) implica (2). Supongamos que $\{w \in W \mid w \in R(w)\} = W$ y sea $M = (W, R, h)$ cualquier modelo sobre E. Sea $w \in W$ tal que $R(w) \subseteq h(A)$, entonces, tenemos inmediatamente que $w \in h(A)$ y se cumple (†).

Recíprocamente, veamos que (2) implica (1). Para ello, supongamos, por reducción al absurdo, que $\{w \mid w \in R(w)\} \neq W$, entonces existe $w' \in W$ tal que $w' \notin R(w')$. Consideremos una instancia de sustitución del esquema anterior como $\Box p \to p$. Definamos un modelo $M = (W, R, h)$ sobre E donde $h(p) = W/\{w'\}$. Claramente tenemos que $R(w') \subseteq h(p)$ pero $w' \notin h(p)$, así pues, $\{w \in W \mid R(w) \subseteq h(p)\} \not\subseteq (h(p)$, por tanto no se cumple (†). ■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado de demostración inmediata.

Corolario 2.2 *Dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf $A \in LM$, se tiene que*

1. $\models_E A \to \Diamond A$ *si y solo si E es reflexiva*

   es decir, $\Diamond$ es inflacionario si y solo si E es reflexiva.

2. $\models_E \Box A \wedge A \equiv \Box A$ *si y solo si* $\models_E \Diamond A \vee A \equiv \Diamond A$ *si y solo si E es reflexiva .*

◉◉ Si elegimos para $\Box p$, por ejemplo, con la lectura "es necesario que p", $M, w \not\models \Box p \to p$ nos dice que *"p es necesariamente verdadero en w, pero no es verdadero en w"*. El teorema anterior nos indica que para evitar estas situaciones es preciso considerar estructuras reflexivas.

El esquema $\Box A \to A$ se conoce como `el esquema T` y, como veremos, es reclamado por muchas aplicaciones de la lógica modal. Por ejemplo, consideremos la *lógica epistémica o del conocimiento*. En esta lógica el esquema $K_i A \to A$ nos dice que *"todo lo que sabe el agente i es verdadero"*, es decir, $\mathcal{K}$ expresa un "`conocimiento perfecto`". Sin embargo, si consideramos la *lógica de la creencia*, no es lógico considerar estructura reflexivas, ya que, como hemos visto, para una tal estructura, E, tendríamos que $\models_E B_i A \to A$ y estaríamos admitiendo que *"si el agente i cree que A, entonces A es verdadera"*, que claramente no es lo adecuado.

Teorema 2.18 *$\Box A \to \Box\Box A$ define la clase de las estructuras transitivas, es decir, dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf, $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E \Box A \to \Box\Box A \quad \textit{si y solo si} \quad E \ \textbf{es transitiva}$$

Demostración: Sea $E = (M, R)$ una estructura. Deseamos caracterizar a la estructura E de tal modo que tengamos asegurada la equivalencia de las condiciones (1) y (2) siguientes:

(1) $\{w \in W \mid R^2(w) \subseteq R(w)\} = W$ [29]

(2) Para todo modelo $M = (W, R, h)$ sobre E se cumple que:

$$\{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\} \subseteq \{w \in W \mid R^2(w) \overset{(\dagger_1)}{\subseteq} h(A)\}$$ [30]

---

[29] es decir, R es transitiva

[30] De nuevo, por el ítem 4 de la proposición 2.1,afirmar $(\dagger_1)$ para un modelo dado $M = (W, R, h)$ es equivalente a afirmar $h(\Box\Box A \to \Box A) = W$.

Veamos que (1) implica (2). Supongamos que $\{w \mid R^2(w) \subseteq R(w)\} = W$ y sea $M = (W, R, h)$ cualquier modelo sobre E. Sea $w \in W$ tal que $R(w) \subseteq h(A)$, entonces, tenemos inmediatamente que $R^2(w) \subseteq h(A)$ y se cumple $(\dagger_1)$.

Recíprocamente, veamos que (2) implica (1).

Por reducción al absurdo, sea $\{w \mid R^2(w) \subseteq R(w)\} \neq W$, entonces existen $w', w'' \in W$ tales que $w'' \in R^2(w')$ pero $w'' \notin R(w')$. Consideremos una instancia de sustitución del esquema anterior como $\Box p \to \Box\Box p$. Definamos un modelo $M = (W, R, h)$ sobre E donde $h(p) = W/\{w''\}$. Claramente tenemos que $R(w') \subseteq h(p)$ pero $R^2(w') \nsubseteq h(p)$, de modo que,

$$\{w \in W \mid R(w) \subseteq h(p)\} \nsubseteq \{w \in W \mid R^2(w) \subseteq h(p)\}$$

y, por tanto no se cumple $(\dagger_1)$. ■

Corolario 2.3 *Dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf $A \in LM$, se tiene que*

1. $\models_E \Box A \to \Box^n A$, *para todo $n \in \mathbb{N}$ si y solo si E es transitiva*
2. $\models_E \Diamond\Diamond A \to \Diamond A$ *si y solo si E es transitiva*
3. $\models_E \Diamond^n A \to \Diamond A$, *para todo $n \in \mathbb{N}$ si y solo si E es transitiva*

DEMOSTRACIÓN: 2 es inmediata. Para demostrar 1 y 3, basta tener en cuenta que R es transitiva si y solo si $R^n(w) \subseteq R(w)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

◉◉ El esquema $\Box A \to \Box\Box A$ (y sus equivalentes) se denomina `el esquema (4)`. La lectura en la lógica epistémica de $K_i A \to K_i K_i A$, es *"si el agente A sabe que A, entonces sabe que sabe que A"*, es decir, expresa una característica deseable para el conocimiento humano: la `propiedad de introspección positiva`.

Teorema 2.19 $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ *define la clase de las estructuras euclídeas, es decir, dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf, $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E \Diamond A \to \Box\Diamond A \quad \textit{si y solo si} \quad E \ \textbf{es euclídea}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $E = (M, R)$ una estructura. Deseamos caracterizar a la estructura E de tal modo que tengamos asegurada la equivalencia de las condiciones (1) y (2) siguientes:

(1) $\{w \in W \mid R^2(w) \subseteq R(w)\} = W$ [31]

(2) Para todo modelo $M = (W, R, h)$ sobre E se cumple que:

$$\{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\} \subseteq \{w \in W \mid R^2(w) \overset{(\dagger_1)}{\subseteq} h(A)\}$$ [32]

---

[31] es decir, R es transitiva

[32] De nuevo, por el ítem 4 de la proposición 2.1,afirmar $(\dagger_1)$ para un modelo dado $M = (W, R, h)$ es equivalente a afirmar $h(\Box\Box A \to \Box A) = W$.

Veamos que (1) implica (2). Supongamos que $\{w \mid R^2(w) \subseteq R(w)\} = W$ y sea $M = (W, R, h)$ cualquier modelo sobre E. Sea $w \in W$ tal que $R(w) \subseteq h(A)$, entonces, tenemos inmediatamente que $R^2(w) \subseteq h(A)$ y se cumple $(\dagger_1)$.

Recíprocamente, veamos que (2) implica (1). Por reducción al absurdo, sea $\{w \mid R^2(w) \subseteq R(w)\} \neq W$, entonces existen $w', w'' \in W$ tales que $w'' \in R^2(w')$ pero $w'' \notin R(w')$. Consideremos una instancia de sustitución del esquema anterior como $\Box p \to \Box\Box p$. Definamos un modelo $M = (W, R, h)$ sobre E donde $h(p) = W/\{w''\}$. Claramente tenemos que $R(w') \subseteq h(p)$ pero $R^2(w') \not\subseteq h(p)$, de modo que, $\{w \in W \mid R(w) \subseteq h(p)\} \not\subseteq \{w \in W \mid R^2(w) \subseteq h(p)\}$ y, por tanto no se cumple $(\dagger_1)$. ■

El siguiente resultado, de comprobación inmediata, nos proporciona otra caracterización equivalente de la propiedad euclidea.

Corolario 2.4 *Dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E \Diamond\Box A \to \Box A \ \textit{ si y solo si } E \ \textit{ es euclídea}$$

> El esquema $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ (y sus equivalentes) se conoce como `el esquema (5)`. La lectura en la lógica epistémica de $\neg K_i \neg A \to K_i \neg K_i \neg A$ es *"si el agente i no sabe que $\neg A$, entonces sabe que no sabe que $\neg A$"*, es decir, la `propiedad de introspección negativa`.

Teorema 2.20 *$A \to \Box\Diamond A$ define la clase de las estructuras euclídeas, es decir, dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf, $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E A \to \Box\Diamond A \quad \textit{si y solo si} \quad E \ \textbf{es simétrica}$$

Demostración: Sea $E = (M, R)$ una estructura. Deseamos caracterizar a la estructura E de tal modo que tengamos asegurada la equivalencia de las condiciones (1) y (2) siguientes:

(1) $\{w \in W \mid w \in \bigcap_{w' \in R(w)} R(w') = R^2_\bullet(w)\} = W$ [33]

(2) Para todo modelo $M = (W, R, h)$ sobre E se cumple que:

$$h(A) \overset{(\dagger_3)}{\subseteq} \{w \in W \mid R^2_\bullet(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$$ [34]

Veamos que (1) implica (2). Supongamos que $\{w \in W \mid w \in R^2_\bullet(w)\} = W$ y sea $M = (W, R, h)$ cualquier modelo sobre E. Sea $w \in W$ tal que $w \in h(A)$, entonces tenemos que $R^2_\bullet(w) \cap h(A) \neq \varnothing$, pues $w \in R^2_\bullet(w)$, y se cumple $(\dagger_3)$.

Recíprocamente, veamos que (2) implica (1).

Procedamos por reducción al absurdo, sea $\{w \in W \mid w \in R^2_\bullet(w)\} \neq W$, entonces existe $w' \in W$ tal que $w' \notin R^2_\bullet(w')$. Consideremos una instancia de sustitución del esquema anterior como $p \to \Box\Diamond p$. Definamos un modelo $M = (W, R, h)$ sobre E donde $h(p) = \{w'\}$. Claramente tenemos que $R^2_\bullet(w) \cap h(p) = \varnothing$, de modo que $h(p) \not\subseteq \{w \in W \mid R^2_\bullet(w) \cap h(p) \neq \varnothing\}$ y, por tanto no se cumple $(\dagger_3)$. ■

El siguiente resultado, de comprobación inmediata, nos proporciona otra caracterización equivalente de la propiedad simétrica.

---

[33] es decir, R es simétrica.

[34] Es decir, $h(A \to \Box\Diamond A) = W$.

Corolario 2.5 *Dada una estructura $E = (W, R)$ y una fbf $A \in LM$, se tiene que*

$$\models_E \Diamond\Box A \to A \textit{ si y solo si } E \textit{ es simétrica}$$

👀 El esquema $A \to \Box\Diamond A$ (y sus equivalentes) se conoce como el `esquema` (B), en honor al matemático holandés L.E. J. Brouwer, padre del `Intuicionismo` y sobre el que volveremos al estudiar la `lógica intuicionista.`

👀 Conviene destacar que los esquemas de los teoremas 2.4 a 2.8 anteriores caracterizan las propiedades de las relaciones en términos de validez respecto a las estructuras, no respecto a los modelos, es decir, dado un modelo $M = (W, R, h)$:

`NO es cierto que` $\models_M \Box A \to A$ `si y solo si` R `es reflexiva` [35]

En efecto, no es difícil construir un modelo $M = (W, R, h)$ no reflexivo para $\Box p \to p$: Basta considerar $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_2)\}$ and $h(p) = \{w_1\}$. Tenemos pues que $h(\Box p) = \{w_2\}$ y por tanto $h(\Box p \to p) = \{w_1, w_2\} = W$ y $\models_M \Box p \to p$.

`SÍ` es cierto que, si $\mathcal{C}$ es la clase de todos los modelos reflexivos, se tiene que $\models_{\mathcal{C}} \Box A \to A$

Como venimos destacando, cada clase $\mathcal{C}$ de modelos proporciona un conjunto destacado de fbfs, el conjunto de las fbfs $\mathcal{C}$-válidas y, en consecuencia, para cada clase de estructuras obtenemos la clase $\mathcal{C}$ de modelos sobre tales estructuras y, en consecuencia, una lógica modal, la cual es habitual nombrarla por la secuencia de los símbolos por los que se denotan las fbfs válidas que caracterizan las propiedades de la relación que determina la clase de estructuras considerada. En la siguiente tabla se dan los nombres de las lógicas modales más conocidas y utilizadas en Computación [36]. Cada lógica se denomina como $KN_1 \ldots N_n$, donde cada $N_i \in \{D, T, B, 4, 5\}$ y en la secuencia no hay repeticiones de nombres de esquema. Tomamos la secuencia $E_1 \ldots E_n$ vacía para nombrar a K:

NOMBRE DE LA LÓGICA	Propiedades de la Relación de Accesibilidad
K	Ninguna
KT ó T	Reflexiva
KB ó B	Simétrica
$KT4$ ó $S4$	Reflexiva y Transitiva
KTB	Reflexiva y Simétrica
KT4B ó S5	Reflexiva, Transitiva y Simétrica
KD ó D	Serial
KDB	Serial y Simétrica
$KD4$	Serial y Transitiva

Podríamos definir también $KT5$ como los modelos reflexivos, simétricos y transitivos, pero conocemos que una relación R es reflexiva, simétrica y transitiva si y solo si es de equivalencia. Por lo tanto, $KT5$ coincide con $S5$.

---

[35] Igualmente, podemos afirmarlo para las demás propiedades que hemos contemplado.

[36] Dado un conjunto de estructuras $\mathfrak{C}$, algunos autores llaman `lógica basada en` $\mathfrak{C}$ al conjunto de fbfs válidas en $\mathfrak{C}$

2.10. Algunos resultados negativos sobre definibilidad

Como hemos venido advirtiendo, `NO todas las propiedades de las relaciones binarias se pueden caracterizar mediante esquemas de` LM. Este es el resultado negativo que tenemos, por ejemplo, para las propiedades de: *irreflexividad, intransitividad, antisimetría* y *asimetría.* En efecto, sea $M = (W, R, h)$ un modelo cualquiera. Definamos a partir de M un nuevo modelo, denotado $M^* = (W^*, R^*, h^*)$, del siguiente modo:

- $W^* = \{\lambda \mid \lambda = w_1 \dots w_n,\ \text{con}\ n \in \mathbb{N},\ w_i \in W\ \text{y}\ w_{i+1} \in R(w_i)\ \text{para todo}\ 1 \leq i \leq k-1\}$.
- $R^* \subseteq W^* \times W^*$ está definida como sigue:

  Si $\lambda, \lambda' \in W^*$, con $\lambda = w_1 \dots w_{n_1}$ y $\lambda' = w'_1 \dots w'_{n_2}$, entonces $\lambda' \in R^*(\lambda)$ si y solo si:

  - $n_2 = n_1 + 1$
  - $\lambda' = \lambda\, w'_{n_2}$, es decir, $w_i = w'_i$ para todo $1 \leq i \leq n_1$

- para todo elemento $\lambda = w_1 \dots, w_n \in W^*$ y toda $p \in \mathcal{V}_{prop}$ se tiene que

$$\lambda \in h^*(p) \quad \text{si y sólo si} \quad w_n \in h(p)$$

Es fácil comprobar (y se deja de ejercicio al lector) el siguiente resultado:

Proposición 2.9 *El modelo* $M^* = (W^*, R^*, h^*)$ *definido anteriormente, es irreflexivo, antisimétrico, asimétrico e intransitivo.*

Proposición 2.10 *Para todo elemento* $\lambda = w_1 \dots, w_n \in W^*$ *y toda fbf* $A \in LM$ *se tiene que*

$$M^*, w_1 \dots w_n \models A \quad \textit{si y sólo si} \quad M, w_n \models A$$

Demostración: La demostración es inmediata mediante inducción sobre el grado de A y se deja al lector. ■

Corolario 2.6

$$\models_{\mathfrak{E}} A \quad \textit{si y solo si} \quad \models A$$

donde $\mathfrak{E}$ *es, respectivamente, la clase de estructuras irreflexivas, antisimétricas, asimétricas o intransitivas.*

Demostración: Sea $\mathfrak{E}$ una cualquiera de las clases de estructuras consideradas.

Si $\models A$, es obvio que $\models_{\mathfrak{E}} A$. Veamos la otra dirección: Lo demostramos por reducción al absurdo: supongamos que $\not\models A$. Entonces existe un modelo M y un mundo w en M tales que $M, w \not\models A$. Por la proposición anterior, existe un modelo M^* construido a partir de M (y basado en una estructura de la clase $\mathfrak{E}$) y un mundo $w^* \in M^*$, tal que $M^*, w^* \not\models A$ y, por lo tanto, $\not\models_{\mathfrak{E}} A$. ■

Tenemos ya todos los elementos necesarios para demostrar el resultado deseado:

Teorema 2.21 *Si* $\mathbb{P} \in \{\text{irreflexividad, antisimetría, asimetría, intransitividad}\}$, *entonces, las clases de estructuras* $\mathfrak{E} = \{E = (W, R) \mid R \textit{ tiene la propiedad } \mathbb{P}\}$ *no pueden ser caracterizadas por esquemas de* LM*.*

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{C}$ es cualquiera de estas clases. Sea $\mathfrak{C}_0$ la clase de todas las estructuras (es decir, no se exige ninguna propiedad a R). Si existiera un esquema A de LM tal que:

$$\models_E A \quad \text{si y solo si} \quad E \in \mathfrak{C}$$

el teorema anterior, asegura que $\models A$, es decir, A es válida en toda estructura y, en definitiva, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$, lo cual es una contradicción, ya que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_0$ (¡existen relaciones que no satisfacen ninguna de estas propiedades!). ■

> 👀 El lector podría preguntarse si, para estas propiedades, quizás no baste un solo esquema, pero que sí podríamos definirlas por un conjunto de esquemas: $A_1, \ldots, A_n$ con $n > 1$. Seguro que él mismo se contesta que seguiríamos hablando de un solo esquema: el esquema $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$. Más aún, tampoco existe un conjunto infinito de esquemas de LM [37] que caractericen a una sola de esas propiedades. [38]

Terminamos esta sección viendo una aplicación al estudio de la expresividad modal del uso de uniones disjuntas de modelos. Consideremos la propiedad de la no-simetría, expresada en primer orden mediante la fórmula:

$$(\exists x)(\exists y)(R(x,y) \wedge R(y,x)) \wedge (\exists x)(\exists y)(R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$$

Veamos que no hay una fórmula modal que exprese esta misma condición [39]. Sean las estructuras de Kripke $E_1 = (W_1, R_1)$ y $E_2 = (w_2, R_2)$ tales que:

- $W_1 = \{w_0\}$ y $W_2 = \{w_1, w_2\}$
- $R_1 = \{(w_0, w_0)\}$ y $R_2 = \{(w_1, w_2)\}$

E_1 es una estructura simétrica, pero E_2 es asimétrica. La unión disjunta, $E_1 \uplus E_2$, en cambio, es una estructura no-simétrica. Ahora supongamos que existiera una fórmula modal A que expresara la no-simetría. Esta fórmula sería no válida en E_1, en cambio, sería válida en $E_1 \uplus E_2$ (por hipótesis). Sea entonces $M_1 = (E_1, h_1)$ un modelo basado sobre E_1 donde A es inválida, es decir, $w_0 \notin h_1(A)$, y sea $M_2 = (E_2, h_2)$ cualquier modelo sobre E_2. Definamos $M_1 \uplus M_2 = (E_1 \uplus E_2, h_1 \uplus h_2)$. Es claro que en este modelo A tampoco es válida, pues el valor de A en w_0 es el mismo en ambos modelos M_1 y $M_1 \uplus M_2$. Esto contradice que A sea válida en $E_1 \uplus E_2$. Así pues, tal fórmula A no puede existir.

2.11. Lógicas Modales Normales

Sea $\mathfrak{C}$ una clase de estructuras. Consideremos de nuevo el conjunto de fbfs

$$LM_{\mathfrak{C}} = \{A \mid \ \models_E A \quad \text{para todo} \ \ E \in \mathfrak{C}\}$$

Teorema 2.22 *$LM_{\mathfrak{C}}$ satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si A es una instancia de una tautología, entonces $A \in LM_{\mathfrak{C}}$.*

---

[37] En definitiva, no existe un conjunto infinito de fbfs (ya que el lenguaje LM es infinito numerable

[38] La demostración de esta afirmación escapa a los objetivos de este texto.

[39] Es decir, un esquema válido exclusivamente en las estructuras no simétricas.

2. *Para toda $A \in LM$ se tiene que $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \in LM_{\mathfrak{E}}$.*
3. *Si $A, A \to B \in LM_{\mathfrak{E}}$, entonces $B \in LM_{\mathfrak{E}}$.*
4. *Si $A \in LM_{\mathfrak{E}}$, entonces $\Box A \in LM_{\mathfrak{E}}$*

DEMOSTRACIÓN:

1. Por el ítem 3. del teorema 2.2, si A es una instancia de una tautología, entonces A es válida y por lo tanto, $\models_E A$ para toda $E \in \mathfrak{E}$
2. Por el ítem 9. del teorema 2.2, se tiene que $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ y por lo tanto, $\models_E \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ para toda $E \in \mathfrak{E}$
3. Si $A, A \to B \in LM_{\mathfrak{E}}$ se tiene que, para todo $E \in LM_{\mathfrak{E}}$ y para todo modelo $M = (W, R, h)$ se tiene que $h(A) = h(A \to B) = W$. Por lo tanto, puesto que $A \wedge (A \to B) \equiv B$, se tiene que $h(B) = W$, es decir, $\models_M B$ y, en consecuencia, $\models_E B$.
4. Por la proposición 2.8. ■

Definición 2.31 *Un conjunto de fbfs modales con estas características se dice que es una* `lógica modal normal`*.*

👀 Obviamente, LM es una lógica modal normal (denominada `la lógica modal inconsistente`).

Una lógica modal normal $\mathcal{L}$ es una sublógica de una lógica modal normal $\mathcal{L}'$ si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ (también decimos que $\mathcal{L}'$ es una extensión de $\mathcal{L}$.

Proposición 2.11 *Si $\{\mathcal{L}_i \mid i \in \lambda\}$ es una colección no vacía de lógicas modales normales entonces $\bigcap_{i \in \lambda} \mathcal{L}_i$ es una lógica modal normal.*

Puesto que hay lógica modales normales (por ejemplo la lógica modal inconsistente), la proposición anterior nos define la menor lógica modal normal: la intersección de la familia de todas las lógicas modales normales. Tal lógica se conoce como la lógica modal K, en honor a Saul Kripke.

Mediante las combinaciones de los esquemas K, D, T, B, 4 y 5 obtenemos 15 lógicas distintas (i.e., no equivalentes: sin coincidencia de sus conjuntos de fbfs válidas) [40]. Estas 15 lógicas son: $K, KD, KT, KB, K4, K5, KDB, KD4, KD5, K45, KTB, S4, KD45, KB4, S5$. Todas ellas son lógicas normales. En adelante, denotaremos por $\models_X$, con X el nombre de la lógica, la relación de consecuencia semántica para cada una de ellas.

2.12. Modalidades en las lógicas $S4$ y $S5$

Definición 2.32 *En LM llamamos* `modalidades` *a toda secuencia $\lambda = \sharp_1 \ldots \sharp_n$, donde $\sharp_i \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si se tiene que $\sharp_i \in \{\Box, \Diamond\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ la modalidad λ se denomina* `modalidad positiva`*.*

---

[40] Sin importar cómo se nombren, por ejemplo, $KT5 = KT45$

Lema 2.3 *En toda lógica modal normal se tiene que toda modalidad es equivalente a una modalidad positiva*

Demostración: Es consecuencia inmediata de las leyes $\neg\neg A \equiv A$, $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$, y $\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$. ■

Teorema 2.23 *Las únicas modalidades positivas en la lógica $S4$ son:*

$$\Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond$$

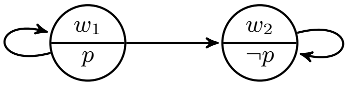
Entre ellas se tiene la relación siguiente [41]*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \Box A \arrow[dl] \arrow[rrdd] & & \\
 & \Box\Diamond\Box A \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
\Diamond\Box A \arrow[dr] & & \Box\Diamond A \arrow[dl] & & A \arrow[ddll] \\
 & \Diamond\Box\Diamond A \arrow[dr] & & & \\
 & & \Diamond A & &
\end{tikzcd}$$

■

Demostración:

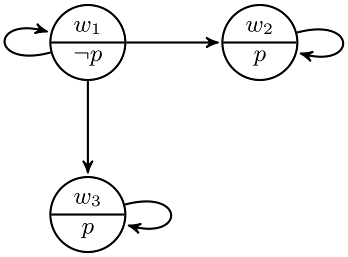
1. $\not\models_{S4} \Diamond A \to \Box A$ como nos muestra el siguiente modelo en el que $M, w_1 \not\models \Diamond A \to \Box A$



2. $\Box\Box A \equiv_{S4} \Box A$ y $\Diamond\Diamond A \equiv_{S4} \Diamond A$, por las leyes (T) y (4)

3. $\not\models_{S4} \Box\Diamond A \to \Diamond A$ como nos muestra el modelo del ítem 1., en el que $M, w_1 \not\models \Diamond A \to \Box\Diamond A$.

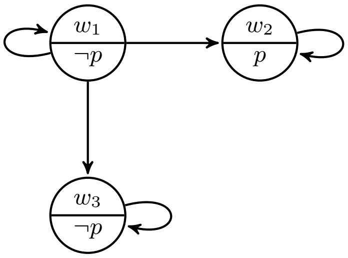
4. $\not\models_{S4} \Box\Diamond A \to \Box A$ como nos muestra el siguiente modelo en el que $M, w_1 \not\models \Box\Diamond A \to \Box A$



---

[41] Entendiendo que una flecha de X a Y representa que $\models X \to Y$.

5. $\not\models_{S4} \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ como nos muestra el siguiente modelo en el que $M, w_1 \not\models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$



6. Se deja como ejercicio al lector comprobar que ni $\Box\Diamond\Box A$, ni $\Diamond\Box\Diamond A$ es $\equiv_{S4}$ a λA donde λ es una modalidad positiva tal que $|\lambda| \leq 3$.

7. Por último, veamos que

   7.1 $\Box\Diamond\Box\Diamond A \equiv_{S4} \Box\Diamond A$, y

   7.2 $\Diamond\Box\Diamond\Box A \equiv_{S4} \Diamond\Box A$

   En efecto, demostramos 7.1, (la demostración de 7.2 es similar):

   $\Box\Diamond\Box\Diamond A \models_{S4} \Box\Diamond\Diamond\Diamond A$ por (T)

   $\Box\Diamond\Diamond\Diamond A \models_{S4} \Box\Diamond A$ por (4)

   y, por otra parte,

   $\Box\Diamond A \models_{S4} \Box\Box\Box\Diamond A$ por (4)

   $\Box\Box\Box\Diamond A \models_{S4} \Box\Diamond\Box\Diamond A$ por (T). ■

Teorema 2.24 *Si λ es una modalidad y $A \in S5$, entonces $\lambda\Box A \equiv \Box A$ y $\lambda\Diamond A \equiv \Diamond A$*

Demostración: Lo demostramos por inducción sobre la longitud, n de λ:

- Si $n = 1$:
  - $\Box\Box A \equiv \Box A$ por ser válidos los esquemas (T) y (4).
  - $\Diamond\Diamond A \equiv \Diamond A$ por ser válidos los esquemas (T) y (4).
  - $\Diamond\Box p \equiv \Box p$ por ser válidos los esquemas (T) y (5).
  - $\Box\Diamond p \equiv \Diamond p$ por ser válidos los esquemas (T) y (5).
- Supongamos que es cierto para $|\lambda| = n$ y lo demostramos para $|\lambda| = n + 1$
  - Si $\lambda\Box A = \lambda'\Box\Box A$, por ser válidos los esquemas (T) y (4), $\lambda\Box A \equiv_{S5} \lambda'\,\Box A$ y, por hipótesis de inducción, $\lambda\Box A \equiv_{S5} \Box A$.
  - Si $\lambda\Box A = \lambda'\Diamond\Box A$, por ser válido el esquema (5), $\lambda\Box A \equiv_{S5} \lambda'\,\Box A$ y, por hipótesis de inducción, $\lambda\Box A \equiv_{S5} \Box A$.
  - la demostración de los casos $\lambda\Diamond A = \lambda'\Box\Box A \equiv_{S5} \Diamond A$ y $\lambda\Diamond A = \lambda'\Diamond\Box A \equiv_{S5} \Diamond A$ es similar. ■

Corolario 2.7 *Las única modalidades positivas en la lógica* $S5$ *son* $\Box$ *y* $\Diamond$*.*

El siguiente es otro resultado destacado de la lógica $S5$:

Teorema 2.25 (Propiedad de Absorción) *En la lógica* $S5$ *son ciertas las siguientes leyes:*

1. $\Box(A \vee \Box B) \equiv_{S5} \ \Box A \vee \Box B$
2. $\Box(A \vee \Diamond B) \equiv_{S5} \ \Box A \vee \Diamond B$
3. $\Diamond(A \wedge \Diamond B) \equiv_{S5} \ \Diamond A \wedge \Diamond B$
4. $\Diamond(A \wedge \Box B) \equiv_{S5} \ \Diamond A \wedge \Box B$.

DEMOSTRACIÓN: Demostramos el ítem 1., el resto de las demostraciones son similares.
Puesto que $\models_{S5} \Box A \to \Box(A \vee \Box B)$; $\models_{S5} \Box B \to \Box\Box B$ y $\models_{S5} \Box\Box B \to (A \vee \Box B)$, se tiene que $\models_{S5} (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee \Box B)$.
Inversamente,

$$\Box(A \vee \Box B) \equiv \Box(\neg\Box B \to A), \qquad \text{(ley booleana)}$$

$$\Box(\neg\Box B \vee A) \equiv \Box(\Diamond\neg B \to A) \qquad (\neg\Box B \equiv \Diamond\neg B)$$

$$\models \Box(\Diamond\neg B \vee A) \to (\Box\Diamond\neg B \to \Box A) \qquad \text{(esquema } (K))$$

$$\Box(\Diamond\neg B \to A) \to (\Box\Diamond\neg B \to \Box A) \equiv \Box(\neg\Diamond\neg B \vee A) \to (\neg\Box\Diamond\neg B \vee \Box A) \qquad \text{(ley booleana)}$$

$$\Box(\neg\Diamond\neg B \vee A) \to (\neg\Box\Diamond\neg B \vee \Box A) \equiv \Box(\Box B \vee A) \to (\Diamond\Box B \vee \Box A)$$

$$(\neg\Box B \equiv \Diamond\neg B \text{ y corolario 2.7})$$

Por lo tanto, $\models \Box(\Box B \vee A) \to (\Diamond\Box B \vee \Box A)$. ∎

Corolario 2.8 *Toda fbf,* A *en* $S5$ *es equivalente a una fbf,* A'*, tal que* $gr_m(A') = 1$*, es decir, podemos eliminar todo anidamiento de las conectivas modales en* $S5$*.*

DEMOSTRACIÓN: Mostramos el proceso para transformar A en A' mediante un ejemplo sencillo Sea $B \in S5$ tal que $gr_m(B) = 2$:

$$\Box(p \vee \Diamond q \vee r \vee \Box s) \equiv_{S5} \Box(p \vee r \vee \Box s) \ \vee \ \Diamond q \equiv_{S5} \Box(p \vee r) \vee \Box s \vee \Diamond q.$$ ∎

2.12.1. Forma normal conjuntiva en $S5$

El teorema 2.25 anterior permite definir en $S5$ una forma normal conjuntiva modal:

Definición 2.33 *Sea* $A \in S5$

- A *es un* `átomo modal` *si pertenece al conjunto* $\{p, \neg p, \Box p, \Diamond p, \Box\neg p, \Diamond\neg p \mid p \in \mathcal{V}_{prop}\}$.
- A *es una* `forma normal conjuntiva modal`*, denotado* `fncm`*, si es de la forma* $A = \bigwedge_{i=1}^{i=n} C_i$*, donde cada* C_i *es una disyunción de átomos modales.*

Proposición 2.12 *Para toda fbf,* A*, en* $S5$ *existe una fncm,* A'*, tal que* $A \equiv_{S5} A'$*.*

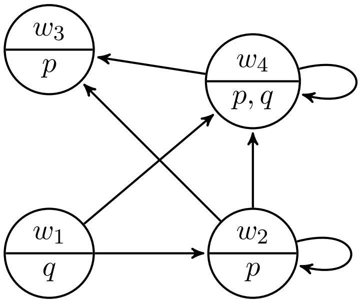
Demostración: Lo demostramos proporcionando un procedimiento de transformación:

1. Eliminar $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ mediante las leyes $X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$ y $X \leftrightarrow Y \equiv (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$
2. Transmitir las negaciones a los átomos mediante las leyes de doble negación, De Morgan, $\neg \Box X \equiv \Diamond \neg X$ y $\neg \Diamond X \equiv \Box \neg X$
3. Reducir iteración de modalidades
4. Aplicar distributividad de $\Box$ respecto de $\wedge$, distributividad de $\Diamond$ respecto de $\vee$
5. Aplicar las leyes de absorción del teorema 2.25. ■

2.13. Ejercicios

1. Sea R una relación binaria en W. Demuestre que
   - *a*) Si R es reflexiva entonces es serial.
   - *b*) Si R es simétrica y transitiva, entonces es euclídea.
   - *c*) R es simétrica, transitiva y serial si y solo si es reflexiva y euclídea si y sólo si es una relación de equivalencia.
2. Demuestre que $\Diamond(p \to \Diamond\Box(p \to r))$ es satisfacible
3. Dé un contramodelo para cada una de las siguientes fbfs
   - *a*) $\Diamond(p \to p)$
   - *b*) $\Box p \to \Box\Box q$
4. Dé un contramodelo para cada una de las siguientes fbfs
   - *a*) $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$
   - *b*) $\Diamond(p \to p)$
   - *c*) $(\Diamond p \to \Diamond q) \to \Box(p \to q)$
   - *d*) $\Box p \to \Box\Box p$
5. Sea $M = (W, R, h)$ un modelo y sean $w, w' \in W$ tales que
   - $R(w) = R(w')$,
   - $\{p \in \mathcal{V}_{prop} \mid w \in h(p)\} = \{p \in \mathcal{V}_{prop} \mid w' \in h(p)\}$

   demuestre que, para toda fbf $A \in LM$ se tiene que $M, w \models A$ si y solo si $M, w' \models A$
6. Halle en qué mundos del siguiente modelo es verdadera la fbf $\Box\Diamond\Box p$ y la fbf $\Diamond p \to \Box q$



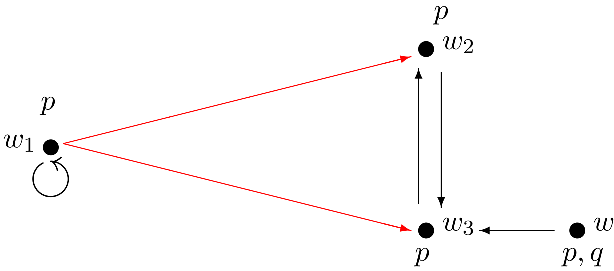
7. Analice la validez de las siguientes fbfs
   - *a*) $\Box p \vee \neg\Box p$,
   - *b*) $\Box p \vee \Box\neg p$

8. Considere los modelos

$$M = (W, R, h) = (\{w_1\}, \{(w_1, w_1\}, h(p) = \{w_1\}) \text{ y}$$

$$M' = (W', R', h') = (\{w_2, w_3, w_4\}, \{(w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}, h(p) = \{w_2, w_3, w_4\}, h(q) = \{w_4\})$$

y compruebe que la relación binaria, $B = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$, representada en la figura por flechas rojas:



es una bisimulación entre M y M'.

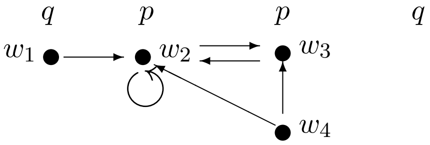
9. Demuestre que la composición de bisimulaciones entre modelos es una bisimulación.

10. Considere los modelos

$$M = (W, R, h) = (\{w_1\}, \{(w_1, w_1\}, h(p) = \{w_1\}) \text{ y}$$

$$M' = (W', R', h') = (\{w_2, w_3, w_4\}, \{(w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}, h(p) = \{w_2, w_3, w_4\}, h(q) = \{w_4\})$$

y compruebe que la relación binaria, $B = \{(w_1, w_4), (w_2, w_3), (w_2, w_2), (w_3, w_2)\}$:



es una autobisimulación.

11. Determine qué clase de estructuras define cada uno de los siguientes esquemas
    - *a*) el esquema $A \leftrightarrow \Box A$
    - *b*) $\Box(\Box A \rightarrow A)$

12. Demuestre que $\models_E \Box(\Box A \rightarrow A)$ define la clase de estructuras casi-reflexivas, es decir, la clase de estructuras $E = (W, R)$ tal que si, para tod $w, w' \in W$ se tiene que si $R(w, w')$ entonces $R(w', w')$.

13. Considere la fbf $A = \Diamond p \rightarrow \Box p$ y razone si alguna de las siguientes opciones es correcta: A es válida en toda estructura $E = (W, R)$ tal que
    - (i) R es simétrica
    - (ii) R es reflexiva
    - (iii) $|R(w)| \leq 1$ para todo $w \in W$

14. Demuestre en la lógica K la validez de las siguientes fbfs:

a) $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

b) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$

c) $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$.

d) $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$.

e) $\Diamond(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond q)$.

f) $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$.

15. Demuestre en la lógica K la validez de las siguientes fbfs
    - *a)* $\Box(p \to p)$
    - *b)* $\Diamond p \to (\Box q \to \Diamond q)$
    - *c)* $\Diamond(p \to q) \leftrightarrow (\Box p \to \Diamond p)$
16. Demuestre en la lógica K la validez de las siguientes fbfs:
    - *a)* $(\Box(p \to q) \wedge \Box(q \to r)) \to \Box(p \to r)$
    - *b)* $\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$
    - *c)* $(\Box(p \to q) \wedge \Diamond(p \wedge r)) \to \Diamond(q \wedge r)$
    - *d)* $\Diamond(p \to (q \wedge r)) \to ((\Box p \to \Diamond q) \wedge (\Box p \to \Diamond r)$
    - *e)* $\Diamond(p \to p) \to (\Box q \to \Diamond q)$
    - *f)* $(\Box p \wedge \Diamond(q \to r)) \to (\Box(p \to q) \to \Diamond(p \wedge r))$
    - *g)* $(\Box p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$
    - *h)* $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$
17. Sea $\mathfrak{E}_{\mathbb{P}} = \{(E = (W, R) \mid E \text{ tiene la propiedad } \mathbb{P}\}$ caracterice cada una de las siguientes propiedades $\mathbb{P}$ mediante $\models_{\mathfrak{E}_{\mathbb{P}}}$:
    - *a)* R es patética, es decir, $R(w) \subseteq \{w\}$ para todo $w \in W$
    - *b)* R es densa, es decir, $R \subseteq R^2$.
    - *c)* R es un preorden, es decir, es reflexiva y transitiva.
    - *d)* R es determinista o funcional parcial, es decir, $|R(w)| \leq 1$
    - *e)* R es funcional, es decir, $|R(w)| = 1$
    - *f)* R es confluyente, es decir, para cada par $w, w' \in W$ se tiene que $R(w) \cap R(w') \neq \varnothing$
    - *g)* Demuestre que
        1) toda relación reflexiva es densa,
        2) toda relación patética es transitiva,
        3) toda relación funcional es serial.
18. Compruebe que en la lógica T es válida la fbf $\Diamond(A \to \Box A)$.
19. Describa un modelo serial ($M = (W, R, h)$ con R serial) en el que $\models_M \Box(p \to q)$.
20. Demuestre en la lógica KD la validez de la fbf $\Diamond\neg p \vee \Diamond\neg q \vee \Diamond(p \vee q)$
21. Describa un modelo reflexivo y transitivo tal que tanto el esquema B como el esquema (5) no sean válidos en el mismo.
22. Demuestre en $S4$ la validez de las siguientes fbfs:
    - *a)* $\Box(p \to q) \wedge \Box(\Box p \to \Box q)$
    - *b)* $(\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box(\Box p \vee \Box q)$
    - *c)* $\Diamond\Box(p \to \Box\Diamond p)$

d) $\Diamond(\Box p \to \Diamond q) \to \Diamond(p \to q)$

23. Describa un algoritmo de complejidad lineal para reducir cualquier modalidad de $S4$ a una modalidad $\lambda \in \{\Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond\}$.

24. Demuestre que

    - $\Diamond\Diamond p \not\models \Diamond p$
    - Si $\mathfrak{E}_{tran} = \{E = (W, R) \mid E \text{ transitiva}\}$, entonces $\Diamond\Diamond p \models_{\mathfrak{E}_{tran}} \Diamond p$

25. Demuestre en $S5$ la validez de las siguientes fbfs:

    a) $\Box(\Box p \to \Box q) \vee \Box(\Box p \to \Box q)$
    b) $\Box(\Diamond p \to q) \leftrightarrow \Box(p \to \Box q)$
    c) $\Diamond\Box p \to (\Diamond p \to \Box(p \wedge \Diamond q)$

26. Transforme a fncm las siguientes fbfs en la lógica $S5$:

    a) $\Box(p \vee (q \wedge (r \vee \Box s)))$
    b) $\Diamond(p \wedge q) \to \Box(\Box(\Box p \to \Box q) \to \Diamond q)$
    c) $\Box(p \to (q \to \Box(p \to q))) \to (\neg\Box(p \to q) \to \Box(p \to \neg q))$
    d) $\Box(p \to q) \to \Box(\Diamond(p \wedge \neg\Box p) \to \Diamond(q \wedge \Box(p \to \Box p)))$
    e) $\Box(p \to \Box(q \to r)) \to (q \to \Box(p \to))$
    f) $\Box(\Box(p \leftrightarrow p) \to \Diamond q) \to \Box(\Box(p \leftrightarrow q) \to q)$
    g) $\Box(\Box(p \to \Box p) \to (\Diamond\Box\Diamond p \to \Box p)$
    h) $(\Box(\Box(p \to q) \to q) \to p) \to \Diamond(\Box q \to p)$
    i) $\Box(\Box(\Box p \to \Box p) \to \Box(p \to q))$

27. Transforme a fncm las siguientes fbfs en la lógica $S5$:

    a) $\Box(\Diamond\Diamond p \to p) \to \Box(p \to \Box p)$
    b) $\Box(\Box(p \to (q \wedge \Diamond r)) \to \neg\Diamond(p \wedge \neg q \wedge \neg\Diamond r))$

Capítulo 3

Teoría de la Demostración para la Lógica Modal Proposicional

Recordemos que el objetivo de la Teoría de la demostración es caracterizar la validez semántica y la consecuencia lógica en términos puramente sintácticos, es decir, especificar un "mecanismo deductivo" que permita obtener una fbf de otras sin hacer referencia a los modelos.

En particular, en los llamados `Sistemas Axiomáticos` sobre un lenguaje L, el mecanismo deductivo viene dado por:

1. Un conjunto finito o infinito numerable, $\mathcal{A}x$, de fbfs de L, llamadas `axiomas`.
2. Un conjunto de `reglas de inferencia` que establecen cuándo una fbf de L es "consecuencia inmediata" de una o varias fbfs de L.

Definición 3.1 *Una* `demostración` *en un sistema axiomático, $\mathcal{S}$, es una secuencia finita de fbfs, en la cual cada fbf es o un axioma de $\mathcal{S}$ o una consecuencia inmediata (según dictan las reglas de inferencia) de una o más fbfs precedentes en la secuencia. Si la última fbf de una demostración es A, se dice que la secuencia es* `una demostración de` *A.*

Definición 3.2 *Una fbf, A, se dice es un* `teorema` *en un sistema axiomático $\mathcal{S}$, denotado $\vdash_{\mathcal{S}} A$ (o simplemente $\vdash A$, si no hay lugar a confusión), si existe para ella una demostración. Obviamente, los axiomas de $\mathcal{S}$ son teoremas de $\mathcal{S}$. Podemos caracterizar el conjunto de los teoremas como el conjunto minimal de fbfs que contiene al conjunto de los axiomas y es cerrado para las reglas de inferencia.*

◔◔ De la definición anterior se tiene que en una demostración de longitud n, si $m < n$ y consideramos los m primeros elementos de la secuencia, tenemos una demostración del m-ésimo elemento de la secuencia. Por tanto todas las fbfs de una demostración son teoremas.

En este capítulo introducimos la extensión a las lógicas modales proposicionales del sistema axiomático considerado para la lógica clásica proposicional. Por lo tanto, para cada una de ellas, tan solo requeriremos añadir a los axiomas y regla de inferencia del sistema clásico proposicional, nuevos axiomas y reglas de inferencias para regir el comportamiento de $\Box$ y $\Diamond$.

Recordemos que hemos analizado que cada clase, $\mathfrak{C}$, de estructuras de Kripke proporciona un conjunto destacado de fbfs, el conjunto de las fbfs $\mathfrak{C}$-válidas y, en definitiva, una lógica modal.

A estas lógicas las hemos nombrado por la secuencia de los símbolos con los que se denotan los esquemas de fbfs válidas que caracterizan las propiedades de la relación que determina la clase de estructuras considerada. Nuestro objetivo en este capítulo es introducir la extensión del sistema de Łukasiewicz para la lógica clásica proposicional a las `lógicas modales normales` K, T, D, $S4$, $\dots$.

Antes de abordar este objetivo, concretemos algo más: Sabemos que dado el lenguaje LM y la semántica de Kripke para LM, "caracterizar axiomáticamente la noción de validez semántica" consiste en definir un sistema axiomático, $\mathcal{S}$ para LM, de tal modo que el conjunto de los teoremas de $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} = \{A \in LM \mid \vdash_{\mathcal{S}} A\}$) sea exactamente el conjunto de fbfs semánticamente válidas. Pero, en nuestro estudio semántico hemos introducido el concepto de $\mathfrak{C}$-validez (para una clase de estructuras $\mathfrak{C}$). Por lo tanto, fijada una clase de estructuras $\mathfrak{C}$ [1], nuestro objetivo es definir sistemas axiomáticos $\mathcal{S}$ tales que, dada una fbf $A \in LM$ se satisfaga que

$$\vdash_{\mathcal{S}} A \quad \text{si y solo si} \quad \models_{\mathfrak{C}} A$$

De este modo, habremos definido sistemas que gozan de la propiedad de `corrección` (es decir, todo $\mathcal{S}$-teorema es una fbf $\mathfrak{C}$-válida) y de la propiedad de `completitud`, es decir, toda fbf $\mathfrak{C}$-válida es un $\mathcal{S}$-teorema). En este caso, se dice que $\mathcal{S}$ está caracterizado por $\mathfrak{C}$.

Señalemos que, en adelante, para cada lógica normal, los sistemas axiomáticos que definiremos para dicha lógica toman el mismo nombre que la misma.

Comencemos con algunos conceptos y resultados generales.

Definición 3.3 *Decimos que un sistema axiomático, $\mathcal{S}$, tiene la* `propiedad de modelo finito` *(en adelante,* `pmf`*) si puede ser caracterizado por una clase de modelos finitos, es decir, existe una clase de modelos finitos, $\mathcal{C}_{fin}$, tal que, para toda fbf $A \in LM$ se tiene que*

$$\vdash_{\mathcal{S}} A \quad \textit{si y solo si} \quad \models_{\mathcal{C}_{fin}} A$$

Proposición 3.1 *Sean $\mathcal{S}$ un sistema axiomático para LM que es correcto respecto a la clase de todos los modelos de Kripke, $\mathcal{C}$ una clase de modelos de Kripke y $\mathcal{C}_{fin} \subseteq \mathcal{C}$ el subconjunto de los modelos finitos en $\mathcal{C}$. Entonces, se satisface la propiedad siguiente:*

$$\textit{Si } \mathcal{C}_{fin} \textit{ caracteriza a } \mathcal{S}, \textit{ se tiene que } \mathcal{C} \textit{ caracteriza a } \mathcal{S}$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que probar que para toda fbf, A, se tiene que si A es $\mathcal{C}$-válida, entonces A es un $\mathcal{S}$-teorema. En efecto, si A es $\mathcal{C}$-válida, puesto que $\mathcal{C}_{fin} \subseteq \mathcal{C}$, se tiene que A es $\mathcal{C}_{fin}$-válida y puesto que $\mathcal{C}_{fin}$ caracteriza a $\mathcal{S}$ se tiene que A es un $\mathcal{S}$-teorema. ■

Al lector no se le habrá escapado el interés del anterior resultado de cara al estudio de la decidibilidad de las lógicas modales proposicionales en las que estamos interesados.

Definición 3.4 *Sea $\mathcal{S}$ un sistema axiomático para LM. Un conjunto de fbfs, $\Omega \subseteq LM$, se dice $\mathcal{S}$-*`inconsistente` *si existen fbfs $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ tales que $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$. En caso contrario, Ω se dice $\mathcal{S}$-*`consistente`.

---

[1] Nos limitaremos a las clases de estructuras que hemos destacado en el capítulo anterior, porque nos definen `lógicas modales normales`.

Una fbf A de LM es $\mathcal{S}$-`inconsistente` *si* $\{A\}$ *lo es. En caso contrario,* A *se dice* $\mathcal{S}$-`consistente`.

Nótese que de la definición anterior se sigue fácilmente que si $\Omega = \{A_1, \ldots, A_n\}$, entonces es $\mathcal{S}$-inconsistente si y solo si $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$.

Destacamos los dos resultados siguientes, cuya demostración se deja al lector

Proposición 3.2 *Sea* $\mathcal{S}$ *un sistema axiomático para* LM, $\Omega \subseteq LM$ *y* $A \in LM$. *Si* Ω *es* $\mathcal{S}$-*consistente, entonces o bien* $\Omega \cup \{A\}$ *es* $\mathcal{S}$-*consistente o bien* $\Omega \cup \{\neg A\}$ *es* $\mathcal{S}$-*consistente.*

Proposición 3.3 *Sea* $\mathcal{S}$ *un sistema axiomático para* LM, $\Omega \subseteq LM$ *y* $\neg\Box A \in \Omega$. *Si* Ω *es* $\mathcal{S}$-*consistente, entonces* $\{B \mid \Box B \in \Omega\} \cup \{\neg A\}$ *es* $\mathcal{S}$-*consistente.*

Abordemos ya la tarea se definir los sistemas axiomáticos deseados para LM.

3.1. Un sistema axiomático para K

Comenzamos con la lógica modal normal minimal, K que, como sabemos, debe su nombre a Saul Kripke y en la que no se impone ninguna propiedad restrictiva a las relaciones de accesibilidad. Deseamos caracterizar la lógica modal proposicional K mediante un sistema axiomático, de forma que podamos caracterizar las fórmulas K-válidas como aquellas que podemos obtener a partir de un conjunto de `Axiomas` mediante la aplicación de unas `Reglas de Inferencia`.

Escogeremos un sistema extensión del sistema de Łukasiewicz para la lógica clásica proposicional, es decir, utilizaremos como primitivas las conectivas $\neg, \rightarrow$ y $\Box$ e introducimos el resto de las conectivas como definidas, es decir,

$$A \wedge B =_{def} \neg(A \rightarrow \neg B);\; A \vee B =_{def} \neg A \rightarrow B;\; A \leftrightarrow B =_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A);\; \Diamond A =_{def} \neg\Box\neg A$$

Axiomas:

El conjunto de axiomas es el siguiente:

(i) Los de la lógica clásica proposicional. [2]

(ii) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ (**Axioma K o de distribución**).

Reglas de Inferencia:

(MP): $A, A \rightarrow B \vdash B$ (**Regla Modus Ponens**)

(Nec): $A \vdash \Box A$ (**Regla De Necesidad**)

---

[2] Es decir,

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Definición 3.5 *Una fbf $A \in LM$ se dice que es un K-*`teorema`*, denotado $\vdash_K A$, si existe una secuencia finita de fbfs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tal que:*

1. *Cada A_i $(1 \leq i \leq n)$ es un axioma, o es obtenida mediante la aplicación de (MP) a partir de dos fbfs anteriores en la secuencia, o es obtenida mediante la aplicación de (Nec) a partir de una fbf anterior en la secuencia.*
2. *A_n es A.*

A la secuencia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se le denomina una `demostración` *de A. Obviamente, todo axioma es un teorema cuya demostración se reduce a una secuencia con ella como único elemento.*

◉◉ En adelante, cuando nos refiramos a demostraciones realizadas usando únicamente los axiomas y la regla de inferencia de la lógica clásica proposicional (es decir, que no requieren el uso del axioma (K) ni de la regla de inferencia (Nec), lo explicitaremos etiquetando tal demostración o deducción con (PC). [3]

En el sistema K tenemos las siguientes reglas de inferencia derivadas:

Proposición 3.4

RD-1: *Si $\vdash_K A \rightarrow B$ entonces $\vdash_K \Box A \rightarrow \Box B$.*

RD-2: *Si $\vdash_K A \rightarrow B$ entonces $\vdash_K \Diamond A \rightarrow \Diamond B$*

DEMOSTRACIÓN: Demostramos RD-1 (RD-2 se obtiene de RD-1 por contraposición).

1. $\vdash_K A \rightarrow B$	Hipótesis
2. $\vdash_K \Box(A \rightarrow B)$	1. y (Nec)
3. $\vdash_K \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$	(K)
4. $\vdash_K \Box A \rightarrow \Box B$	2 y 3 y (MP)

Demostramos a modo de ejemplo dos teoremas más del sistema K:

Proposición 3.5

(i) $\vdash_K \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

(ii) $\vdash_K (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$

DEMOSTRACIÓN:

(i)	1. $A \wedge B \rightarrow A$	(PC)
	2. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$	1 y (RD-1)
	3. $A \wedge B \rightarrow B$	(PC)
	4. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$	3 y (RD-1)
	5. $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	2 y 4 y (PC)

---

[3] Proposicional Clásica.

	6. $A \to (B \to (A \wedge B))$	(PC)
	7. $\Box A \to \Box(B \to (A \wedge B))$	6 y (RD-1)
	8. $\Box(B \to (A \wedge B)) \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$	(K)
	9. $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$	7, 8 y (PC)
	10. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	Def.$\leftrightarrow$, 5, 9 y (PC)
(ii)	1. $A \to (A \vee B)$	(PC)
	2. $\Box A \to \Box(A \vee B)$	1 y (RD-1)
	3. $B \to (A \vee B)$	(PC)
	4. $\Box B \to \Box(A \vee B)$	3 y (RD-1)
	5. $(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$	2, 4 y (PC)

3.2. Corrección y completitud del sistema K

En esta sección demostramos que el sistema axiomático K es correcto y completo, es decir, el conjunto de K-teoremas coincide con el conjunto de las fbfs K-válidas.

3.2.1. Corrección de K

Teorema 3.1 (Corrección de K) *para toda fbf* $A \in LM$ *se tiene que*

$$\textit{Si} \quad \vdash_K A \quad \textit{entonces} \quad \models A$$

Demostración: Por inducción sobre la longitud, l, de la demostración $\vdash_K A$:

- Si $l = 1$ y $\vdash_K A$ se tiene que A es una axioma y el teorema 2.2 asegura que $\models A$
- Supongamos que el resultado es cierto si $l < k$ y probémoslo para $l = k$:
    - Si la última regla de inferencia aplicada es (MP), tenemos que A se obtiene de dos teoremas anteriores $\vdash_K X$ y $\vdash_K X \to A$ cuyas demostraciones tienen longitud menor que k. Por hipótesis de inducción, $\models X$ y $\models X \to A$ y el ítem 7 del teorema 2.5 asegura que $\models A$.
    - Si la última regla de inferencia aplicada es (Nec), tenemos que $A = \Box B$ y $\vdash_K B$ tiene longitud menor que k. Por hipótesis de inducción conocemos que $\models B$ y por el ítem 3 de la proposición 2.1, tenemos que $\models \Box A$. ∎

3.2.2. Completitud de K

Usaremos las siguientes notaciones: Dada una fbf, A, y el conjunto de sus subfórmulas, $Sub(A)$, denotamos

- $Sub^{-}(A) =_{def} \{\neg B \mid B \in Sub(A)\}$
- $Sub^{\pm}(A) =_{def} Sub(A) \cup Sub^{-}(A)$

Definición 3.6 *Sea $A \in LM$ y $\Omega \subseteq LM$. Diremos que Ω es A-máximamente-K-consistente (abreviadamente: mc_A) si cumple las tres condiciones siguientes:*

1. *$\Omega \subseteq Sub^{\pm}(A)$, es decir, todo elemento de Ω es una subfórmula de A o la negación de una subfórmula de A.*
2. *Si $B \in Sub(A)$ entonces, o bien $B \in \Omega$ o bien $\neg B \in \Omega$ (**A-maximalidad**).*
3. *Ω es K-consistente, es decir, no existen $X_1, \ldots X_n \in \Omega$ tales que $\vdash_K \neg(X_1 \wedge \ldots X_n)$*

En adelante denotaremos $\mathcal{M}c_A = \{\Omega \subseteq LM \mid \Omega \text{ es } mc_A\}$

Lema 3.1 *Sea $A \in LM$ y sea $\Omega \in \mathcal{M}c_A$. Entonces, para toda $B \in Sub(A)$, exactamente una de las dos fbfs, B o $\neg B$, pertenece a Ω.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata de las condiciones de A-maximalidad y K-consistencia. ■

Lema 3.2 *Sea $A \in LM$ y sea $\Omega \in \mathcal{M}c_A$. Entonces, si $B \to C \in Sub(A)$, se tiene que:*

$$B \to C \in \Omega \quad \text{si y solo si} \quad B \notin \Omega \text{ o bien } C \in \Omega$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \in LM$ y $B \to C \in Sub(A)$. Supongamos que:

- $B \to C \in \Omega$.
- $B \in \Omega$ y $C \notin \Omega$

Puesto que $C \in Sub(A)$, y $C \notin \Omega$, el lema anterior asegura que $\neg C \in \Omega$. Así pues, tenemos que $\Gamma = \{B \to C, B, \neg C\} \subseteq \Omega$. Ahora bien, Γ es K-inconsistente, ya que $\vdash_K \neg((B \to C) \wedge B \wedge \neg C)$, lo que contradice que Ω es K-consistente. Por lo tanto, $B \notin \Omega$ o $C \in \Omega$.

Recíprocamente, Supongamos que o bien $B \notin \Omega$ o bien $C \in \Omega$ y demostremos que $B \to C \in \Omega$. Tenemos dos alternativas:

(i) Si $B \notin \Omega$, entonces, puesto que $B \in Sub(A)$, el lema anterior asegura que $\neg B \in \Omega$. Ahora, supongamos por reducción al absurdo que $B \to C \notin \Omega$. Puesto que $B \to C \in Sub(A)$, el mismo lema nos asegura que $\neg(B \to C) \in \Omega$. Luego tenemos que $\{\neg B, \neg(B \to C)\} \subseteq \Omega$ es un conjunto K-inconsistente, pues $\vdash \neg(\neg B, \neg(B \to C))$, lo cual contradice la K-consistencia de Ω.

(ii) Si $C \in \Omega$, siguiendo paso a paso el razonamiento realizado para la primera alternativa, obtenemos que $B \to C \in \Omega$ y la demostración está completada. ■

Lema 3.3 (Lindenbaum) *Sean $A \in LM$ y $\Omega \subseteq LM$. Si $\Omega \subseteq Sub^{\pm}(A)$ y Ω es K-consistente, entonces existe $\hat{\Omega} \subseteq LM$ tal que $\hat{\Omega} \in \mathcal{M}c_A$ y $\Omega \subseteq \hat{\Omega}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $A \in LM$ y $\Omega \subseteq Sub^{\pm}(A)$. Vamos a construir $\hat{\Omega}$.

Supongamos una ordenación $B_1, \ldots, B_n$ de los elementos de $Sub^{\pm}(A)$. Ahora definimos una sucesión de conjuntos de fbfs del siguiente modo:

- $\Omega_0 = \Omega$.
- Para $0 \leq k < n$, definimos $\Omega_{k+1} = \begin{cases} \Omega_k \cup \{B_{k+1}\}, \text{ si } \Omega_k \cup \{B_{k+1}\} \text{ es } K\text{-consistente.} \\ \Omega_k \cup \{\neg B_{k+1}\}, \text{ en caso contrario} \end{cases}$

Probemos que Ω_n es el mc_A buscado, es decir, probemos que

1. $\Omega_n \subseteq Sub^{\pm}(A)$, es decir, todo elemento de Ω_n es una subfórmula de A o la negación de una subfórmula de A.
2. Para toda fbf $B \in Sub(A)$: o bien $B \in \Omega_n$ o bien $\neg B \in \Omega_n$ (**A-maximalidad**).
3. Ω_n es K-consistente, es decir, no existen $X_1, \ldots, X_m \in \Omega_n$ tal que $\vdash \neg(X_1 \wedge \ldots \wedge X_m)$.

Puesto que, por definición, tenemos que $\Omega \subseteq \Omega_j$, para todo j, es inmediato que Ω_n cumple la condición (1).

Veamos que Ω_n satisface la condición 2: Por la construcción de Ω_n, para cada $B \in Sub(A)$ o bien $B \in \Omega_n$ o bien $\neg B \in \Omega_n$, ya que si B es una subfórmula de A, ésta tendrá un subíndice en la enumeración anterior, sea B_i, y entonces la construcción dice que o bien $B_i \in \Omega_i$ o bien $\neg B_i \in \Omega_i$, y en cualquier caso $\Omega_i \subseteq \Omega_n$.

-Por último, probemos que Ω_n es K-consistente, para lo cual basta probar que todo conjunto de la secuencia, Ω_i es K-consistente:

- Ω_0 lo es, por hipótesis.
- Si suponemos que Ω_j lo es, veamos que también lo es Ω_{j+1}. Si no fuera así, entonces tanto $\Omega_j \cup \{B_{j+1}\}$ como $\Omega_j \cup \{\neg B_{k+1}\}$ serían K-inconsistentes, en contradicción con la proposición 3.2. Por consiguiente, Ω_n es K-consistente. ■

Para probar la completitud del sistema K, seguiremos el método de los *mini-modelos canónicos*. Este método nos permitirá finalmente probar también la decidibilidad del sistema K (posteriormente, lo extenderemos a otros sistemas modales). Para cada fbf $A \in LM$ que sea K-consistente construiremos un modelo finito de K que la satisfaga.

Definición 3.7 *Sea $A \in LM$. Llamamos* `mini-modelo canónico para` *A al modelo $M_A = (W_A, R_A, h_A)$ definido como sigue:*

- $W_A = \mathcal{M}c_A$
- $R_A = \{(\Omega, \Omega') \mid \Omega, \Omega' \in W_A \text{ y } \{B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega'\}$
- $h_A(p) = \{\Omega \in W_A \mid p \in \Omega\}$, *para cada* $p \in \mathcal{V}_{prop}(A)$

Ahora podemos probar el resultado fundamental que nos permitirá probar la completitud de K:

Teorema 3.2 *Para toda* $B \in Sub(A)$ *y* $\Omega \in W_A$*:*

$$\Omega \in h(B) \quad \textit{si y solo si} \quad B \in \Omega$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre el grado de B. Dejamos al lector el paso base y los casos inductivos de la lógica proposicional. Nos limitaremos a probar el caso modal, cuando $B = \Box C \in Sub(A)$, supuesto que el teorema se cumple por hipótesis inductiva para C. Sea $\Omega \in W_A$:

- Sea $\Box C \in \Omega$. Si $\Omega' \in W_A$ es tal que $\Omega' \in R_A(\Omega)$, entonces $C \in \Omega'$, luego $\Omega' \in h_A(C)$ (por hipótesis inductiva). Esto asegura que $\Omega \in h(\Box C)$.
- Recíprocamente, procedamos por reducción al absurdo: sea $\Box C \notin \Omega$. Como $\Box C \in Sub(A)$, entonces $\neg\Box C \in \Omega$ (por el lema 3.1). Por la proposición 3.3, tenemos que el conjunto $\Gamma = \{B \mid \Box B \in \Omega\} \cup \{\neg C\}$ es K-consistente (tengamos en cuenta que $\Gamma \subseteq Sub^{\pm}(A)$). Por tanto, por el lema 6.2, existe $\Omega' \in \mathcal{M}c_A$, con $\Gamma \subseteq \Omega'$, de donde se sigue que $\Omega' \in R_A(\Omega)$ (por definición de R_A). Por otra parte, puesto que $\neg C \in \Omega'$ y $C \in Sub(A)$, se tiene que $C \notin \Omega'$ y por hipótesis de inducción, $\Omega' \notin h(C)$, por lo cual llegamos a que $\Omega \notin h(\Box C)$. ■

Ya tenemos todos los elementos necesarios para probar la completitud de K (respecto de la clase de todos los modelos finitos de Kripke).

Teorema 3.3 *Si* $\models_{\mathcal{C}_{fin}} A \in LM$ *entonces* $\vdash_K A$.

DEMOSTRACIÓN: Por reducción al absurdo. Supongamos que $\nvdash_K A$, entonces $\neg A$ es K-consistente. Puesto que $\{\neg A\} \subseteq Sub^{\pm}(\neg A)$, por el lema 6.2, existirá $\Omega \in \mathcal{M}c_{\neg A}$ tal que $\neg A \in \Omega$. Ahora, por el teorema 3.2, se tiene que $\Omega \in h_{\neg A}(\neg A)$, es decir, $\Omega \notin h_{\neg A}(A)$. Luego $\not\models_{\mathcal{C}_{fin}} A$. ■

Advirtamos que K está caracterizado precisamente por una clase de modelos finitos (ya que si A es un K-teorema, tenemos asegurado por la corrección de K que A es válida y, en particular, es válida en todo modelo finito) y el resultado de completitud anterior nos afirma el resultado recíproco, es decir, hemos probado lo siguiente:

Lema 3.4 *K tiene la propiedad de modelo finito.*

Asimismo, hemos probado también que:

Teorema 3.4 *K está caracterizado por la clase de todos los modelos.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa de la proposición 3.1 y el teorema de corrección. ■

Para terminar esta sección, demostramos la propiedad deseada para el sistema K. Recordemos que

Definición 3.8 *Un sistema axiomático S para un lenguaje L se dice* `decidible` *si hay un método efectivo (algoritmo) para determinar si una fbf $A \in L$ es o no un teorema de S.*

Teorema 3.5 *K es decidible.*

Demostración: Dado que K posee una lista finita de esquemas de axioma y reglas de inferencia, el hecho de comprobar que una secuencia finita de fórmulas es una demostración en K es una tarea finita y, por tanto, hay un procedimiento efectivo para ella. Pero, igualmente, por la misma razón, comprobar que un modelo finito es un modelo de K es una tarea finita, que puede realizarse mediante un procedimiento efectivo (es suficiente con un algoritmo de etiquetado, como el presentado en la sección 2.2.3). Ahora, es fácil ver que podemos efectuar una enumeración de todas las demostraciones en K:

$$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n, \ldots \qquad (\dagger)$$

así como una enumeración de todos los modelos finitos (distintos) de K:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \qquad (\dagger\dagger)$$

Sea $A \in LM$. Si A fuera un teorema de K aparecerá su demostración en la lista (†) de demostraciones en K. Por otro lado, puesto que K tiene la propiedad de modelo finito, si A no es un teorema de K existirá un contramodelo en la enumeración (††) de modelos finitos de K. Ahora podemos recorrer las dos enumeraciones anteriores en zig zag y tarde o temprano averiguaremos mecánicamente si A es un teorema de K (es decir, A es la última fórmula de una demostración en K) o bien no lo es, al ser A no válida en un modelo de K (en este caso, el algoritmo de etiquetado nos sirve a tal efecto). ∎

3.3. Sistemas modales normales

En la sección 2.11 hemos dado el nombre de lógicas normales caracterizadas en términos semánticos, es decir mediante el conjunto de sus fbfs válidas. Las definimos como aquellas tales que el conjunto de sus fbfs válidas:

- Contiene todas las tautologías.
- Contiene todas las instancias del esquema K.
- Si contiene a $A, A \to B$, entonces contiene a B.
- Si contiene a A, contiene a $\Box A$

y denotamos por K a la lógica modal normal minimal. Posteriormente, dimos nombre a las 15 lógicas distintas, extensiones de la lógica K (obtenidas mediante las combinaciones de los esquemas K, D, T, B, 4 y 5). En esta sección, caracterizamos las lógicas normales a nivel sintáctico, es decir, caracterizando el conjunto de sus teoremas. El lector ya habrá intuido cuál es la definición:

Definición 3.9 *Sea $\mathcal{S}$ un sistema axiomático para LM. Se dice que $\mathcal{S}$* `es sistema normal` *si satisface las propiedades siguientes:*

1. *Contiene los axiomas de la lógica proposicional clásica (por ejemplo, los del sistema L de Łukasiewicz).*
2. *El esquema* **K***:* $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

3. *Como reglas de inferencia cuenta con* (MP) *y* (Nec).

En consecuencia, el sistema normal más débil es el sistema K.

Al igual que en nuestro estudio semántico, el sistema K puede ser extendido con un número arbitrario de esquemas de axiomas y como en el estudio semántico, cada sistema se nombra $KE_1, \dots E_n$ donde cada $E_i \in \{D, T, B, 4, 5\}$ y en la secuencia no hay repeticiones de nombres de esquema. La secuencia vacía $E1, \dots, E_n$ denota al sistema K. También axiomáticamente, podemos probar que tenemos, en total, 15 sistemas distintos [4]: K, KD, KT, KB, $K4$, $K5$, KDB, $KD4$, $KD5$, $K45$, KTB, $KT4$, $KD45$, $KB4$, $KT5$. [5]

Todas estas extensiones del sistema K son sistemas axiomáticos correctos y completos. Nuestro estudio semántico nos asegurará la correción y, para demostrar su completitud, nos bastará extender el método de los mini-modelos canónicos que hemos usado para el sistema K. Para ello, tendremos que realizar las modificaciones oportunas. Sin embargo, la formulación de la definición 3.6 y los lemas 3.1, 3.2 y 6.2 se adaptan a cualquier sistema normal $\mathcal{S}$, sin más que sustituir K-consistente por $\mathcal{S}$-consistente. Así pues, podemos referirnos a dicha definición y lemas en cada sistema. En cuanto a los lemas 3.7 y 3.2 requieren adaptaciones según el caso. Trataremos algunos sistemas como ejemplo.

3.3.1. El Sistema Axiomático KT (o T)

Este sistema se conoce también como sistema de Gödel-Feys-Von Wright y fue introducido por Feys en 1937. Se obtiene del sistema K añadiendo como axioma

$$\text{(Axioma T):} \quad \Box A \to A \qquad \text{(o bien, equivalentemente: } A \to \Diamond A)$$

Obviamente, todos los teoremas y reglas derivadas del sistema K lo son del sistema T.

Teorema 3.6 (Comrrección del sistema T) *El sistema T es correcto respecto a la clase de modelos finitos reflexivos.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa del teorema 2.17. ∎

Teorema 3.7 (Completitud del sistema T) *El sistema T es completo respecto a la clase de modelos finitos reflexivos.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $A \in LM$ que sea T-consistente, podemos formular de manera análoga el mini-modelo canónico para A y asegurar el resultado del lema 3.2. Todo lo que tenemos que demostrar en este caso es lo siguiente:

Lema 3.5 *Para cualquier $A \in LM$ que sea T-consistente la relación R_A del mini-modelo canónico $M_A^T = (W_A, R_A, h_A)$ es reflexiva.* ∎

---

[4] Dos sistemas axiomáticos se dicen distintos si no coinciden las clases de sus teoremas.

[5] Como comentamos en el capítulo anterior, algunos de ellos reciben otra nomenclatura en la literatura. Así KD ese le conoce como D, KTB es B, $KT4$ es $S4$ y $KT5$ es $S5$.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, recordemos que:

$$R_A = \{(\Omega, \Omega') \mid \Omega, \Omega' \in W_A \text{ y } \{B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega'\}$$

Sea $\Omega \in W_A$, veamos que $\{B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega$. Supongamos que $\{B \mid \Box B \in \Omega\} \not\subseteq \Omega$. Entonces existe B tal que $\Box B \in \Omega$ pero $B \notin \Omega$. Entonces $\neg B \in \Omega$, ya que $B \in Sub(A)$, pero de aqui se sigue que $\{\Box B, \neg B\} \subseteq \Omega$, lo que le convierte en T-inconsistente, pues $\vdash_T \neg(\Box B \wedge \neg B)$. qed.

Podemos ya completar la demostración del teorema de completitud de T respecto a la clase de modelos finitos reflexivos: Si A no es un teorema de T, siguiendo paso a paso el razonamiento seguido en 3.3, obtendremos que A no es válida en $M^T_{\neg A}$, pero $M^T_{\neg A}$ pertenece a la clase de modelos finitos reflexivos, así que está asegurado que hay un modelo en tal clase donde A no es válida. ■

3.3.2. El Sistema Axiomático KD (o D)

El sistema Deóntico D se obtiene añadiendo a K el axioma

$$\Box A \to \Diamond A$$

Teorema 3.8 (Corrección del sistema D) *El sistema D es correcto respecto a la clase de modelos finitos seriales.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa del teorema 2.16. ■

Teorema 3.9 (Completitud del sistema D) *El sistema D es completo respecto a la clase de modelos finitos seriales.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $A \in LM$ que sea D-consistente. Razonando de igual modo que en el caso del sistema T, nos basta probar que:

Lema 3.6 *Para cualquier $A \in LM$ que sea D-consistente la relación R_A del mini-modelo canónico M^D_A es serial.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que R_A en M^D_A no fuera serial, entonces existe $\Omega \in W_A$ tal que

$$\{B \mid \Box B \in \Omega\} \not\subseteq \Omega' \text{ para todo } \Omega' \in W_A$$

Por el lema 6.2, se sigue que el conjunto $\Delta = \{B \mid \Box B \in \Omega\}$ es D-inconsistente. Esto significa que existen $B_1, \ldots, B_n \in \Delta$, con $\Box B_1, \ldots, \Box B_n \in \Omega$, tales que $\vdash_D \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$, luego, usando (Nec), obtenemos que $\vdash_D \Box\neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$. Ahora, usando el esquema **D** y $\vdash_D \Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box A$, obtenemos que $\vdash_D \neg\Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la proposición 3.5 (i), llegamos a que

$$\vdash_D \neg(\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n)$$

Pero esto último significa que Ω es D-inconsistente, pues $\Box B_1, \ldots, \Box B_n \in \Omega$, lo cual es imposible al ser Ω un mc_A. ■

Ahora ya podemos obtener la completitud de D respecto a la clase de modelos finitos seriales: si A no es un teorema de D, siguiendo un razonamiento análogo al expuesto en 3.3, obtendremos que A no es válida en $M^D_{\neg A}$, pero $M^D_{\neg A}$ pertenece a la clase de modelos finitos seriales, así que está asegurado que hay un modelo en tal clase donde A no es válida. ■

3.3.3. El sistema Axiomático KB

El sistema KB se obtiene añadiendo al sistema K el esquema de axioma

$$A \to \Box\Diamond A$$

y, como deseábamos, se tiene que:

Teorema 3.10 (Corrección del sistema KB) *El sistema KB es correcto respecto a la clase de modelos finitos reflexivos.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa del teorema 2.20. ■

Teorema 3.11 (Completitud del sistema KB) *El sistema KB es completo respecto a la clase de modelos finitos simétricos.*

DEMOSTRACIÓN: En este caso hemos de realizar dos modificaciones respecto a la prueba de completitud para K. En primer lugar no basta proceder análogamente a los dos casos anteriores intentando probar simplemente que la relación R_A del mini-modelo canónico para una fórmula cualquiera KB-consistente A es simétrica en este caso. Hemos de redefinir R_A en M_A^{KB} como sigue:

(1) Para cualquier $A \in LM$ que sea KB-consistente la relación R_A del mini-modelo canónico se define por:

$$R_A = \{(\Omega, \Omega') \mid \Omega, \Omega' \in W_A, \{B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega' \text{ y } \{B \mid \Box B \in \Omega'\} \subseteq \Omega\}$$

La relación así definida es obviamente simétrica.

En segundo lugar, necesitamos revisar el teorema 3.2 debido a que ha cambiado la definición de R_A (de la que depende el caso modal en la prueba inductiva, donde se apela a la proposición 3.3, que no podemos usar ahora en la forma allí utilizada).

Procedemos entonces como sigue:

Consideremos en la prueba del teorema 3.2 el caso inductivo $B = \Box C \in Sub(A)$ y sea $\Omega \in W_A$.

-Si $\Box C \in \Omega$ procedemos igual que allí obteniendo que $\Omega \in h_A(\Box C)$.

-Recíprocamente, sea $\Box C \notin \Omega$. Dado que $\Box C \in Sub(A)$, tenemos también que $\neg\Box C \in \Omega$.

Probaremos ahora que el siguiente conjunto

$$\Delta = \{B \mid \Box B \in \Omega\} \cup \{\neg\Box B \mid \neg B \in \Omega\} \cup \{\neg C\}$$

es KB-consistente. Nótese que $\Delta \subseteq Sub^{\pm}(A)$. Probado esto, por el lema 6.2, existirá $\Omega' \in \mathcal{M}c_A$, tal que $\Delta \subseteq \Omega'$. Veremos, además, que esta definición de Δ asegura que $(\Omega, \Omega') \in R_A$, como se requiere, y además tenemos que $\neg C \in \Omega'$, o sea, $C \notin \Omega'$. Ahora, como $\Box C \in Sub(A)$, también $C \in Sub(A)$, luego, por hipótesis de inducción, $\Omega' \notin h_A(C)$, por tanto, $\Omega \notin h_A(\Box C)$. Con esto, el teorema 3.2 estaría probado para KB.

Probemos pues que Δ es KB-consistente: Supongamos que Δ fuera KB-inconsistente, si $\Box B_1, \ldots \Box B_n$ es una enumeración de todas las fórmulas con prefijo $\Box$ en Ω y $\neg C_1, \ldots, \neg C_m$ una enumeración de todas las fórmulas con prefijo $\neg$ en Ω, entonces tenemos que:

$$\vdash_{KB} \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \wedge \neg C)$$

por (PC) tenemos que

$$\vdash_{KB} (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to ((\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m) \to C)$$

por $(RD$-$1)$ y (PC)

$$\vdash_{KB} \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to (\Box(\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m) \to \Box C)$$

por la proposición 3.5(i) y (PC)

$$\vdash_{KB} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n) \to (\neg\Box C \to (\neg\Box\neg\Box C_1 \vee \ldots \vee \neg\Box\neg\Box C_m))$$

por el esquema B y (PC)

$$\vdash_{KB} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n) \to (\neg\Box C \to (C_1 \vee \ldots \vee C_m))$$

y, finalmente por (PC), llegamos a que

$$\vdash_{KB} \neg(\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg\Box C \wedge \neg C_1 \wedge \ldots \wedge \neg C_m)$$

pero $\{\Box B_1, \ldots, \Box B_n, \neg\Box C, \neg C_1, \ldots \neg C_m\} \subseteq \Omega$, lo que le convertiría a Ω en KB-inconsistente, obteniendo una contradicción.

Por el lema 6.2 existirá entonces un $\Omega' \in W_A$ tal que $\Delta \subseteq \Omega'$. Falta comprobar que $\Omega' \in R_A(\Omega)$ y con esto damos por finalizada la prueba del lema3.2 para KB.

Hemos de ver que

$$\{B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega' \quad \text{y} \quad \{B \mid \Box B \in \Omega'\} \subseteq \Omega$$

Por definición de Δ, tenemos la parte izquierda, esto es, que $\{B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega'$. La otra parte se obtiene como sigue: sea $\Box B \in \Omega'$, entonces $\Box B \in Sub(A)$ y, por tanto, $B \in Sub(A)$. Si fuera $B \notin \Omega$, entonces, por 3.1, tenemos que $\neg B \in \Omega$. De aquí se sigue, por definición de Δ que $\neg\Box B \in \Omega'$, lo cual, dado 3.1, haría que Ω' fuera KB-inconsistente. Por consiguiente, tenemos que $B \in \Omega$, luego $\{B \mid \Box B \in \Omega'\} \subseteq \Omega$, como se requiere. ∎

La demostración de la completitud del resto de los sistemas sigue pautas similares a las mostradas aquí. Con este tipo de demostraciones logramos probar que cada sistema normal S tiene la propiedad de modelo finito y, finalmente, que es decidible. Para cada uno de los sistemas normales S que restan hay que proporcionar una definición conveniente de R_A que nos proporcione un mini-modelo canónico de la clase $\mathcal{C}$ propuesta para S y que nos capacite para dar una demostración adecuada del lema3.2.

Consideremos, por ejemplo, los sistemas $S4$ y $S5$. Los teoremas 2.18 y 2.19, aseguran

Teorema 3.12

- *El sistema $S4$ es correcto respecto a la clase de modelos finitos reflexivos y transitivos.*
- *El sistema $S5$ es correcto respecto a la clase de modelos finitos reflexivos, transitivos y euclídeos.*

En cuanto a la prueba de la completitud, para $S4$, la relación R_A se define:

$$R_A = \{(\Omega, \Omega') \mid \Omega, \Omega' \in W_A \text{ y } \{\Box B \mid \Box B \in \Omega\} \subseteq \Omega'\}$$

La relación así definida es reflexiva y transitiva.

Para $S5$, definimos:

$$R_A = \{(\Omega, \Omega') \mid \Omega, \Omega' \in W_A \text{ y } \{\Box B \mid \Box B \in \Omega\} = \{\Box B \mid \Box B \in \Omega'\}\}$$

La relación así definida es reflexiva transitiva y euclídea (una relación de equivalencia).

Con estas definiciones, podemos realizar un razonamiento similar a lo visto para KB y probar el siguiente resultado:

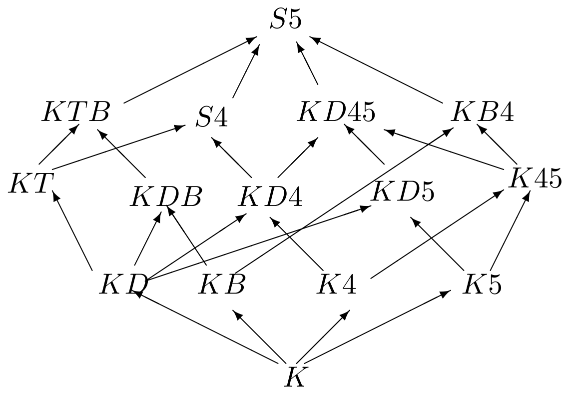
Teorema 3.13

- *El sistema $S4$ es completo respecto de la clase de modelos finitos reflexivos y transitivos.*
- *El sistema $S5$ es completo respecto de la clase de modelos finitos reflexivos y euclídeos.*

Finalmente, con el mismo razonamiento que en el teorema 3.5 tenemos asegurado que

Teorema 3.14 *Si S es un sistema normal de lógica proposicional, entonces S es decidible.*

Para finalizar esta sección, en el siguiente diagrama exponemos los distintos sistemas normales. Las flechas indican que el sistema S del que parte la flecha es más débil que el sistema S' al que llega la flecha (éste es más fuerte), o lo que es igual, que todos los teoremas de S lo son de S', pero no al revés:



Teorema 3.15 (Teorema de equivalencia) *Sea $\mathcal{S}$ un sistema modal normal, $A, B, C \in LM$ y supongamos que $\vdash_{\mathcal{S}} A \equiv B$. Sea Let $C' = C[A/B]$, entonces $\vdash_{\mathcal{S}} C \equiv C'$*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre el grado de C.

1. Si $C = p \in \mathcal{V}_{prop}$, podemos considerar dos subcasos
   - $C = C'$, en cuyo caso el resultado es obvio
   - En otro caso, $C = A = p$ y $C' = B$ y, por hipótesis, $p \equiv B$.
2. Si $C = X \to Y$ y se realiza alguna sustitución, $C' = X[A/B] \to Y[A/B]$ y, por hipótesis de inducción, $X = X[A/B]$ e $Y = Y[A/B]$, y, en consecuencia, $C \equiv C'$.
3. $C = \Box X$ y se realiza alguna sustitución, $C' = \Box X[A/B]$. Por hipóteis de inducción, $X \equiv X[A/B]$. Ahora, puesto que $X \equiv X[A/B] =_{def} (X \to X[A/B]) \wedge (X[A/B] \to X)$, basta aplicar la regla derivada **RD-1:** introducida en la Proposición 3.4 dos veces para obtener $\vdash_{\mathcal{S}} C \equiv C'$.

3.4. Ejercicios

1. Pruebe que $\vdash_T \Diamond(p \to \Box p)$.

2. Pruebe que las siguientes fbfs de LM son T-teoremas:

   - $\vdash_T \Box\Diamond p \to \Diamond p$.
   - $\vdash_T \Box p \to \Diamond\Box p$.
   - $\vdash_T \Diamond p \to \Diamond\Diamond p$.
   - $\vdash_T \Box\Box p \to \Box p$.

3. Probar que D es una extensión propia de K y T es una extensión propia de D, es decir, D no es un teorema en K, T no es un teorema en D y D si es un teorema de T.

4. K no tiene ningún teorema de la forma $\Diamond A$.

5. Pruebe que $\vdash_D \Diamond(p \to p)$

6. Pruebe que si $\vdash_D A$, entonces $\vdash_D \Diamond A$

7. Demuestre que toda fbf de grado modal 0 ó 1 que es un teorema en S5 es un teorema de K

8. Demuestre en K:

   a) $(\Box(p \to q) \land \Box(q \to r)) \to \Box(p \to r)$
   b) $\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$
   c) $(\Box(p \to q) \land \Diamond(p \land r)) \to \Diamond(q \land r)$
   d) $\Diamond(p \to (q \land r)) \to ((\Box p \to \Diamond q) \land (\Box p \to \Diamond r))$
   e) $\Diamond(p \to q) \to (\Box q \to \Diamond q)$
   f) $(\Box p \land \Diamond(q \to r)) \to (\Box(p \to q) \to \Diamond(p \land r))$
   g) $(\Box p \land \Diamond q) \to \Diamond(p \land q)$

9. Pruebe que K no tiene ningún teorema de la forma $\Box\Diamond A$

10. Probar:

    a) la siguiente es una regla derivada en K:
    $$\frac{A \lor B}{\Diamond A \lor \Box B}$$
    b) la siguiente es una regla derivada en D pero no en K:
    $$\frac{A \lor B}{\Diamond A \lor \Diamond B}$$
    c) la siguiente es una regla derivada en T pero no en K:
    $$\frac{A \lor B}{\Diamond A \lor B}$$

11. Pruebe en D:

    a) $\Diamond\neg p \vee \Diamond\neg q \vee \Diamond(p \vee q)$

    b) $\neg\Box(\Box p \wedge \Box\neg p)$

12. Pruebe que si $\Diamond A$ es D-válida entonces lo es A.

13. Denotemos por $S4{,}2$ al sistema $S4 + (\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p)$. Demostrar que las únicas modalidades de $S4{,}2$ son $\Box$, $\Box\Diamond$ y $\Diamond\Box$ y $\Diamond$ y pueden ser linealmente ordenados en este orden.

Capítulo 4

Razonamiento Automático en la lógica modal proposicional

Llegamos al fin a la componente intrínsecamente computacional que pretende no solo poder establecer qué fbfs son válidas, sino además disponer de un procedimiento de decisión (*algoritmo*)[1]. Como hemos demostrado en el capítulo anterior, las lógicas modales proposicionales en las que estamos interesados son decidibles y, como para la lógica clásica, estamos interesados en procedimientos por refutación, concretamente, en la extensión del método de las Tablas Semánticas que ya conocemos para la lógica clásica proposicional.

4.1. Método de las Tablas Semánticas

El método de las Tablas Semánticas para $S4$ fue introducido por M.C. Fitting en 1969 [2] y los de K y T en 1972 [3].

Como sistema de refutación, para analizar la validez de una fbf, A, el método determina si $\neg A$ es satisfacible en una cierta clase de modelos $\mathcal{C}$. Para ello, organiza la búsqueda sistemática de un modelo de $\neg A$ en la clase $\mathcal{C}$. Si la búsqueda tiene éxito, A no es $\mathcal{C}$-válida y si la búsqueda fracasa, entonces A es $\mathcal{C}$-válida.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que la entrada al método es una fnnm.

Como para la lógica clásica, utilizamos árboles binarios para la descripción del método y, en tal árbol, cada nodo estará etiquetado con un par $(A, (\lambda))$, donde A es una fnnm y λ denota un mundo. El significado de $A(\lambda)$ es que "A es verdadera en λ". Llamaremos `fórmula indizada` al par $(A, (\lambda))$; `fórmula base` a la componente A e `índice modal` a la componente λ.

En síntesis, el método ejecuta como sigue:

Dada un conjunto de fnnms, $\Omega = \{A_1, \dots, A_n\}$, en una lógica modal $\mathcal{S} \in \{K, T, B, S4, S5\}$, para analizar la satisfacibilidad de Ω, se organizan las fnnms de Ω en un árbol de una sola rama con raíz $A_1(0)$:

---

[1] Recordemos que la búsqueda de tales procedimientos se denomina en la bibliografía *Demostración Automática de Teoremas*, y a los algoritmos ATPs (Automated Theorem Provers).

[2] M.C Fitting. *Intuicionistic Logic model Theory and Forcing.* North Holand Publishing Co., Amsterdam, 1969

[3] M.C Fitting. *Tableau methods of proof for modal logics.* Notre Dame Journal of Formal Logic 13, 237-247, 1972

$$\begin{array}{c} A_1\,(0) \\ A_2\,(0) \\ \vdots \\ A_n\,(0) \end{array}$$

Llamaremos a este árbol `árbol inicial indizado asociado a` Ω, denotado $\mathcal{T}^0_{\Omega,\mathcal{S}}$. Este árbol se irá ampliando sucesivamente mediante reglas de extensión (específicas para cada lógica $\mathcal{S}$). Cada árbol obtenido se denomina $\mathcal{S}$-`árbol indizado asociado a` Ω y se denota por $\hat{\mathcal{T}}_{\Omega,\mathcal{S}}$.

Definición 4.1 *El conjunto de índices modales que ocurren en un $\mathcal{S}$-árbol indizado, $\mathcal{T}$, es un conjunto de cadenas sobre $\mathbb{N}$ tal que,*

- *el indice de las fnnms en el árbol inicial $\mathcal{T}^0_\Omega$ es 0 y escribiremos simplemente n en lugar de $0.n$.*
- *dado un índice modal λ que ocurre en un nodo η de $\hat{\mathcal{T}}_\Omega$, se tiene que todo prefijo λ' de λ es tal que λ' es un índice modal que ocurre en un nodo ascendiente de η.*
- *sea $\lambda.n_i$ un índice modal que ocurre en un nodo η de $\hat{\mathcal{T}}_{\Omega,\mathcal{S}}$. Entonces, para todo n_j tal que $n_j \leq n_i$, existe un nodo η' en $\hat{\mathcal{T}}_{\Omega,\mathcal{S}}$ cuya etiqueta tiene a $\lambda.n_j$ como índice modal.*

Para la descripción del método utilizaremos, como para la lógica clásica, la *notación uniforme*, que consiste en agrupar las fórmulas por tipos:

Definición 4.2 *Las fnnms se clasifican en:*

- **literales***: p y $\neg p$ con $p \in \mathcal{V}_{prop}$.*
- *de* **tipo** *α o de comportamiento conjuntivo, las cuales tienen asociadas dos componentes, denotadas α_1, α_2:*

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B

- *de* **tipo** *β o de comportamiento disyuntivo, las cuales tienen asociadas dos componentes, denotadas $\beta 1, \beta 2$:*

β	β_1	β_2
$A \vee B$	A	B

- *de tipo π o* **de posibilidad***, las cuales tienen asociada una componente, denotada π_0:*

π	π_0
$\Diamond A$	A

- *de tipo ν o* **de necesidad***, las cuales tienen asociada una componente, denotada ν_0:*

ν	ν_0
$\Box A$	A

4.1.1. Reglas de Extensión

Las reglas de extensión serán definidas de modo que cada regla introduce nuevas fórmulas indizadas en las que la fórmula base es una subfórmula propia de la fórmula base de partida.

La diferenciación para cada lógica modal normal, $\mathcal{S}$, estará en las reglas de extensión que rigen las conectivas modales $\Box$ y $\Diamond$, ya que éstas tendrán que recoger las propiedades de la clase de modelos que caracteriza a $\mathcal{S}$.

El $\mathcal{S}$-árbol inicial indizado asociado a Ω, $\mathcal{T}^0_{\Omega,\mathcal{S}}$ es extendido, sucesivamente, para obtener $\mathcal{S}$-árboles indizados asociados a Ω, mediante las siguientes reglas:

(α) Si ρ denota la rama determinada por un nodo hoja y una α-fórmula indizada, $\alpha\,(\lambda)$, ocurre en ρ, extendemos dicha rama adicionando dos nodos etiquetados con sus componentes $\alpha_1\,(\lambda)$ y $\alpha_2\,(\lambda)$ (ambas con el mismo índice modal que α).

(β) Si ρ denota la rama determinada por un nodo hoja y una β-fórmula indizada, $\beta(\lambda)$, ocurre en ρ, extendemos dicha rama adicionando dos nodos, uno como descendiente izquierdo y otro como descendiente derecho, etiquetados con sus componentes $\beta_1\,(\lambda)$ y $\beta_2\,(\lambda)$ respectivamente (ambas con el mismo índice modal que β).

(ν) La (ν)-regla será diferente para cada lógica modal normal considerada: Si ρ denota la rama determinada por un nodo hoja y una ν-fórmula, $\Box B\,(\lambda)$, ocurre en ρ, extendemos dicha rama adicionando los nodos $B\,(\lambda')$ en el modo que detallamos a continuación, dependiendo de la lógica considerada:

(ν)-K: $\lambda' \in \{\lambda.n_i \mid \lambda.n_i \text{ ocurre en } \rho\}$.

(ν)-T: $\lambda' \in \{\lambda\} \cup \{\lambda.n_i \mid \lambda.n_i \text{ ocurre en } \rho\}$.

(ν)-B: $\lambda' \in \{\lambda\} \cup \{\lambda.n_i \mid \lambda.n_i \text{ en } \rho\} \cup \{\lambda' \mid \lambda' \text{ en } \rho \text{ y } \lambda = \lambda'.n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^*\}$ [4]

(ν)-$S4$: $\lambda' \in \{\lambda\} \cup \{\lambda' \mid \lambda' \text{ en } \rho_A \text{ y } \lambda' = \lambda.\lambda_1.\dots.\lambda_n, \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}^*\}$

(ν)-$S5$: λ' es cualquier índice que ocurre en ρ.

(π) La (π)-regla también será diferente para las diferentes lógicas modales normales consideradas:

Supongamos en primer lugar las lógicas $\mathcal{S} \in \{K, T, B\}$. En este caso la ($\pi$)-regla es como sigue:

Si ρ denota la rama determinada por un nodo hoja y una π-fórmula, $\Diamond B\,(\lambda)$, ocurre en ρ_A, extendemos dicha rama adicionando el nodo $B\,(\lambda')$ donde $\lambda' = \lambda.n$ con $n \in \mathbb{N}^*$ y λ' es un índice modal que no ocurre previamente en la rama.

Para $S5$ la π-regla es la siguiente:

(π)-$S5$: Si ρ denota la rama determinada por un nodo hoja y una π-fórmula, $\Diamond B\,(\lambda)$, ocurre en ρ, extendemos dicha rama adicionando el nodo $B\,(\lambda')$ donde λ' es un índice modal que no ocurre previamente en la rama sea cual sea λ'.

---

[4] Donde recordemos que $\mathbb{N}^*$ denota $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Finalmente, la descripción de la regla (π) para $S4$ requiere introducir previamente el siguiente concepto:

Definición 4.3 *Sea ρ una rama de un S_4-árbol y sea λ un índice modal que ocurre en ρ en la etiqueta $B(\lambda)$ de un nodo η. Diremos que λ es un índice modal* `superfluo en` *ρ si y sólo si en ρ ocurre un índice modal, λ', en un nodo η' que es ascendiente de η y tal que satisface:*

$$\rho^{\lambda}_{Base} \cup \Box^{\lambda} = \rho^{\lambda'}_{Base} \cup \Box^{\lambda'}$$

donde:
$\rho^{\lambda}_{Base} = \{A \in LM \mid A(\lambda) \in \rho\}$
$\rho^{\lambda'}_{Base} = \{A \in LM \mid A(\lambda') \in \rho\}$
$\Box^{\lambda} = \{\Box A \in LM \mid \Box A(\lambda'') \in \rho,\ \textit{siendo}\ \lambda = \lambda''.\lambda_1.\dots.\lambda_n,\ \textit{con}\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}^*\}$
$\Box^{\lambda'} = \{\Box A \in LM \mid \Box A(\lambda'') \in \rho,\ \textit{siendo}\ \lambda' = \lambda''.\lambda_1.\dots.\lambda_n,\ \textit{con}\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}^*\}$

Diremos también que λ es una `repetición` *de λ' en ρ.*

Ahora podemos definir la (π)-regla para $S4$

(π)-$S4$: Si ρ denota la rama determinada por un nodo hoja y una π-fórmula, $\Diamond B\,(\lambda)$, ocurre en ρ, extendemos dicha rama adicionando el nodo $B\,(\lambda')$ donde $\lambda' = \lambda.n$ con $n \in \mathbb{N}^*$ y λ' es un índice modal que no ocurre previamente en la rama, `únicamente` si λ no es superfluo en ρ.

Definición 4.4 *Sea $\Omega = \{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto de fnnms. Un árbol binario, $\mathcal{T}$, se dice que es un* `árbol para` *Ω si existe una secuencia de árboles indizados asociados a Ω*

$$\hat{\mathcal{T}}^1_{\Omega}, \dots, \hat{\mathcal{T}}^n_{\Omega}$$

tal que:

- $\hat{\mathcal{T}}^1_{\Omega} = \mathcal{T}_{\Omega}(0)$ *(el árbol indizado inicial asociado a Ω).*
- *Cada árbol $\hat{\mathcal{T}}^i_{\Omega}$ $(2 \le i \le n)$ es un árbol indizado asociado a Ω que es* `extensión inmediata` *de $\hat{\mathcal{T}}^{i-1}_{\Omega}$, es decir, $\hat{\mathcal{T}}^i_{\Omega}$ se obtiene de $\hat{\mathcal{T}}^{i-1}_{\Omega}$ por aplicación de una regla de extensión a uno de sus nodos.*
- $\hat{\mathcal{T}}^n_{\Omega} = \mathcal{T}$.

Definición 4.5 *Sea $\hat{\mathcal{T}}_{\Omega}$ un árbol indizado asociado a Ω.*

Una `rama` *de $\hat{\mathcal{T}}_{\Omega}$ se dice* `cerrada`*, si existe $p \in \mathcal{V}_{prop}$ tal que $p(\lambda)$ y $\neg p(\lambda)$ ocurren en ρ. En caso contrario, se dice que la rama es* `abierta`*.*

El `árbol` *$\hat{\mathcal{T}}_{\Omega}$ se dice* `cerrado` *si todas sus ramas son cerradas.*

Una rama ρ de un árbol $\hat{\mathcal{T}}_{\Omega}$ se dice `completa` *si no le es aplicable ninguna regla de extensión a ninguno de sus nodos.*

Definición 4.6 *Un* `árbol` *$\hat{\mathcal{T}}_{\Omega}$ se dice* `terminado` *si toda rama es cerrada o completa.*

4.1.2. Descripción del método

Sea Ω un conjunto finito de fnnms. En la construcción de un árbol para analizar la satisfacibilidad de Ω, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- Usaremos la numeración romana para las ramas.
- Las sucesivas aplicaciones de las reglas se realizan haciendo en el árbol un recorrido primero en profundidad.
- Cada aplicación de una regla de extensión será anotada con $\checkmark_i$, donde i denota que se trata de la i-esima aplicación en el método de una regla de extensión. De este modo, la secuencia de marcas $\checkmark_1, \dots, \checkmark_n, \dots$ nos permitirán hacer un seguimiento de la traza de ejecución del método.
- Para generar el modelo de menor tamaño posible, las reglas se aplican de forma que se da prioridad a la regla ν respecto a la regla π (porque la regla ν no genera un índice modal "nuevo") y, entre las posibles aplicaciones de tal regla, a los índices modales de menor tamaño (entendiendo por tamaño de un índice modal $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$, la longitud d de la secuencia).
- Cada aplicación de la ν-regla a un nodo, la anotaremos con la marca correspondiente, $\checkmark_i$ a la derecha del nodo, y con $[[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]]$ a la izquierda del nodo, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ es la secuencia de índices modales sobre los que se ha aplicado ν.
- La regla α tiene prioridad sobre la regla β.
- Si no es posible aplicar ni la α-regla, ni la β-regla y la ν-regla ha sido aplicada exhaustivamente (es decir, sobre todos los indices modales en el árbol a los que es aplicable), se aplica la π-regla.
- Para indicar que un nodo no será usado más, tras la aplicación de la correspondiente regla de extensión sobre él, se marca el nodo con $\checkmark_i^{fin}$. [5]
- Si $\Diamond B(\lambda)$ es tal que el índice modal λ es superfluo en una rama ρ, entonces se marca tal nodo con $\checkmark^{\rho}$, para destacar que tal fnnm puede ser marcada posteriormente con $\checkmark_i^{fin}$ al extender otra rama a la que pertenezca tal nodo y en la que λ no es superfluo.
- Si una rama, ρ es cerrada, se marca con $\times$ y se eliminan las marcas $\checkmark^{\rho}$.
- No se realiza ninguna extensión sobre las ramas cerradas.
- Para indicar que una rama, ρ, es abierta y completa se marca con $\circ$. Por lo tanto, en una rama completa y abierta, todos los nodos en los que la etiqueta no es un literal indizado, están marcados con $\checkmark_i^{fin}$ o con $\checkmark^{\rho}$.

Definición 4.7 *Llamamos* `refutación` *en $\mathcal{S}$ para Ω, a todo árbol cerrado para Ω. Una fnnm C se dice que se* `deriva` *de $\{H_1, \dots, H_n\}$ en $\mathcal{S}$, si existe una refutación en $\mathcal{S}$ para $\{H_1, \dots, H_n, \neg C\}$. En particular, una fnnm A se dice* `demostrable` *si existe una refutación en $\mathcal{S}$ para $\{\neg A\}$.*

---

[5] En la implementación, este nodo es eliminado.

Damos ahora algunos ejemplos sencillos para familiarizarnos con las notaciones introducidas:

Ejemplo 4.1 Usamos el método para probar que la fórmula $A = \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ es K-válida. Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $\neg A \equiv \Box p \wedge \Box q \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q$. En consecuencia, la entrada al método será $\Omega = \{\Box p, \Box q, \Diamond\neg p, \Diamond\neg q\}$. Una refutación en K para Ω es:

$$\begin{array}{rccl}
[[1]] & \Box p & (0) & \checkmark_2 \\
 & \Box q & (0) & \\
 & \Diamond\neg p & (0) & \checkmark_1^{fin} \\
 & \Diamond\neg q & (0) & \\
 & \neg p & (1) & \\
 & p & (1) & \\
 & \times & &
\end{array}$$

Puesto que A es K-válida, también es $\mathcal{S}$-válida, para $\mathcal{S} \in \{T, B, S4, S5\}$. Apliquemos el método para obtener una refutación para Ω en cada una de estas lógicas:

- A es T-válida y una refutación para Ω en la lógica T es:

$$\begin{array}{rccl}
[[0,1]] & \Box p & (0) & \checkmark_1;\ \checkmark_4 \\
[[0]] & \Box q & (0) & \checkmark_2 \\
 & \Diamond\neg p & (0) & \checkmark_3^{fin} \\
 & \Diamond\neg q & (0) & \\
 & p & (0) & \\
 & q & (0) & \\
 & \neg p & (1) & \\
 & p & (1) & \\
 & \times & &
\end{array}$$

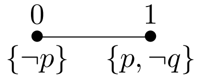
- El lector puede comprobar que la ejecución para B, $S4$ y $S5$ es la misma que para T.

Ejemplo 4.2 La fbf $A = (p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$ no es K-válida. Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $\neg A \equiv (\neg p \vee q) \wedge \Diamond p \wedge \Box\neg q$. Por lo tanto, la entrada al método es $\Omega = \{\neg p \vee q, \Diamond p, \Box\neg q\}$

$$\begin{array}{rccl}
 & \neg p \vee q & (0) & \checkmark_1^{fin} \\
 & \Diamond p & (0) & \checkmark_2^{fin} \\
[[(1)]] & \Box\neg q & (0) & \checkmark_3^{fin}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg p\,(0) & \neg q\,(0) \\
p\ (1) & p\ (1) \\
\neg q\ (1) & \neg q\ (1) \\
\circ &
\end{array}$$

CONTRAMODELO:



Ejemplo 4.3 La fbf $\Box p \to p$ no es K-válida, pero sí es T-válida. Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $\neg A \equiv \Box p \wedge \neg p$

- Aplicamos el método en K:

$$\begin{array}{c} \Box p \ \ (0) \\ \neg p \ \ (0) \\ \circ \end{array}$$

CONTRAMODELO: $\{\neg p\}$

$$\bullet$$

- Veamos ahora que A es T-válida:

$$\begin{array}{c} [[(0)]] \ \ \Box p \ \ (0) \checkmark_1 \\ \neg p \ \ (0) \\ p \ \ (0) \\ \times \end{array}$$

Ejemplo 4.4
Apliquemos el método en $S4$ para probar que $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$:

$$\begin{array}{rrcl} [[0,1,2,1.1,1.2,2.1,2.2,1.2.1,1.2.2,2.1.1,2.1.2]] & \Box\Diamond p & (0) & \checkmark_1;\checkmark_4;\checkmark_7;\checkmark_{10};\checkmark_{13};\checkmark_{16};\checkmark_{19} \\ [[0,1,2,1.1,1.2,2.1,2.2,1.2.1,1.2.2,2.1.1,2.1.2]] & \Box\Diamond\neg p & (0) & \checkmark_2;\checkmark_5;\checkmark_8;\checkmark_{11};\checkmark_{14};\checkmark_{17};\checkmark_{20} \\ & \Diamond p & (0) & \checkmark^{fin}_3 \\ & \Diamond\neg p & (0) & \checkmark^{fin}_6 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} p & (1) & \\ \Diamond p & (1) & \checkmark^{fin}_9 \\ \Diamond\neg p & (1) & \checkmark^{fin}_{12} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \neg p & (2) & \\ \Diamond p & (2) & \checkmark^{fin}_{15} \\ \Diamond\neg p & (2) & \checkmark^{fin}_{18} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} p & (1.1) & \\ \Diamond p & (1.1) & \checkmark^{I} \\ \Diamond\neg p & (1.1) & \checkmark^{I} \end{array}}$$

(1,1) es superfluo en la rama I
repetición del índice (1)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \neg p & (1.2) & \\ \Diamond p & (1.2) & \checkmark^{I} \\ \Diamond\neg p & (1.2) & \checkmark^{I} \end{array}}$$

(1,2) es superfluo en la rama I
repetición del índice (2)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} p & (2.1) & \\ \Diamond p & (2.1) & \checkmark^{I} \\ \Diamond\neg p & (2.1) & \checkmark^{I} \end{array}}$$

(2,1) es superfluo en la rama I
repetición del índice (1)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \neg p & (2.2) & \\ \Diamond p & (2.2) & \checkmark^{I} \\ \Diamond\neg p & (2.2) & \checkmark^{I} \end{array}}$$

(2,2) es superfluo en la rama I
repetición del índice (2)

$$\bigcirc$$

Podemos construir un modelo para la rama abierta de la forma siguiente:

- Consideramos como conjunto de mundos del modelo, $W = \{$1,2,1.1, 1.2, 2.1,2.2 $\}$, el conjunto de índices que aparecen en la rama.

- La relación de accesibilidad R la construimos -por etapas- como sigue:

(a) Sea λ un índice cualquiera que ocurra en la rama. Consideramos para cada λ' que aparezca igualmente en la rama que $\lambda' \in R(\lambda)$ si λ es un segmento inicial (no necesariamente propio) de λ'.

(b) Enlazamos cada índice superfluo con el primero que repita en la rama.

(c) Finalmente, realizamos el cierre transitivo de la anterior relación.

Se deja al lector analizar la ejecución para $S5$.

4.1.3. Terminación del Método de las Tablas Semánticas

En esta sección probaremos la terminación del método para las lógicas modales normales $\mathcal{S} \in \{K, T, B, S4, S5\}$. Con objeto de simplificar la demostración de la terminación, realizamos una ligera modificación de nuestro método: en una rama no se producen repeticiones de fórmulas con el mismo índice modal [6].

Recordemos el siguiente resultado del que hicimos uso al estudiar la lógica proposicional clásica.

Lema 4.1 *(Lema de König) Cualquier árbol infinito de ramificación finita tiene al menos una rama infinita.*

Ahora probaremos el siguiente resultado específico para nuestro estudio.

Proposición 4.1 *Sea $\mathcal{T}$ un $\mathcal{S}$-árbol para un conjunto Ω finito de fnnms de LM y ρ una rama de $\mathcal{T}$. Entonces:*

1. *Para cada índice modal λ en ρ, se tiene que $\rho^{\lambda}_{Base} = \{A \in LM \mid A(\lambda) \text{ ocurre en } \rho\}$ es finito.*

2. *el árbol rama obtenido al considerar en cada nodo de ρ, únicamente los índices λ, denotado $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$, es finito.*

DEMOSTRACIÓN:

Prueba de (1): La demostración es la misma sea cual sea $\mathcal{S}$, por lo tanto, no necesitaremos hacer referencia alguna al sistema modal considerado.

Puesto que todas las reglas de extensión introducen en el árbol fórmulas indizadas cuya fórmula base es una subfórmula de la fórmula base de partida, se tiene que $\rho^{\lambda}_{base} \subseteq Sub(\Omega)$ y puesto que Ω es finito, lo es $Sub(\Omega)$ y, por lo tanto ρ^{λ}_{base} es finito.

Prueba de (2): Teniendo en cuenta que $\mathcal{T}$ es un árbol binario, el lema de König nos indica que solo tenemos que probar que, si ρ es una rama arbitraria de $\mathcal{T}$, se tiene que $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$ es finito.

Teniendo en cuenta que la regla π es la única que introduce nuevos índices modales, solo tendremos que asegurar que esta regla no genera infinitos nodos en $\mathcal{T}_{\rho\text{-}ind}$. Así pues tendremos que considerar los casos siguientes:

---

[6] Podemos permitirnos esta modificación, ya que tan solo estamos interesados en probar la terminación. El lector sabrá que esta modificación exige que al aplicar cada regla de extensión hay que comprobar si la fórmula indizada a añadir está previamente en la rama o no, lo cual es muy ineficiente, pero puesto que el número de formulas indizadas que ya aparecen en la rama es finito, la modificación no afecta a la prueba de terminación

2.1 $\mathcal{S} = K$

2.2 $\mathcal{S} = T$

2.3 $\mathcal{S} = B$

2.4 $\mathcal{S} = S4$

2.5 $\mathcal{S} = S5$

Dado $\lambda \in \mathcal{T}^{\rho}_{ind}$, definamos el *grado modal de* λ como el máximo grado modal de las fórmulas base que tienen asignado dicho índice en ρ, es decir:

$$gr_m(\lambda) = max\{gr_m(A) \mid A(\lambda) \in \rho\}.$$

Es claro que 0 es el índice de mayor grado modal en $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$. La demostración, en todos los casos, la basaremos en comprobar que el grado modal desciende sucesivamente al avanzar en $\mathcal{T}_{\rho\text{-}ind}$ de la raíz a la hoja.

<u>Prueba de 2.1</u>: Sea $\mathcal{S} = K$. Para esta lógica, la regla π aplicada a una π-fórmula, $\Diamond B\,(\lambda)$, añade, a $\mathcal{T}_{\rho\text{-}ind}$ un nodo $B\,(\lambda')$ donde $\lambda' = \lambda.n$ con $n \in \mathbb{N}^*$ y λ' es un índice modal que no ocurre previamente en la rama. En consecuencia, las fórmulas base asociadas a λ' en ρ pertenecen a la unión de los siguientes conjuntos:

(a-1) $\{B\}$ (por aplicación de π).

(b-1) $\{A \mid \Box A(\lambda)$ ocurre en $\rho\}$ (por aplicación de ν)

(c-1) Toda fbf A tal que $A(\lambda')$ ha sido introducida en ρ por una aplicación iterada de las reglas α o β, a partir de las fbfs de los apartados (a-1) y (b-1).

Para los tres tipos de fórmulas base, es inmediato que su grado modal es menor que la de la fórmula base de partida. Por lo tanto, $gr_m(\lambda') < gr_m(\lambda)$ y, en consecuencia, ρ es finita.

<u>Prueba de 2.2</u>: Sea $\mathcal{S} = T$. La demostración es la misma que para K, sin más que sustituir la condición [c-1] por:

(c-2) Toda fbf A tal que $A(\lambda')$ ha sido introducida en ρ por una aplicación iterada de las reglas α o β, o bien por aplicación de la regla ν, a partir de las fbfs de los apartados (a-1) y (b-1).

De nuevo, es inmediato que este tipo de fórmulas base tiene grado modal es menor que la de la fórmula base de partida. Por lo tanto, $gr_m(\lambda') < gr_m(\lambda)$ y, en consecuencia, ρ es finita.

<u>Prueba de 2.3</u>: Sea $\mathcal{S} = B$. La demostración es análoga a las dos anteriores, pero ahora tenemos que considerar las condiciones: (a-1) (como en K y T), sustituir la condición (b-1) de K y T por:

(b-3) $\{A \mid \Box A(\lambda)$ ocurre en $\rho\} \cup \{A \mid \Box A(\lambda'.m)$ ocurre en cualquier extensión de $\rho\}$ (por aplicación de ν)

y, en consecuencia, sustituir la condición (c-1) por:

(c-3) Toda fbf A tal que $A(\lambda')$ ha sido introducida en ρ por una aplicación iterada de las reglas α o β, o bien por aplicación de la regla ν, a partir de las fbfs de los apartados (a-1) y (b-3).

Y, de nuevo, es inmediato que este tipo de fórmulas base tiene grado modal es menor que la de la fórmula base de partida. Por lo tanto, $gr_m(\lambda') < gr_m(\lambda)$ y, en consecuencia, ρ es finita.

Prueba de 2.4: Sea $\mathcal{S} = S4$. La regla π aplicada a $\Diamond B\,(\lambda)$ con λ un índice modal no superfluo añade, a $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$ un nodo $B\,(\lambda')$ donde $\lambda' = \lambda.n$ con $n \in \mathbb{N}^*$ y λ' es un índice modal que no ocurre previamente en la rama. En consecuencia, las fórmulas base asociadas a λ' en ρ pertenecen a la unión de los siguientes conjuntos:

(a-1) $\{B\}$ (por aplicación de π).

(b-4) $\{A \mid \Box A(\lambda^*)$ ocurre en ρ y λ^* es un prefijo de $\lambda\}$ (por aplicación de ν).

(c-4) Toda fbf A tal que $A(\lambda')$ ha sido introducida en ρ por una aplicación iterada de las reglas α o β, o bien por aplicación de la regla ν a partir de las fbfs de los apartados (a-1) y (b-4).

Algo a tener en cuenta es que puede no producirse un descenso del grado modal en $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$ y ello por culpa de la regla (ν). No obstante, podemos probar la finitud de de $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$. En efecto, supongamos que existe una conjunto infinito de índices, $\mathfrak{r}$, en $\mathcal{T}^{\rho}_{ind}$. En ese caso, dado que cada índice en $\mathfrak{r}$ está asociado a un número finito de fórmulas de ρ, habría un número infinito de repeticiones de subconjuntos de las fórmulas base del árbol inicial $\mathcal{T}^{(0)}_{\Omega}$ en ρ; lo cual significa que habría igualmente un número infinito de índices superfluos en ρ, y esto contradice la aplicación de (π), pues esta regla asegura que cuando aparezca un índice superfluo en ρ, la regla π no es aplicble. Por tanto, $\mathfrak{r}$ no puede ser infinito.

Prueba de 2.5: Sea $\mathcal{S} = S5$. En este caso, la regla (π) para $S5$ evita introducir en ρ una fórmula como $\pi_0(\lambda)$ en cuanto $\pi_0(\lambda')$ ya ocurra en ρ para algún λ'. Por tanto, una misma fórmula base π_0 solo puede aparecer una vez en ρ como consecuencia de la aplicación de la regla (π). Además, el número de fórmulas π_0 en el conjunto de todos los subconjuntos de $\Omega^{base}_{\mathcal{T}}(0)$ es finito, luego solo puede haber un número finito de fórmulas π_0 que aparecen en ρ al aplicar la regla (π). Esto nos lleva a un número finito de aplicaciones de (π) en ρ y son estas aplicaciones las que van formando las ramas de $\mathcal{T}_{\rho\text{-}ind}$, así pues, el árbol $\mathcal{T}_{\rho\text{-}ind}$ es finito. ■

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Para todo conjunto finito Ω de fnnms, mediante un número finito de extensiones inmediatas, se obtiene un árbol terminado para Ω.*

DEMOSTRACIÓN:
Sea un $\mathcal{S}$-árbol para un conjunto finito Ω de fnnms. Si el número de extensiones a partir del árbol inicial fuera infinito, entonces, dado que nuestro método proporciona árboles de ramificación finita, por el lema de König tendría al menos una rama infinita. Sea ρ una rama tal. Como el conjunto de fórmulas indizadas iniciales del árbol es finito, sólo caben dos alternativas:

((i)) hay un número infinito de fórmulas base asignadas al mismo índice modal en ρ,

((ii)) hay un número infinito de índices modales en ρ.

Ahora bien, (i) es imposible, por el apartado (1) del lema 4.1 y (ii) tampoco puede darse por el apartado (2) del mismo lema. Por lo tanto el $\mathcal{S}$-árbol es finito. ■

Teorema 4.2 (Corrección y completitud) *El método de las tablas semánticas es:*

1. *Correcto: Si $\neg A$ puede ser refutado entonces $\models A$.*

2. *Completo: Si $\models A$, entonces existe una refutación para $\neg A$.*

Ejemplo 4.5 Aplicamos el método para analizar la validez en $S4$ de $A = \Box(p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Box(\Diamond p \wedge q)$.

Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $\neg A \equiv \Box(p \wedge \Diamond q) \wedge \Diamond(\Box\neg p \vee \neg q)$

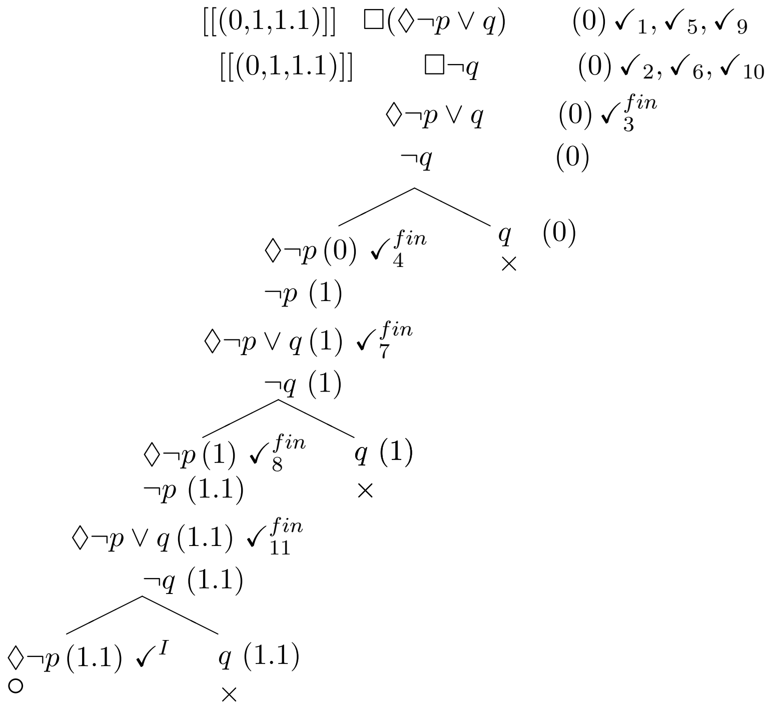
[[(0,1,2,1.1,2.1)]] $\Box(p \wedge \Diamond q)$ $(0)\ \checkmark_1, \checkmark_4, \checkmark_9, \checkmark_{12}, \checkmark_{15}$
$\Diamond(\Box\neg p \vee \neg q)$ $(0)\ \checkmark_3^{fin}$
$p \wedge \Diamond q$ $(0)\ \checkmark_2^{fin}$
p (0)
$\Diamond q$ $(0)\ \checkmark_8^{fin}$
$\Box\neg p \vee \neg q$ $(1)\ \checkmark_6^{fin}$
$p \wedge \Diamond q$ $(1)\ \checkmark_5^{fin}$
p (1)
$\Diamond q$ $(1)\ \checkmark_{11}^{fin}$

[[(1)]] $\Box\neg p\,(1)\ \checkmark_7$
$\neg p\ (1)$
$\times$

$\neg q$ (1)
q (2)
$p \wedge \Diamond q$ $(2)\ \checkmark_{10}^{fin}$
p (2)
$\Diamond q$ $(2)\ \checkmark_{14}^{fin}$
q (1.1)
$p \wedge \Diamond q$ $(1.1)\ \checkmark_{13}^{fin}$
p (1.1)
$\Diamond q$ $(1.1)\ \checkmark^{II}$
q (2.1)
$p \wedge \Diamond q$ $(2.1)\ \checkmark_{16}^{fin}$
p (2.1)
$\Diamond q$ $(2.1)\ \checkmark^{II}$
$\circ$

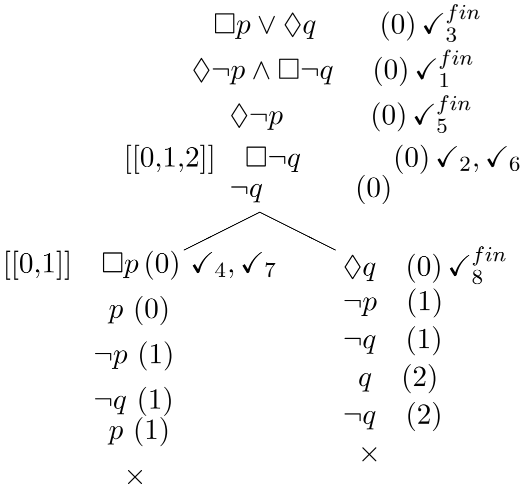
El árbol no cierra, luego la fórmula A no es un válida en S4.

Ejemplo 4.6 Aplicamos el método para analizar la validez en $S4$ de $A = \Box(\Box p \rightarrow q) \rightarrow \Diamond q$. Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $\Box(\Diamond\neg p \vee q) \wedge \Box\neg q$



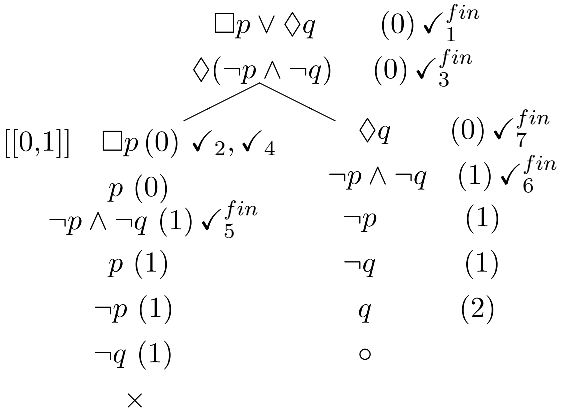
El índice 1.1 es superfluo, repite 1 en la rama I. La rama se queda abierta, y el árbol está terminado. Por lo tanto, A no es válida S4.

Ejemplo 4.7 Aplicamos el método para analizar la validez en $S5$ de $A = \Diamond(\Box p \vee \Diamond q) \rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$. Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $\neg A \equiv \Diamond(\Box p \vee \Diamond q) \wedge \Diamond(\neg p \wedge \Box q)$ y, por las leyes de absorción $\neg A \equiv (\Box A \vee \Diamond q) \wedge (\Diamond\neg p \wedge \Box q)$



El árbol es cerrado. Por lo tanto, A es válida en $S5$

Ejemplo 4.8 Aplicamos el método para analizar la validez en $S5$ de $A = (\Box p \vee \Diamond q) \rightarrow \Box(p \vee q)$. Transformamos $\neg A$ en una fnnm y obtenemos $(\Box p \vee \Diamond q) \wedge \Diamond(\neg p \wedge \neg q)$.



La rama derecha es abierta. Por lo tanto, A no es válida en $S5$.

4.2. Ejercicios

1. Analice con el método de las tablas semánticas la validez de las fórmulas siguientes en los diversos sistemas:
   - *a*) $\Box A \to \Box(\Box A \lor B)$
   - *b*) $(\Diamond(p \to q) \land \Box q) \to \Diamond(p \to q)$
   - *c*) $\Box(p \leftrightarrow q) \to (\Box p \leftrightarrow \Box q)$
   - *d*) $\Box(p \to \Box(q \to r)) \to \Diamond(q \to (\Box p \to \Diamond r))$
   - *e*) $\Diamond(\Diamond p \land \neg q) \lor \Box(p \to \Box)$
   - *f*) $\Box(p \to \Diamond q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$
   - *g*) $\Box(\Box p \to q) \lor \Box(\Box p \to p)$
   - *h*) $\Box(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box(\Box p \leftrightarrow q)$

2. Analice con el método de las tablas semánticas la validez de las fórmulas siguientes en los diversos sistemas:
   - *a*) $\Box q \models \Diamond(p \to q)$
   - *b*) $\Box A \land \Box B \models \Box(A \land B)$
   - *c*) $\Diamond(p \land q) \lor \Diamond(p \land r) \models \Diamond p$
   - *d*) $\Diamond(p \to p) \models \neg\Box(\Box p \land \Box\neg p)$
   - *e*) $((\Box\Diamond p \to \Diamond\Box q), \Box(\Diamond q \to \neg\Diamond r)) \models \Diamond(\Box p \to \Diamond\neg r)$
   - *f*) $\Diamond(\Box p \to p) \models \Diamond(p \to \Box p)$

Capítulo 5

La lógica modal de primer orden

En este capítulo presentamos brevemente el lenguaje y la semántica de la lógica básica de primer orden, sin detallar las extensiones naturales de las diferentes lógicas normales modales proposicionales. Nos limitaremos a presentar los formalismos que combinan los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$ con los cuantificadores $(\forall)$ y $(\exists)$ y nos haremos eco de los planteamientos más importantes que surgen con esta combinación.

Recordemos que el alfabeto de un *lenguaje de primer orden* dispone de símbolos que permiten:

- representar elementos arbitrarios del dominio o universo del discurso, por medio de `símbolos de variable`.
- representar elementos específicos del universo del discurso, por medio de `símbolos de constante`.
- expresar que nos referimos a algunos o a todos los elementos del universo del discurso, por medio de `símbolos de cuantificación` o *cuantificadores*.
- expresar propiedades o relaciones entre los elementos del universo del discurso, por medio de `símbolos de predicado`.

Por lo tanto, la lógica modal de primer orden requiere extender este alfabeto con los símbolos $\Box$ y $\Diamond$:

5.1. Lenguaje de la lógica modal de primer orden

El alfabeto de un lenguaje modal de primer orden consta de los siguientes símbolos:

1. Los conectivas booleanas $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ y $\leftrightarrow$ y las constantes $\top$ y $\bot$.
2. Los símbolos de cuantificación $\forall$ (universal) y $\exists$ (existencial).
3. Las conectivas modales $\Box$ y $\Diamond$.
4. Los símbolos de puntuación "(", ")".
5. Un conjunto infinito numerable, $\mathcal{V} = \{x, y, z, v, \ldots, x_1, y_1, z_1, v_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, v_n, \ldots\}$, de símbolos de *variables*.

6. Un conjunto numerable (posiblemente vacío), $\mathcal{C}$, de símbolos de *constante*.
7. Un conjunto numerable y no vacío, $\mathcal{P}$, de símbolos de *predicado* y una función r_2 que asigna a cada símbolo de predicado un elemento de $\mathbb{N}^*$ llamado su *aridad* (que representa el número de argumentos).

Los símbolos referidos en 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son comunes a todos los lenguajes de primer orden. Por otra parte la elección de los conjuntos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ proporciona un lenguaje específico de primer orden y viene determinada por la aplicación que se pretende. Supondremos que los conjuntos $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ son disjuntos dos a dos.

Definición 5.1 *La* `signatura de un lenguaje de primer orden` *recoge los símbolos no comunes, propios de cada lenguaje de primer orden, es decir, es el conjunto de símbolos*

$$\Sigma = \mathcal{C} \cup \mathcal{P}$$

Hablaremos pues de un lenguaje de primer orden sobre la signatura Σ y lo denotaremos $LM_1(\Sigma)$ (o bien $LM_1(\mathcal{C}, \mathcal{P})$).

En definitiva, el alfabeto de una lógica modal de primer orden con signatura Σ es

$$\mathfrak{a} = \Sigma \cup \mathcal{V} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, \Box, \Diamond, \ ', (,), \{, \}, \ldots\}$$

Fórmulas Bien Formadas

Para definir el conjunto de cadenas de símbolos del alfabeto que definen un lenguaje de primer orden, necesitamos introducir la noción de átomo y, previamente, describir qué cadenas de símbolos representan elementos del universo del discurso. Para ello introducimos la noción de término:

Términos:

Definición 5.2 *Sea $\mathfrak{a}$ un alfabeto para la lógica modal de primer orden y $\mathfrak{a}^\star$ el conjunto de las cadenas sobre $\mathfrak{a}$, es decir, el lenguaje universal sobre $\mathfrak{a}$. El conjunto de los* `términos` *sobre $\mathfrak{a}$ es el conjunto $\mathcal{V} \cup \mathcal{C}$.*

Los términos en los que no ocurren variables se llaman `términos básicos`*.*

Los predicados se aplican sobre los términos para formar las fórmulas *atómicas*.

Definición 5.3 *Los* `átomos` *o* `fórmulas atómicas` *son los elementos de $\mathfrak{a}^\star$ de la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, donde P es un símbolo de predicado n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos. Denotaremos por $\mathcal{A}tom$ el conjunto de átomos.*

Los átomos en los que no intervienen variables se llaman `átomos básicos`*. Ellos son las expresiones más sencillas del lenguaje que son interpretables como aserciones (afirmamos que una n-upla de objetos concretos están en una determinada relación n-aria).*

Tenemos ya todo lo necesario para definir el conjunto de fbfs, esto es, el lenguaje.

Definición 5.4 *Dado un símbolo de variable x, se definen las funciones*

$$U_x, E_x : \mathfrak{a}^* \longrightarrow \mathfrak{a}^*$$

del siguiente modo: $U_x(A) = (\forall x)A$ *y* $E_x(A) = (\exists x)A$.

El conjunto de las fórmulas bien formadas es la clausura inductiva de $\mathcal{A}tom \cup \{\top, \bot\}$ *para el conjunto de constructores*

$$\{C_\neg, C_\Box, C_\Diamond, C_\wedge, C_\vee, C_\to, C_\leftrightarrow\} \cup \{U_x, E_x \mid x \in \mathcal{V}\}$$

De manera menos formal, podemos describir el conjunto de las fbfs, como el conjunto de los elementos de $\mathfrak{a}^*$ *determinados por las siguientes reglas:*

1. $\top$ *y* $\bot$ *son fbfs.*
2. *Las fórmulas atómicas son fbfs.*
3. *Si* A *y* B *son fbfs,* $\neg A, \Box A, \Diamond A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \to B)$ *y* $(A \leftrightarrow B)$ *son fbfs.*
4. *Si* A *es una fbf y* x *es un símbolo de variable,* $(\forall x)A$ *y* $(\exists x)A$ *son fbfs.*
5. *solo las cadenas obtenidas aplicando las reglas 1, 2, 3 y 4 son fbfs.*

Definición 5.5 *Dado un conjunto* Ω *de fbfs, la* `signatura de` Ω *es el conjunto* $\Sigma_\Omega = \mathcal{C}_\Omega \cup \mathcal{P}_\Omega$ *donde* $\mathcal{C}_\Omega$ *es el conjunto de símbolos de constantes que intervienen en* Ω *y* $\mathcal{P}_\Omega$ *es el conjunto de símbolos de predicados que intervienen en* Ω.

Ejemplo 5.1 En $LM_1(\mathcal{C}_\Omega, \mathcal{P}_\Omega)$ podremos expresar:

- $(\exists x)\Box P(x)$: *"existen entes que necesariamente tienen la propiedad P".*
- $\Box(\exists x)P(x)$: *"es necesario que existan entes que tengan la propiedad P".*
- $(\forall x)(Hombre(x) \to Mortal(x))$: *"Todo hombre es mortal".*
- $(\exists x)\Box(Hombre(x) \to Mortal(x))$: "Existen entes que, necesariamente, si son hombres son mortales".

Y con la lectura de la lógica epistémica:

- K_iVive(Alfredo,Málaga): *"el agente i sabe que Alfredo vive en Málaga"*
- $K_i(\forall x)(Humano(x) \to Mortal(x)$: *"el agente i sabe que todos los hombres son mortales*
- $(\exists x)K_i Hijo(x, Juan)$: *"existe alguien de quien el agente i sabe que es hijo de Juan"*
- $K_i(\exists x)Hijo(x, Juan)$: *"el agente i sabe que Juan tiene algún hijo"*

Las nociones de variables libres y ligadas y de sustitución de una variable libre por un término, son las mismas que en la lógica clásica de primer orden.

5.2. Semántica de la lógica modal de primer orden

Nuestro conocimiento de la lógica modal proposicional y de la lógica clásica de primer orden, nos indica que tendremos que considerar dos dominios de cuantificación:

- dominio de cuantificación sobre los mundos accesibles.
- dominio de cuantificación sobre los individuos.

Y algo más, tendremos que contemplar la diferenciación entre las llamadas `Modalidad de dicto y de re:` Esta diferenciación proviene de la lógica medieval y se remonta a Aristóteles. El uso que damos a estas expresiones aquí es el siguiente: una `modalidad de dicto` es un modo que afecta a una proposición (*dictum*), de manera que la necesidad (o posibilidad, según el modo de que se trate) se atribuye a dicha proposición, como en "es necesario que alguien salga elegido de Presidente". Lo que se indica es que la expresión "alguien saldrá elegido de Presidente" es una proposición necesaria. En general, la modalidad de dicto puede considerarse como el modo en que una proposición es verdadera o falsa.

En cambio, una `modalidad de re` afecta a una cosa (res) así que las modalidades expresan la forma en que esa cosa posee una determinada propiedad, como en "hay alguien que necesariamente saldrá elegido de Presidente".

Suele admitirse que formalmente esta distinción se expresa con el alcance de los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$ según que afecten a fórmulas abiertas o cerradas. Una fbf A de LM es "de re" (o expresa una modalidad de re) si hay una subfórmula de A de la forma $\Box B$ o $\Diamond B$ donde B contiene al menos una variable libre; en caso contrario, es "de dicto". Por ejemplo, las fórmulas $\Box(\forall x)P(x)$ y $\Diamond(\exists y)P(y)$ expresan modalidades "de dicto" y las fórmulas $(\exists x)\Diamond P(x)$ y $\Box P(y)$ expresan modalidades "de re".

Volviendo a los ejemplos expuestos más arriba, si entendemos los operadores modales como cuantificadores sobre mundos posibles, como es lo habitual, hemos de entender que la frase "es necesario que alguien salga elegido de Presidente" significa que en todo mundo posible (alternativo al dado) hay alguien que sale elegido de Presidente (pero no tiene por qué ser la misma persona en todos esos mundos). Por el contrario, la frase "hay alguien que necesariamente saldrá elegido de Presidente" significa que hay un sujeto de quien se puede decir que en todo mundo posible alternativo al dado dicho sujeto sale elegido como Presidente. Es claro que si se cumple esto se cumple lo primero, pero no al revés.

Consideremos otras modalidades que no son las aléticas, como las epistémicas o temporales, obsérvese la diferencia que hay entre los siguientes pares de frases, en cada par la primera es "de dicto" y la segunda "de re":

-"Luis `sabe que` hay alguien que es Presidente de la Coca-Cola"
-"Hay alguien del que Luis `sabe que` es Presidente de la Coca-Cola"

-"`Siempre` hay alguien que anima la fiesta"
-"Hay alguien que `siempre` anima la fiesta "

Además, tendremos que elegir entre dos opciones referentes a los dominios de cuantificación de individuos:

- El dominio de individuos es el mismo en todos los mundos (semántica de dominios constantes).
- El dominio de individuos es diferente en cada mundo (semántica de dominios variables). Así, por ejemplo, Sócrates podría no haber existido, de modo que podemos concebir un mundo posible en cuyo dominio asociado Sócrates no es un elemento de dicho dominio.

Por otra parte, tendremos también que a diferenciar entre `designadores rigidos` y `designadores no rígidos o flexibles`. Cuando hablamos de *designadores rigidos* nos referimos a expresiones que denotan el mismo individuo en todos los mundos posibles en los que éste exista. Para Kripke, los nombres propios como *Aristóteles*, *Pegaso*, etc., se contemplan como designadores rígidos. Podemos contraponer esta situación al de las llamadas *descripciones definidas*, como *el hijo pequeño del vecino*, *el manco de Lepanto*, *el número de planetas del sistema solar*, etc., donde la referencia (objeto que denotan o nombran) puede cambiar en situaciones alternativas a la actual, en otras circunstancias podría ser un objeto diferente. Las descripciones definidas serían, pues, *designadores no rígidos o flexibles.* Hay, no obstante, excepciones para este uso de las descripciones definidas, como en el caso de contextos matemáticos, pensemos en *el cuadrado de dos*, por ejemplo.

No vamos a entrar aquí en detalles sobre alternativas a la visión de Kripke, pues el enfoque que sigue lleva esta línea.[1]

5.2.1. Semántica con dominio constante

Las caracterísiticas de esta semántica son las siguientes:

- El dominio de objetos (población) es el mismo en todos los mundos posibles.
- Los términos son `rígidos`
- las propiedades de los objetos del dominio y las relaciones entre ellos pueden variar de un mundo a otro, i.e., la extensión de los predicados puede fluctuar al cambiar de mundo.

Definición 5.6 *Un* `modelo con dominio constante para` $LM_1(\Sigma)$ *es una tupla* (W, R, U, h, I) *donde:*

- $E = (W, R)$ *es una estructura de Kripke, es decir,* W *es un conjunto no vacío de* mundos *y* R *es una* relación de accesibilidad *binaria en* W*, es decir,* $R \subseteq W \times W$*,*
- U *es un conjunto no vacío de entes individuales, lamado* dominio *o* universo*,*
- h *es una aplicación de* $LM_1(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ *en* 2^W*,*
- I *es una función,* $I : \mathcal{C} \cup (\mathcal{P} \times W) \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} 2^{U^n}$*,*
  1. *A cada símbolo de constante* $a \in \mathcal{C}$ *un elemento* $I(a) \in U$*.*
  2. *A cada símbolo de predicado,* $P \in \mathcal{P}$ *de aridad* n $(n > 0)$ *y cada mundo* $w \in W$ *una relación* n*-aria:* $I(P, w) \subseteq U^n$*.*

---

[1] El lector interesado en esta discusión puede consultar, por ejemplo, Alfonso García Suárez “Modos de significar”, Tecnos, Madrid, 1997.

La definición de h requiere aún de nuevas herramientas:

Definición 5.7 *Una* **asignación de variables** *(o un* **entorno***) ξ asociada a un modelo M, es una aplicación del conjunto de variables en el dominio:*

$$\xi : \mathcal{V}ar \longrightarrow U$$

Dos **asignaciones de variables***, ξ y ξ', se dicen x-***equivalentes***, denotado $\xi' \overset{x}{=} \xi$, si sus valores coinciden salvo a lo sumo en la variable x, es decir, para toda variable $y \neq x$ se tiene que $\xi'(y) = \xi(y)$.* [2]

👀 Nótese que las asignaciones a las constantes y variables se realizan con independencia de los mundos. Por tanto, la asignación de valor a cada término es la misma en cada mundo.

Definición 5.8 *Dado un modelo $M = (W, R, U, I, h)$, una evaluación de variables ξ asociada a él, definimos recursivamente una aplicación $I_{\xi,w}$ que asigna a cada término t un elemento $I_{\xi,w}(t) \in U$ como sigue:*

1. *$I_\xi(c) = I(c)$ para todo símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$.*
2. *$I_\xi(x) = \xi(x)$ para todo símbolo de variable $x \in \mathcal{V}ar$.*

Tenemos ya todos los elementos necesarios para definir h.

Definición 5.9 *Dado un modelo $M = (W, R, U, h, I)$, una asignación de variables $\xi : \mathcal{V}ar \longrightarrow U$ y $w \in W$ definimos la función h_ξ se define recursivamente como sigue:*

- $h_\xi(\top) = W$ *y* $h_\xi(\bot) = \varnothing$
- $h_\xi(P(t_1, \dots, t_n)) = \{w \in W \mid (I_\xi(t_1), \dots, I_\xi(t_n)) \in I(P, w)\}$.
- $h_\xi(\neg A) = h_\xi(A)^c$.
- $h_\xi(A \wedge B) = h_\xi(A) \cap h_\xi(B)$.
- $h_\xi(A \vee B) = h_\xi(A) \cup h_\xi(B)$.
- $h_\xi(A \to B) = h_\xi(A)^c \cup h_\xi(B)$.
- $h_\xi(A \leftrightarrow B) = h_\xi(A \to B) \cap h_\xi(B \to A)$.
- $h_\xi((\exists x)A) = \{w \in W \mid \text{ existe } \xi' \text{ tal que } \xi' \overset{x}{=} \xi \text{ y } w \in h_{\xi'}(A)\}$.
- $h_\xi((\forall x)A) = \{w \in W \mid \text{ para toda } \xi' \text{ tal que } \xi' \overset{x}{=} \xi \text{ se tiene que } w \in h_{\xi'}(A)\}$.
- $h_\xi(\Diamond A) = \{w \in W \mid R(w) \cap h_\xi(A) \neq \varnothing\}$.
- $h_\xi(\Box A) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h_\xi(A)\}$.

---

[2] Obviamente, dado un símbolo de variable x, la relación $\overset{x}{=}$ es una relación de equivalencia.

A la vista de la semántica, podemos asegurar que disponemos de todos los esquemas de fbfs válidas en la lógica modal proposicional y de la lógica clásica de primer orden ¿Pero que podemos afirmar sobre la interacción entre los cuantificadores sobre mundos y los cuantificadores sobre individuos? Consideremos, por ejemplo, las fbfs $(\forall x)\Box A$ y $\Box(\forall x)A$.

- $(\forall x)\Box P(x)$ afirma, de cada ente, que necesariamente tiene la propiedad expresada por P.
- $\Box(\forall x)P(x)$ afirma que, en cada mundo accesible, todo ente en tal mundo tiene la propiedad expresada por P.

Tendremos pues que preguntarnos sobre la validez de las dos fbfs siguientes:

(I) $(\forall x)\Box A \to \Box(\forall x)A$ Fórmula de Barcan

(II) $\Box(\forall x)A \to (\forall x)\Box A$ Conversa de la fórmula de Barcan

El lector puede comprobar que ambas son válidas, así como las siguientes:

(i) $\Diamond(\forall x)A \to (\forall x)\Diamond A$

(ii) $(\exists x)\Box A \to \Box(\exists x)A$

(iii) $(\exists x)\Diamond A \to \Diamond(\exists x)A$

(iv) $\Diamond(\exists x)A \to (\exists x)\Diamond A$

es decir, con la exigencia de dominio constante, las variables toman su valor de modo inalterable e indestructible a través de los mundos posibles. Son muchas las aplicaciones que considerarán este hecho inaceptable. En definitiva, esa es la lectura de la validez del esquema

$$(\forall x)\Box A \equiv \Box(\forall x)A$$

En consecuencia, tendremos que considerar dominios variables:

5.2.2. Semántica con dominio variable

En este apartado nos planteamos la posibilidad de que el dominio de objetos fluctúe de un mundo posible a otro. La conveniencia de este proceder es recoger multitud de frases del lenguaje natural que exigen tal variabilidad. Por ejemplo:

La esperanza de vida de las personas alcanza los 75 años por término medio

Es claro que nos referimos a la totalidad de las personas que viven en un cierto periodo de tiempo, no a la totalidad de la especie humana (los que han sido, son y serán). Esto aconseja que los cuantificadores sean `locales` en el sentido siguiente: se refieren solo a la población del mundo en el que nos situamos. Así, dado un mundo w en el que evaluamos $(\forall x)A$, su lectura intuitiva es: *para todo elemento x del dominio de w se tiene que A*. Similarmente, para $(\exists x)A$ tenemos la lectura: *para algún elemento x del dominio de w se tiene que A.*

La conveniencia de introducir una semántica de dominio variable no está exenta de problemas. Un asunto importante es intentar preservar la validez de las leyes cuantificacionales clásicas. Consideremos, para nuestra discusión, leyes como:

$$\begin{array}{ll} (EG) & (\forall x)A(x) \to A(t) \\ (IP) & A(t) \to (\exists x)A(x) \end{array}$$

Tomemos una instancia de (EG) como $(\forall x)P(x) \to P(y)$. Recordemos que no ponemos más restricciones que la variabilidad de la población entre los mundos y la localidad de los cuantificadores. Podemos considerar, intuitivamente, un modelo en el cual el objeto denotado por la variable y caiga fuera del dominio del mundo w en el que evaluamos, mientras que la extensión del predicado P sea la población de w. Este modelo invalida la instancia anterior. Consideraciones similares valen para $P(y) \to (\exists x)P(x)$.

Tenemos varias opciones si queremos restaurar los principios cuantificacionales básicos de manera que la base de la lógica modal cuantificada sea la lógica cuantificacional clásica. Destacaremos las siguientes:

- Aceptar que los términos sean `locales` (términos que en cada mundo w se refieren exclusivamente a elementos del dominio de w).

  El problema que surge con esto es que la evaluación de ciertas frases resulta problemática, por ejemplo, evaluar en el mundo real *Polifemo no existe* teniendo en cuenta que *Polifemo* no denota un ser existente de nuestro mundo. Si, además de locales, los términos fueran designadores rígidos, entonces la extensión de un término existiría en todos los mundos del modelo. Los únicos objetos que variarían de un mundo a otro serían los no nombrados en ningún mundo y esta restricción podríamos no desearla.

- Poner restricciones a la noción de validez.

  Esta solución es adoptada por Hughes y Cresswell, quienes presentan un planteamiento donde la noción de validez en un modelo significa verdadero en cada mundo w con respecto a interpretaciones de términos que caigan en el domino de w exclusivamente. Así, por ejemplo, $(\forall x)P(x) \to P(y)$ es válida porque es verdadera en todo mundo w de todo modelo en el que consideremos solo asignaciones de las variables que tomen elementos del dominio de w.

- Dejar de evaluar en un mundo w enunciados como *Juan es moreno*, si *Juan* no denota un ser existente de w y, en general, dejar de evaluar fórmulas que contenga constantes o variables libres cuando éstas denoten elementos que caigan fuera del dominio del mundo en el que evaluamos.

  En esta semántica, se consideran válidas las fórmulas que nunca son falsas, esto es, las fórmulas que en cada mundo son o verdaderas o sin valor de verdad. Con esto resultan válidos los principios clásicos bajo discusión. Siguiendo esta línea de una semántica con `huecos de valores veritativos` tenemos los planteamientos de Hugues y Cresswell (1968, 1996) y el de Gabbay (1976). Concretamente, Hugues y Cresswell usan una semántica de "dominios anidados" o de "dominio creciente" (también podemos decir que satisface el *requisito de inclusión*) que enunciaremos seguidamente y que permite sostener la validez en todo modelo de las fórmulas cuantificacionales clásicamente válidas. Gabbay, en cambio, no usa dicho requisito de inclusión, pero modifica la lógica modal proposicional subyacente poniendo restricciones a la regla de necesidad para lograr el mismo objetivo. Lo más usual es utilizar el planteamiento de Hugues y Cresswell y es el que presentaremos aquí.

Por el contrario, si renunciamos a sostener todos los principios cuantificacionales clásicos, podemos optar por una `lógica libre` como sustrato cuantificacional de la lógica modal de primer orden, algo que, por otra parte, es bastante habitual para tratar la lógica modal cuantificada. La lógica libre se caracteriza por permitir el uso de *términos vacíos*, esto es, términos que carecen de referente. Como consecuencia no so aceptables los esquemas clásicos (EG) e (IP). En su lugar, se aceptan formas más restrictivas que aseguren que los términos poseen referente. Un modo de llevar esto a cabo es introducir un predicado especial en el lenguaje, el predicado $EXISTE$, de forma que una fórmula como $EXISTE(t)$ se lee 't existe", o lo que es igual, t posee un referente en el dominio de cuantificación del modelo. Ahora, en lugar de (EG) e (IP) tendríamos como esquemas válidos el siguiente par:

$$((\forall x)A(x) \wedge EXISTE(t)) \to A(t) \quad \text{y} \quad (A(t) \wedge EXISTE(t)) \to (\exists x)A(x)$$

Hay planteamientos de lógica libre que admiten además la posibilidad de que el dominio de cuantificación sea vacío, lo que conduce a que fórmulas válidas como

$$(\exists x)(A \vee \neg A) \quad \text{y} \quad (\exists x)x = x$$

dejen de serlo. A estos planteamientos se les llama específicamente `lógicas universalmente libres`. Dado, entonces, que podemos excluir o no la posibilidad de contar con dominios vacíos, esto se traduce en la formulación de sistemas modales predicativos cuyo fragmento cuantificacional sea una lógica libre o bien universalmente libre.

Después de lo dicho, las características generales de la semántica de dominio variable que expondremos son las siguientes:

- Cada mundo tiene su propio dominio de objetos, su población. Dicha población no es vacía.
- Los términos son rígidos.
- Las propiedades y relaciones entre objetos varían de un mundo a otro. Sin embargo, en la interpretación de un predicado en un mundo puede haber objetos fuera del dominio de dicho mundo (es decir, los predicados no son locales).
- Los cuantificadores son locales.

5.2.3. Semántica con dominio creciente/decreciente

Definición 5.10 *Un* `modelo de dominio variable para una` $LM_1(\Sigma)$ *es una tupla*

$$(W, R, U, \{U_w \mid w \in W\}, h, I)$$

donde:

- (W, R) *es un estructura de Kripke,*
- U *es un conjunto no vacío de individuos y* $U_w \subseteq U$ *para todo* $w \in W$ *tal que*
    - $U_w \neq \varnothing$ *para todo* $w \in W$.
    - *Se satisfacen una de las dos condiciones siguientes:*

  - ○ *para todo $w \in W$, se tiene que, si $v \in R(W)$, entonces $U_w \subseteq U_v$, en cuyo caso decimos que la semántica es con* dominio creciente*.*
  - ○ *para todo $w \in W$, se tiene que, si $v \in R(W)$, entonces $U_w \supseteq U_v$, en cuyo caso decimos que la semántica es con* dominio decreciente*.*

- *h es una aplicación de $LM_1(\Sigma)$ en 2^W*
- *I es una función que asocia:*
  1. *A cada símbolo de constante a y cada mundo $w \in W$, un elemento $I(a, w) \in U_w$.*
  2. *A cada símbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad n ($n > 0$) y cada mundo $w \in W$, una relación n-aria $I(P, w) \subseteq U$.*

Definición 5.11 *Una* `asignación de variables` *(o un* entorno*) ξ asociada a un modelo M, es una aplicación*

$$\xi : \mathcal{V}ar \times W \longrightarrow U$$

tal que $\xi(x, w) \in U_w$ para todo $x \in \mathcal{V}ar$.

Dos `asignaciones de variables`*, ξ y ξ', se dicen x-*`equivalentes`*, denotado $\xi' \overset{x}{=} \xi$, si sus valores coinciden salvo a lo sumo en la variable x, es decir, para toda variable $y \neq x$ se tiene que $\xi'(y, w) = \xi(y, w)$.* [3]

Definición 5.12 *Dado un modelo $M = (W, R, U, \{U_w \mid w \in W\}, I, h)$, una evaluación de variables ξ asociada a él, definimos recursivamente una aplicación I_ξ que asigna a cada término t y cada mundo $w \in W$ un elemento $I_\xi(t, w) \in U_w$ como sigue:*

1. *$I_\xi(c, w) = I(c, w)$ para todo símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$.*
2. *$I_\xi(x, w) = \xi(x, w)$ para todo símbolo de variable $x \in \mathcal{V}ar$.*

Tenemos ya todos los elementos necesarios para definir h.

Definición 5.13 *Dado un modelo $M = (W, R, U, \{U_w \mid w \in W\}, h, I)$, una asignación de variables $\xi : \mathcal{V}ar \times W \longrightarrow U$ y $w \in W$ definimos la función h_ξ se define recursivamente como sigue:*

- $h_\xi(\top) = W$ *y* $h_\xi(\bot) = \varnothing$
- $h_\xi(P(t_1, \ldots, t_n)) = \{w \in W \mid (I_\xi(t_1, w), \ldots, I_\xi(t_n, w)) \in I(P, w)\}$.
- $h_\xi(\neg A) = h_\xi(A)^c$.
- $h_\xi(A \wedge B) = h_\xi(A) \cap h_\xi(B)$.
- $h_\xi(A \vee B) = h_\xi(A) \cup h_\xi(B)$.
- $h_\xi(A \to B) = h_\xi(A)^c \cup h_\xi(B)$.
- $h_\xi(A \leftrightarrow B) = h_\xi(A \to B) \cap h_\xi(B \to A)$.

---

[3] Obviamente, dado un símbolo de variable x, la relación $\overset{x}{=}$ es una relación de equivalencia.

- $h_\xi((\exists x)A) = \{w \in W \mid$ *existe* ξ' *tal que* $\xi' \overset{x}{=} \xi$ *y* $w \in h_{\xi'}(A)\}$.
- $h_\xi((\forall x)A) = \{w \in W \mid$ *para toda* ξ' *tal que* $\xi' \overset{x}{=} \xi$ *se tiene que* $w \in h_{\xi'}(A)\}$.
- $h_\xi(\Diamond A) = \{w \in W \mid R(w) \cap h_\xi(A) \neq \varnothing\}$.
- $h_\xi(\Box A) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h_\xi(A)\}$.

En esta semántica con dominio creciente, que la fórmula de Barcan, $(\forall x)\Box A \to \Box(\forall x)A$ es válida. Análogamente, si se considera la semántica con dominio decreciente, la conversa de la fórmula de Barcan, $\Box(\forall x)A \to (\forall x)\Box A$.

Ejemplo 5.2 Consideremos el lenguaje $LM_1(\varnothing, \varnothing, \{P\})$ y el modelo con dominio variable y creciente $M = (W, R, U, \{U_w \mid w \in W\}, I, h)$ para el lenguaje donde:

- $W = \{w, v\}$,
- $R = \{(w, w), (w, v)\}$,
- $U = \{1, 2\}$; $U_w = \{1\}$ y $U_v = \{1, 2\}$,
- $I(P, w) = \{1\}$, $I(P, v) = \{2\}$

se tiene que $M, w \not\models \Box(\exists x)P(x) \to (\exists x)\Box P(x)$.

Exponemos finalmente un planteamiento de Hugues y Cresswell de dominio creciente donde las fórmulas en las que intervienen términos que no denoten elementos existentes quedan sin evaluar.

Definición 5.14 *Dado un modelo de dominio creciente* $M = (W, R, U, \{U_w \mid w \in W\}, h, I)$, *una asignación de variables* $\xi : \mathcal{V}ar \times W \longrightarrow U$ *y* $w \in W$ *definimos recursivamente la función parcial* h_ξ *como sigue:*

- $h_\xi(P(t_1, \ldots, t_n), w) = 1$ *si* $(h_\xi(t_1), \ldots, I_\xi(t_n)) \in I(P)$
  $h_\xi(P(t_1, \ldots, t_n), w) = 0$ *si* $(h_\xi(t_1), \ldots, I_\xi(t_n)) \notin I(P)$ *y* $h_\xi(t_1), \ldots, I_\xi(t_n \in U_w$
  $h_\xi(P(t_1, \ldots, t_n), w)$ *está sin definir si* $h_\xi(t_i) \notin U_w$ *para algún* $i (1 \leq i \leq n)$
- $h_\xi(\neg A, w) = 1$ *si* $h_\xi(A, w) = 0$
  $h_\xi(\neg A, w) = 0$ *si* $h_\xi(A, w) = 1$
  $h_\xi(\neg A, w)$ *está sin definir si* $h_\xi(A, w)$ *está sin definir*
- $h_\xi(A \land B, w) = 1$ *si* $h_\xi(A, w) = 1$ *y* $h_\xi(B, w) = 1$
  $h_\xi(A \land B, w) = 0$ *si* $h_\xi(A, w) = 0$ *ó* $h_\xi(B, w) = 0$ *y tanto* $h_\xi(A, w)$ *como* $h_\xi(B, w)$ *están definidos*
  $h_\xi(A \land B, w)$ *está sin definir si* $h_\xi(A, w)$ *o* $h_\xi(B, w)$ *está sin definir*
- $h_\xi((\forall x)A, w) = 1$ *si* $h_{\xi'}(A, w) = 1$ *para toda* ξ' *que sea* x*-equivalente a* ξ *en* w
  $h_\xi((\forall x)A, w) = 0$ *si* $h_{\xi'}(A, w) = 0$ *para alguna* ξ' *que sea* x*-equivalente a* ξ *en* w
  $h_\xi((\forall x)A, w)$ *está sin definir en cualquier otro caso*

- $h_\xi(\Box A, w) = 1$ *si* $h_\xi(A, w') = 1$ *para todo* $w' \in R(w)$
  $h_\xi((\Box A, w) = 0$ *si* $h_\xi(A, w) = 0$ *para algún* $w' \in R(w)$ *y, además,* $h_\xi(A, w'')$ *está definido para todo* $w'' \in R(w)$
  $h_\xi(\Box A, w)$ *está sin definir si* $h_\xi(A, w')$ *está sin definir para algún* $w' \in R(w)$

Dejamos como ejercicio al lector, definir las cláusulas semánticas que faltan en la definición anterior.

La noción de validez cambia respecto a la semántica anterior:

Definición 5.15 *Una fórmula* A *de* LM_1 *es* `válida` *en un modelo de dominio creciente con valores parciales* $M = (W, R, U, \{U_w \mid w \in W\}, h, I)$*, si y solo si en todo mundo* $w \in W$ *y toda asignación de variables* ξ *sobre* (U, I)*, se tiene que* $h_\xi(A, w) = 1$ *en caso de que* $h_\xi(A, w)$ *esté definido.*

Destaquemos que en esta semántica no es válida tampoco la fórmula Barcan.

Capítulo 6

Lógicas Multimodales

Las aplicaciones, rara vez reclaman una lógica como la que acabamos de estudiar, es decir, con una única conectiva modal $\Box$ y su dual $\Diamond$. Como veremos, lo habitual es que se requiera disponer de un conjunto de conectivas modales con diferentes lecturas. Por ejemplo,

- no es habitual considerar un único agente y, en consecuencia, necesitaremos disponer de una conectiva de conocimiento para cada uno de ellos, es decir, necesitamos un conjunto de conectivas $\{K_i \mid i \in \Lambda\}$ (y sus duales);
- podemos estar interesados en razonar, no solo sobre el conocimiento de cada agente, sino también sobre sus creencias. Así pues necesitaremos también un conjunto de conectivas $\{B_i \mid i \in \Lambda\}$ (y sus duales);
- tal vez, nos interese también disponer tanto de conectivas de conocimiento o creencia, sino también de conectivas temporales: que permitan expresar la ubicación temporal de los eventos respecto al momento del hablante, es decir, si son presentes, pasados o futuros; o expresar si los eventos referidos son coincidentes o bien transcurren en un cierto orden, etc.
- ...

En definitiva, necesitamos lógicas modales multimodales:

Definición 6.1 *Una lógica multimodal proposicional es aquella cuyo alfabeto incluye, además del alfabeto de la lógica proposicional clásica, un conjunto de conectivas modales. Es decir, las lógicas multimodales son aquellas cuyos lenguajes incluyen una familia de conectivas modales:*

$$\{\Box_i \mid i \in I\} \cup \{\Diamond_i \mid i \in I\}$$

En definitiva, el alfabeto, $\mathfrak{a}_{Lmm}$, de una lógica multimodal LMM se obtiene añadiendo los conjuntos de símbolos de conectivas modales $\{\Box_i \mid i \in \Lambda\}$ y $\{\Diamond_i \mid i \in \Lambda\}$ al alfabeto, $\mathfrak{a}_{prop}$ de un lenguaje proposicional de la lógica clásica:

$$\mathfrak{a}_{Lmm} = \mathfrak{a}_{prop} \cup \{\Box_i \mid i \in \Lambda\} \cup \{\Diamond_i \mid i \in \Lambda\}$$

Así pues, las `fórmulas bien formadas de` *Lmm (en adelante, fbfs): es la clausura inductiva del conjunto $\mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\}$ para los constructores $C_\neg, C_\wedge, C_\vee, C_\rightarrow$, $C_\leftrightarrow$, $C_{\Box_i}$ y $C_{\Diamond_i}$ definidos como sigue:*

Para dos cadenas cualesquiera, $X, Y \in \mathfrak{a}_{LMM}$,

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(X) & = & \neg X \\ C_\wedge(X,Y) & = & (X \wedge Y) \\ C_\vee(X,Y) & = & (X \vee Y) \\ C_\rightarrow(X,Y) & = & (X \rightarrow Y) \\ C_\leftrightarrow(X,Y) & = & (X \leftrightarrow Y) \\ C_{\Box_i}(X) & = & (\Box_i X) \\ C_{\Diamond_i}(X) & = & (\Diamond_i X) \end{array}$$

A Λ se le llama la `signatura` *del lenguaje y a sus elementos* `etiquetas`.

6.1. Semántica de las lógicas multimodales

Puesto que en el lenguaje disponemos de una familia de conectivas modales, requeriremos una familia de relaciones binarias para su interpretación:

Definición 6.2 *Una* `estructura relacional` *es una tupla $(W, \mathcal{R})$ donde W es un conjunto no vacío, y $\mathcal{R} = \{R_i \mid i \in \Lambda\}$ un conjunto no vacío de relaciones sobre W, cada una de ellas con una aridad asociada, ar_i.*

Si todas las relaciones, $R_i \in \mathcal{R}$ son binarias, la estructura relacional se denomina `sistema de transiciones etiquetadas`. [1]

Un sistema de transiciones etiquetadas, puede ser contemplado como un modelo de computación abstracta: Los mundos son los posibles estados de un ordenador, las relaciones son programas (que pueden ser considerados como funciones en el caso determinista y, en el caso general, como relaciones binarias sobre un conjunto de estados). [2]

Definición 6.3 *Una estructura de Kripke para un lenguaje multimodal, LMM, con signatura Λ es un sistema de transiciones etiquetadas*

$$E = (W, \mathcal{R})$$

donde $W \neq \varnothing$ es el conjunto de "mundos posibles" y $\mathcal{R} = \{R_i \mid i \in \Lambda\}$ un conjunto de relaciones de accesibilidad en W (una para cada conectiva modal $\Box_i$ en el lenguaje).

Definición 6.4 *Un* `modelo de Kripke` *para un lenguaje multimodal, LMM, es una terna $M = (W, \mathcal{R}, h)$ donde $E = (W, \mathcal{R})$ es una estructura de Kripke y h una función, llamada* `función de evaluación`*: $h : LMM \longrightarrow 2^W$ que satisface:*

1. *$h(\neg A)$ y $h(A * B)$, con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, se definen como en el caso unimodal.*

---

[1] LTS (Labelled Transition Systems) en la bibliografía inglesa.

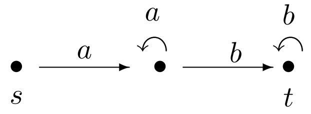
[2] A pesar de su denominación, no siempre una relación se interpretará como una transición entre estados. En efecto, otro ejemplo destacado de sistemas de transiciones son las `redes semánticas` utilizadas para representación del conocimiento. Aquí, por ejemplo, se pueden considerar relaciones espaciales entre objetos y una relación puede ser "encima-de".

2. $h(\Box_i A) = \{w \in W \mid R_i(w) \subseteq h(A)\}$

3. $h(\Diamond_i A) = \{w \in W \mid R_i(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$

Las nociones de satisfacibilidad, validez y consecuencia lógica se definen análogamente al caso unimodal.

Ejemplo 6.1 Veamos cómo son contemplados en computación los modelos de una lógica multiagente. Consideremos el grafo siguiente



Este grafo muestra un autómata finito para el lenguaje formal $a^n b^m$ $(n, m > 0)$. [3]

El lenguaje multimodal apropiado tendrá pues dos conectivas modales de necesidad, $\Box_a$ y $\Box_b$ y sus duales $\Diamond_a$ y $\Diamond_b$, que nos permitiran razonar sobre la a-transiciones y b-transiciones en el autómata. Así, por ejemplo, todas las fbfs de la forma $\Diamond_a \dots \Diamond_a \Diamond_b \dots \Diamond_b \top$, son verdaderas en el estado inicial s del autómata, es decir, tadas las secuencias de modalidades de esta forma corresponden a cadenas aceptadas por el autómata.

Vemos pues que las relaciones pueden ser consideradas como procesos (en este caso, deterministas).

◉◉ Obviamente, una aplicación podrá requerir diferentes propiedades para cada una de las relaciones de accesibilidad, R_i. Por ejemplo, si como indicamos al comienzo de la sección, $\Box_1$ tiene una lectura epistémica (en cuyo caso usaremos K_i en lugar de $\Box_i$), requeriremos que R_1 sea reflexiva (entre otras propiedades); si $\Box_2$ tiene una lectura doxástica (en cuyo caso usaremos B_i en lugar de $\Box_i$) requeriremos que R_2 no sea reflexiva; si $\Box_3$ tiene una lectura deóntica (en cuyo caso usaremos O_i en lugar de $\Box_i$) requeriremos que R_3 sea serial ...

Como hemos visto al estudiar la lógica unimodal, disponemos de esquemas que definen ciertas propiedades de las relaciones R_i; pero ahora, podemos además plantearnos si disponemos de esquemas que definen cierta dependencia entre diversas relaciones. Por ejemplo, dejamos al lector comprobar que:

`En todas las estructuras en las que son válidos los esquemas`

$$A \to \Box_i \Diamond_j A \quad \texttt{y} \quad A \to \Box_j \Diamond_i A$$

`se tiene que` R_i `es la inversa de` R_j`.`

Como tendremos ocasión de comprobar, tenemos aún otra posibilidad, disponer de una signatura Λ que no es meramente un conjunto de etiquetas, sino que es un conjunto estructurado, es decir, en Λ disponemos de operadores, por ejemplo, operadores binarios. Sea $\sharp$ un operador tal; nos interesará conocer cuál es la relación entre la conectiva $\Box_{i\sharp j}$ y las conectivas $\Box_i$ y $\Box_j$.

---

[3] Es decir el conjunto de todas las cadenas consistentes en un bloque de $a's$ seguido de un bloque de $b's$.

Analizaremos todas estas cuestiones en el resto del capítulo, centrándonos en dos lógicas multimodales con una amplia gama de aplicaciones en computación:

- La lógica dinámica, y
- La lógica Epistémica de n agentes,

y, por último, conoceremos una útil combinación de ambas:

- La lógica Dinámico-Epistémica

6.2. Lógica Dinámica

La lógica dinámica fue introducida por Pratt en 1.976. En un principio, Pratt la denominó “lógica modal de programas” y no fue hasta uno de sus trabajos posteriores con Harel y Meyer cuando la llamó lógica dinámica o LDP. No es de extrañar su primera denominación, ya que una de sus aplicaciones más destacadas (entre otras no menos importantes, como tendremos ocasión de comprobar) es la descripción de la *corrección y corrección parcial de programas*, la *comparación de la potencia expresiva de diversas construcciones de programas*, la *síntesis de programas desde especificaciones*, ...

La lógica dinámica describe y analiza los resultados de ejecutar acciones en un conjunto de estados. [4] Estas acciones, habitualmente, son acciones en los estados de memoria de un ordenador, pero pueden ser también acciones de un robot móvil en un mundo cerrado, interacciones entre agentes cognitivos en protocolos de comunicación, etc. En cada una de estas áreas de aplicación, la lógica dinámica se usa para modelizar los estados involucrados y las transiciones entre ellos. Las fórmulas describen estados y las acciones o programas los cambios de estados. Los niveles de descripciones de estados y y las caracterizaciones de las transiciones, programas se conectan mediante adecuadas operaciones que permiten razonar sobre pre-condiciones y post-condicones de cambios concretos.

La *logica dinámica proposicional* (en adelante LDP), extiende la lógica clásica con conectivas modales de la forma $\Box_\alpha$, donde α denota un programa y, sus duales, conectivas duales de la forma $\Diamond_\alpha$ cuyas lecturas son las siguientes:

- $\Box_\alpha A$ se lee: *“tras toda ejecución del programa α se tiene que A”*,
- $\Diamond_\alpha A$ se lee *“hay una ejecución del programa α tras la cual se tiene que A”*

El área de la semántica de los lenguajes de programación han dado un gran ímpetu a la lógica multimodal. Este área contempla el significado de un programa según las acciones que éste realiza sobre la memoria de alguna máquina abstracta. Si consideramos la asignación $x := y$, es natural contemplar su significado como una función que, dada la memoria de una máquina abstracta, actualiza esta memoria asociando el valor de la variable y a la variable x.

---

[4] Un estado es una descripción instantánea de la realidad. Formalmente es una función que asigna un valor a cada variable de programa. Un programa puede ser contemplado como una transformación sobre los estados. Dado un estado inicial, el programa irá recorriendo a través de una serie de estados intermedios y, eventualmente parará en un estado final. La secuencia de estados se denomina traza.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & 3 \\ \hline y & 2 \\ \hline z & 4 \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{x:=y} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & 2 \\ \hline y & 2 \\ \hline z & 4 \\ \hline \end{array}$$

En general, ésta es la visión que adopta la semántica denotacional de los lenguajes de programación determinista. Su extensión al caso no determinista requiere contemplar las asignaciones como relaciones binarias, es decir, como *sistema de transiciones etiquetadas.*

Como ya hemos indicado, un *sistema de transiciones etiquetadas* es un par $(W, \{R_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\})$, que puede ser contemplado como un modelo de computación abstracta. Los mundos son los posibles estados de un ordenador, las etiquetas son programas. Los programas pueden ser considerados como relaciones binarias sobre un conjunto de estados de forma que:

> *dos estados s y s' están relacionados por un programa α, (es decir, $(s, s') \in R_\alpha$) si existe una ejecución del programa α que comienza en el estado s y termina en el estado s'.*

Definamos ya formalmente el lenguaje de la lógica dinámica proposicional:

6.2.1. Lenguaje de la lógica dinámica proposicional (LDP)

Para definir el lenguaje de la lógica dinámica proposicional, necesitamos previamente definir sos sublenguajes:

El sublenguaje de Programas: $\mathcal{L}^0_\Pi$

Este lenguaje tiene como alfabeto el siguiente conjunto de símbolos:

- Un conjunto Π_{atom} de programas atómicos.
- Los símbolos de constructores de programas siguientes:
  - El constructor binario de programs ";" (composición secuencial).
  - El constructor binario de programas "$\cup$" (elección no determinista).
  - El constructor monario de programas "$*$" o **Loop** (iteración un número finito – no determinado–de veces).

Definición 6.5 *El lenguaje $\mathcal{L}^0_\Pi$ es el cierre inductivo libremente generado con conjunto base Π_{atom} y conjunto de constructores $\{;, \cup, *\}$.*

Menos formalmente:

- Todo programa atómico $\alpha \in \Pi_{atom}$ es un programa en $\mathcal{L}^0_\Pi$.
- si α y β son programas en $\mathcal{L}^0_\Pi$, lo son $\alpha; \beta$, $\alpha \cup \beta$ y α^*

  $\alpha_1; \alpha_2$ representa "hacer α_1 y a continuación α_2".

  $\alpha_1 \cup \alpha_2$ representa "hacer α_1 ó α_2" con elección no determinista.

  Loop α, o α^*, representa "hacer α" un número finito – no determinado– de veces (posiblemente cero).

El sublenguaje de fbfs: $\mathcal{L}^0_{LDP}$

Este lenguaje tiene como alfabeto el siguiente conjunto de símbolos:

- Las constantes booleanas $\bot$ y $\top$,
- Un conjunto $\mathcal{V}_{prop} = \{p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1 \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots\}$ de fórmulas atómicas.
- Las conectivas booleanas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.
- Las dos familias de conectivas modales $\{\Box_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}^0_\Pi\}$ y $\{\Diamond_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}^0_\Pi\}$

Definición 6.6 *El lenguaje* $\mathcal{L}^0_{LDP}$ *es el cierre inductivo libremente generado con conjunto base* $\mathcal{V}_{prop} \cup \{\top, \bot\}$ *y conjunto de constructores* $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{\Box_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}^0_\Pi\} \cup \{\Diamond_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}^0_\Pi\}$.

Menos formalmente,

- $\top$, $\bot$ y toda $p \in \mathcal{V}_{prop}$ son fbfs de $\mathcal{L}^0_{LDP}$
- Si A y B son fbfs en $\mathcal{L}^0_{LDP}$, lo son $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow$
- Si A es una fbf en $\mathcal{L}^0_{LDP}$ y $\alpha \in \mathcal{L}^0_\Pi$ entonces, $\Box_\alpha A$ y $\Diamond_\alpha A$ son fbfs en $\mathcal{L}^0_\Pi$

Una vez que disponemos de los sublenguajes $\mathcal{L}^0_\Pi$ y $\mathcal{L}^0_{LDP}$, podemos abordar la tarea de definir el lenguaje de LDP de un modo “doblemente recursivo”:

- Extendemos el sublenguaje $\mathcal{L}^0_\Pi$ con un nuevo constructor de programas denotado ? y denominado “*test*”. Con él podemos construir programas de la forma $A?$ donde A es una fbf. Tenemos pues un nuevo lenguaje de programas al que denotamos $\mathcal{L}_\Pi$
- Extendemos el sublenguaje $\mathcal{L}^0_{LDP}$ ampliando las familias de conectivas modales a

$$\{\Box_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}_\Pi\} \cup \{\Diamond_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}_\Pi\}$$

$A?$ se lee: *“examina la verdad de la fbf A y prosigue si A es cierta y en caso contrario para”.*

6.2.2. Semántica de la lógica dinámica proposicional

Como en toda lógica multimodal:

Definición 6.7 *Una estructura de Kripke para el lenguaje LDP es una estructura de transición etiquetada*

$$E = (W, \mathcal{R})$$

donde $W \neq \varnothing$ *es el conjunto de “estados posibles” y* $\mathcal{R} = \{R_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ *un conjunto de relaciones de accesibilidad en* W*, una para cada conectiva modal* $\Box_\alpha$ *en el lenguaje.*

Definición 6.8 *Un modelo de Kripke para el lenguaje LDP es una tupla*

$$M = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}, h, \Phi)$$

donde

1. $(W, \mathcal{R})$ *es una estructura de Kripke para LDP,*

2. *h es una función de evaluación de fbfs, $h : \mathcal{L}_{LDP} \longrightarrow 2^W$ que asocia a cada fbf el conjunto de estado en los que es verdadera y que satisface las siguientes propiedades:*
    a) $h(\top) = W$ *y* $h(\bot) = \varnothing$
    b) $h(\neg A)$ *y* $h(A * B)$ *con* $* \in \wedge, \vee, \rightarrow$ *(se definen como en el caso unimodal).*
    c) $h(\Box_\alpha A) = \{w \in W \mid R_\alpha(w) \subseteq h(A)\}$
    d) $h(\Diamond_\alpha A) = \{w \in W \mid R_\alpha(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$
3. *Φ es una función de interpretación de programas, $\Phi : \mathcal{L}_\Pi \longrightarrow 2^{W \times W}$ que asocia a cada programa α el conjunto de pares de estados (s, t) tales que una ejecución de α comienza en el estado s y finaliza en el estado t, es decir, $\Phi(\alpha) = R_\alpha$, y que satisface las siguientes propiedades:*
    a) $\Phi(\alpha; \beta) = \Phi(\beta) \circ \Phi(\alpha)$ *(donde $\circ$ denota la composición de relaciones)*
    b) $\Phi(\alpha \cup \beta) = \Phi(\alpha) \cup \Phi(\beta)$
    c) $\Phi(\text{Loop } \alpha) = (\Phi(\alpha))^*$ *(cierre reflexivo y transitivo de $\Phi(\alpha)$)*
    d) $\Phi(A?) = \{(s, s) \mid s \in h(A)\}$

Tenemos pues que, como esperábamos:

i) $\Box_\alpha A$ será verdadera en un estado s, si A es verdadera en todo estado s' al que se pueda acceder desde s por la ejecución de α, es decir, $\Box_\alpha A$ es leída:

“A es verdadera después de cada ejecución de α que termina”.

ii) $\Diamond_\alpha A$ será verdadera en un estado s, si A es verdadera en algún estado s' al que se pueda acceder desde s por la ejecución de α, es decir, $\Diamond_\alpha A$ es leída:

“existe una ejecución de α que termina tras la cual A es verdadera”.

Definición 6.9 *Un modelo M se dice* `estándar` *si las relaciones de accesibilidad satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\begin{array}{lcl} R_{\alpha;\beta} & = & R_\beta \circ R_\alpha \\ R_{\alpha\cup\beta} & = & R_\alpha \cup R_\beta \\ R_{\alpha^*} & = & R_\alpha^* \\ R_{A?} & = & \{(s, s) \mid M, s \models A\} \end{array}$$

Las nociones de *fbf verdadera en un estado de un modelo*, *validez, equivalencia lógica y consecuencia lógica* son las mismas que en la lógica unimodal.

6.2.2.1. Potencia expresiva de LDP

Veamos cómo usar LDP para hablar sobre programación, es decir, su capacidad para expresar las construcciones habituales en programación:

- **Terminación:** Para todo programa $\alpha \in \Pi$, el hecho de que α puede terminar se expresa con la fbf $\Diamond_\alpha \top$. Es decir $\Diamond_\alpha \top$ expresa que α tiene al menos una ejecución que termina (una ejecución con salida). En consecuencia, para todo modelo M y todo estado s en M, $M, s \models \Diamond_\alpha \top$ si y solo si $R_\alpha(s) \neq \varnothing$.
- **No terminación:** Para todo programa $\alpha \in \Pi$, la fbf $\Box_\alpha \bot$ expresa que α "falla", es decir, no tiene ninguna ejecución que termina (no produce salida alguna).
- **Determinismo:** Para todo programa $\alpha \in \Pi$, expresar que α es determinista (es decir, el estado final queda unívocamente determinado por el estado inicial) es equivalente a afirmar la validez del esquema $\Diamond_\alpha A \to \Box_\alpha A$
- **SKIP:** El programa SKIP, también llamado programa 'ìdentidad", es el programa que siempre termina con éxito y que no produce ningún cambio. En LDP se expresa por la fbf $?\top$. Podemos pues considerar este programa como definido.
- **ABORT:** El programa ABORT, también llamado programa 'cero", es el programa que siempre falla. En LDP se expresa por la fbf $?\bot$.
- Podemos introducir también como definidos los siguientes programas:
  - `If` A `then` α `else` $\beta =_{def} (A?;\alpha) \cup (\neg A?;\beta)$
  - **while** A **do** $\alpha \;=_{def} (A?;\alpha)^*;\neg A?$
  - α **until** $A =_{def} \alpha;(\neg A?;\alpha)^*;A?$
- La `terna de Hoare`, $\{A\}\,\alpha\,\{B\}$ [5], cuya lectura es: *"Si se satisface la condición A antes de la ejecución del programa α, se satisface la condición B después de su ejecución"* [6] se expresa en LDP por $A \to \Box_\alpha B$. Por lo tanto, podemos expresar:
  - *Corrección Parcial* (de Hoare) de un programa α con respecto a las *fbfs* A y B:

    $$\models_M A \to \Box_\alpha B$$

  - *Terminación de un camino de un programa α satisfaciendo A:* se expresa $\models_M \Diamond_\alpha A$
  - *Terminación de un camino de un programa α satisfaciendo A bajo la hipótesis B:* se expresa $\models_M B \to \Diamond_\alpha A$

Ejemplo 6.2

- Dado un programa $\alpha \in \Pi$ y una fbf $A \in LDP$, se tiene que los programas

While A **do** α y **repeat** α **until** $\neg A$

---

[5] En la que A se denomina `precondición` y B se denomina `postcondición`.

[6] Por ejemplo, $\{x = 0\}\, x := x + 1\, \{x = 1\}$. Es decir, si $x = 0$ antes de la ejecución del estamento de asignación, entonces $x = 1$ lo es después.

son equivalentes [7]. Por lo tanto:

$$\models_{LDP} \Diamond_{\textbf{while}\ _A\ \textbf{do}\ _\beta} B \ \leftrightarrow\ \Diamond_{\textbf{repeat}\ _\alpha\ \textbf{until}\ _{\neg A}} B$$

- Análogamente, $\models_{LDP} \Diamond_{\textbf{if}_A \textbf{then}_\beta \textbf{else}_\gamma} B \ \leftrightarrow\ \Diamond_{\textbf{if}_{\neg A} \textbf{then}_\gamma \textbf{else}_\beta} B$

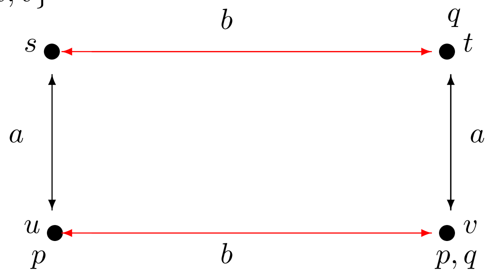
En relación a estos constructores de programas, tan habituales en programación, vamos a parafrasear cómo se refiere a ellos Van Benthem para destacar la importancia de la lógica dinamica:

> *...Al conversar, se emplean muchos más recursos que los enunciados aislados. Si quieres que tu jefe te suba el sueldo, te asegurarás de decir las cosas pertinentes en el orden adecuado. Primero alabarás su capacidad de liderazgo y después pedirás el dinero, nunca al revés. Esto no es más que composición de programas. En función de si parece relajado o tenso, usarás un tipo de discurso u otro. Se trata de un caso IF THEN ELSE en programación. Y si no funciona a la primera, aplicaremos la estrategia de la adulación de modo sistemático: se trata de la instrucción fundamental WHILE DO. Así, las estrategias de conversación implican gran parte de las estructuras secuenciales provenientes de la informática. Se dan incluso construcciones paralelas más sofisticadas, como por ejemplo hacer que los estudiantes respondan a las preguntas simultáneamente. No resulta sorprendente, pues, que las lógicas dinámicas de programas desarrolladas en informática desde los años 70 hayan sido aplicadas al análisis de la comunicación. Aunque estas lógicas se ocuparan originariamente de programas numéricos y del análisis de su comportamiento, ahora se aplican a todo tipo de acción estructurada en la que exista flujo de información. Este no es más que un ejemplo reciente de cómo las ideas principales de la informática (en vez de algún artilugio tecnológico de sobremesa) permean otras disciplinas académicas."*

Ejemplo 6.3 Consideremos el modelo de Kripke M:

- $W = \{s, t, u, v\}$,
- $\Pi = \{\alpha, \beta\}$ y
  - $R_\alpha = \{(t, v), (v, t), (s, u), (u, s)\}$
  - $R_\beta = \{(u, v), (v, u), (s, t), (t, s)\}$
- $h(p) = \{u, v\}$ y $h(q) = \{t, v\}$

representado en la figura:



El lector puede comprobar que

---

[7] Es decir, si $\alpha' = \textbf{while}\ A\ \textbf{do}\ \alpha$ y $\alpha'' = \textbf{repeat}\ \alpha\ \textbf{until}\ \neg A$, se tiene que $R_{\alpha'} = R_{alpha''}$. En consecuencia $\models_{LDP} \Box_{\alpha'} \leftrightarrow \Box_{\alpha''}$

- $\models_M p \leftrightarrow \Box_{(\alpha;\beta^*;\alpha)^*} p$
- $\models_M q \leftrightarrow \Box_{(\beta;\alpha^*;\beta)^*} q$
- Si consideramos el programa

$$\gamma = \big((\alpha;\alpha) \cup (\beta;\beta) \cup ((\alpha;\beta) \cup (\beta;\alpha)); ((\alpha;\alpha) \cup (\beta;\beta))^*; ((\alpha;\beta) \cup (\beta;\alpha))\big)^*$$

[8], se satisface que: `para toda fbf,` A`, se tiene que` $\models_M A \leftrightarrow \Box_\alpha A$

6.2.3. Un Sistema Axiomático para LDP

Presentamos el sistema axiomático más simple para LDP:

Axiomas

(i) Todos los teoremas de la lógica proposicional clásica,

Y, para todo $\alpha \in \Pi$, los esquemas de axiomas:

(ii) $\Box_\alpha(A \to B) \to (\Box_\alpha A \to \Box_\alpha B)$ (distribución)

(iii) $\Box_{\alpha;\beta} A \leftrightarrow \Box_\alpha \Box_\beta A$ (o, equivalentemente, $\Diamond_{\alpha;\beta} A \leftrightarrow \Diamond_\alpha \Diamond_\beta A$) (secuencia)

(iv) $\Box_{\alpha\cup\beta} A \leftrightarrow (\Box_\alpha A \wedge \Box_\beta A)$ (o, equivalentemente, $\Diamond_{\alpha\cup\beta} A \leftrightarrow (\Diamond_\alpha \vee \Diamond_\beta A)$) (elección)

v) $\Box_{A?} B \leftrightarrow (A \to B)$ (o, equivalentemente $\Diamond_{A?} B \leftrightarrow (A \wedge B)$) (test)

vi) $\Box_{\alpha^*} A \leftrightarrow (A \wedge \Box_\alpha \Box_{\alpha^*} A)$ (o, equivalentemente, $\Diamond_{\alpha^*} A \leftrightarrow (A \vee \Diamond_\alpha \Diamond_{\alpha^*} A)$) (bucle)

vii) $\Box_{\alpha^*}(A \to \Box_\alpha A) \to (A \to \Box_{\alpha^*} A)$. [9] (inducción)

Reglas de inferencia:

1. Si $\vdash_{LDP} A$ y $\vdash_{LDP} A \to B$, entonces $\vdash_{LDP} B$ (MP)
2. Para todo programa $\alpha \in \Pi$, si $\vdash_{LDP} A$ entonces $\vdash_{LDP} \Box_\alpha A$ (Nec-α)

Destaquemos algunas reglas derivadas de interés:

- Si $\vdash_{LDP} A \to \Box_\alpha B$ y $\vdash_{LDP} B \to \Box_\beta C$ entonces $\vdash_{LDP} A \to \Box_{\alpha;\beta} C$.
- Si $\vdash_{LDP} (A \wedge B) \to \Box_\alpha C$ y $\vdash_{LDp} (A \wedge \neg B) \to \Box_\beta C$ entonces $\vdash_{LDP} A \to \Box_{\mathbf{if}_B\,\mathbf{then}_\alpha\,\mathbf{else}_\beta} C$
- Si $\vdash_{LDP} (A \wedge B) \to \Box_\alpha A$ entonces $\vdash_{LDP} \Box_{\mathbf{while}_B\,\mathbf{do}_\alpha} A \wedge \neg B$

Teorema 6.1 *LDP tiene la propiedad de modelo finito y es decidible.*

---

[8] que genera todas las palabras sobre el alfabeto $\{\alpha, \beta\}$ con un número par de ocurrencias de α y β.

[9] El axioma (vi) asegura que R_{α^*} es reflexiva y transitiva y que contiene a R_α.
El axioma (vii) expresa que R_{α^*} es la mínima relación reflexiva y transitiva que contiene a R_α.

La demostración de la corrección es directa y estándar. Como bien sabe el lector, basta comprobar que los axiomas son todos esquemas válidos y que las reglas de inferencia respetan la validez. Invitamos al lector a que la realice.

Vamos a demostrar la completitud y decidibilidad. Para ello, construiremos un modelo canónico para el sistema *LDP* (probando así que es completo). Comenzamos introduciendo algunas nociones previas.

6.2.3.1. Modelos de Kripke no estándar

En esta sección definimos un tipo de modelo especial que, como veremos, es muy útil para la prueba de completitud de *LDP*.

Definición 6.10 *Un* `modelo de Kripke no estándar` *es una tupla*

$$M = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}, h, \Phi)$$

definida como en la sección 6.2.2, con la salvedad de que $\Phi(Loop\,\alpha)$ *no requiere ser el cierre reflexivo y transitivo de* $\Phi(\alpha)$*, tan solo debe cumplir la siguiente condición (más débil):*

$$\Phi(\text{Loop }\alpha) \textit{ es una relación reflexiva y transitiva tal que } \Phi(\alpha) \subseteq \Phi(\text{Loop }\alpha)$$

Además se satisface la siguiente condición:

$$h(\Box_{\alpha^*}A) = h(A) \cap h(\Box_{\alpha;\alpha^*}A) = h(A) \cap h(\Box_{\alpha^*}(A \to \Box_\alpha A))$$

Los modelos no estándar son una subclase propia de los modelos estándar en la sección 6.2.2. Por tanto, validan todos los teoremas del sistema axiomático para *LDP* presentados en la sección 6.2.3.

Teorema 6.2 *Todo modelo de Kripke no estándar es un modelo para LDP (i.e., todos los teoremas de LDP son válidos en dicho modelo).*

DEMOSTRACIÓN: La prueba de este teorema es un simple ejercicio para el lector. ∎

Conjuntos de fórmulas máximamente consistentes

Como ya conoce el lector, una herramienta fundamental para probar la completitud de *LDP* es el concepto de conjuntos *máximamente consistentes* de fórmulas de *LDP*.

Definición 6.11 *Sea* Ω *un conjunto de fbfs de* LDP*.* Ω *se dice* `máximamente consistente` *si: (1) es consistente y (2) para cualquier fbf* $A \in LDP$*, si* $A \notin \Omega$*, entonces* $\Omega \cup \{A\}$ *es inconsistente.*

Los siguientes resultados son estándares y la demostración se deja al lector.

Lema 6.1 *Sea* $\Omega \subseteq LDP$ *y* $A \in LDP$*. Entonces* Ω *es consistente si y solo si al menos uno de los dos conjuntos,* $\Omega \cup \{A\}$ *o* $\Omega \cup \{\neg A\}$*, es consistente.*

Lema 6.2 (Lindenbaum) *Sea* $\Omega \subseteq LDP$*. Si* Ω *es consistente entonces existe un conjunto máximamente consistente de fbfs de* LDP *que lo contiene.*

Lema 6.3 *Sea Ω un conjunto de fbs de LDP máximamente consistente. Entonces se tiene que:*

1. *Si $\vdash_{LDP} A$, entonces $A \in \Omega$.*
2. *Si $A, A \to B \in \Omega$, entonces $B \in \Omega$.*
3. *$A \in \Omega$ si y solo si $\neg A \in \Omega$.*
4. *$A \wedge B \in \Omega$ si y solo si $A, B \in \Omega$.*
5. *$A \vee B \in \Omega$ si y solo si $A \in \Omega$ o $B \in \Omega$.*

El siguiente lema es específico de LDP.

Lema 6.4 *Sean Ω y Ω' conjuntos máximamente consistentes de fbfs de LDP y α un programa cualquiera. Entonces:*

$$\{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \subseteq \Omega' \qquad \textit{si y solo si} \qquad \{\Diamond_\alpha A \mid A \in \Omega'\} \subseteq \Omega$$

El siguiente resultado recoge algunos teoremas de LDP que nos serán útiles en la prueba de completitud.

Teorema 6.3 *Las siguientes fbfs son teoremas de LDP:*

1. $\Box_{\alpha^*} A \to A$
2. $\Box_{\alpha^*} A \to \Box_{\alpha^*}\Box_{\alpha^*} A$
3. $\Box_{\alpha^*} A \leftrightarrow (A \wedge \Box_{\alpha^*}(A \to \Box_\alpha A))$

Ahora construiremos el modelo canónico para $PLDP$, un tipo de modelo no estándar. En este modelo, los *estados* son conjuntos máximamente consistentes de fbfs de $PLDP$.

Definición 6.12 *Sea $M = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}, h, \Phi)$ un modelo, donde:*

1. *$W = \{\Omega \subseteq LDP \mid \Omega$ es máximamente consistente$\}$*
2. *Para cada $\alpha \in \Pi$: $R_\alpha = \{(\Omega, \Omega') \mid \{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \subseteq \Omega'\}$*
3. *$h(A) = \{\Omega \in W \mid A \in \Omega\}$, para cada $A \in LDP$*
4. *$\Phi : \mathcal{L}_\Pi \longrightarrow 2^{W \times W}$, de modo que $\Phi(\alpha) = R_\alpha$ para cada $\alpha \in \Pi$*

Nótese que la definición de $h(A)$ no es inductiva, se aplica a todas las fórmulas de LDP. Asimismo, la definición de R_α alcanza a todo programa (no solo a los programas atómicos). Ahora bien, podemos demostrar que estas definiciones cumplen los requisitos de la definición de modelo no estándar dada en la definición 6.10 como hacemos seguidamente.

Lema 6.5 *El modelo canónico para PLDP es un modelo de Kripke no estándar.*

Demostración: Veamos en primer lugar que el modelo canónico cumple las condiciones 1 y 2 del modelo estándar tal y como se establece en la definición 6.9.

En primer lugar, es obvio que $(W, \{R_\alpha \mid \alpha \in \Pi\})$ es una estructura de Kripke. Por otro lado, a partir de la definición de h y las propiedades de los conjuntos máximamente consistentes (lema 6.3) se obtienen todas las condiciones semánticas para $\top$, $\bot$ y las conectivas booleanas. Las condiciones para las conectivas modales se obtienen teniendo en cuenta, además, la definición de R_α. Veamos a continuación que M satisface las siguientes condiciones sobre $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{lcl} (\mathrm{i})R_{\alpha;\beta} & = & R_\beta \circ R_\alpha \\ (\mathrm{ii})R_{\alpha\cup\beta} & = & R_\alpha \cup R_\beta \\ (\mathrm{iii})R_\alpha & \subseteq & R_{\alpha^*} \\ (\mathrm{iv})R_{A?} & = & \{(s,s) \mid M, s \models A\} \end{array}$$

Prueba de (i): Veamos la dirección $\subseteq$. Sea $(\Omega, \Omega') \in R_{\alpha;\beta}$. Probemos que el conjunto

$$\Delta = \{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \cup \{\Diamond_\beta B \mid B \in \Omega'\}$$

es consistente. Supongamos que no lo fuera, entonces existirán fbfs $A_1, \ldots, A_n \in \{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\}$ y $\Diamond_\beta B_1, \ldots, \Diamond_\beta B_m \in \{\Diamond_\beta B \mid B \in \Omega'\}$ tales que

$$\vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \Diamond_\beta B_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond_\beta B_m)$$

donde $\Box_\alpha A_1, \ldots, \Box_\alpha A_n \in \Omega$ y $B_1, \ldots, B_m \in \Omega'$. Entonces $\Box_\alpha(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \in \Omega$ y dado que $(\Omega, \Omega') \in R_{\alpha;\beta}$, tenemos que $\Diamond_{\alpha;\beta} B_1, \ldots, \Diamond_{\alpha;\beta} B_m \in \Omega$. Por el *axioma de secuencia*, $\Diamond_\alpha \Diamond_\beta B_1, \ldots, \Diamond_\alpha \Diamond_\beta B_m \in \Omega$.

Además, por (CP), tenemos que

$$\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to \neg(\Diamond_\beta B_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond_\beta B_m)$$

De aquí, por (Nec-α), obtenemos que

$$\vdash \Box_\alpha(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to \Box\alpha\neg(\Diamond_\beta B_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond_\beta B_m)$$

Por tanto

$$\vdash \Box_\alpha(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (\Box_\alpha \Box_\beta \neg B_1 \vee \ldots \vee \Box_\alpha \Box_\beta \neg B_m)$$

Luego $\Box_\alpha \Box_\beta \neg B_1 \vee \ldots \vee \Box_\alpha \Box_\beta \neg B_m \in \Omega$, lo que es imposible.

Ahora, dado que Δ es consistente, existirá un comjunto máximamente consistente Γ que lo contiene. Es decir, $\{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \subseteq \Gamma$ y $\{\Diamond_\beta B \mid B \in \Omega'\} \subseteq \Gamma$. Luego, por definición de R_α y R_β, llegamos a que $(\Omega, \Gamma) \in R_\alpha$ y $(\Gamma, \Omega') \in R_\beta$, o sea, $(\Omega, \Omega') \in R_\beta \circ R_\alpha$.

Para la dirección $\supseteq$, sea $(\Omega, \Omega') \in R_\beta \circ R_\alpha$. Entonces, por definición de $\circ$, tenemos que existe un conjunto máximamente consistente Γ tal que $(\Omega, \Gamma) \in R_\alpha$ y $(\Gamma, \Omega') \in R_\beta$. Por lo tanto, se tiene que $\{\Diamond_\alpha A \mid A \in \Gamma\} \subseteq \Omega$ y $\{\Diamond_\beta B \mid B \in \Omega'\} \subseteq \Gamma$. A partir de aquí es fácil ver que $\{\Diamond_\alpha \Diamond_\beta A \mid A \in \Omega'\} \subseteq \Omega$; o lo que es igual, $\{\Diamond_{\alpha;\beta} A \mid A \in \Omega'\} \subseteq \Omega$, por el axioma (iii). Es decir, $R_\beta \circ R_\alpha \subseteq R_{\alpha;\beta}$.

Prueba de (ii): Sea $(\Omega, \Omega') \in R_{\alpha\cup\beta}$, entonces $\{A \mid \Box_{\alpha\cup\beta} A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$. Supongamos. además, que $(\Omega, \Omega') \notin (R_\alpha \cup R_\beta)$, es decir, $(\Omega, \Omega') \notin R_\alpha$ y $(\Omega, \Omega') \notin R_\beta$. Entonces $\{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \not\subseteq \Omega'$

y $\{A \mid \Box_\beta A \in \Omega\} \nsubseteq \Omega'$. Existen, pues, fbfs B y C tales que $\Box_\alpha B \in \Omega$, $\Box_\beta C \in \Omega$, $B \notin \Omega'$ y $C \notin \Omega'$. Luego $\Box_\alpha(B \vee C)$, $\Box_\beta(B \vee C) \in \Omega$ y $B \vee C \notin \Omega'$. Entonces $\Box_\alpha(B \vee C) \wedge \Box_\beta(B \vee C) \in \Omega$, luego $\Box_{\alpha\cup\beta}(B \vee C) \in \Omega$. Pero, dado que $B \vee C \notin \Omega'$ y $\{A \mid \Box_{\alpha\cup\beta} A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$, obtenemos que $\Box_{\alpha\cup\beta}(B \vee C) \notin \Omega$ llegando a una contradicción. Así pues, $R_{\alpha\cup\beta} \subseteq R_\alpha \cup R_\beta$.

Recíprocamente, sea $(\Omega, \Omega') \in R_\alpha \cup R_\beta$. Entonces $(\Omega, \Omega') \in R_\alpha$ o $(\Omega, \Omega') \in R_\beta$, o lo que es igual, $\{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$ o $\{A \mid \Box_\beta A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$. Con cualquiera de las dos alternativas obtenemos trivialmente que $\{A \mid \Box_\alpha A \in \Omega\} \cap \{A \mid \Box_\beta A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$. Pero esto es equivalente a afirmar que $\{A \mid \Box_\alpha A \wedge \Box_\beta A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$, o sea, $\{A \mid \Box_{\alpha\cup\beta} A \in \Omega\} \subseteq \Omega'$, y esto último es lo mismo que $(\Omega, \Omega') \in R_{\alpha\cup\beta}$.

Prueba de (iii):

$$\begin{array}{lll}
(\Omega, \Omega') \in R_{A?} & \text{si y solo si} & \{\Diamond_{A?} \mid B \in \Omega'\} \subseteq \Omega \\
 & \text{si y solo si} & \{A \wedge B \mid B \in \Omega'\} \subseteq \Omega \qquad \text{(por el \textit{axioma test})} \\
 & \text{si y solo si} & \text{para toda fbf } B \in \Omega',\ A \wedge B \in \Omega \\
 & \text{si y solo si} & \Omega' \subseteq \Omega \text{ y } A \in \Omega \\
 & \text{si y solo si} & \Omega' = \Omega \text{ y } A \in \Omega \qquad \text{(pues } \Omega, \Omega' \text{ son máximamente consistentes)} \\
 & \text{si y solo si} & \Omega' = \Omega \text{ y } \Omega \in h(A)
\end{array}$$

Para completar nuestra tarea falta por ver, por un lado, que R_{α^*} es reflexiva y transitiva, y, por otro, que se satisface la siguiente condición:

$$h(\Box_{\alpha^*} A) = h(A) \cap h(\Box_{\alpha;\alpha^*} A) = h(A) \cap h(\Box_{\alpha^*}(A \to \Box_\alpha A))$$

Se deja al lector que compruebe que lo primero se cumple por el lema 6.3 (1 y 2), el apartado (1) del lema 6.3 y la definición para R_{α^*} en el apartado (2) del modelo canónico. En cuanto a lo segundo, que es consecuencia del *axioma bucle* y el lema 6.3(3). ■

La demostración de la completitud es ahora inmediata.

Teorema 6.4 *Si A es un fórmula de LDP válida, entonces es un teorema.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A una fórmula válida, entonces es válida, en particular, en el modelo no estándar, lo que significa que A pertenece a todo conjunto máximamente consistente, luego, por 6.3(1), es un teorema. ■

Teorema 6.5 *LDP tiene la propiedad de modelo finito y es decidible.*

6.2.4. Lógica Dinámica de Primer Orden

6.2.4.1. El lenguaje de la Lógica Dinámica de Primer Orden $\mathcal{L}_D^1$

El alfabeto se obtiene sin más que añadir al lenguaje de la lógica clásica de primer orden con igualdad el símbolo :=.

Los términos y átomos se definen como en la lógica clásica de primer orden.

En esta lógica, el sublenguaje de programas $\mathcal{L}_\Pi^1$ se obtiene del definido para el caso proposicional añadiendo un nuevo constructor de programas: Para todo símbolo de variable individual $x \in \mathcal{V}$ y todo término t,

$x := t$ es un programa llamado `asignación`.

6.2.4.2. Semántica de la lógica dinámica de primer orden

Definición 6.13 *Una interpretación es una tupla*

$$M = (D, I, W, \{R_{\alpha|\alpha\in\Pi}\}, h, \Phi)$$

dónde (D, I) *se definen como en la lógica clásica de primer orden, así como las valuaciones o asignaciones de variables, de* $\xi : Var \longrightarrow D$*, que son denominadas "entornos" o "estados"*

Dada una interpretación M *y una evaluación de variables* ξ *asociada a ella, definimos recursivamente la aplicación* I_ξ *como sigue:*

- $I_\xi(c) = \xi(c)$ *para todo símbolo de constante* c*.*
- $I_\xi(x) = \xi(x)$ *para toda variable* x*.*
- $I_\xi(f(t_1, \ldots, t_n)) = I((I_\xi(t_1), \ldots, I_\xi(t_n))$*.*
- $\Phi(x := t) = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_2 = \xi_1(I_{\xi_1}(t) \mid x)\}$*, dónde* $\xi_1(I_{\xi_1}(t) \mid x)$ *denota que* $\xi_2(y) = \xi_1(y)$ *para* $y \neq x$ *y que el valor asignado a* x *es* $I_{\xi_1}(t)$*.*
- $\Phi(A\ ?\ )$, $\Phi(\alpha;\beta)$, $\Phi(\alpha\cup\beta)$ *y* $\Phi(\text{Loop }\alpha)$ *se definen como en el caso proposicional.*

- $M, \xi \models t_1 = t_2$ *si y solo si* $I_\xi(t_1) = I_\xi(t_2)$*.*
- $M, \xi \models P(t_1, \ldots, t_n)$ *si y solo si* $(I_\xi(t_1), \ldots, I_\xi(t_n)) \in I(P)$*.*
- $M, \xi \models \neg A$*,* $M, \xi \models A \wedge B$*,* $M, \xi \models (\forall x)A$ *y* $M, \xi \models \Box_\alpha A$ *se definen como en el caso clásico de primer orden y LDP respectivamente.*

Harel denomina "simples" a este tipo de estructuras. En ellas, la interpretación de los símbolos de función y de los símbolos de predicados es la misma en todos los estados $s \in W$ posibles.

Ejemplo 6.4 Las siguientes fbfs son válidas

1. $(x = y) \rightarrow \Box_\alpha\Box_\beta(x = y)$, dónde:

   $$\alpha = \mathit{Loop}(x := f(f(x))) \text{ y } \beta = \mathit{Loop}(y := f(y))$$

   Que asegura que el proceso de aplicar repetidamente una función compuesta cónsigo mismo es un caso especial de aplicarla repetidamente.

2. $\Box_\alpha(x = z \vee y = u)$, dónde $\alpha = (x = z \wedge y = u)?; (x := f(x) \cup y := f(y))$

   Que asegura que al menos una de las compónentes de la unión no determinista se ejecuta.

3. Si cónsideramos el dominio $(\mathbb{N}, 0, +, \times, >)$, són válidas:

   $$\Diamond_{\text{Loop}x:=x-1}\, x = 0; \quad y > 0 \vee \Diamond_{y=0}?^{\top};$$

6.3. Lógica Epistémica

La lógica epistémica fue introducida como lógica modal en 1962 por Jaakko Hintikka. [10] Como ya hemos mencionado en el capítulo 2, la lógica epistémica lee la conectiva modal $\Box$ como una conectiva de conocimiento y se denota por K.

$K\,A$ se lee: *"se sabe que A"*

En esta sección estudiaremos esta lógica, utilizada para razonar sobre el conocimiento de uno o varios agentes. El concepto de agente es el protagonista de la lógica epistémica, ya que un agente puede ser contemplado como una particularización o individualización del estado de conocimiento. Intuitivamente, el conocimiento de un agente (que no tiene por qué ser humano) corresponde a su capacidad de responder a cuestiones sobre un mundo específico.

El interés de la lógica epistémica ha aumentado significativamente en las últimas décadas, debido al protagonismo de los sistemas inteligentes (éstos se consideran como agentes que interactúan entre sí o bien cooperando o bien compitiendo) [11]. Son muchas las aplicaciones en las que es relevante razonar sobre el conocimiento de los agentes involucrados. Entre ellas, podemos mencionar las aplicaciones en Economía, en Juegos, en Protocolos de Comunicación, en el diseño de *Agentes de Software* [12], en Planificación, en comprensión del lenguaje natural, en control inteligente [13], en sistemas distribuidos [14] y de seguridad [15], ...

La mayoría de los problemas reales tratan con entornos complejos que requieren safisticadas capacidades de razonamiento y la solución de varios aspectos simultáneamente. Un planteamiento centralizado, en el que un solo programa aborde todos los aspectos del problema resulta, en general, muy complicado y muy costoso computacionalmente. La solución más aceptable consiste en contemplar varias componentes o agentes. Estos agentes han de ser autónomos y poseer capacidades computacionales independientes y, lo que es más importante, tener la capacidad de interactuar, colaborar con otros agentes. En esta sección, una vez estudiada la lógica modal a nivel general y la lógica dinámica como lógica multimodal, gran parte de nuestro estudio en esta sección será conocido por el lector, por lo tanto, pondremos especial énfasis en las peculiaridades aportadas por la lectura epistémica de $\Box$.

El lenguaje de la Lógica Epistémica $\mathcal{L}_n^K$

Denotamos por $\mathcal{L}_n^K$ la lógica multimodal epistémica que formaliza el razonamiento sobre el conocimiento de una conjunto de n agentes, $\mathcal{A}g$. Así pues:

---

[10] Hintikka, J. *Knowledge and Belief.* Ithaca: Cornell University Press, 1962.

[11] Conviene desatacar que no se trata de "sistemas basados en conocimiento", ya que éstos utilizan el conocimiento, pero no razonan sobre él.

[12] Como los Softbots, agentes software que navegan por Internet, buscando información que pueda ser interesante para sus usuarios.

[13] Formalizando qué tipo de conocimiento tiene el sistema, cómo evoluciona el conocimiento, cuál es la acción apropiada del sistema en un estado de conocimiento dado,...

[14] Un sistema distribuido, básicamente, se compone de un conjunto de procesadores o programas o agentes, que están conectados (vía web) y que intercambian información.

[15] Garantizar que quien no conoce P (pasword) no puede acceder a Q (información).

Definición 6.14 *El alfabeto,* $\mathfrak{a}_{L_n^K}$*, de una lógica epistémica* $\mathcal{L}_n^K$ *se obtiene añadiendo los conjuntos de símbolos de conectivas modales* $\{K_a \mid a \in \mathcal{A}g\}$ *y* $\{\Diamond_a \mid A \in \mathcal{A}g\}$ *al alfabeto,* $\mathfrak{a}_{prop}$ *de un lenguaje proposicional de la lógica clásica:*

$$\mathfrak{a}_{L_n^K} = \mathfrak{a}_{prop} \cup \{K_a \mid a \in \mathcal{A}g\} \cup \{\Diamond_a \mid a \in \mathcal{A}g\}$$

El lenguaje L_n^K *de la lógica* $\mathcal{L}_n^K$ *es la clausura inductiva del conjunto* $\mathcal{V}_{prop} \cup \{\bot, \top\}$ *para los constructores* $C_\neg, C_\wedge, C_\vee, C_\rightarrow$*,* $C_\leftrightarrow$*,* C_{K_a} *y* $C_{\Diamond_a}$ *definidos en el modo habitual.*

Ejemplo 6.5 El lenguaje L_n^K permite expresar el conocimiento de un agente, así como su conocimiento sobre el conocimiento de los otros agentes. Supongamos que tenemos un grupo de n agentes y que denotamos por $K_1, \dots K_n$ y $\Diamond_1, \dots, \Diamond_n$ las conectivas modales:

- K_1A se lee *"el agente* 1 *sabe que* A*"*.
- $\Diamond_1 A$: *"El agente* 1 *considera factible que* A*"* [16].
- K_1K_2A se lee *"el agente* 1 *sabe que el agente* 2 *sabe que* A*"*.
- $K_1\neg K_2K_1A$ se lee *"el agente* 1 *sabe que el agente* 2 *no sabe que el agente 1 sabe que* A*"* [17].
- $(K_1A \wedge K_1(A \rightarrow B)) \rightarrow K_1B$ se lee *"si el agente* 1 *sabe que* A *y que* $A \rightarrow B$*, entonces sabe que* B*"*.
- $\Diamond_1 (K_2A \vee K_2\neg A)$ se lee *"el agente* 1 *considera factible que el agente* 2 *puede saber la respuesta a la pregunta ¿*A*?"*
- $\neg K_1A \wedge \neg K_1\neg A$ se lee *"el agente* 1 *no sabe que* A *y no sabe que* $\neg A$*"*
- $K_2(\neg K_1A \wedge \neg K_1\neg A)$ se lee *"el agente* 2 *sabe que el agente 1 no sabe que* A *y no sabe que* $\neg A$*"*
- $K_1\Diamond_1A$ se lee *"el agente* 1 *sabe que él considera factible que* A*"*
- $K_1A \rightarrow K_2A$ se lee *"Si el agente* 1 *sabe que* A*, entonces el agente* 2 *sabe que* A*"* (`propiedad de persistencia`)

Ejemplo 6.6 [Sistemas Distribuidos] Consideremos dos procesos a y b. El símbolo proposicional p describe el estado del procesador a y el símbolo proposicional q el estado del procesador b. Ambos estados solo conocen su propio estado. (escribimos 10 si p es cierto y q es falso, etc. Una conexión etiquetada con a o b significa que los estados conectados son indistinguibles para a y b respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
01 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & 11 \arrow[d, "a"] \\
00 \arrow[r, "b"] & 10
\end{tikzcd}$$

En el estado 11 de este modelo se satisface que:

---

[16] Hasta donde sabe, es posible que A, es decir, A es una "posibilidad epistémica para el agente 1.

[17] Piense en cuántas ocasiones éste será el objetivo del agente 1.

- $K_a p$ (el proceso a sabe que su valor es 1),
- $K_a \neg K_b p$ (a sabe que b no lo sabe),
- $\neg K_a \neg K_b q$ (a considera posible que b sepa que su valor local es 1).

Describimos que los procesos a y b solo conocen su propio estado por

- $p \to K_a p$ y $\neg p \to K_a \neg p$, para el proceso a,
- $q \to K_a q$ y $\neg q \to K_a \neg q$, para el proceso b.

6.3.1. Semántica de $\mathcal{L}_n^K$

Definición 6.15 *Una estructura de Kripke para L_n^K, con signatura $\mathcal{A}g$ es un sistema de transiciones etiquetadas $E = (W, \mathcal{R})$ donde $W \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío de "mundos posibles" y $\mathcal{R} = \{R_a \mid a \in \mathcal{A}g\}$ un conjunto de relaciones de accesibilidad en W, una para cada agente.*

Definición 6.16 *Un* `modelo para` L_n^K *es una tupla $M = (W, \mathcal{R}, h)$ tal que $\mathcal{R} = \{R_a \mid a \in \mathcal{A}g\}$ y $h : L_n^K \longrightarrow 2^W$ una función de evaluación que satisface:*

1. *$h(\neg A)$ y $h(A * B)$, con $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, se definen como en el caso unimodal.*
2. *$h(K_a A) = \{w \in W \mid R_a(w) \subseteq h(A)\}$ para todo $a \in \mathcal{A}g$.*
3. *$h(\Diamond_a A) = \{w \in W \mid R_a(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$ para todo $a \in \mathcal{A}g$.*

Un `estado epistémico o modelo punteado` *para $\mathcal{L}_n^K$ es un par (M, w) donde M es un modelo y $w \in W$.*

Ejemplo 6.7 Veamos que dos conectivas de conocimiento K_1 y K_2 cualesquiera no conmutan, es decir $\not\models K_1 K_2 A \leftrightarrow K_2 K_1 A$.

Para ello, basta mostrar un contramodelo, por ejemplo, para $K_1 K_2 p \to K_2 K_1 p$.

Consideremos el modelo $M = (W, \mathcal{R}, h)$ para el lenguaje L_2^K con signatura $\mathcal{A}g = \{1, 2\}$, donde:

- $W = \{w_1, w_2\}$,
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ con $R_1 = \{(w_1, w_2)\}$, $R_2 = \{(w_1, w_1)\}$
- $h(p) = \{w_1\}$

El lector puede comprobar que M es un contramodelo para $K_1 K_2 p \to K_2 K_1 p$, ya que $w_1 \in h(K_1 K_2 p)$ y $w_1 \notin h(K_2 K_1 p)$

Ejemplo 6.8 Consideremos un grupo de tres agentes, $\mathcal{A}g = \{a, b, c\}$, y un modelo $M = (W, \mathcal{R}, h)$ tal que:

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $R_a = \{(w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$; $R_b = \{(w_1, w_3), (w_3, w_3)\}$ y $R_c = \{(w_2, w_3), (w_1, w_1)\}$

- $h(p) = \{w_1, w_3\}$ y $h(q) = \varnothing$ para toda variable proposicional $q \neq p$, donde p formaliza; *“España es campeona mundial de fútbol”.*

Entonces, en el mundo w_1, se tiene que:

- España es campeona mundial de fútbol, pero a no lo sabe ya que $w_1 \in h(p \wedge \neg K_a p)$.
- Más aún, en w_1, el agente a no puede saber que España es campeona, ya que $w_1 \notin h(K_a(p \wedge \neg K_a p)$.
- El agente b sabe si España es campeona mundial de fútbol o no lo es, y el agente a sabe que b posee tal conocimiento, ya que $w_1 \in h(K_b p \vee K_b \neg p)$.
- El agente b sabe que España es campeona mundial de fútbol, pero no sabe que a no lo sabe, ya $w_1 \in h(K_b p)$ y $w_1 \in h(\neg K_b \neg K_a p)$.
- El agente c sabe que el agente b sabe que España es campeona mundial de fútbol, ya que $w_1 \in h(K_c K_b p)$
- El agente c sabe que el agente b no sabe que el agente a no sabe que España es campeona mundial de fútbol, ya que $w_1 \in h(K_c \neg K_b \neg K_a p)$
- ...

Vemos pues que desde una pequeña información podemos ir extrayendo más y más, de modo que todo agente puede conocer una cantidad infinita de información.

👀 Al formalizar expresiones en este lenguaje, conviene destacar que, como bien sabemos, hay una distinción entre *“saber que”* y *“saber si”*. Por ejemplo, podemos decir “Alejandro sabe que hay fuego en la cocina” (si esto es cierto, tenemos asgurado que hay presencia de fuego en la cocina) y podemos decir “Alejandro sabe si hay fuego en la cocina” (en este caso, no se tiene asegurada la presencia de fuego en la cocina. Tan sólo que en caso que lo haya, Alejandro lo sabe y si no lo hay, sabe que no lo hay). Así pues, la primera frase la simbolizamos por $K_a p$ y la segunda la simbolizamos por $K_a p \vee K_a \neg p$.

Ya disponemos del lenguaje L_n^K y de una semántica de Kripke para él, es decir, ya tenemos una lógica epistémica en la que podemos analizar de la verdad de una fbf en un estado epistémico, de la validez, equivalencia lógica y consecuencia lógica. Más concretamente, ya disponemos de una `lógica epistémica proposicional minimal`, ya que no hemos puesto restricción alguna a las relaciones de accesibilidad, R_a ¿pero es esta lógica la adecuada? Para responder a esta pregunta es preciso que reflexionemos sobre la semántica que acabamos de definir, con la lectura epistémica en mente:

(I) Dado un agente, a, y un estado epistémico (M, w), entendemos que $R_a(w)$ es el conjunto de mundos que a considera como “concebibles”. Podemos decir que los mundos que concibe son diferentes alternativas que el agente no es capaz de diferenciar (cognitivamente) del mundo real. Por lo tanto, al afirmar que el agente a sabe que un hecho o enunciado A es verdadero, denotado $K_a A$, estamos diciendo que A *es verdadero en todos los mundos que él concibe* y al afirmar que el agente a no sabe que un hecho o enunciado A es verdadero, denotado $\neg K_a A$, estamos diciendo que A *es falso en al menos uno de los mundos que él* *concibe*. De este modo, a da lugar a una clasificación de W en mundos que considera factibles y mundos que no considera factibles. En las aplicaciones, $R_a(w)$ vendrá determinada de los recursos de los que a dispone en w.

Ejemplo 6.9 Supongamos que el agente a_1 pasea por Málaga en un día soleado, pero carece de información acerca del tiempo que hace en Bilbao. Entre los mundos que puede postular el agente a_1 como factibles en esa situación habrá algunos en los que llueva en Bilbao y en otros en los que no llueva. En todos ellos, sin embargo, hace un día soleado en Málaga. Los mundos en los que en Málaga no hace un día soleado no son postulables como posibles por el agente a_1, sí lo son, en cambio, para otro agente a_2 que carezca de información del tiempo que hace en Málaga. Podemos decir que a_1 "sabe" que en Málaga hace un día soleado pero desconoce el tiempo que hace en Bilbao.

Ejemplo 6.10 [18] Consideremos un juego de cartas en el que intervienen varios jugadores.

En este caso, los mundos son las distintas formas en que quedan distribuidas las cartas entre los jugadores. Inicialmente, cada jugador considera posibles todos los mundos que son compatibles con las cartas que él tiene en su mano. El resto de los mundos no los tiene en cuenta. Los jugadores pueden adquirir (en el transcurso del juego) información adicional que les permitirá eliminar algunos de los mundos que consideraban posibles y, en cambio, considerar otros. Todo ello depende de las cartas que estén encima de la mesa, de las que posea en ese momento, de la información acerca de la estrategia de los otros jugadores, etc.

Simplificando la situación, supongamos dos agentes, Abel y Paula, y tres cartas posibles: as de oros (O), as de espadas (E) y as de copas (C). Cada agente posee inicialmente una carta en su mano y la tercera se halla boca abajo encima de la mesa. Caractericemos un mundo posible descrito como un par ordenado (x, y), donde x es la carta que tiene en su mano Abel e y la que tiene en su mano Paula. En total, en esta situación inicial, W consta de seis mundos posibles:

$$\text{(O, E), (O, C), (E, O), (E, C), (C, O), (C, E)}$$

La relación de accesibilidad para cada agente es distinta desde cada mundo. Por ejemplo, en (O, C) Abel considera como posibles los mundos (O, C) y (O, E) pero no el resto, debido a que él tiene información segura de que posee el as de oros pero no ve la carta del oponente (excluimos cualquier factor que pueda proporcionarle información acerca de las otras cartas).

En general, en un mundo (x, y), Abel considera como posibles los mundos $(x, y), (x, z)$, siendo x, y, z variables distintas. Respecto de Paula la situación cambia. En el mundo (O, C), ella postula como posibles los mundos (O, C) y (E, C); ya que posee información exacta de que tiene el as de copas pero no la posee acerca de la carta del oponente. En general, en un mundo (x, y), Paula considera como posibles los mundos $(x, y), (z, y)$.

Ahora representemos las expresiones "Paula tiene un as (de oros, copas, espadas)" y "Abel tiene un as (de oros, copas, espadas)" mediante los átomos Po, Pc, Pa, Ao, Ac, Ae respectivamente. Podemos evaluar (en la situación que hemos presentado, organizada como una estructura de Kripke) afirmaciones acerca del conocimiento de los agentes, como "Paula sabe que Abel tiene el as de copas" ($K_{Paula}Ac$), "Abel no sabe que Paula tiene el as de oros"($\neg K_{Abel}Po$) o "Paula

---

[18] Tomado de Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Y. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. The MIT Press, 1995.

sabe que Abel desconoce que ella tiene el as de oros" ($K_{Paula}\neg K_{Abel}Po$), etc. Adviértase que la primera proposición es falsa en el mundo (O, C), miemtras que las dos restantes son verdaderas en dicho mundo.

(II) En esta lógica epistémica minimal, conocemos (de nuestro estudio de la lógica unimodal) que, para cada agente $a \in \mathcal{A}g$ se tiene que

$$\models K_a(A \to B) \to (K_aA \to K_aB) \qquad \text{(esquema de distribución)}$$ [19]

Este esquema nos asegura que si *el agente a sabe que A y se tiene que B es consecuencia lógica de A, entonces el agente a también sabe que B*. En particular, el agente ¡conoce todas las fbfs válidas! Este hecho, conocido como el `problema de la omnisciencia lógica`[20], ha dado lugar a numeroso debates[21]. En computación se soslaya entendiendo que es preciso distinguir entre *"conocimiento explícito"* y *"conocimiento implícito de un agente"*. De este modo, el esquema de distribución afirma que *"si a sabe que A y B es consecuencia lógica de A, entonces a sabe implícitamente que B"*.

(III) ¿Los agentes han de considerar el estado epistémico actual como una alternativa? Es decir, ¿hemos de exigir que cada R_a sea reflexiva? Parece razonable que sea así. De lo contrario, podríamos esperar que un agente supiera información falsa, lo cual no es razonable[22]. Así pues, supondremos que todo modelo epistémico, M es reflexivo y, en consecuencia, $\models_M K_aA \to A$, esquema al que hemos denominado de *conocimiento perfecto* al estudiar la lógica unimodal.

(IV) Puesto que todo modelo epistémico, M, es reflexivo, es también serial y, en consecuencia también tenemos asegurado que $\models_M K_aA \to \Diamond_aA$, esquema denominado de *conocimiento consistente.*

(V) Podemos exigir que el agente tenga la capacidad de *introspección positiva*, es decir, exigir que todo modelo epistémico sea transitivo y por lo tanto que $\models_M K_aA \to K_aK_aA$: *"si el agente sabe que A, entonces sabe que sabe que A"*.

(VI) Por último, podemos exigir que el agente tenga la capacidad de *introspección negativa*, es decir, exigir que todo modelo epistémico sea euclideo y por lo tanto que $\models_M \neg K_aA \to K_a\neg K_aA$: *"si el agente no sabe que A, entonces sabe que no sabe que A"*.

---

[20] El conocimiento de todas las fórmulas válidas por parte de un agente es un caso particular de un concepto más fuerte de omnisciencia lógica, que algunos llaman `omnisciencia lógica completa` (full logical omniscience), expresado como sigue: Un agente es un omisciente lógico completo (respecto a la clase $\mathcal{C}$ de modelos) si y solo dado cualquier conjunto de fbfs, Ω, y cualquier fórmula A, si el agente sabe que B para toda $B \in \Omega$ y A es consecuencia lógica de Ω, entonces el agente también sabe que A.

La omnisciencia lógica puede ser contemplada, como se puede apreciar, como una propiedad de cierre del conocimiento de un agente bajo la operación de consecuencia lógica. Si éste sabe ciertas cosas y de éstas se deducen otras, estas últimas también las sabe. O dicho de una forma más coloquial: el agente conoce las consecuencias lógicas de todo lo que sabe.

[21] Todos fundamentan la necesidad de tal debate en el hecho que los agentes poseen una cantidad finita de recursos y no pueden tratar una cantidad ilimitada de información. En consecuencia una limitación a la capacidad de razonar sobre sus conocimientos.

[22] Sí lo podríamos aceptar para conceptos más débiles que el de *conocimiento*, por ejemplo, *creencia*, *conjetura*, *expectativa. . .*

(VII) Si se exige que todo agente posea la capacidad de introspección positiva y la capacidad de introspección negativa, se dice que el agente posee la capacidad de *introspección completa*: el agente no tiene dudas sobre lo que sabe.

Cada aplicación determinará qué restricciones de las señaladas es adecuado exigir. La más habitual es considerar o bien la lógica epistémica $S4\text{-}\mathcal{L}_n^K$ o la lógica epistémica $S5\text{-}\mathcal{L}_n^K$

👀 Conviene destacar que estamos considerando que el conjunto de agentes es *homogéneo*, es decir, consideramos las mismas restricciones para todas las relaciones de accesibilidad en $\mathcal{R}$.

Presentada semánticamente la lógica epistémica proposicional, a estas alturas, el lector no tendrá problemas al leer la siguiente sección:

6.3.2. Sistemas axiomáticos para L_n^K

6.3.2.1. Axiomas

Si consideramos la lógica $S4\text{-}\mathcal{L}_n^K$:

1. Todas los teoremas de la lógica clásica proposicional.
2. Para cada $a \in \mathcal{A}g$:
    - *a*) $K_a(A \to B) \to (K_aA \to K_aB)$ (distribución)
    - *b*) $K_aA \to A$ (T)
    - *c*) $K_aA \to K_aK_aA$ (introspección positiva)

Si consideramos la lógica $S5\text{-}\mathcal{L}_n^K$, añadimos el esquema de axioma: $\neg K_aA \to K_a\neg K_aA$ (de introspección negativa)

6.3.2.2. Reglas de inferencia

Para cada $a \in \mathcal{A}g$:

1. **(MP):** $\dfrac{A,\ (A \to B)}{B}$
2. **(Nec):** $\dfrac{A}{K_aA}$

Teorema 6.6

- $S4\text{-}\mathcal{L}_n^K$ *está caracterizado por todos los modelos finitos reflexivos y transitivos.*[23]
- $S5\text{-}\mathcal{L}_n^K$ *está caracterizado por todos los modelos finitos de equivalencia.*[24]

Ahora tenemos:

Teorema 6.7 *Los sistemas* $S4\text{-}\mathcal{L}_n^K$ *y* $S5\text{-}\mathcal{L}_n^K$ *son decidibles.*

---

[23] En el caso que nos ocupa un modelo reflexivo y transitivo es aquel en el que la relación de accesibilidad R_a, para cada agente a, es reflexiva y transitiva.

[24] Similarmente a la nota anterior, la relación para cada agente en este caso es reflexiva y euclídea.

6.3.3. Demostración automática en $\mathcal{L}_n^K$

En esta sección extendemos el método de tablas semánticas expuesto para la lógica modal para el sistema de lógica epistémica $S4$-$\mathcal{L}_n^K$.

En cuanto a la notación usada, hemos de atender a la incorporación en la semántica de un conjunto finito de agentes. Esto afecta a la noción de accesibilidad entre índices modales (que podemos llamar ahora "índices epistémicos"), ya que la relación habrá de especificar el nombre del agente involucrado. En consecuencia, tendremos que ampliar el tipo de etiquetas de los nodos dado para el caso unimodal, ya que usaremos: fórmulas de L_n^K, índices y elementos de $\mathcal{A}g$. Cada nodo de un árbol $S4$-$\mathcal{L}_n^K$ puede estar etiquetado de dos formas:

1. con un par $A(\lambda)$, o bien
2. con etiquetas de la forma $A(\lambda, a)$, donde donde A es una fbf de L_n^K, λ denota un mundo estado epistémico y $a \in \mathcal{A}g$.

Nociones preliminares

Como en el caso unimodal, consideraremos que las entradas están en forma normal moda negativa. Las siguientes tablas muestran los distintos tipos de fbfs junto con sus componentes.

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B

β	β_1	β_2

π	π_0
$\neg K_a A$	$\neg A$

ν	ν_0
$K_a A$	A

Sea ρ una rama de un árbol-$S4$-$\mathcal{L}_n^K$. Como convenciones de notación usamos las mismas de los árboles unimodales con alguna ampliación, esto es:

- ρ^λ denota el conjunto de fórmulas etiquetadas con λ que aparecen en ρ.
- $\mathcal{A}g(\rho)$ denota el conjunto de agentes que ocurren en las fórmulas indizadas de ρ.

Incorporaremos nombres de agentes asociados a los índices como consecuencia de la aplicación de la regla (π). Tomando como base el dominio de árbol de índices definidos de igual modo que en el caso unimodal, intercalaremos los nombres de los agentes con tales índices con objeto de indicar de que la relación de accesibilidad se trata.

La ventaja de este procedimiento puede verse en el siguiente ejemplo: veamos intuitivamente tres aplicaciones de (π) que involucran a dos agentes, a y b, como es el caso de $\Diamond_a \Diamond_b \Diamond_a p$ [25]:

- La primera aplicación de la π-regla a $\Diamond_a \Diamond_b \Diamond_a p\,(0)$ introduce $\Diamond_b \Diamond_a p\,(1a)$, lo cual significa que el estado epistémico 1 es accesible desde el estado epistémico 0, únicamente para el agente a.
- la segunda aplicación de la π-regla será a $\Diamond_b \Diamond_a p\,(1\,a)$, y nos introduce $\Diamond_a p\,(1a, 1b)$, lo cual significa que el estado epistémico 1.1 es accesible (desde 1) para el agente b únicamente.
- Finalmente, la tercera aplicación de la π-regla será a $\Diamond_a p\,(1a, 1b)$, y nos introduce $p\,(1a, 1b, 1a)$, lo que indica que 1.1.1 es accesible desde 1.1 para el agente a únicamente.

---

[25] Recordemos que $\Diamond_a A \equiv \neg K_a \neg A$

La cuestión que nos surge es la siguiente: ¿es accesible 1.1.1 desde 1 para a? Obviamente no debe serlo, pues el paso de 1 a 1.1 lo es para b, no para a; así pues, aunque 1 es un segmento inicial de 1.1.1, no se produce transitividad. Solamente si no encontrásemos el nombre b intercalado tendríamos que 1.1.1 es accesible desde 1 para a. Esto nos indica que no siempre es necesario ir anotando el nombre al lado de cada mundo posible, por ejemplo, sea $\Diamond_a \Diamond_a \Diamond_a \Diamond_b \, p \, (0)$, entonces sucesivamente tendríamos:

$\Diamond_a \Diamond_a \Diamond_b \, p \, (1a)$

$\Diamond_a \Diamond_b \, p$ (1.1a)

$\Diamond_b \, p$ (1.1.1 a)

p (1.1.1 a.1 b)

Estas etiquetas nos indican lo siguiente:

- 1 es accesible desde 0 para a,
- 1.1 es accesible desde 1 para a (por lo tanto, no es necesario anotar $1a$,$1a$),
- 1.1.1 es accesible directamente desde 1.1 para a de nuevo (no hemos anotado $1a$,$1a$,$1a$), pero 1.1.1 es igualmente accesible desde 1 para a, pues no hay ningún nombre de otro agente que interrumpa el tránsito y el de a no lo hemos anotado intercaladamente.

Podemos ver que, mientras las aplicaciones de la (π)-regla se refieran al mismo agente, el nombre de este agente se va desplazando a medida que avanzamos hasta encontrar el nombre de otro agente, y con éste repetimos el mismo proceso. Recogemos este prceder formalmente:

Definición 6.17 *Sea ρ una rama de un árbol-S4-$\mathcal{L}_n^K$, $\mathcal{T}$, para un conjunto de fbfs Ω. Definimos una estructura $E_\rho = (W_\rho, \mathcal{R}_\rho)$ con signatura $\mathcal{A}g = \{a_1, \ldots, a_n\}$ como sigue:*

1. *$W_\rho = \rho_{ind}$ (conjunto de índices modales en ρ).*
2. *$\mathcal{R}_\rho = \{R_{a\rho} \mid a \in \mathcal{A}g(\rho)\}$, de modo que para cada $\lambda \in \rho_{ind}$ tenemos:*

$$R_{a\rho}(\lambda) = \{\lambda\} \cup \{\lambda' \in \rho_{ind} \mid \lambda' = \lambda.\lambda_1.\ldots.\lambda_n.a, \ \text{con } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}^*\}$$

Denotaremos mediante $R_\rho(a)$ al conjunto de índices accesibles para el agente a en ρ, esto es: $R_\rho(a) = \bigcup_{\lambda \in \rho_{ind}} R_{a\rho}(\lambda)$.

Nótese que en la anterior definición la relación de accesibilidad es reflexiva y transitiva para cada agente.

Definición 6.18 *Sea ρ una rama de un árbol-S4-$\mathcal{L}_n^K$. Diremos que la etiqueta λ es* `superflua en` *ρ si y sólo si existe $a \in \mathcal{A}g(\rho)$ y existe $\lambda' \in \rho_{ind}$ tales que se cumple:*

(a) $\lambda, \lambda' \in R_\rho(a)$;

(b) λ' aparece previamente a λ en ρ; y

(c) $\rho^\lambda = \rho^{\lambda'}$.

Dicho de manera informal, una etiqueta λ en una rama dada es *superflua* cuando tenemos otra etiqueta previamente en esa misma rama asociada al mismo conjunto de fórmulas y ambas etiquetas son accesibles para el mismo agente.

Los conceptos de `rama cerrada`, `árbol inicial`, etc., son los mismos que hemos visto en las tablas semánticas para los sistemas normales de lógica unimodal.

Reglas de Extensión

El árbol inicial es extendido sucesivamente, para obtener árboles asociados a Ω, mediante las siguientes reglas: las α-regla y β-regla son las mismas que en el caso unimodal,

(π) Si ρ_A denota la rama determinada por el nodo hoja $A\,(\lambda^*)$ y una π-fórmula $\Diamond_a B\,(\lambda)$ ocurre en ρ_A siendo λ una etiqueta que **NO** es superflua en ρ_A, extendemos dicha rama adicionando el nodo $B\,(\lambda')$ donde $\lambda' \in R_{\rho_A a}(\lambda)$ es un índice modal que no ocurre previamente en la rama.

(ν) Si ρ_A denota la rama determinada por el nodo hoja $A\,(\lambda^*)$ y una ν-fórmula $K_a B\,(\lambda)$ ocurre en ρ_A, extendemos dicha rama adicionando los nodos $B\,(\lambda')$ donde λ' es cualquier índice modal tal que $\lambda' \in R^S_{\rho_A a}(\lambda)$ y λ' ocurre en la rama. Realizamos en cada caso el mismo tipo de anotaciones que en las tablas para la lógica modal.

Teorema 6.8 *El método es correcto y completo y termina.*

6.4. Conocimiento General y Conocimiento Distribuido en $\mathcal{L}_n^K$

En esta sección vamos a introducir dos conectivas definidas de gran interés en las aplicaciones de L_n^K y que requieren cierta reflexión.

I) Conocimiento General: En primer lugar, definimos una conectiva que nos permite expresar que un hecho A es conocido por los n agentes. La conectiva para tal fin se denomina `conectiva de conocimiento general o universal` y la denotamos por E_G. Es decir:

$$E_G A\ ^{26} =_{def} K_1 A \wedge K_2 A \wedge \ldots \wedge K_n A\ ^{27}$$

Por lo tanto, $E_G A$ se lee: *"todos conocen que A"* y su semántica viene dada por: Dado un modelo $M = (W, \mathcal{R}, h)$ y un estado epistémico (M, s):

$$M, s \models E_G A \text{ si y solo si para todo } s' \in (R_1 \cup R_2 \ldots \cup R_n)(s) \text{ se tiene que } M, s' \models A$$

> 👀 Conviene insistir en la semántica de $E_G A$. Puede parecer extraño que venga determinada por $\bigcup_{a \in \mathcal{A}g} R_a$. Consideremos, por ejemplo, que $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. Si realizaramos la lectura de la lógica dinámica, $E_G A$ vendría determinada por $\Box_{a \cup b \cup c} A$ que expresa que A es verdadera después de cada ejecución de a y después de cada ejecución de b y después de cada ejecución de c. Con la visión epistémica: expresa que A es verdadera en todo estado concebible para a, en todo estado concebible para b, y en todo estado concebible para c.

---

[26] Del inglés: *Every one knows*

[27] Introducir E_G como conectiva definida, solo tiene sentido si el número de agentes es al menos 2 ($n > 1$), ya que si $n = 1$, entonces $E_G A = K_1 A$.

Supongamos que los alumnos del grupo II de 1^o de Informática, procedente de diversos centros, han realizado un test previo al comienzo de curso y todos han contestado bien la pregunta A del test. Podemos afirmar que A es un conocimiento general de tal grupo.

II) Conocimiento Distribuido o Cooperativo: Definimos en $\mathcal{L}_n^K$ una nueva conectiva denominada `conectiva de conocimiento distribuido o cooperativo` que nos permite expresar que, dado un hecho A, *"alguno de los agentes en $\mathcal{A}g$ conoce que A"* y que denotamos por D_GA, es decir,

$$D_GA =_{def} K_1A \vee K_2A \vee \dots K_nA$$

Por lo tanto, su semántica viene dada por: Dado un modelo $M = (W, \mathcal{R}, h)$ y un estado epistémico (M, s):

$$M, s \models D_GA \text{ si y solo si para todo } s' \in (R_1 \cap \dots \cap \dots \cap R_n)(s)$$

Su nombre se debe a que, intuitivamente, expresa *" lo que los agentes podrían saber si compartieran su información* [28]: Supongamos dos agentes a y b y supongamos que el agente a sabe que A y el agente b sabe que $A \to B$. Juntos pueden conocer que B, pero ninguno puede conocer B aisladamente. En definitiva, el conocimiento "combinado" de los miembros del grupo asegura que B.

◕◕ La diferencia de las conectivas E_G (conocimiento general) y D_G (conocimiento distribuido) es que si afirmamos E_GA, afirmamos que todos y cada uno de los n agentes del grupo saben que A. En cambio, si afirmamos que D_GA, afirmamos que A es un conocimiento que está implícito o distribuido en el grupo de los n agentes, pudiendo darse que ninguno de los agentes sepa por sí mismo que A [29].

Obviamente, podemos asegurar que

Proposición 6.1 *Dada una fbf* $A \in \mathcal{L}_n^K$,

- *Para todo* $a \in \mathcal{A}g$ *se tiene que* $\models K_aA \to D_GA$ [30].
- $\models D_G(A \to B) \to (D_GA \to D_GB)$ [31].

Ejemplo 6.11 Consideremos $\mathcal{A}g = \{a_1, a_2, a_3\}$ y la lógica $S5$-$\mathcal{L}_n^K$. Puesto que todas la relaciones de accesibilidad epistémica, R_a son de equivalencia, el estado "real o actual" es siempre una alternativa para los tres agentes. Por lo tanto, tenemos que, para todo $i = 1, 2, 3$ se tiene que

$$\models (p \wedge q) \to \Diamond_{a_i}(p \wedge q)$$

pero también podemos contemplar modelos en los que se aseguran otras alternativas epistémicas. Por ejemplo:

- Supongamos que en el estado actual, s, se tiene que $M, s \models p \wedge q$ y que en tal estado:

---

[28] Podríamos decir que es un tipo de meta-conocimiento que no corresponde ni al conocimiento de un agente en particular, ni al conocimiento común del grupo, sino el conocimiento cooperativo de todos los agentes conjuntamente.

[29] Es decir: pudiendo darse $\neg K_iA$, para $i = 1, ..., n$.

[30] Basta tener en cuenta que $\bigcap_{a \in \mathcal{A}g} \subseteq R_a$ para todo $a \in \mathcal{A}g$.

[31] Se deja como ejercicio al lector.

- a_1 considera posible $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$ y $\neg p \wedge \neg q$;
- a_2 considera posible $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, y
- a_3 considera posible $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$ y $\neg p \wedge q$

Tenemos pues que $M, s \models D_G\,(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$. En este caso, este conocimiento es también del agente a_2 cuyo conocimiento recoge lo "común" al conocimiento de los tres agentes.

- Supongamos que el estado actual es la única alternativa epistémica que comparten los agentes del grupo. Tendríamos que $M, s \models D_G(p \wedge q)$

6.4.1. Lógica epistémica con conocimiento común, $\mathcal{L}_n^{KC}$

Ya hemos visto la gran potencia expresiva de $\mathcal{L}_n^K$, sin embargo, su lenguaje, L_n^K, puede ser insuficiente en no pocas situaciones. Pensemos en la siguiente situación: la profesora pregunta en clase de lógica

> `¿Quién puede enunciarme el metateorema de la deducción para la lógica clásica proposicional?`

inmediatamente, un alumno levanta la mano y lo enuncia sin titubeos. ¿Qué consecuencia tiene su acción en relación al estado de conocimiento de la clase? No sabemos cuantos alumnos conocían tal enunciado, pero sí sabemos que ahora todos los conocen y que conocen que todos lo conocen y conocen que todos conocen que todos los conocen y . . . así sucesivamente. En tal caso decimos que el metateorema de la deducción es un `conocimiento común en el grupo` [32]. Si A representa el metateorema de la deducción, para cualquier alumno i tendríamos que:

$$K_iA \wedge K_iK_iA \wedge K_iK_iK_iA \wedge \ldots$$

pero la lógica epistémica solo puede tratar con conjunciones finitas. Por lo tanto, necesitamos añadir una nueva conectiva monaria, $\mathfrak{C}$, al lenguaje $\mathcal{L}_n^K$, donde $\mathfrak{C}A$ se lee: *"Es conocimiento común de los n agentes que A"*. Obtenemos así un nuevo lenguaje al que denotamos L_n^{KC}

Advirtamos que la conectiva $\mathfrak{C}$ es una `conectiva primitiva`, es decir, no se puede definir mediante $K_1, \ldots, K_n$. La razón es que $\mathfrak{C}$ no solo expresa que A es conocido por todos. Para expresar este hecho ya disponemos de la conectiva definida de conocimiento general, E_G:

$$E_GA =_{def} K_1A \wedge K_2A \wedge \ldots \wedge K_nA$$

En nuestro ejemplo, E_G nos permitiría expresar (si ese fuera el caso, algo que no sabremos porque es una pregunta en clase y no un examen) que todos los alumnos conocen el teorema de la deducción. Por lo tanto es importante diferenciar E_G de $\mathfrak{C}$.

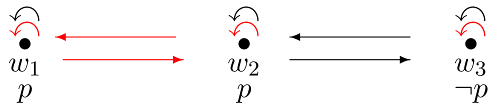
Ejemplo 6.12 Supongamos dos agentes a y b y sean

$$R_a = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2), (w_2, w_1), (w_3, w_3)\}$$

$$R_b = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_3), (w_3, w_2)\}$$

---

[32] Aunque se puede definir el conocimiento común para todo subconjunto no vacío de agentes, por simplicidad, consideraremos solo conocimiento común del grupo entero.



Se tiene que $M, w_1 \models E_G p$, pero $M, w_1 \not\models \mathfrak{C}p$.

El conocimiento común es un concepto esencial para explicar la *racionalidad de ciertas acciones.* Fue propuesto por primera vez en términos filosóficos en relación al análisis de convenciones sociales, ya que para que algo sea una convención, ha de ser un conocimiento común para el grupo que la adopta. Esta noción se aplica en el análisis y entendimiento del lenguaje natural, de juegos y de sistemas distribuidos. El conocimiento común es un concepto epistémico muy importante en los sistemas de comunicación, especialmente, cuando la información transferida demanda acciones que conllevan riesgos.

6.4.2. Semántica para L_n^{KC}

La definición de una semántica para L_n^{KC} requiere, en primer lugar, extender la definición de las estructuras (sistemas de transiciones etiquetadas) para L_n^K, es decir las estructuras $(W, \{R_a\}_{\mathcal{A}g})$, con un nueva relación de accesibilidad que recoja la semántica de $\mathfrak{C}$, esta nueva relación será:

- el cierre transitivo de la unión de las relaciones de accesibilidad R_a correspondientes a las conectivas de conocimiento para cada agente, es decir, con una nueva relación $R = (\bigcup_{a \in \mathcal{A}g} R_a)^+$, si deseamos definir $S4$-$\mathcal{L}_n^{KC}$, o bien
- el cierre reflexivo y transitivo de la unión de las relaciones de accesibilidad R_a correspondientes a las conectivas de conocimiento para cada agente, es decir, con una nueva relación $R = (\bigcup_{a \in \mathcal{A}g} R_a)^*$, si deseamos definir $S5$-$\mathcal{L}_n^{KC}$

Definición 6.19 *Un modelo para L_n^{KC} es una tupla $M = (W, R_1, \dots, R_n, R^+, h)$, donde $R^+ = (R_1 \cup \ldots \cup R_n)^+$ (respectivamente, $R^* = (R_1 \cup \ldots \cup R_n)^*$) y $h : Q \longrightarrow 2^W$ satisfaciendo las mismas propiedades exigidas en $\mathcal{L}_n^K$ y además:*

$$h(\mathfrak{C}A) = \{s \in W \mid R^+(w) \subseteq h(A)\}$$

Destaquemos que, aunque la definición formal del conocimiento común encierra una conjunción infinita de operadores de conocimiento, esto no significa que en la práctica se requiera un tiempo infinito para que un agente adquiera tal conocimiento común.

Para entender mejor que es así, reflexionemos algo más sobre la definición de la relación, R, que describe la semántica de la conectiva $\mathfrak{C}$. Podemos introducir la siguiente nomenclatura: decimos que un estado s' es ``alcanzable'' desde un estado s si existe una secuencia $s_1 = s, s_2, \dots s_l = s'$ tal que, para todo s_i, con $1 \leq i \leq l$, se tiene que $s_{i+1} \in R_{j_i}(s_i)$ para alguna relación $R_{j_i} \in \mathcal{R}$. Por lo tanto,

$$M, s \models \mathfrak{C}\, A \text{ si y solo si, para todo } s' \text{ alcanzable desde } s, \text{ se tiene que } M, s' \models A$$

es decir, todo camino finito que comienza en s termina en un estado en el que se satisface A:

$s \in h(\mathfrak{C}\, A)$ si y solo si $s \in h(K_{a_{j_1}}), \dots, s \in K_{a_{j_l}} A$ para toda secuencia $(finita)$ de agentes

En adelante, usaremos $\models$ para denotar la validez de las fbfs, si ésta está asegurada tanto en $S4$-$\mathcal{L}_n^{KC}$ como en $S4$-$\mathcal{L}_n^{KC}$ y añadiremos el correspondiente subíndice si se trata de la validez en una de las dos lógicas.

Como para el conocimiento de cada agente, tenemos que:

Proposición 6.2 *Si* $\models (H_1, \dots H_n) \to A$, *entonces* $\models (\mathfrak{C}H_1, \dots \mathfrak{C}H_n) \to \mathfrak{C}A$

La semántica nos permite establecer formalmente la relación entre $\mathfrak{C}$ y E_G:

Proposición 6.3 *Para toda fbf* $A \in L_n^{KC}$ *se tiene que*

1. $\models \mathfrak{C}A \leftrightarrow (A \wedge E_G\mathfrak{C}A)$, es decir*, "A es conocimiento común del grupo si y solo si A es verdadera y todos en el grupo saben que A es conocimiento común del grupo".*

2. $\models \mathfrak{C}(A \to E_GA) \to (A \to \mathfrak{C}A)$, es decir*, "si es conocimiento común del grupo que si A es verdadera entonces A es conocimiento general del grupo, también se tiene que si A es verdadera, entonces A es conocimiento general del grupo"*

El siguiente resultado, cuya demostración se deja al lector, nos proporciona la relación existente entre las conectivas de conocimiento en $\mathcal{L}_n^K$ y la nueva conectiva $\mathfrak{C}$ en $\mathcal{L}_n^{KC}$

Proposición 6.4 *Para toda fbf en* L_n^{KC} *y todo* $a \in \mathcal{A}g$*, se tiene que*

$$\models \mathfrak{C}A \to E_GA; \qquad \models E_G \to K_aA; \qquad \models K_aA \to D_GA$$

Esta relación justifica que en la bibliografía se encuentre como ejemplo sencillo de un proceso informativo multiagente de proceso epistémico el acto de una pregunta y su respuesta como, por ejemplo, la siguiente:

Pregunta del agente 1: ¿Este edificio es el Museo Picasso?

Respuesta del agente 2: Sí, lo es.

Analicemos este dialogo: El agente 1, al preguntar, está poniendo de manifiesto que no sabe a ciencia cierta si está ante el Museo Picasso o no,

$$\neg K_1A \wedge \neg K_1\neg A$$

pero al mismo tiempo, al dirigirse al agente 2 (que responde), queda implícito que piensa que 2 puede saberlo:

$$\Diamond_1(K_2A \vee K_2\neg A)$$

Transmitimos información sobre hechos, pero también sobre lo que sabemos acerca de otros.

Acto seguido, una vez dada la respuesta, el agente 2 no se limita a informar de que se trata del Museo Picasso, sino que ahora sabe que 1 lo sabe, y 1 sabe eso, y así sucesivamente. Es por tanto, un conocimiento común, es decir, $\mathfrak{C}\,A$ (para el grupo de agentes $\{1, 2\}$) y, por lo tanto, un conocimiento distribuido o compartido.

El ejemplo más utilizado para introducir el "conocimiento común" es mediante alguna variante del siguiente puzzle lógico:

Ejemplo 6.13 *En una isla hay n personas y, de ellas, hay $k \geq 1$ personas con ojos azules; el resto de las personas tienen ojos negros. Si una persona sabe de sí misma que tiene los ojos azules, ha de abandonar la isla al amanecer del día siguiente.*

Cada persona puede ver el color de los ojos de los demás, pero no el de los suyos, porque no existen espejos, ni intercambian información. Desde algún lugar exterior a la isla llega una persona y les dice lo siguiente: “ `Hay personas en esta isla que tienen los ojos azules y deben abandonarla inmediatamente`”.

Problema: Suponiendo que todas las personas de la isla son omniscentes, ¿cúal es el resultado? La respuesta es que, en las k madrugadas después del anuncio, todas las personas de ojos azules dejaran la isla. Para comprobarlo, podemos usar un argumento inductivo.

- Si $k = 1$, la persona reconocerá que tiene los ojos azules (al contemplar que todos los demás los tienen negros) y se irá la primera madrugada.
- si $k = 2$, ninguno se irá la primera madrugada, pero cada una de las dos personas con ojos azules, viendo a una sola persona con ojos azules, y que no ha dejado deja la isla la primera madrugada, se irá.
- Entonces, podemos razonar inductivamente que nadie se irá en las primeras $k - 1$ madrugadas si y solo si existen al menos k personas con ojos azules. Estas personas con ojos azules, viendo $k - 1$ personas con ojos azules entre los demás y sabiendo que hay al menos k, razonaran que tienen los ojos azules y se irán a la madrugada siguiente.

Lo más interesante de este escenario es que, para $k > 1$, el foráneo solo les dice a los habitantes de la isla algo que ellos ya saben: “que existen personas con ojos azules entre ellos”. Sin embargo, antes de que les anunciaran este hecho, el hecho no era “conocimiento común”. La noción de conocimiento común tiene por tanto un efecto: *saber que todos saben que todos saben, . . .* Tal hecho establece la diferencia. Tras la información del foráneo, las personas con ojos azules deducen su estatus y se van. Este efecto no se daría si, por por ejemplo, el foráneo se limitara a decir su información al oído de cada habitante de la isla, sin que los demás supieran qué les decía, pues de esta forma nunca se alcanzaría tal conocimiento común.

Ejemplo 6.14 [El Rey y los tres prisioneros]
Un rey ordena vendar los ojos de tres prisioneros y promete liberar al prisionero que adivine el color del gorro (blanco o negro) que se le ponga en la cabeza. Les dice a los prisioneros que hay tres gorros blancos y dos negros y que se les va a adjudicar al azar un gorro a cada uno de ellos. Los prisioneros van a contestar por turno y al prisionero que le toque se le quitará la venda de forma que podrá ver los gorros de los demás pero no el suyo.

Supongamos la siguiente situación: cuando le toca contestar al primer prisionero, dice “no lo sé”; cuando le toca el turno al segundo prisionero dice “no lo sé”. Al tocarle el turno al tercero y sin que le quiten la venda dice “mi gorro es blanco” y acierta. `¿Qué ha pasado?`.

- Cuando el primer prisionero contesta “no lo sé”, es porque al menos uno de los gorros de los otros dos es blanco (si fueran ambos negros sabría la solución).
- El segundo prisionero lo tiene algo mejor, teniendo en cuenta lo que ha contestado el primer prisionero, sabe que al menos su gorro o el del tercer prisionero es blanco. Pero esta información no ha resultado suficiente al observar que el gorro del tercer prisionero es blanco (no importa de qué color sea el gorro del primer prisionero).

- El tercer prisionero razona como sigue: *De la respuesta del primer prisionero se deduce que al menos el segundo prisionero o yo tenemos un gorro blanco. Pero esto mismo lo sabe el segundo prisionero, así que, si mi gorro fuera negro, éste pensaría que, dado que el mío es negro el suyo es blanco. Como dice que no sabe de qué color es su gorro es porque mi gorro es blanco.*

> En este ejemplo estamos suponiendo que los agentes poseen conocimiento ideal (o implícito), es decir, todos los agentes son *razonadores perfectos.*
>
> Otra cuestión importante es que son agentes *honestos* (no mienten).
>
> Además, las condiciones del problema son de conocimiento común para los tres prisioneros. Cada uno de los tres prisioneros sabe que los otros dos saben que hay tres gorros blancos y dos negros y sabe que los otros saben que él lo sabe, etc. En caso contrario, no podría razonar el segundo como lo hace a partir de la contestación del primero ni, por supuesto, el tercero a partir de las contestaciones de los otros dos.

Son muchos los ejemplos que podemos encontrar en la bibliografía. Vamos a recordar algunos de ellos que inciden en su presencia en las relaciones humanas.

Ejemplo 6.15 [El Camarero torpe [33]] Un camarero mancha de salsa de tomate el vestido blanco de una mujer a la que sirve en un Restaurante. La mujer fulmina con la mirada al camarero, y el camarero afirma nervios *"lo siento". Ha sido una torpeza por mi parte"*. ¿Por qué dijo el camarero que había sido una torpeza suya? Él sabía que había cometido un error y sabía por la expresión dea mujer que ella sabía que había cometido un error. Sin embargo, el camarero quiso asegurarse de que la mujer supiera que él sabía que había cometido un error. Expresando que él había cometido un error, el camarero sabía que la mujer sabía lo que él deseaba que ella conociera: que élsabía que había cometido un error. De esta forma se produjo la iteracción de conocimiento anidado.

6.4.3. Un sistema axiomático para $S5$-$\mathcal{L}_n^{KC}$

6.4.3.1. Axiomas

1. Todas los teoremas de la lógica clásica proposicional.
2. Para cada $a \in \mathcal{A}g$:
    - *a)* $K_a(A \to B) \to (K_a A \to K_a B)$ (distribución)
    - *b)* $K_a A \to A$ (T)
    - *c)* $K_a A \to K_a K_a A$ (introspección positiva)
    - *d)* $\neg K_a A \to K_a \neg K_a A$ (introspección negativa)
    - *e)* $\mathfrak{C}A \leftrightarrow A \wedge E_G \mathfrak{C} A$ (Axioma del punto Fijo)
    - *f)* $(A \wedge \mathfrak{C}(A \to E_G A)) \leftrightarrow \mathfrak{C}A$ (Axioma de Inducción)

---

[33] ejemplo tomado de la Stanford Encyclopedia of Philosophy

6.4.3.2. Reglas de inferencia

Para cada $a \in \mathcal{A}g$:

1. **(MP):** $\dfrac{A,\ (A \to B)}{B}$

2. **(Nec):** $\dfrac{A}{K_a A}$

3. **(Nec-$\mathfrak{C}$):** $\dfrac{A}{\mathfrak{C}A}$

Teorema 6.9

- $S4$-$\mathcal{L}_n^{KC}$ *está caracterizado por todos los modelos reflexivos y transitivos.*
- $S5$-$\mathcal{L}_n^{K}$ *está caracterizado por todos los modelos de equivalencia.*

6.5. Lógica Dinámico-Epistémica

6.5.1. Lógica de Anuncios públicos: $\mathcal{L}_n^{KCA}$

Un modo de extender la lógica epistémica es añadirle operadores “dinámicos” que permiten expresar la evolución del conocimiento. La extensión de L_n^K más simple es la *lógica de los anuncios públicos*, denotada LAP o $L_n^{KA_P}$ [34], que se obtiene añadiendo a L_n^K expresiones de acción y modalidades dinámicas para tales acciones. Concretamente, incorpora las modalidades dinámicas del tipo

$$[¡A] \quad \text{con} \quad A \in \mathcal{L}_n^{KA_P}$$

$[¡A]B$ se lee: *“después del anuncio público de A, se tiene que B es verdadera”.*

Un anuncio público es una información transmitida oralmente por un agente a todos los agentes de un grupo simultáneamente, de modo que todos esos agentes la oyen y así todos ellos saben que dicha información se ha emitido. Dicho agente puede ser ajeno o no al grupo y se supone que no miente. Por tanto, todos los agentes saben que lo anunciado es verdadero. En consecuencia, el anuncio público se convierte en conocimiento común.

👀 Conviene señalar que el hecho anunciado, solo es necesariamente verdadero después del anuncio. Por ejemplo, supongamos que el anuncio público es: *el agente a sabe que B, pero el agente b no sabe que B.*

En $\mathcal{L}_n^{KA_P}$ disponemos de las conectivas duales de K_a y $[¡A]$:

- $\Diamond_a B$ se lee: *“el agente a considera posible que B”.*
- $< ¡A > B$ se lee: *“es posible realizar el anuncio público de A, tras lo cual B es verdadera”.*

---

[34] La primera vez que se introdujo la lógica de anuncios públicos fue en 1989 por J. A. Plaza: Logics of public communications. Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, pages 201-216.

Un hecho a destacar, es que tanto la potencia expresiva como la complejidad computacional de $L_n^{KA_P}$ es la misma que la de $\mathcal{L}_n^K$. Sin embargo, permite un representación más concisa de muchos enunciados. Una traducción stándar de $L_n^{KA_P}$ a $\mathcal{L}_n^K$ es la siguiente:

- $Tr([¡A]p) = Tr(A) \to p$, para toda $p \in \mathcal{V}_{prop}$
- $Tr([¡A]\neg B) = Tr(A) \to \neg Tr([¡A]B)$
- $Tr([¡A](B_1 \wedge B_2) = Tr([¡A]B_1) \wedge Tr([¡A]B_2)$
- $Tr([¡A]K_aB) = Tr(A) \to K_aTr([¡A]B)$
- $Tr([¡A][¡B_1]B_2) = Tr([¡A]Tr([¡B_1]B_2))$

Proposición 6.5 $\models A \leftrightarrow Tr(A)$

Ejemplo 6.16 $Tr([¡K_ap]K_bq) = Tr(K_ap) \to K_bTr([¡K_ap]q) = K_ap \to K_b(Tr(K_ap) \to q) = K_ap \to K_b(K_ap \to q)$

En $L_n^{KCA_P}$ podemos expresar:

- $[¡A]K_aB$ se lee: *"después de anunciarse públicamente A, el agente a sabe que B".*
- $[¡\neg K_aA]B$ se lee: *"después de anunciarse públicamente que el agente a no sabe que A, se tiene que B".*
- $[¡\neg K_aA]K_aB$ se lee: *"después de anunciarse públicamente que el agente a no sabe que A, se tiene que el agente a sabe que B".*
- Si p se lee "el secreto" y q se lee "el agente a ha filtrado el secreto al agente b,

  $$K_a(K_b\, p\ \wedge\ [¡K_b\, p]K_cq)$$

  se lee: *"El agente a conoce que el agente b conoce el secreto y, tras anunciarse públicamente este hecho, el agente c conoce que el agente a ha filtrado el secreto al agente b".*

Ahora, es claro que un anuncio público permite que el estado de información de todo agente del grupo sea actualizado al ser informados de que una fbf, A, es verdadera, es decir: la consecuencia semántica de un anuncio público será que, para cada agente, a, es necesario cambiar la relación R_a de modo que no contenga ningún estado en el que lo anunciado sea falso:

6.5.1.1. Semántica de $\mathcal{L}_n^{KA_P}$

Los modelos par $\mathcal{L}_n^{KA}$ son los mismos que para la lógica epistémica, añadiendo la siguiente condición de satisfacibilidad, que define la semántica de las nuevas conectivas:

$$M, s \models [¡A]B \quad \text{si y solo si} \quad M_{/A}, s \models B$$

donde $M_{/A}$ es el modelo M restringido a los estados $s \in W$ donde A es verdadera, es decir: $M_{/A} = (M', \mathcal{R}', h')$ es el submodelo:

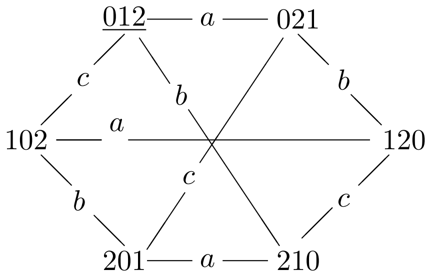
- $W' = h(A) \subseteq W$

- $R'_a = R_a \cap (h(A) \times h(A))$
- $h'(p) = h(p) \cap h(A)$ para todo $p \in \mathcal{V}_{prop}$, es decir, $h' = h/W'$

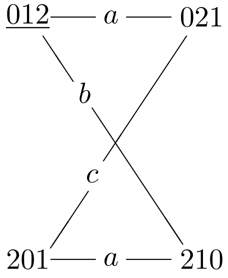
Por lo tanto, su semántica puede ser dada como una función de modelos de Kripke en modelos de Kripke: $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ que a cada M le asigna $M_{/A}$.

Dependiendo de las restricciones que consideremos para las relaciones de accesibilidad, obtendremos las lógicas $K - \mathcal{L}_n^{KA_P}$, $KT - \mathcal{L}_n^{KA_P}$, $\dots$, $S4 - \mathcal{L}_n^{KA_P}$ o $S5 - \mathcal{L}_n^{KA_P}$.

Ejemplo 6.17 Consideremos el ejemplo más habitual en la bibliografía, conocido como HEXA. Disponemos de tres cartas 0, 1 y 2 para tres agentes a, b c. Las cartas se distribuyen aleatoriamente entre los agentes. Es conocimiento común que se reparten tres cartas diferentes, 0, 1 y 2 y que cada agente solo ve su propia carta. Consideremos variables proposicionales p_{ij} con $i \in \{a, b, c\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, tales que p_{ij} se lee: “el agente i tiene la carta j. Supongamos que a tiene la carta 0, que b tiene la carta 1 y que c tiene la carta 2. Obtenemos el modelo punteado:



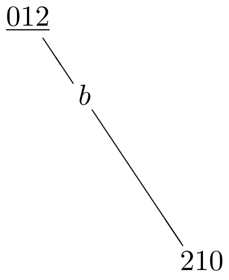
Si el agente a anuncia públicamente: *“yo no tengo la carta* 1*”*, después de tal anuncio, los agentes conocen que los estados en los que a tiene la carta 1 no son factibles, por lo tanto, todos los agentes ignoran tales estados y obtenemos el modelo



Tenemos pues que

- $(Hexa, 012) \models [\text{¡}\neg p_{a1}]K_c(p_{a0})$
- $(Hexa, 012) \models [\text{¡}\neg p_{a1}]\neg K_c(\neg K_b p_{a0})$

Después tiene lugar otro anuncio. Esta vez, el agente b dice públicamente: *“Aún no sé que cartas tenéis”*. Tras el cual, todos los agentes tendrán que ignorar los estados en lo que b conoce la carta que tiene a. Por lo tanto, después de estos dos anuncios públicos, todos los agentes, excepto b, saben la distribución de las cartas:



- $(Hexa, 012) \models [¡\neg p_{a1}][¡\neg(K_b p_{a0} \vee K_b p_{a1} \vee K_b p_{a2})]K_a b p_{b1})$
- $(Hexa, 012) \models [¡\neg p_{a1}][¡\neg(K_b p_{a0} \vee K_b p_{a1} \vee K_b p_{a2})][¡p_{a0} \wedge p_{b1} \wedge p_{c2}]K_b p_{a0}$

Ejemplo 6.18 La siguiente fbf es válida en $\mathcal{L}_n^{KA_P}$

$$[!A]K_a B \leftrightarrow (A \to K_a[!A]B)$$

Este esquema válido dice que después del anuncio público A, el agente a sabe que B si y solo si se tiene que si A entonces el agente a sabe que después del anuncio público A se tiene que B será verdadera. Este principio establece la interacción entre el operador de anuncio público y los de conocimiento y se llama axioma de *reducción*, ya que disminuye el rango del operador $[¡A]$ disminuye la complejidad de la fórmula en el ámbito del anuncio público.

Teorema 6.10 *Un sistema axiomático correcto y completo para la lógica de anuncios públicos sin conocimiento común, $\mathcal{L}_n^{KA_P}$, se obtiene añadiendo al conjunto de esquemas de axiomas de $\mathcal{L}_n^K$ los siguientes esquemas:*

[AP-1] $[¡A]p \leftrightarrow (A \to p)$, *para toda* $p \in \mathcal{V}_{prop}$

[AP-2] $[¡A]\neg B \leftrightarrow (A \to \neg[¡A]B)$ *(funcionalidad parcial)*

[AP-3] $[¡A](B_1 \wedge B_2) \leftrightarrow ([¡A]B_1 \wedge [¡A]B_2)$ *(distribución)*

[AP-4] $[¡A]K_i B \leftrightarrow (A \to K_i(A \to [¡A]B))$ *(recursión)*

El axioma AP-4 se denomina también *axioma de reducción*, ya que reduce el ambito del operador de anuncios públicos.

Ejemplo 6.19 Veamos que anunciar públicamente un hecho atómico lo convierte en conocido por todo el grupo, es decir, $[¡p]K_i p \equiv \top$:

$$[¡p]K_i p \overset{AP-4}{\leftrightarrow} p \to K_i(p \to [¡p]p) \overset{AP-1}{\leftrightarrow} p \to K_i(p \to (p \to p)) \overset{LP}{\leftrightarrow} P \to K\top \overset{\mathcal{L}_n^K}{\leftrightarrow} \top$$

6.6. Otras lógicas multimodales

6.6.1. Lógicas Epistémico-Doxásticas

En la vida diaria, nuestras acciones no solo vienen dirigidas por nuestro conocimiento, en multitud de ocasiones, son nuestras creencias las que determinan nuestro comportamiento. Por lo tanto, en muchas aplicaciones a las que venimos haciendo referencia (en Economía, Juegos, Protocolos, Análisis del Lenguaje natural, etc) requerimos combinar el conocimiento (K_i) y la creencia (B_i) de los agentes. Por lo tanto, el alfabeto, $\mathfrak{a}$, de una lógica epistémica-Doxástica de n agentes, $\mathcal{L}_n^{K\text{-}B}$ se obtiene añadiendo los conjuntos de símbolos de conectivas modales $\{B_a \mid a \in \mathcal{A}g\}$ al alfabeto de la lógica epistémica $\mathcal{L}_n^K$. El lenguaje se define en la forma habitual.

En cuanto a la semántica, tenemos la siguiente modelo:

Definición 6.20 *Un* `modelo para` L_n^{K-B} *es una tupla* $M = (W, \mathcal{R}, h)$ *tal que* $\mathcal{R} = \{R_a^K \mid a \in \mathcal{A}g\} \cup \{R_a^B \mid a \in \mathcal{A}g\}$ *y* $h : L_n^{K\text{-}B} \longrightarrow 2^W$ *una función de evaluación que satisface:*

1. $h(\neg A)$ *y* $h(A * B)$, *con* $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, *se definen como en el caso* L_n^K.
2. $h(K_a A) = \{w \in W \mid R_a^K(w) \subseteq h(A)\}$ *para todo* $a \in \mathcal{A}g$.
3. $h(B_a A) = \{w \in W \mid R_a^B(w) \subseteq h(A)\}$ *para todo* $a \in \mathcal{A}g$.

Como en el caso de la lógica epistémica, ya disponemos de una `lógica epistémica-doxástica proposicional minimal`, ya que no hemos puesto restricción alguna a las relaciones de accesibilidad, R_a^K y R_a^B. Las restricciones habituales han de responder a la concepción habitual de conocimiento y creencia, es decir:

(I) Dado un agente, a, y un estado epistémico (M, w), entendemos que R_a^K es reflexiva y transitiva o bien reflexiva y euclídea.

Algo que diferencia claramente el conocimiento de la creencia es la ausencia del axioma (T) para reflejar la noción de creencia. Un agente puede tener creencias falsas, pero no puede saber falsedades. Esto significa, en términos semánticos, que R_a^B –al contrario que R_a^K– carece de la propiedad reflexiva.

(II) Conocemos (de nuestro estudio de la lógica unimodal) que, para cada agente $a \in \mathcal{A}g$ los siguientes esquemas de distribución son válidos:

- $\models K_a(A \rightarrow B) \rightarrow (K_a A \rightarrow K_a B)$
- $\models B_a(A \rightarrow B) \rightarrow (B_a A \rightarrow B_a B)$

(III) Como ya hemos comentado, semánticamente, las relaciones de accesibilidad R_i^B son seriales y transitivas, ya que, intuitivamente, reclamamos que las creencias de los agentes sean consistentes, es decir, "si el agente a cree que A, entonces, no cree que no A":

- $\models B_i A \rightarrow \neg B_i \neg A$ *Consistencia de las creencias*

(IV) Podemos exigir que los agentes tengan la capacidad de *introspección positiva* respecto a sus creencias, es decir, exigir que las relaciones R_a^B sean transitivas y por lo tanto que

- $\models_M B_a A \rightarrow B_a B_a A$: *"si el agente cree que A, entonces cree que cree que A".*

Y cada aplicación contemplará o no la posibilidad de exigir que los agentes tengan la capacidad de *introspección negativa* respecto a sus creencias, es decir, exigir que las relaciones R_a^B sean euclídeas y por lo tanto que

$\models_M \neg B_a A \to B_a \neg B_a A$: *"si el agente no cree que A, entonces cree que no cree que A"*.

(V) Por último, nuestros conceptos de "conocimiento" y "creencia" exigen la siguiente interacción de las conectivas K_i y B_i:

- $K_a A \to B_a A$, es decir, $R_a^B \subseteq R_a^K$ (el conocimiento es más fuerte que la creencia).
- $B_a A \to K_a B_a A$ (los agentes son conscientes de sus creencias).

6.6.2. Lógicas Deónticas

Las lógicas deónticas unimodales utilizan los símbolos $\mathcal{O}$ (obligación) y $\mathcal{P}_{er}$ (permisividad), en lugar de $\Box$ y $\Diamond$ y, en general, el símbolo $\mathcal{F}$ (prohibición) como conectiva definida, $\mathcal{P}_{ro}A =_{def} \mathcal{O}\neg A$. Las lógicas deónticas multimodales introducen una familia de operadores $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ que pueden corresponder, por ejemplo, a la obligación bajo ciertos tipos de normativas (jurídicas, religiosas, civiles,...). La interacción entre ellos puede venir dada por axiomas del tipo:

- $\neg\mathcal{O}_i A \land \mathcal{O}_j \neg A$, es decir, un acto no puede ser simultáneamente obligatorio bajo una normativa y prohibido bajo otra.
- $\mathcal{O}_i A \to \mathcal{O}_j A$, que establece un rango entre las normativas i y j, es decir, un acto obligatorio bajo la normativa i, es también obligatorio bajo la normativa j.
- $\mathcal{O}_i\mathcal{O}_j A \to \mathcal{O}_i A$, que establece la transitividad de las obligaciones, es decir, si la normativa i impone la obligatoriedad de A bajo la normativa j, entonces A es obligatorio bajo i.

6.7. Ejercicios

1. Obtenga la forma dual equivalente del axioma de inducción para LDP

2. Dado un conjunto de agentes $\mathcal{A}g = \{a_1, \ldots, a_n\}$, halle el número de estructuras de Kripke $E = (W, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{R} = \{R_{a_1}, \ldots, R_{a_n}\}$, en cada uno de los siguientes casos:

    a) $W = \{w\}$
    b) $W = \{w_1, w_2\}$

3. Conteste razonadamente: ¿Cuáles de las siguientes fbfs son válidas suponiendo solo dos agentes a y b:

    a) $\big((K_a A \wedge K_b A) \to (K_a K_b A \wedge K_b K_a A)\big) \to \mathfrak{C}A$
    b) $\mathfrak{C}A \to K_a \mathfrak{C}A$
    c) $\mathfrak{C}A \to \mathfrak{C}\mathfrak{C}A$
    d) $\neg\mathfrak{C}A \to \mathfrak{C}\neg\mathfrak{C}A$

    Construya un contraejemplo para las que no lo son.

4. Tres miembros de un jurado, 1, 2, y 3, han seleccionar a un candidato entre A y B. Escriben su voto en un trozo de papel, y un bedel hace el recuento. El bedel anuncia “No hay unanimidad”. Acto seguido 2 enseña su voto a 1 sin que lo vea 3. Entonces 1 comunica que sigue sin saber qué candidato fue elegido. ¿Quién conoce el resultado de la votación?

5. ¿Establezca cuáles de las siguientes fbfs son válidas suponiendo solo dos agentes a y b:

    a) $((K_a A \wedge K_b A) \to (K_a K_b A \wedge K_b K_a A)) \to \mathfrak{C}A$
    b) $\mathfrak{C}A \to K_a \mathfrak{C}A$
    c) $\mathfrak{C}A \to \mathfrak{C}\mathfrak{C}A$
    d) $\neg\mathfrak{C}A \to \mathfrak{C}\neg\mathfrak{C}A$

    Construya un contraejemplo para las que no lo son.

6. Demuestre que en $\mathcal{L}_n^{KCA_P}$ se tiene que

    - $[¡A\neg B \equiv (A \to \neg[¡A]B$
    - $[¡A \wedge [¡A]B_1]B_2 \equiv [¡A][¡B_1]B_2$

7. Demuestre que si $A \to [¡B_1]B_2$ y $(A \wedge B_1) \to E_G B_2$ son válidas, entonces se tiene que $A \to [¡B_1]\mathfrak{C}B_2$ es válida