Comunicaciones Digitales
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Lección 7. Modulaciones y constelaciones

F. Javier Payán Somet

Teoría de la Señal y Comunicaciones
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Primer cuatrimestre 2021/22

Compilado por F. Javier Payán Somet el 6 de octubre de 2021 a las 11:52 a.m.

Índice

Introducción

- El modulador es el elemento del sistema de comunicación responsable de generar en su salida una señal de energía cuando en su entrada se encuentra un símbolo que se desea transmitir.

- La señal generada por el modulador debe ser adecuada para su transmisión/almacenamiento en el medio en el que va a transmitirse/almacenarse y por lo tanto existen una gran cantidad de *modulaciones* posibles, tantas como diferentes conjuntos de señales generadas.

- Utilizando las herramientas desarrolladas en la lección anterior, vamos a observar que estas modulaciones se traducen en diferentes *constelaciones* aunque también observaremos que modulaciones diferentes dan lugar a las mismas constelaciones y comparten, por tanto, propiedades significativamente parecidas.

- Calificaremos las modulaciones como *lineales* si es posible expresar las diferentes señales emitidas por el modulador como una función lineal o compleja de una función dada.

- En el caso de que no sea posible establecer esta dependencia, hablaremos de modulaciones *no lineales*.
- Tendremos ocasión de comprobar que las características de los dos tipos de señales y de los sistemas correspondientes son radicalmente diferentes.

7.1 Modulador

Modulador

- Dado el mensaje[1] m_i en la entrada, el *Modulador* genera en su salida una señal $s_i(t)$ determinista, adecuada para su transmisión a través del canal existente.
- Esta relación entrada/salida que define al modulador se muestra en el siguiente esquema.

$$m_i \longrightarrow \boxed{\text{Modulador}} \longrightarrow s_i(t)$$

- Supondremos que existen M mensajes diferentes[2] y por lo tanto, M señales $s_i(t)$, que deben cumplir:
  1. Que sean señales de energía finita. Es decir, existe y está bien definida la energía de la señal:

  $$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty.$$

  2. Que sean diferentes entre sí: Si $m_i \neq m_j \Rightarrow s_i(t) \neq s_j(t)$.

Modulador

- Las M señales de energía finita $s_i(t), i = 1, \ldots, M$ generan un subespacio vectorial denominado *espacio de señal*, de dimensión N, con $N \leq M$ y siendo $\{\phi_j(t)\}, j = 1, \ldots, N$ una *base ortonormal* del mismo podremos escribir:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}\phi_j(t) \quad i = 1,2,\ldots,M$$

- Tenemos por tanto que, dadas las M señales y la base correspondiente, tenemos definidos M vectores $\mathbf{s}_i, i = 1, \ldots, M$, de coordenadas $s_{ij}, i = 1, \ldots, M, j = 1, \ldots, N$, en un espacio vectorial isomorfo del espacio de señal, el espacio vectorial $\mathbb{R}^N$.
- Denominamos *constelación* del conjunto de las M señales $\{s_i(t)\}$ a los M vectores $\{\mathbf{s}_i\}$ del espacio $\mathbb{R}^N$.
- Dependiendo de la relación entre las señales generadas y los símbolos de la entrada, tendremos diferentes sistemas de modulación y por tanto diferentes constelaciones.

Modulador

- Supondremos que la fuente emite un mensaje cada T segundos y por lo tanto cada T segundos el modulador genera una señal $s_i(t)$.

[1] Generado por la fuente o bien por la cascada de Fuente –>Codificador de Fuente–>Codificador de canal.
[2] Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que M es una potencia de 2; esto es, $M = 2^k$.

- En este contexto T se denomina *tiempo de símbolo* o *intervalo de señalización*.
- Esto significa que cada segundo se transmiten un total de $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos. A R_s se le denomina *tasa de símbolos* del sistema y se mide en *símbolos/s* o *baudios*.
- Puesto que cada señal transmite k bits de información, el *tiempo de bit* T_b vendrá dado por:

$$T_b = \frac{T}{k} = \frac{T}{\log_2 M}$$

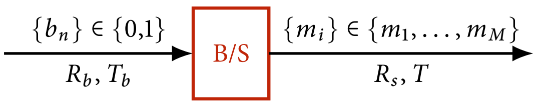
- La *tasa de bits* es el número de bits que se transmite por segundo. Se designa por R_b y se cumple:

$$R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\log_2 M}{T} = R_s \log_2 M$$

- Es importante distinguir entre el *intervalo de señalización*, T, y la duración de la señal $s_i(t)$, *que puede ser cualquiera*.
- La operación realizada en el modulador es *determinista*, en el sentido de que las señales que asociamos a cada símbolo siempre son las mismas.

Modulador

- También podríamos haber considerado que la fuente emite una *secuencia de dígitos binarios*, de manera que cada T_b segundos genera en su salida un bit.
- Como parte de la conversión y , a veces codificación, existe un bloque que no consideraremos parte del modulador que agrupa k dígitos binarios para formar un símbolo M-ario, como se muestra en la siguiente figura.



- La relación entre el número de bits emitidos por la fuente, R_b o *tasa binaria*, el número de símbolos emitidos por el bloque B/S, R_s o *tasa de símbolos* y los correspondientes *tiempo de bit*, T_b y *tiempo de símbolo*, T_s son de sobra conocidos:

$$R_b = \frac{1}{T_b}, \quad \Rightarrow T_b = \frac{1}{R_b}, \qquad R_s = \frac{1}{T}, \quad \Rightarrow T = \frac{1}{R_s}$$

$$T = kT_b = T_b \log_2 M \qquad R_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_b \log_2 M} = \frac{R_b}{\log_2 M}.$$

Modulador

- La señal generada por el modulador a lo largo del tiempo puede expresarse en la forma:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{I_n}(t - nT), \text{ con } I_n \in \{1,2,\ldots,M\}.$$

- I_n es un proceso aleatorio discreto que toma con probabilidad p_i los valores $\{1,2,\ldots,M\}$, siendo p_i la probabilidad que la fuente emita el símbolo m_i. Recordemos que estas probabilidades se denominan probabilidades a priori o *priors*.

- Las características espectrales de las señales transmitidas vienen determinadas por las propiedades de la señal $X(t)$, que tiene que ser considerada *una función muestra de un proceso aleatorio*. Tendremos que estudiar su espectro densidad de potencia para poder calcular:

    1. El ancho de banda ocupado por la señal.

    2. La potencia media transmitida.

De manera implícita hemos supuesto que los moduladores que hemos presentado son ***sin memoria***; esto es, la señal que se transmite en el intervalo de señalización $\boldsymbol{nT \leq t < (n+1)T}$ solo depende del ***símbolo presente en la entrada del modulador en el instante*** $\boldsymbol{nT}$.

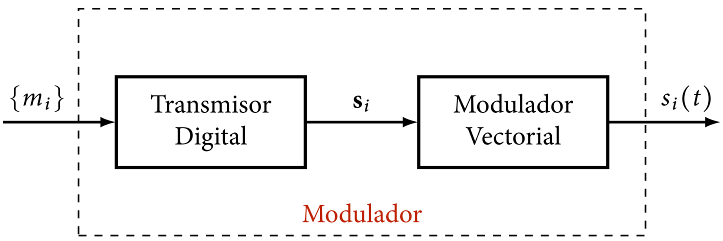
Modulador: Modelo teórico

- La relación entrada/salida del modulador nos ha permitido definir M vectores de señal $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^N$.

- Las coordenadas de esos vectores nos permiten escribir las señales $s_i(t)$ en la forma:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}\phi_j(t) \quad i = 1,2,\ldots,M$$

- Como consecuencia de esto, definimos un *modelo teórico del modulador* formado por dos elementos, como se muestra en el siguiente esquema:

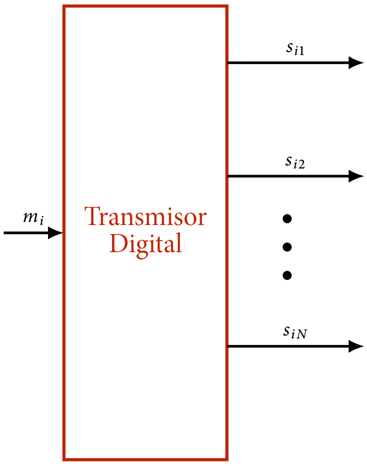


- La entrada del *transmisor digital* es el símbolo generado por la fuente. Su salida es un vector de señal.

- La entrada del *modulador vectorial* es el vector de señal y la salida es la señal que se utiliza para transmitir el símbolo generado por la fuente.

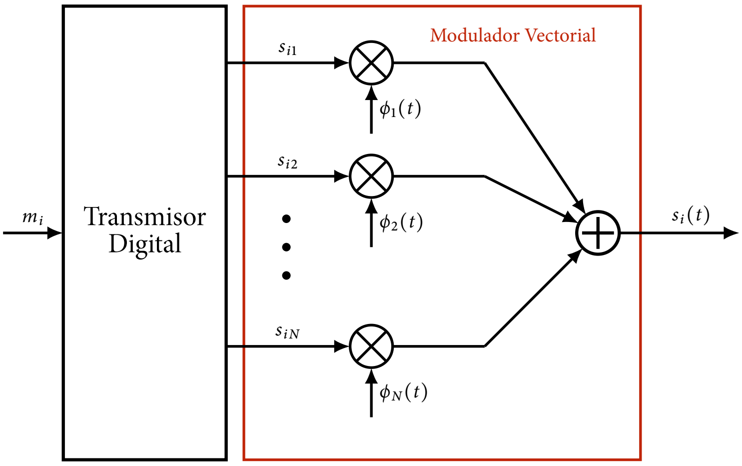
Modulador: transmisor digital

- Dado un símbolo generado por la fuente, el *transmisor digital* genera en su salida un vector de señal $\mathbf{s}_i$.



Modulador: modulador vectorial

- Dado un vector de señal en su entrada, el *modulador vectorial* genera en su salida la señal correspondiente. En resumen, la función del modulador vectorial se muestra en la siguiente figura:



7.2 Modulaciones Lineales. Constelaciones

Modulaciones Lineales

- Decimos que un modulador es lineal cuando la señal transmitida o su equivalente paso de baja dependen linealmente de una señal dada, sea esta dependencia real o compleja.

- Las modulaciones lineales más habituales se denominan PAM (ASK), PSK y QAM, junto con una gran variedad de modificaciones de las mismas.

7.2.1 Modulación PAM (ASK)

Modulador PAM (ASK)

- En una modulación PAM M-ario cada uno de los símbolos se transmite por una de las M señales $s_i(t)$ dadas por:
$$s_i(t) = s_i \phi(t), \quad i = 1, \ldots, M$$
siendo $s_i \in \mathbb{R}$ y $\phi(t)$ un pulso básico de energía unidad.

- En esta transmisión por *modulación por amplitud de pulso* (PAM), como su nombre indica, se realiza una asignación:
$$\text{secuencia de bit} \to \text{secuencia de símbolos} \to \text{niveles de amplitud}$$

- Hablaremos de una señal PAM en banda base, cuando lo sea el pulso $\phi(t)$ que en este caso expresamos en la forma:
$$\phi(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}},$$
$g(t)$ se denomina *pulso conformador, que siempre será una señal paso de baja* de energía finita E_g.

Ejercicio 7.2.1
¿Cuál es la duración de la señal $s_i(t)$?

Modulador PAM (ASK)

- Hablamos de una señal ASK cuando nos refiramos a una señal PAM paso de banda. En este caso, el pulso $\phi(t)$ vendrá dado por:
$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(\omega_c t).$$

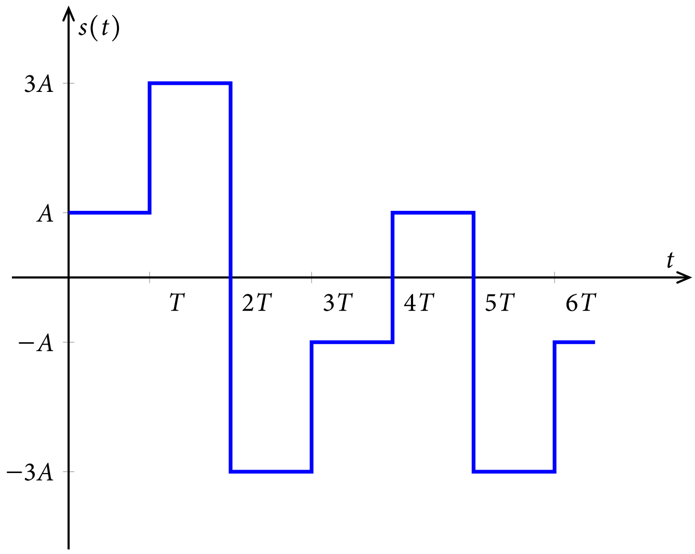
- Observemos que en los dos casos, paso de baja y paso de banda, la señal $\phi(t)$ tiene energía unidad.

- La energía de la señal transmitida vendrá dada por:
$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)\, \mathrm{d}t = s_i^2 \text{ J}.$$

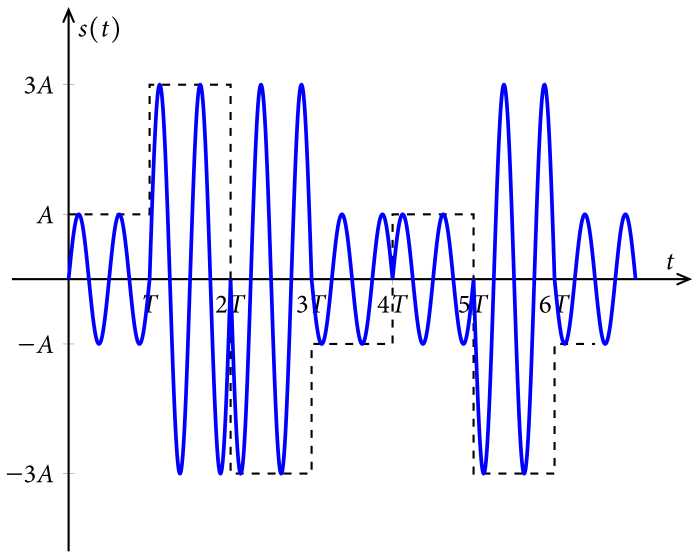
Ejercicio 7.2.2
Demostrar que $\phi(t)$ tiene energía unidad. En el caso ASK suponer que $\omega_c \gg T_g$, siendo T_g la duración del pulso $g(t)$¿Cuál es la duración de la señal $\phi(t)$?

Ejercicio 7.2.3
Si una señal PAM se escribe en la forma $s_i(t) = A_i g(t)$, ¿qué relación existe entre A_i y s_i?

Señal 4-PAM banda base

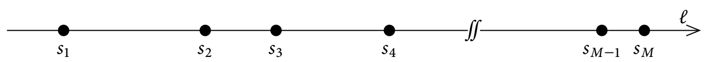


Señal 4-ASK (Paso de banda)



Modulación PAM (ASK). Constelación

- Atendiendo a la definición de la señal PAM, los coeficientes s_i determinan la constelación del conjunto de señales.

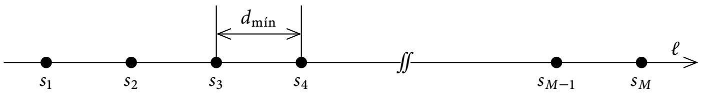


- Para que las M señales sean diferentes, la única condición es que los M coeficientes s_i lo sean.
- Un parámetro fundamental para conocer las prestaciones de cualquier sistema de comunicación es la *distancia mínima* entre los puntos de la constelación, $d_{\text{mín}}$.

- Es costumbre elegir los s_i igualmente espaciados, de manera que podemos escribir:

$$s_i = s_1 + d_{\text{mín}}(i-1), \quad i = 1, \ldots, M$$

- En la siguiente figura podemos observar la constelación de un sistema PAM en la que se muestra esta elección. Comparar con la constelación anterior.



Modulador PAM (ASK). Constelación

- Resulta conveniente relacionar la distancia mínima con la energía media de la constelación. Si tenemos en cuenta que cada señal transmitida tiene una energía dada por:

$$E_i = s_i^2,$$

es fácil probar que si suponemos todos los símbolos igualmente probables, la energía media transmitida viene dada por:

$$\begin{aligned} E_{\text{av}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[s_1 + d_{\text{mín}}(i-1)\right]^2 = \\ &= s_1^2 + s_1 d_{\text{mín}}(M-1) + \frac{d_{\text{mín}}^2(M-1)(2M-1)}{6}. \end{aligned}$$

- Podemos ver que la energía media depende tanto de s_1 cómo de la distancia mínima $d_{\text{mín}}$.

> **Ejercicio 7.2.4**
> Demostrar la ecuación anterior.

Modulador PAM (ASK)

- Al diseñar un sistema nos interesa que la energía media sea mínima, manteniéndose la distancia mínima entre los puntos de la constelación. Por ello será necesario elegir un valor de s_1 que minimice la energía media transmitida.

- Resolviendo la ecuación

$$\frac{\partial E_{\text{av}}}{\partial s_1} = 2s_1 + d_{\text{mín}}(M-1) = 0,$$

encontramos:

$$s_1 = -\frac{d_{\text{mín}}}{2}(M-1) \Rightarrow s_i = \frac{d_{\text{mín}}}{2}(2i - M - 1), \quad i = 1, \ldots, M,$$

$$E_{\text{av}} = \frac{d_{\text{mín}}^2\left(M^2-1\right)}{12}.$$

- Como se ha comentado, uno de los parámetros de diseño de nuestro sistema será la energía media transmitida por bit, E_{bav}. En este caso, la *distancia mínima* de la constelación $d_{\text{mín}}$ vendrá dada por:

$$d_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{12E_{\text{av}}}{M^2-1}} = \sqrt{\frac{12\log_2 M}{M^2-1}E_{\text{bav}}}.$$

Modulador PAM (ASK)

- En este caso, una señal PAM de energía promedio E_{bav} (mínima) se obtiene eligiendo los coeficientes s_i en la forma:

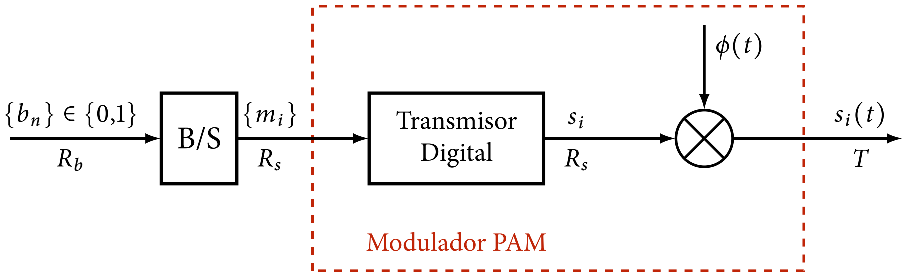
$$s_i = \sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}E_{\text{bav}}}\,(2i-M-1),\ i=1,\dots,M.$$

- Por lo tanto, diseñaremos cualquier sistema PAM, de energía promedio mínima, siendo E_{bav} la energía promedio transmitida por bit, mediante las señales $s_i(t)$ dadas por:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}E_{\text{bav}}}\,(2i-M-1)\phi(t),\ i=1,\dots,M.$$

- Un modulador PAM se muestra en la Figura.

Modulador PAM (ASK)

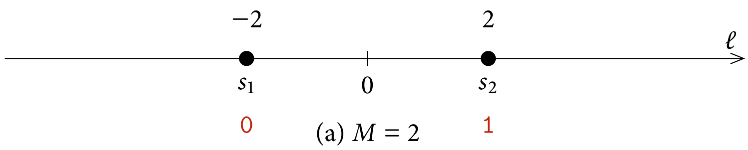


- En la siguiente transparencia mostramos diversas constelaciones M-PAM cuando la energía promedio transmitida es igual a 4 Julios.

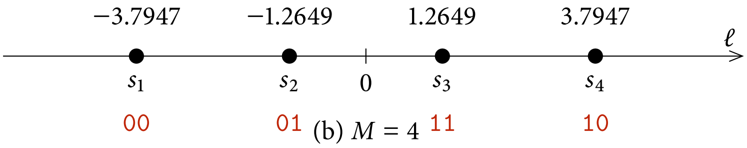
- Es importante resaltar que sin conocer cómo es la base de este transmisor *no es posible distinguir si nos encontramos con un sistema paso de baja o paso de banda.*

- En la figura también se ha realizado una asignación bit->símbolo determinada. Volveremos sobre ella.

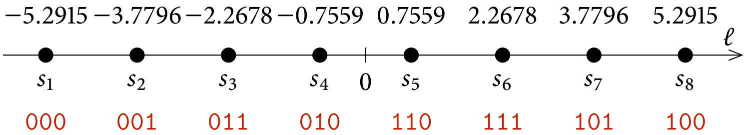
Constelaciones M-PAM con $E_{\text{bav}} = 4$ J



(a) $M = 2$



(b) $M = 4$



(c) $M = 8$

Modulación PAM (ASK)

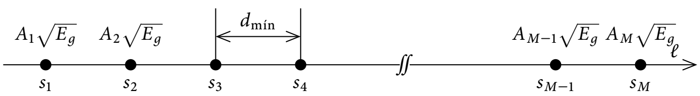
- En ocasiones se definen las señales PAM en la forma:

$$
\begin{aligned}
s_i(t) &= A_i g(t) && \text{Paso de baja} \\
s_i(t) &= A_i g(t)\cos(\omega_c t) && \text{Paso de banda (ASK)}
\end{aligned}
$$

- Siendo los coeficientes A_i números reales. Comparando con las ecuaciones anteriores,

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{s_i}{\sqrt{E_g}} \Rightarrow s_i = A_i\sqrt{E_g} && \text{Paso de baja} \\
A_i &= s_i\sqrt{\frac{2}{E_g}} \Rightarrow s_i = A_i\sqrt{\frac{E_g}{2}} && \text{Paso de banda (ASK)}
\end{aligned}
$$

- En la siguiente figura podemos observar la constelación de un sistema PAM paso de baja.



7.2.2 Modulación M-PSK

Modulación M-PSK

- Sea $g(t)$ un pulso conformador, real, *paso de baja* de energía finita. En un esquema de modulación de fase (M-PSK), las M señales *paso de banda* transmitidas vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
s_i(t) = g(t)\cos(\omega_c t + \theta_i) &= \\
&= g(t)\cos(\theta_i)\cos(\omega_c t) - g(t)\,\text{sen}(\theta_i)\,\text{sen}(\omega_c t) \\
&= \text{Re}\big[g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\big], \quad i = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

- Como siempre, la duración de la señal $s_i(t)$ viene determinada por la duración de $g(t)$.
- Se puede observar que la única diferencia entre las señales transmitidas se encuentra en la fase de las mismas, de manera que en un sistema M-PSK se realiza una asignación en la forma:

$$\text{secuencia de bit} \rightarrow \text{secuencia de símbolos} \rightarrow \text{fases}$$

- Una señal PSK se diferenciaría de cualquier otra simplemente con elegir las fases de las señales, θ_i, de manera distinta, siendo estas fases completamente arbitrarias. Sin embargo, por facilidad en la generación, es habitual elegir las fases de las señales de manera igualmente espaciadas,

$$\theta_i = \theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{M}, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{7.1}$$

Modulación M-PSK

- Eligiendo la *fase inicial* $\theta_0 = 0$, las señales PSK paso de banda pueden expresarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= g(t)\cos\left[\omega_c t + \frac{2\pi(i-1)}{M}\right] \\ &= g(t)\cos\left[\frac{2\pi(i-1)}{M}\right]\cos(\omega_c t) - g(t)\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi(i-1)}{M}\right]\mathrm{sen}(\omega_c t) \\ &= \mathrm{Re}\left[g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(i-1)}{M}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\right] = \mathrm{Re}\left[g_{\mathrm{LP}i}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\right], \quad i = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

- La función $g_{\mathrm{LP}i}(t)$ es el *equivalente paso de baja* de la señal MPSK. Observemos que $g_{\mathrm{LP}i}(t)$, puede ponerse en la forma:

$$g_{\mathrm{LP}i}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i} g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(i-1)}{M}} g(t) = A_i g(t),$$

Es decir, el equivalente paso de baja de una señal MPSK depende *linealmente* de un pulso conformador paso de baja $g(t)$; el coeficiente $A_i = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}$ es en este caso un número complejo de módulo unidad y por esta razón decimos que un modulación M-PSK es una modulación *lineal*.

Modulador M-PSK

- Si llamamos E_i a la energía de cada una de las M señales transmitidas, se tiene:

$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{E_g}{2} = E$$

dónde E_g es la energía del pulso conformador $g(t)$. Por lo tanto, todas las señales en este esquema de transmisión M-PSK tienen la misma energía E.

- La energía promedio transmitida por bit viene dada por:

$$E_{\mathrm{bav}} = \frac{E}{\log_2 M} = \frac{E_g}{2\log_2 M}$$

- Recordemos que las señales $g(t)\cos(\omega_c t)$ y $g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$ son ortogonales siempre que $g(t)$ sea una señal paso de baja y $\omega_c \gg 2\pi/T_g$, siendo T_g la duración del pulso $g(t)$.

Modulador M-PSK

- En este caso podemos definir la base del conjunto de señales en la forma:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g(t) \cos(\omega_c t)$$
$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{1}{E}} g(t) \sin(\omega_c t)$$

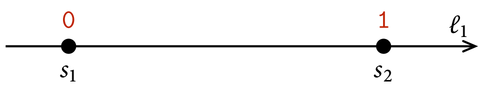
- Las señales transmitidas se pueden poner como:

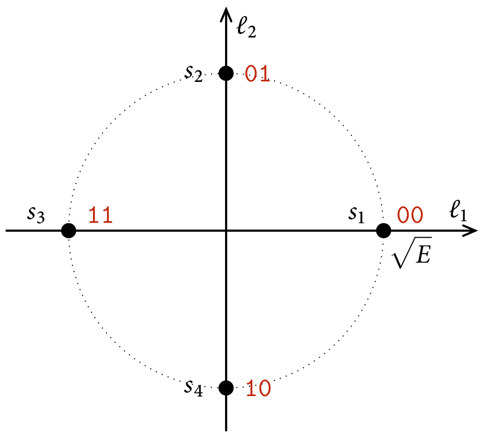
$$s_i(t) = \sqrt{E} \cos\left[\frac{2\pi(i-1)}{M}\right]\phi_1(t) + \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi(i-1)}{M}\right]\phi_2(t)$$

- Por lo tanto, un sistema PSK define un espacio de señal de dimensión $N = 2$ y el vector señal viene dado por:

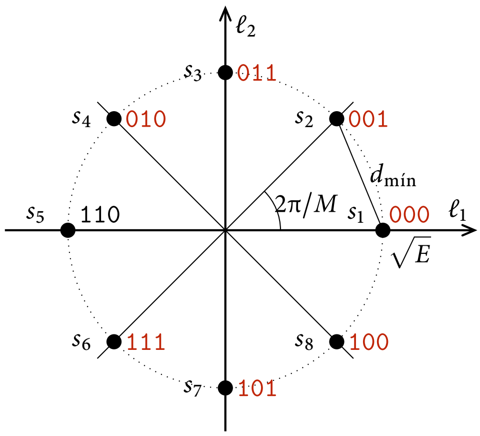
$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{E}\cos\frac{2\pi(i-1)}{M} \\ \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi(i-1)}{M} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, M$$

Modulador BPSK y Q-PSK





Modulador 8-PSK



Modulador M-PSK

- La distancia mínima en un transmisor M-PSK puede encontrarse fácilmente utilizando la última figura, si consideramos que el triángulo formado por $s_1 - 0 - s_2$ es un triángulo isósceles:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{M} = \frac{d_{\text{mín}}/2}{\sqrt{E}} \Rightarrow d_{\text{mín}} = 2\sqrt{E}\operatorname{sen}\frac{\pi}{M}$$

- Expresando este valor en función de la energía por bit transmitida,

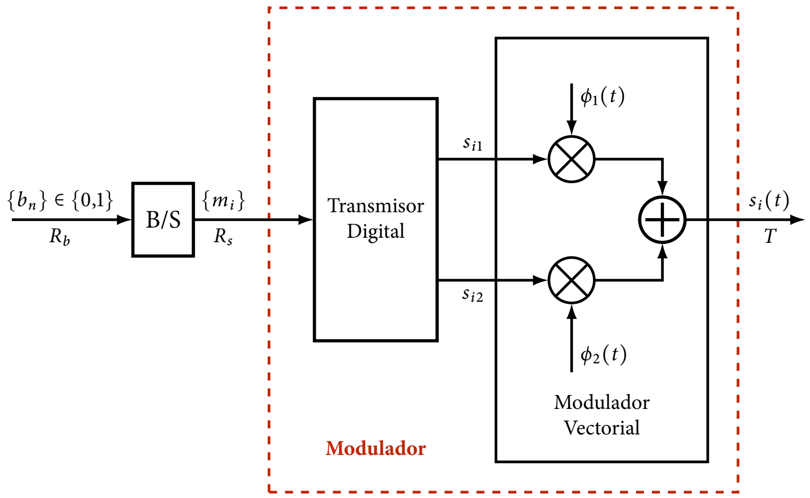
$$d_{\text{mín}} = 2\sqrt{E_\text{b}\log_2 M}\operatorname{sen}\frac{\pi}{M}$$

- Para grandes valores de M, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{M} \approx \frac{\pi}{M}$ y en este caso,

$$d_{\text{mín}} \approx 2\sqrt{\frac{\pi^2 \log_2 M}{M^2} E_\text{b}}$$

Modulador M-PSK

- En la siguiente figura representamos un transmisor PSK.



Modulador M-PSK

- De manera alternativa podemos definir un conjunto de coeficientes complejos A'_i en la forma:

$$A'_i = \sqrt{2}(s_{i1} + \mathrm{j}s_{i2}) = \sqrt{E_g}\cos\frac{2\pi(i-1)}{M} + \mathrm{j}\sqrt{E_g}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi(i-1)}{M} = \sqrt{E_g}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(i-1)}{M}}$$

- Observemos que los coeficientes tienen el mismo módulo, la raíz cuadrada de la energía del pulso conformador.

- Podemos definir una señal compleja de energía unidad en la forma:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(t) - \mathrm{j}\phi_2(t)] = \sqrt{\frac{1}{E_g}}g(t)\cos(\omega_c t) + \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{E_g}}g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t) = \sqrt{\frac{1}{E_g}}g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}$$

- En este caso, las M señales transmitidas pueden expresarse como:

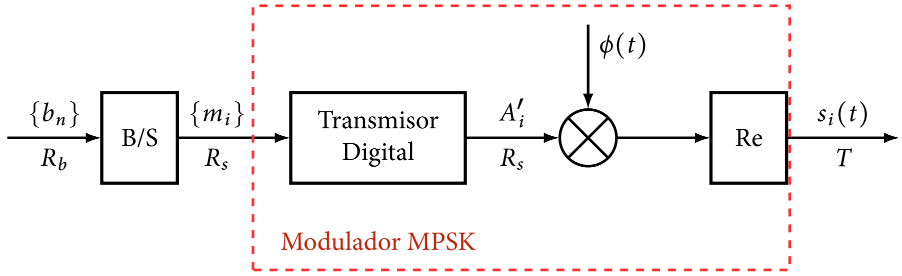
$$s_i(t) = \mathrm{Re}[A'_i\phi(t)] = \mathrm{Re}\left[A'_i\sqrt{\frac{1}{E_g}}g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\right] = \mathrm{Re}\left[A_i g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\right],$$

  con

$$A_i = A'_i\sqrt{\frac{1}{E_g}} = \sqrt{\frac{2}{E_g}}(s_{i1} + \mathrm{j}s_{i2}) \Rightarrow s_{i1} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\,\mathrm{Re}[A_i], s_{i2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\,\mathrm{Im}[A_i]$$

- En la siguiente figura se muestra un modelo teórico de este transmisor M-PSK.

Modulador M-PSK



Modulador M-PSK

Ejemplo 7.2.1 Una fuente de datos genera dígitos binarios igualmente probables con una tasa $R_b = 10^6$ bps y el sistema de comunicación paso de banda M-ario diseñado utiliza para su transmisión una de las cuatro señales siguientes:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_c t + \theta_i) \quad 0 \le t \le T, \quad i = 1,2,3,4.$$

La fase θ_i toma, con igual probabilidad los valores $\{\theta, \theta+\pi/2, \theta+\pi, \theta+3\pi/2\}$, $0 < \theta < \pi/4$ y la frecuencia portadora verifica $\omega_c \gg 2\pi/T$.

1. ¿De qué tipo de modulación se trata?
2. Determinar el pulso conformador utilizado en la modulación. ¿Cuál es la duración de este pulso?
3. Encontrar en función de E la energía media transmitida por bit.
4. Encontrar una expresión para el equivalente paso de baja de la señal transmitida y determinar los símbolos transmitidos por el equivalente paso de baja.
5. Determinar una base ortonormal del sistema generado por las señales transmitidas.
6. Representar la constelación del sistema.

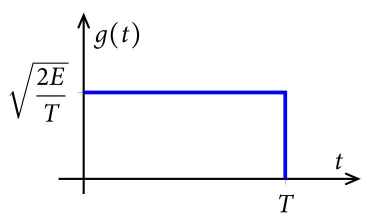
Solución:

Modulador M-PSK

1. Podemos ver que las señales transmitidas se distinguen únicamente en la fase de una señal portadora $\cos(\omega_c t)$. Concluimos que se trata de un esquema de modulación M-PSK.
2. Si comparamos la expresión de $s_i(t)$ con una señal genérica M-PSK vemos que el pulso conformador $g(t)$ viene dado por:

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} & 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{En caso contrario,} \end{cases}$$

que se muestra en la siguiente figura.



Es decir, un pulso rectangular de duración T y, como se ve fácilmente, energía $E_g = 2E$ Julios.

Modulador M-PSK

3. Las señales son reales por lo que la energía de las mismas vendrá dada por:

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2E}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_c t + \phi_i)\,\mathrm{d}t = \frac{E}{T}\int_0^T \mathrm{d}t + \frac{E}{T}\int_0^T \cos(2\omega_c t)\,\mathrm{d}t = E \text{ J}.$$

En este caso la energía por bit transmitida será:

$$E_\mathrm{b} = \frac{E}{\log_2 M} = \frac{E}{2} \text{ J}.$$

4. Las señales transmitidas pueden expresarse como:

$$g(t) = \mathrm{Re}\big[g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\big] = \mathrm{Re}\big[g_{\mathrm{LP}i}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\big], \quad i = 1,\dots,4.$$

El equivalente paso de baja de la señal transmitida puede ponerse en la forma:

$$g_{\mathrm{LP}i}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i} g(t) = A_i g(t)$$

Es decir, se modifica linealmente un pulso conformador, aunque en este caso, el coeficiente A_i es un número complejo de módulo unidad.

Modulador M-PSK

5. Desarrollando la expresión de las señales transmitidas, tendremos:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\theta_i\cos(\omega_c t) - \sqrt{\frac{2E}{T}}\,\mathrm{sen}\,\theta_i\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

Por inspección, las funciones base vienen dadas por:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega_c t), 0 \le t \le T \qquad \phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}(\omega_c t), 0 \le t \le T.$$

En este caso, podemos expresar $s_i(t)$ en la forma:

$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t), \qquad \text{con } s_{i1} = \sqrt{E}\cos\theta_i, s_{i2} = \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\theta_i.$$

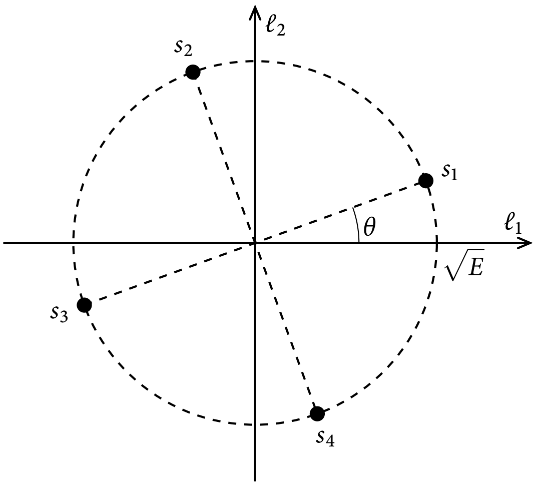
Si tenemos en cuenta que $E_g = 2E$, se tiene:

$$s_{i1} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\mathrm{Re}[A_i] = \sqrt{E}\,\mathrm{Re}[A_i], \qquad s_{i2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\mathrm{Im}[A_i] = \sqrt{E}\,\mathrm{Im}[A_i],$$

de acuerdo con la teoría.

Modulador M-PSK

6. En este caso la constelación de las señales transmitidas se muestra en la siguiente figura.



7.2.3 Modulador M-QAM

Modulador M-QAM

- Es una generalización de los dos esquemas anteriores en el que se modifica la amplitud y la fase de una señal sinusoidal.
- Sea $g(t)$ un pulso conformador *paso de baja* de energía E_g. En un esquema de modulación QAM *paso de banda* las M señales transmitidas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= R_i g(t)\cos(\omega_c t + \theta_i) = \\ &= R_i g(t)\cos(\theta_i)\cos(\omega_c t) - R_i g(t)\operatorname{sen}(\theta_i)\operatorname{sen}(\omega_c t) \\ &= \operatorname{Re}\left[R_i e^{j\theta_i} g(t) e^{j\omega_c t}\right] = \operatorname{Re}\left[A_i g(t) e^{j\omega_c t}\right], \quad i = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

- Puede observarse que la diferencia entre las señales transmitidas se encuentra en el módulo y la fase de un número complejo, de forma que en un esquema de modulación QAM se realiza una asignación en la forma:

  secuencia de bit → secuencia de símbolos → módulos y fases

  O lo que es lo mismo, a cada señal transmitida se le asocia un número complejo diferente.
- Cualquier combinación de M coeficientes complejos permitiría diseñar un transmisor M-QAM.

Modulador M-QAM

- La energía de cada señal transmitida viene dada por:

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,\mathrm{d}t = R_i^2 \frac{E_g}{2}, \quad i = 1, \ldots, M$$

- Si se supone que todos los símbolos son igualmente probables, la energía media por bit transmitida vendría dada por:

$$E_{\mathrm{bav}} = \frac{E_{\mathrm{av}}}{\log_2 M} = \frac{1}{M\log_2 M}\sum_{i=1}^{M} E_i,$$

  que dependerá del conjunto particular de señales elegidas.

- Por inspección, una base del espacio de señal será:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t)\cos(\omega_c t), \quad 0 \le t \le T$$
$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t), \quad 0 \le t \le T$$

Modulador M-QAM

- En este caso podremos escribir:

$$s_i(t) = R_i\sqrt{\frac{E_g}{2}}\cos(\theta_i)\phi_1(t) + R_i\sqrt{\frac{E_g}{2}}\,\mathrm{sen}(\theta_i)\phi_2(t) = \mathrm{Re}[A_i'\phi(t)],$$

con

$$A_i = A_{iI} + \mathrm{j}A_{iQ} = R_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}, \quad i = 1,\dots,M,$$
$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(t) - \mathrm{j}\phi_2(t)] = \sqrt{\frac{1}{E_g}} g(t)\cos(\omega_c t) + \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{E_g}} g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t) =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{E_g}} g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}.$$

- A la vista de las ecuaciones anteriores, es posible encuadrar una modulación QAM dentro de las modulaciones lineales.

Modulación QAM. Espacio de señal

- Las señales y los vectores señal vendrán dados por:

$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t) \quad i = 1,\dots,M$$

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i\sqrt{\frac{E_g}{2}}\cos(\theta_i) \\ R_i\sqrt{\frac{E_g}{2}}\,\mathrm{sen}(\theta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E_g}{2}}A_{iI} \\ \sqrt{\frac{E_g}{2}}A_{iQ} \end{bmatrix}, \quad i = 1,\dots,M$$

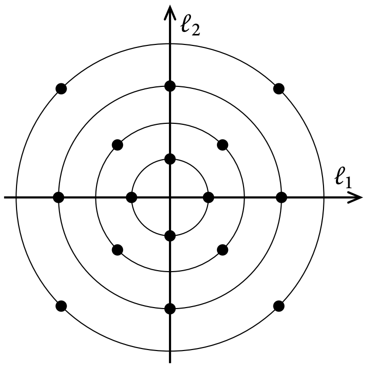
con E_g la energía del pulso conformador $g(t)$.

- La distancia entre cualquier par de señales vendrá dada por:

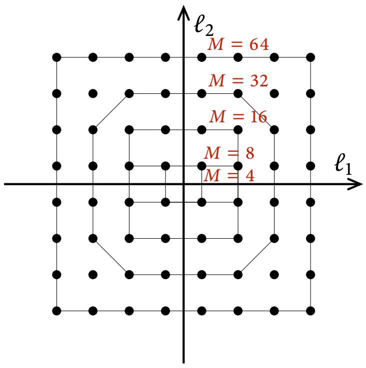
$$d_{mn} = \sqrt{|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n|^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{E_g}{2}\left[(A_{mI} - A_{nI})^2 - (A_{mQ} - A_{nQ})^2\right]}$$

Modulación QAM

- Recordemos que una modulación QAM es una generalización de los dos esquemas anteriores en el que se modifica la amplitud y la fase de una señal sinusoidal. En la siguiente figura se representan dos ejemplos de la misma.

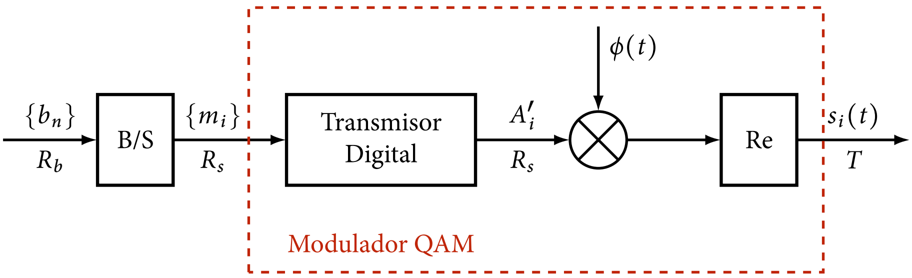


$M = 16$



Modulación QAM. Modelo teórico

- El modelo teórico de un transmisor M-QAM puede representarse de manera idéntica al mostrado para el transmisor M-PSK:



Modulación QAM. Constelaciones rectangulares

- Existen una gran cantidad de constelaciones QAM diferentes.

- Las más populares, por su sencillez, son las QAM rectangulares, que pueden considerarse dos modulaciones PAM en cuadratura:

$$s_i(t) = A_{mI}g(t)\cos(\omega_c t) - A_{nQ}g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t), i = 1, \cdots, M$$

- En estas dos constelaciones se eligen los valores de a_{mI} y a_{nQ} en la forma:

$$\begin{aligned} A_{mI} &= A(2m-1-M_1), \quad m = 1,\cdots,M_1 \\ A_{nQ} &= A(2n-1-M_2), \quad n = 1,\cdots,M_2 \end{aligned}$$

con $M = M_1 \times M_2$.

- La distancia mínima de la constelación sería en este caso:

$$d_{\text{mín}} = d = \sqrt{\frac{E_g}{2}(2A)^2} = A\sqrt{2E_g}$$

Modulación QAM. Constelaciones rectangulares

- La energía promedio de la constelación vendría dada por:

$$\begin{aligned} E_{\text{av}} &= \frac{E_g}{2}\frac{A^2}{M}\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{M_2}\left[(2m-1-M_1)^2 + (2n-1-M_2)^2\right] = \\ &= \frac{E_g A^2 (M_1^2 + M_2^2 - 2)}{6} \end{aligned}$$

- En este caso, la distancia mínima de la constelación podemos expresarla en la forma:

$$d_{\text{mín}} = d = \sqrt{\frac{12E_{\text{av}}}{M_1^2 + M_2^2 - 2}} = \sqrt{\frac{12\log_2 M}{M_1^2 + M_2^2 - 2}E_{\text{bav}}}$$

Ejemplo de modulación lineal

Ejemplo 7.2.2 Una fuente de datos genera dígitos binarios igualmente probables cada $T_b = 10^{-6}$ s. A la salida del modulador las señales pueden expresarse en la forma:

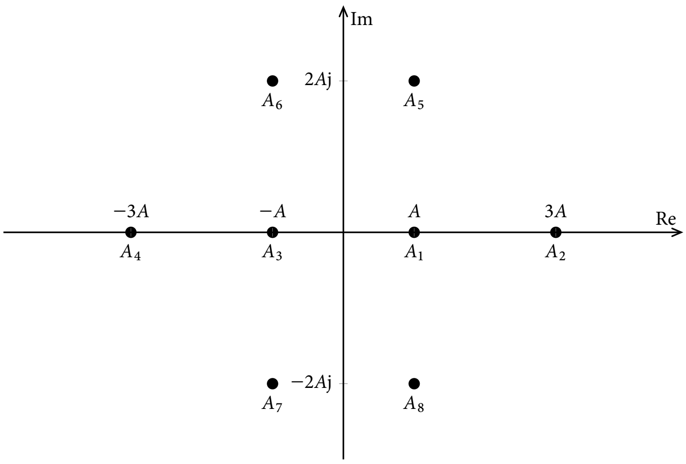
$$s_i(t) = \text{Re}\left[A_i g(t) e^{j\omega_c t}\right],$$

siendo $g(t)$ un pulso conformador paso de baja de energía E_g. Los coeficientes A_i son los números complejos representados en la figura.

1. Definir qué tipo de modulación es la definida en el ejemplo.
2. Determinar la tasa de símbolos del sistema.
3. Determinar una base ortonormal del sistema generado por las señales transmitidas.
4. Encontrar en función de A la energía media transmitida por bit.
5. Representar la constelación del sistema. ¿Cuál es la distancia mínima de la constelación?

Ejemplo de modulación lineal

Cont.



Ejemplo de modulación lineal

Solución:

1. Los coeficientes A_i tienen módulos y fase arbitrariamente definidas, por lo que la modulación del ejemplo puede clasificarse como una modulación M-QAM. Puesto que existe un total de 8 coeficientes complejos diferentes tenemos en definitiva un sistema M-QAM, con $M = 8$.

2. Si llamamos T al intervalo de señalización, se tiene:

$$T = T_b \log_2 M = 3T_b \Rightarrow R_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{3T_b} = \frac{10^{-6}}{3} \text{ baudios.}$$

3. Las señales transmitidas pueden expresarse en la forma

$$s_i(t) = R_i g(t) \cos\theta_i \cos(\omega_c t) - R_i g(t) \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}(\omega_c t).$$

   Por inspección, una base para este sistema de señales viene dada por:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(\omega_c t), \quad \phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \operatorname{sen}(\omega_c t).$$

Ejemplo de modulación lineal

Por lo tanto, las señales transmitidas pueden escribirse en función de esta base en la forma:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{E_g}{2}} R_i \cos\theta_i \phi_1(t) + \sqrt{\frac{E_g}{2}} R_i \operatorname{sen}\theta_i \phi_2(t).$$

Podemos definir los vectores de señal en $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E_g}{2}} R_i \cos\theta_i \\ \sqrt{\frac{E_g}{2}} R_i \operatorname{sen}\theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E_g}{2}} A_{iI} \\ \sqrt{\frac{E_g}{2}} A_{iQ} \end{bmatrix}$$

4. Para encontrar la energía de las señales transmitidas, podemos utilizar o bien la expresión de las señales encontradas o bien los vectores de señal. En cualquier caso,

$$E_i = |\mathbf{s}_1|^2 = \frac{E_g R_i^2}{2}.$$

Ejemplo de modulación lineal

La energía media transmitida será:

$$E_{\text{av}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E_i = \frac{E_g}{16}\sum_{i=1}^{8} R_i^2 = \frac{5A^2E_g}{2} \Rightarrow E_{\text{bav}} = \frac{5E_gA^2}{6} \text{ J.}$$

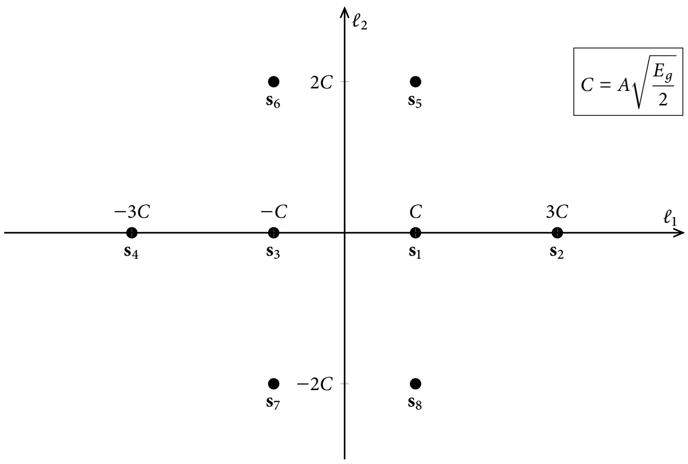
5. La constelación del sistema de señales se obtiene representando los vectores $\mathbf{s}_i$, tal como se muestra en la siguiente figura, con $C = A\sqrt{E_g/2}$.

   Es importante que se observe la diferencia entre la constelación de las señales y los coeficientes que definen esas mismas señales. Mientras que la constelación es una representación en el espacio $\mathbb{R}^2$ de los vectores de señal asociados a cada una de las señales transmitidas, ls coeficientes son, en este caso, números complejos, que permiten definir esas mismas señales.

   La distancia mínima de la constelación será:

$$d_{\text{mín}} = 2C = A\sqrt{2E_g}$$

Ejemplo de modulación lineal



7.2.4 Resumen sobre las modulaciones lineales

Resumen sobre las modulaciones lineales

- La característica fundamental de las diferentes modulaciones *lineales* que hemos estudiado radica en que cada una de las señales transmitidas en cada intervalo de señalización pueden expresarse (si consideramos únicamente señales paso de banda) en la forma:

$$s_i(t) = \text{Re}\big[g_{\text{LP}i}(t)e^{j\omega_c t}\big] = \text{Re}\big[A_i g(t)e^{j\omega_c t}\big] = \text{Re}\big[R_i e^{j\theta_i} g(t)e^{j\omega_c t}\big], \quad i = 1,\ldots,M,$$

  con $g(t)$ un *pulso conformador paso de baja* de energía finita.

- Dependiendo de los valores de A_i, es decir, de los valores de R_i y θ_i, nos encontraríamos en uno u otro esquema de modulación:

$$\text{ASK (PAM)} : \theta_i = 0$$
$$\text{PSK} : R_i = \text{cte.}$$
$$\text{QAM} : R_i \text{ y } \theta_i \text{ arbitrarios.}$$

- De esta manera, podemos decir que el equivalente paso de baja de la señal de información transmitida por un modulador lineal puede expresarse en la forma:

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n g(t - nT).$$

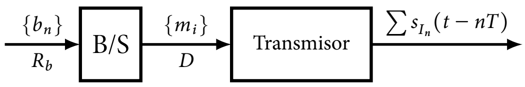
El valor del coeficiente A_n dependerá únicamente del símbolo que se desee transmitir en el intervalo $nT \leq t < (n+1)T$ y será un número real, en el caso de una modulación ASK (PAM), y complejo en los otros dos casos.

7.3 Modulaciones No Lineales

7.3.1 Modulaciones Ortogonales

Señales no linealmente moduladas

- Sea el modelo general de un transmisor:



- Para el sistema anterior:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{I_n}(t - nT)$$

- Diremos que la señal está *no linealmente modulada* si se cumple que las M señales $s_{I_n}(t)$, con $I_n \in \{1,\ldots,M\}$ son diferentes y no pueden relacionarse, en general, ni ellas ni sus equivalentes paso de baja, con una señal dada de manera lineal.

- Evidentemente, estamos en una modulación M-aria en la que $M = 2^k$, $T = kT_b$, cada T segundos se transmite un símbolo.

- Las M señales $s_{I_n}(t)$ pueden ser paso de banda o paso de baja. Su única característica es que sean señales de energía.

- Podemos ver que, en realidad, este tipo de señales engloba a las modulaciones lineales como un caso particular.

Modulación ortogonal

- En una modulación ortogonal todas las señales $s_i(t)$ tienen la misma energía E y son ortogonales entre sí. Sus vectores de señal vendrán dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_1 &= \begin{bmatrix}\sqrt{E} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\
&\vdots \\
\mathbf{s}_M &= \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \sqrt{E}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

La distancia euclidiana entre cualquier par de señales vendrá dada por:

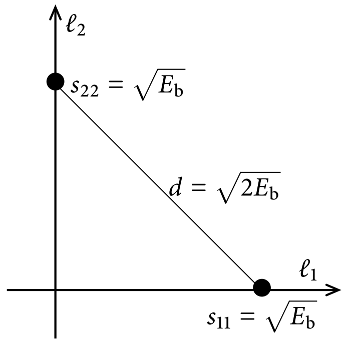
$$d_{ij} = \sqrt{2E} = d_{\text{mín}}.$$

- En el caso binario por ejemplo,

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{bmatrix}, \quad d_{\text{mín}} = d = \sqrt{2E_\text{b}}.$$

Modulación ortogonal binaria

- La constelación se muestra en la Figura



7.3.2 Modulación biortogonal

Modulación biortogonal

- Un conjunto de M señales biortogonales se construyen partiendo de un conjunto de $\frac{1}{2}M$ señales ortogonales incluyendo las opuestas de las mismas.

- Los vectores señal serían ($N = M/2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= -\mathbf{s}_{N+1} &= \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\ \vdots \quad & \quad \vdots & \vdots \quad \\ \mathbf{s}_N &= -\mathbf{s}_{2N} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \sqrt{E} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \end{aligned}$$

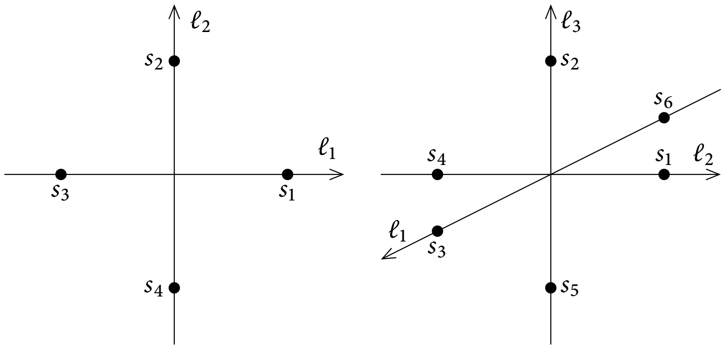
- El coeficiente de correlación vale 0 ó 1. Las distancias son $d = 2\sqrt{E}$ ó $d = \sqrt{2E} = d_{\text{mín}}$.

- Para los casos $M = 4$ y $M = 6$ las constelaciones se representan en la siguiente figura.

- Puede demostrarse que la probabilidad de una decisión correcta viene dada por:

$$P_C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2E/N_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(v+\sqrt{2E/N_0})}^{v+\sqrt{2E/N_0}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \right)^{M/2-1} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v$$

Ejemplos de constelaciones biortogonales



7.3.3 Modulación MFSK

Modulación por desplazamiento de frecuencia (MFSK)

- Sea $g(t)$ un pulso conformador de energía finita E_g paso de baja. En una modulación MFSK cada T segundos se transmite la señal $s_i(t)$ dada por:

$$s_i(t) = g(t)\cos(\omega_i t) \quad i = 1, \ldots, M$$

- Es habitual elegir las frecuencias igualmente espaciadas en la forma:

$$\omega_i = \omega_c + i\Delta\omega, \quad i = 1, \ldots, M$$

- La señal transmitida es:

$$s_i(t) = \mathrm{Re}\left[g_{l_i}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\right] = g(t)\cos[\omega_c t + i\Delta\omega t] \quad i = 1, \ldots, M$$

- El equivalente paso de baja se define cómo:

$$g_{l_i}(t) = g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}i\Delta\omega t} \quad i = 1, \ldots, M.$$

- Un caso particular ampliamente utilizado lo encontramos con cuando $g(t)$ se elige como un pulso rectangular de duración T y energía $2E$. Esto es,

$$g(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}, \quad 0 \le t \le T.$$

Modulación por desplazamiento de frecuencia (MFSK)

- Todas las señales tienen la misma energía:

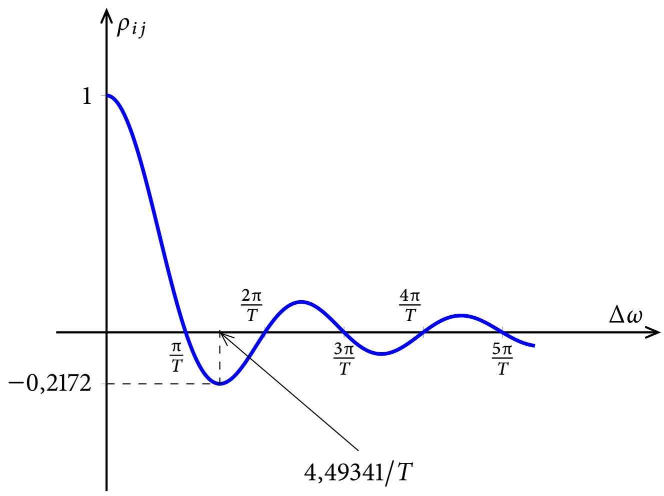
$$\begin{aligned} E_i &= \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\cos^2[(\omega_c + i\Delta\omega)t]\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{E_g}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \cos[2\omega_c t + 2i\Delta\omega t]\,\mathrm{d}t = E \end{aligned}$$

- El coeficiente de correlación entre cada señal, en el caso particular de pulsos rectangulares, viene dado por:

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \frac{1}{E}\int_0^T s_i(t)s_j(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos[(\omega_c + i\Delta\omega)t]\cos[(\omega_c + j\Delta\omega)t]\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos[2\omega_c t + (i-j)\Delta\omega t]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \cos[(i-j)\Delta\omega\, t]\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\mathrm{sen}[\Delta\omega(i-j)T]}{\Delta\omega(i-j)T}\end{aligned}$$

- Lo representamos en la siguiente Figura.

Modulación por desplazamiento de frecuencia (MFSK)



Modulación por desplazamiento de frecuencia (MFSK)

- Con $\rho_{ij} = 0$ un esquema MFSK es un caso particular de una modulación ortogonal.
- La mínima separación entre frecuencias que garantiza la ortogonalidad de una modulación MFSK viene dada en el caso particular de pulsos rectangulares, por:

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{T}.$$

- En general, para garantizar la ortogonalidad de las señales en una modulación MFSK, debería cumplirse que $\rho_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, lo que significa que atendiendo al carácter paso de baja de $g(t)$ es fácil demostrar que debe cumplirse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\cos[(i-j)\Delta\omega\, t]\,\mathrm{d}t = 0.$$

7.4 Distancia mínima y orden de la constelación

Distancia mínima y orden de la constelación

- En los apartados anteriores hemos encontrado las distancias mínimas de las diferentes constelaciones, lineales y no lineales, que hemos estudiado. En la siguiente tabla se recogen estos valores.

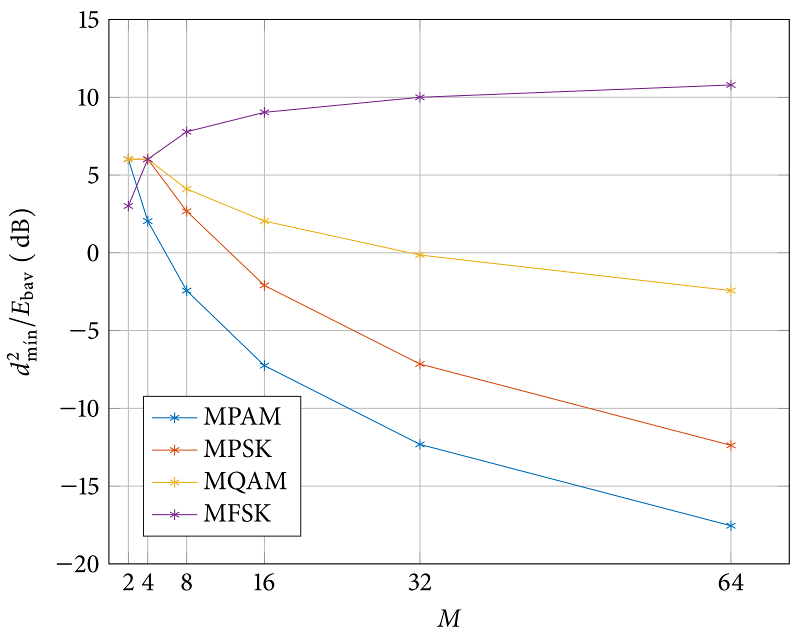
Modulación	$\frac{d_{\text{mín}}^2}{E_{\text{bav}}}$
MPAM	$\frac{12 \log_2 M}{M^2 - 1}$
MPSK	$\frac{4\pi^2 \log_2 M}{M^2}$
MQAM $\left(\sqrt{M} \times \sqrt{M}\right)$	$\frac{6 \log_2 M}{M - 1}$
MFSK	$2 \log_2 M$

- Es importante resaltar el diferente comportamiento de esta distancia mínima frente a M. Así, podemos observar:

  1. En las modulaciones lineales, $d_{\text{mín}}$ disminuye cuando M aumenta; esto es, $d_{\text{mín}}$ es una función decreciente respecto a M.

  2. En las modulaciones no lineales, $d_{\text{mín}}$ aumenta cuando M aumenta; esto es, $d_{\text{mín}}$ es una función creciente respecto a M.

Distancia mínima y orden de la constelación



Distancia mínima y orden de la constelación

- Si específicamente comparamos las señales MPSK y MQAM, podemos definir un coeficiente R_M en la forma:

$$R_M = \frac{d_{\text{mín}}^{\text{MQAM}}}{d_{\text{mín}}^{\text{MPSK}}} = \frac{3M^2}{2\pi^2(M-1)} \, .$$

- Como puede observarse en la siguiente tabla, para $M > 4$ R_M siempre es mayor que 1, lo que nos indica que será preferible una modulación MQAM frente a una modulación MPSK.

M	$10\log_{10} R_M$
8	1,42
16	4,13
32	7,00
64	9,95

Sumario

Sumario

- Hemos estudiado los diferentes esquemas de modulación, clasificándolos en modulaciones lineales y no lineales. En el caso de estas últimas, nos hemos centrado en las modulaciones ortogonales. En el caso de las modulaciones lineales, hemos presentados las señales PAM, PSK y QAM.
- Con las herramientas de la lección anterior, hemos representado las constelaciones para diversos sistemas de modulación.
- Hemos observado como la distancia mínima de las constelaciones presenta un comportamiento completamente diferente en el caso de constelaciones lineales y no lineales.
- En las modulaciones lineales, $d_{\text{mín}}$ disminuye cuando M aumenta; esto es, $d_{\text{mín}}$ es una función decreciente respecto a M.
- En las modulaciones no lineales, $d_{\text{mín}}$ aumenta cuando M aumenta; esto es, $d_{\text{mín}}$ es una función creciente respecto a M.
- En lecciones posteriores tendremos ocasión de comprobar que este efecto positivo de incremento de la distancia mínima cuando el índice de la modulación aumenta, se contrapone al aumento del ancho de banda ocupado cuando M aumenta.